TASNÁDI ATTILA

ADAGOLÁSI SZABÁLYOK ÉS BERTRAND-EDGEWORTH OLIGOPÓLIUMOK

Matematika tanszék

Témavezető:

Dancs István, BKE MSZI Matematika tsz.

BUDAPESTI KÖZGAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM

Közgazdaságtani Ph.D. program

ADAGOLÁSI SZABÁLYOK ÉS BERTRAND-EDGEWORTH OLIGOPÓLIUMOK

Ph.D. értekezés

Tasnádi Attila

Budapest, 1999

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Az értekezésemben vizsgált problémával egy általam 1989-ben írt — a Mikroökonómia tárgy tanulmányozása által inspirált — gazdasági szimulációs program kapcsán szembesültem. Természetesnek tűnt egy olyan modell megfogalmazása, amelyben mind a termék ára mind a kínált mennyiség döntési változók. Az ilyen típusú modellek az irodalomban Bertrand-Edgeworth oligopóliumok néven ismertek.

A Bertrand-Edgeworth oligopólium döntési változói tekintetében mind a Cournot, mind a Bertrand modell egyfajta kiterjesztésének tekinthető, ugyanis Cournot modelljében csak a vállalatok kínált mennyisége, míg Bertrand modelljében csak az ár a döntési változó. Cournot modelljének alapvető hiányossága, hogy nem ad magyarázatot a piaci egyensúlyi ár kialakulásának mechanizmusára. Ezért a Cournot modellnél gyakran egy fiktív árverezőről szoktak beszélni, aki a megtermelt mennyiségek és a piaci keresleti görbe ismeretében kikiáltja az egyensúlyi árat. Cournot-val ellentétben Bertrand szerint egy oligopol modellben inkább a termék árát célszerű döntési változónak tekinteni. Bertrand modelljében a legalacsonyabb áron kínáló oligopolisták szolgálják ki a fogyasztókat. Bár Bertrand modellje sok szempontból, legalábbis rövid távon, realisztikusabb, egyensúlyi viselkedése ellentmond a gyakorlatnak. Ugyanis például állandó és azonos átlagköltségeket feltételezve Nash egyensúlyban mindkét vállalat ára megegyezik az átlagköltséggel. Így már két termelő esetén sem realizálnak profitot a vállalatok, vagyis a piac a fogyasztók szemszögéből úgy viselkedik mint a kompetitív piac. Edgeworth szerint a legalacsonyabb áron kínáló vállalat nem mindig képes illetve érdekelt a kereslet maradéktalan kielégítésére. Edgeworth Bertrand modelljét kapacitáskorlátokkal bővítette és többek között belátta, hogy a kapacitáskorlátos modellben a Bertrand megoldás nem egyensúlyi.

Edgeworth kritikája vezetett a Bertrand-Edgeworth oligopóliumok kialakulásához. Mivel a Bertrand-Edgeworth modellekben mind a termék ára, mind a kínált mennyiség döntési változók, ezért felvetődik a profitfüggvények megadásának problémája. A vállalatok ár- és mennyiségi döntéseinek ismeretében meg kell tudnunk mondani a vállalatok által értékesíthető mennyiségeket. Az értékesíthető mennyiségek megadásához azonban a piaci keresleti görbe ismerete önmagában nem elégséges, ugyanis a keresleti görbe mindig csak egy adott ár esetén adja meg a keresett mennyiséget. A legalacsonyabb áron kínáló vállalat nyilván az összkereslettel szembesül. Ha a legalacsonyabb áron kínáló vállalat nem elégíti ki az összkeresletet, akkor meg kell határoznunk a nála magasabb áron kínáló vállalatok számára megmaradó reziduális keresletet.

A szimulációs programban egy oligopolista által értékesíthető mennyiség megegyezett az általa megállapított kínálati áron felmerülő piaci kereslet és a nála alacsonyabb áron kínáló oligopolisták össztermelésének különbségével. Bár ez az eljárás számomra kézenfekvőnek tűnt, alkalmazásakor mindig hiányérzetem volt. A Csekő Imre által vezetett kutatószemináriumon tartott előadásom témájául e kérdés megvizsgálását választottam. Akkori számításaim, amelyek eredményeként a 4.4.4 és a 4.4.5 szakaszban található levezetések születtek, meglepetésemre nem a programban alkalmazott eljáráshoz vezettek. Tirole [1988] könyvének tanulmányozása során derült fény számomra, hogy a szimulációs programomban alkalmazott eljárás az irodalomban hatékony adagolási szabály és a 4.4.5 szakaszban megkapott eljárás arányos adagolási szabály neveken ismeretes.

Az irodalom megítélésem szerint nem foglalkozik kellő alapossággal az adagolási szabályok elemzésével. Ez késztetett a kérdéskör részletes tanulmányozására. Az adagolási szabályok vizsgálata azért is fontos, mivel a Bertrand-Edgeworth oligopóliumok elemzése során szokásos egy adagolási szabály feltételezése. Ezért indokolt megvizsgálni, hogy milyen piaci helyzetekben alakulnak az oligopolisták által értékesíthető termékmennyiségek egy adagolási szabály szerint.

Felvetődik a Bertrand-Edgeworth típusú oligopóliumok egyensúlyi viselkedésének kérdése is, ami kutatásaim egy másik területévé vált. A Bertrand-Edgeworth modell vizsgálata bonyolultabb feladat a Cournot, illetve a Bertrand modellénál, ugyanis már elég erős feltevések esetén sem találunk Nash egyensúlyi megoldást tiszta stratégiákban, sőt a kevert megoldás létezése is külön megfontolás tárgya.

1.1 Az értekezés felépítése

A 2. fejezetben ismertetem a játékelmélet azon fogalmait és tételeit, amelyeket a tárgyalás során használni fogok. A 2. fejezetben így megtalálható a stratégiai játék, a stratégiai játék kevert bővítése, az extenzív játék, a Nash egyensúly és a tökéletes Nash egyensúly fogalmak meghatározása, továbbá az egyensúly létezésére vonatkozó fontosabb egzisztencia tételek. E fogalmakra és tételekre elsősorban az 5. fejezetben lesz szükség.

A Bertrand-Edgeworth oligopóliumok elemzését célszerű a stratégiai játéknál finomabb struktúrán végezni. Ezt indokolja, hogy egyrészt az oligopolisták döntési halmazai csak ár és mennyiségi döntéseket tartalmaznak, másrészt az oligopolisták kifizetőfüggvényei három önálló tartalommal bíró függvény kompozíciójaként adhatók meg. Egy vállalat kifizetőfüggvényét a piaci keresleti görbe, az alkalmazott adagolási szabály és a vállalat költségfüggvénye határozza meg.

A 3. fejezetben bevezetem az *oligopol piac* struktúrát, amely tartalmazza a már említett elemeket. Az oligopol piac általam adott definíciója kimondottan a Bertrand-Edgeworth oligopóliumok elemzésére született, így nem tekinthető az oligopóliumok általános tárgyalására alkalmas struktúrának, bár mint azt a 3.2 alfejezetben bemutatom, a Cournot és Bertrand oligopóliumok beágyazhatók az oligopol piac általam bevezetett struktúrájába. Egy oligopol piac egy stratégiai vagy egy extenzív játékot indukál. Így a 2. fejezetben definiált fogalmak és ismertetett tételek alkalmazhatók az oligopol piacra. A vállalatok kifizetőfüggvényeinek legérdekesebb eleme az adagolási szabály. Az adagolási szabályok vizsgálatának keretéül szolgál az ugyancsak a 3. fejezetben megtalálható *oligopol piaci környezet* struktúra, amely egy piac fogyasztói oldalát adja meg.

A 4. fejezetben az adagolási szabályokat tárgyalom. Egy adagolási szabály a piaci keresleti görbe alapján megadja az oligopolisták által értékesíthető termék mennyiségeket. A 4.1 alfejezetben ismertetem az általam elemzett adagolási szabályokat. Ezek között szerepel az irodalomban használatos arányos és hatékony adagolási szabály. A 4. fejezetben megvizsgálom, hogy milyen piaci körülmények esetén indokolt egy adott adagolási szabály feltételezése. Elemzéseimet az egyszerűség kedvéért duopóliumokon végzem. A 4.2 alfejezetben azzal a szélsőséges esettel foglalkozom, amelyben a piacon csak egy fogyasztó létezik. Általános hasznossági függvény esetén a reziduális keresletről keveset tudunk mondani. Speciális hasznossági függvények esetén viszont figyelemre méltó eredmények adódnak. A Cobb-Douglas hasznossági függvény esetén a kombinált, míg a kvázilineáris hasznossági függvény esetén a releváns helyzetekben a hatékony adagolási szabály alkalmazható. A 4.3 alfejezetben bevezetem azokat a fogalmakat, amelyek segítségével eldönthető, hogy egy konkrét adagolási szabály alkalmazható-e egy piacon. Ehhez bevezetem a *piaci szituáció* fogalmát, amely az oligopol piac környezetét, az oligopolisták döntéseit és a fogyasztók kiszolgálásának módját írja le. Ha egy adott piaci szituációban egy adagolási szabály alkalmazható, akkor azt mondom, hogy az adagolási szabály *megvalósul* a konkrét piaci szituációban. A megvalósulásnak három fokát különböztetem meg. A *megvalósulás* 4.19 definíciója szerint egy piaci szituációban a reziduális keresletnek 1 valószínűséggel meg kell egyeznie a vizsgált adagolási szabály segítségével adódó értékesíthető mennyiséggel. Ezzel szemben az *aszimptotikus megvalósulás* — 4.20 definíció — csak határértékben követeli meg a reziduális kereslet és az adagolási szabály alapján adódó értékesíthető mennyiség megegyezését. A *várható értékben történő megvalósulás* ez utóbbi két érték várható értékben való megegyezését írja elő.

A bevezetett fogalmakkal a 4. fejezet további részében az egyes adagolási szabályok megvalósulását vizsgálom. A 4.4 alfejezet az arányos adagolási szabály megvalósulásait tárgyalja. A 4.4.1 és a 4.4.2 szakaszok az irodalomban található arányos adagolási szabályt megvalósító piaci szituációkat, a 4.4.3 és a 4.4.4 az irodalomban található heurisztikus levezetések kritikáját, illetve pontosítását, míg a 4.4.5 és a 4.4.6 szakaszok a saját levezetéseket tartalmazzák. Az általam bevezetett fogalmi rendszerbe a 4.5 alfejezet illeszti be az irodalomban a hatékony adagolási szabályra adott levezetéseket. A 4.6 alfejezet az általam bevezetett kombinált adagolási szabály megvalósításait tartalmazza. Végül a 4.7 alfejezetben megtalálható a termelő hatékony adagolási szabály megvalósítása.

Az 5. fejezetben tárgyalom a Bertrand-Edgeworth oligopólium egyensúlyi viselkedését. A Bertrand-Edgeworth oligopóliumnak nem mindig van tiszta Nash egyensúlyi megoldása. Az 5.1 alfejezetben ezért megvizsgálom, hogy milyen feltételek mellett létezik a modellnek egyáltalán tiszta Nash egyensúlya. A vizsgálatokat a kapacitáskorlátos Bertrand-Edgeworth oligopóliumra — amelyben a vállalatok átlagköltségei állandóak egy rögzített kapacitáskorlátig — és szigorúan monoton növekvő, szigorúan konvex határköltségfüggvényű oligopolisták esetére végzem el.

Az 5.2 alfejezetben a kevert egyensúly létezését tárgyalom. A Bertrand-Edgeworth oligopólium kevert egyensúlyát nem biztosítja Glicksberg [1952] tétele, ugyanis a vizsgált modell kifizetőfüggvényei nem folytonosak. Szerencsére Dasgupta és Maskin [1986] egzisztencia tétele megnyugtató választ ad a kérdésre. A Dasgupta és Maskin tétel ismertetése után tételük segítségével belátjuk, hogy a Bertrand-Edgeworth játéknak valóban létezik kevert Nash egyensúlyi megoldása. Az 5.3 alfejezetben ismertetem Vives [1986] eredményét, amelyben explicite meghatározta a kapacitáskorlátos Bertrand-Edgeworth játék kevert Nash egyensúlyi megoldását hatékony adagolási szabály és szimmetrikus kapacitások mellett.

Ismeretes, hogy megfelelő feltételek teljesülése esetén, ha egy Cournot oligopóliumban a résztvevők számát a végtelenbe növeljük, akkor az így kapott piacok sorozata — az egyensúlyi ár és az össztermelés tekintetében — az azonos keresletű és költségviszonyú kompetitív piachoz tart. Természetesen felvetődik az a kérdés, hogy vajon hasonló állítás igaz-e Bertrand-Edgeworth oligopóliumok sorozatára. Erre a kérdésre adtak pozitív választ Allen és Hellwig [1986] és Vives [1986]. Az 5.4 alfejezetben Vives [1986] eredményét ismertetem. Az ezt követő 5.5 alfejezetben egy olyan kétlépéses Bertrand-Edgeworth játékot vizsgálok, amelyben a vállalatok első lépésben szabadon választhatják meg adagolási szabályukat.

1.2 Saját eredmények

Az irodalomban az adagolási probléma átfogó tárgyalására alkalmas matematikai struktúrát eddig nem fogalmaztak meg. A véletlen adagolási szabály egy pontos levezetését adta Allen és Hellwig [1986]. Fogalmi rendszerük azonban nem alkalmas az arányos adagolási szabály más irányú levezetéseinek taglalására és alkalmatlan más adagolási szabályok levezetésének tárgyalására. Ezzel szemben az adagolási szabály megvalósítását meghatározó 4.19, 4.20 és 4.21 definíciók alkalmasak az adagolási szabályok levezetéseinek egységes tárgyalására. A 4.4.4 szakaszban Tirole [1988] egy heurisztikus levezetése alapján adok két pontos levezetést az arányos adagolási szabályra. A 4.4.5 szakaszban ugyancsak az adagolási szabályra a hipergeometriai eloszlás egy speciális határeloszlási tétele alapján megszámlálható sok fogyasztó esetén adok egy saját levezetést az arányos adagolási szabályra. Ennek a levezetésnek legfőbb előnye, hogy segítségével véges sok fogyasztó esetére a reziduális kereslet értékére egy közelítés adható. Az arányos adagolási szabály legtöbb megvalósítása nagyon speciális egyéni keresleti görbéket tételez fel. Általában vagy azonos keresleti görbéjű vagy pontosan egy termékegységet vásárolni szándékozó fogyasztókat tételeznek fel. Az általam a 4.4.6 szakaszban adott megvalósítás a fogyasztók keresleti görbéire vonatkozó egy enyhébb feltétel mellett is biztosítja a megvalósítás egy enyhébb formáját. Az egyéni keresleti görbékről annyit tételezek fel, hogy monoton csökkenőek és a különböző egyéni keresleti görbék száma véges. Ekkor véletlen kiszolgálási sorrend esetén az arányos adagolási szabály aszimptotikusan megvalósul. A 4. fejezetben bevezetem a kombinált adagolási szabályt, amelynek megvalósításai — mint az a 4.6 alfejezetből kiderül — az arányos és a hatékony adagolási szabályok megvalósításaiból „keverhető ki”. A kombinált adagolási szabály az 5.5 alfejezetben bevezetett adagolási játék elemzése során tesz jó szolgálatot.

Az irodalomban elterjedt az a hit, hogy a kapacitáskorlátos Bertrand-Edgeworth játéknak csak alacsony és magas kapacitások esetén létezik tiszta Nash egyensúlyi megoldása, azaz egy köztes kapacitási tartományban csupán nem degenerált kevert Nash egyensúlyi megoldása van. Az 5.3 és az 5.5 állításaim ezt cáfolják, mivel egy minden pontban árrugalmas keresleti görbe esetén mindig létezik a kapacitáskorlátos Bertrand-Edgeworth játéknak tiszta Nash egyensúlya. Az 5.4 és az 5.7 állításaim szerint hatékony adagolást feltételezve, nem engedve meg, hogy bármelyik vállalat kapacitása tetszőlegesen kicsi legyen a többi vállalat kapacitásaihoz képest, még akár minden pontban árrugalmatlan keresleti görbe esetén is garantálható a tiszta Nash egyensúly létezése. Duopólium esetén az 5.10 állításom adagolási szabálytól függően megadja a tiszta Nash egyensúlyt biztosító kapacitáskorlátok halmazát. Ez utóbbi állításnak az 5.5 alfejezetben veszem hasznát. Az 5.1.2 alfejezetben szigorúan monoton növekvő és szigorúan konvex költségfüggvények mellett határozom meg a tiszta Nash egyensúlyi megoldást feltéve, hogy létezik ilyen. Az 5.5 alfejezetben egy olyan kétlépéses Bertrand-Edgeworth játékot vezetek be, amely első lépésében a duopolisták meghatározhatják a fogyasztók kiszolgálásakor alkalmazott kombinált adagolási szabály paraméterét. Ilyen jellegű vizsgálatokat folytatott Davidson és Deneckere [1986]. Egyik eredményük szerint egy ilyen játék tökéletes Nash egyensúlyában a duopolisták az arányos adagolási szabályt fogják választani. Ezzel szemben az 5.33 állításom feltételei mellett a hatékony adagolási szabály alkalmazása lesz egy aljáték tökéletes Nash egyensúlyi akció. Amennyiben a duopolisták kockázatkerülők, akkor a várható profitok és a profitok szórása terén értelmezett preferenciáiktól függően más-más paraméterű kombinált adagolási szabályt választanak egyensúlyban.

1.3 Köszönetnyilvánítás

Köszönetemet szeretném kifejezni Berde Évának és Vági Mártonnak, akik egyetemi hallgatói koromtól kezdve sok mindenben segítettek. Hálás vagyok volt témavezetőmnek Mundruczó Györgynek, aki sajnos már nem lehet közöttünk, hogy biztatására elkezdtem Ph.D. tanulmányaimat a Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetemen.

Köszönetemet fejezem ki témavezetőmnek Dancs Istvánnak, akitől éveken keresztül sokat tanultam. Nagyon hálás vagyok Tallos Péternek az angol nyelvű publikációim elkészítése során nyújtott értékes segítségéért. Külön köszönetet szeretnék mondani Medvegyev Péternek azért, hogy bármilyen problémával is fordultam hozzá az elmúlt években, mindig meghallgatott és segített.

2. fejezet

Játékelméleti alapok

Az oligopóliumok tárgyalását célszerű játékelméleti keretek között végezni. Ebben a fejezetben a játékelmélet azon fogalmait foglalom össze, amelyeket a későbbi fejezetekben használni fogok. Az egyes fogalmakat csak röviden ismertetem, a részleteket például Fudenberg és Tirole [1991] vagy Osborne és Rubinstein [1994] könyvei tartalmazzák.

Az első alfejezetben áttekintem az általam használt játék típusokat. A második alfejezetben az általam használt egyensúlyi koncepciók szerepelnek. Végül a harmadik alfejezetben néhány szót ejtek az egyensúlyi stratégiák meghatározásáról.

2.1 Játékok absztrakt megfogalmazásai

Ebben az alfejezetben az általam használt játéktípusok absztrakt megfogalmazása és egymás közötti kapcsolatuk leírása található.

2.1.1 Stratégiai játék

Tegyük fel, hogy egy játékban a szereplők egymástól elkülönülten hozzák meg a döntéseiket és ismerik a játék szabályait. Egy ilyen játékot megadó struktúrát stratégiai játéknak hívnak.

2.1. definíció. Az $\langle N, (A_i)_{i\in N}, (\succeq_i)_{i\in N}\rangle$ hármas egy *stratégiai játék*, ahol:

- N a játékosok halmaza;
- A_i az $i \in N$ játékos stratégia halmaza, amely egy tetszőleges nem üres halmaz lehet;
- $\succeq_i$ az $i \in N$ játékos preferenciarelációja, amely egy teljes, reflexív és tranzitív bináris reláció az $A = \times_{i\in N} A_i$ halmazon.

2.2. megjegyzés. Sok játékelméleti könyv a 2.1 definíció által megadott matematikai struktúrát stratégiai formában megadott játéknak nevezi.

Az $A = \times_{i\in N} A_i$ halmaz egy elemét *stratégiaegyüttesnek* vagy *stratégiakombinációnak* hívjuk. A stratégiaegyüttesek rendezését gyakran közvetve adjuk meg. Ehhez vezessük be a következmény függvény fogalmát. Legyen C a következmények halmaza, ekkor a $g : A \to C$ *következmény függvény* az egyes stratégiakombinációkhoz egy következményt rendel. Ha most számunkra a játékosok ($\succeq_i^*$) preferenciarelációi a C halmazon adottak, akkor az $i \in N$ játékos stratégiai játékbeli preferenciarelációja megkapható az $a \succeq_i b \Leftrightarrow g(a) \succeq_i^* g(b)$ összefüggésen keresztül.

Példaképpen tekintsük a következő játékot: tizenegyesrúgást kívánunk modellezni. A kapusnak három lehetősége van: középen marad, balra vetődik vagy jobbra vetődik. A lövő pedig középre, balra vagy jobbra rúghatja a labdát. Az $N = \{kapus, rug\acute{o}\}$, $A_{\text{kapus}} = \{balra, k\ddot{o}z\acute{e}pre, jobbra\}$, $A_{\text{lövő}} = \{balra, k\ddot{o}z\acute{e}pre, jobbra\}$, $C = \{g\acute{o}l, nincs\ g\acute{o}l\}$,

$$g(a) = \begin{cases} g\acute{o}l, & \text{ha } a_{\text{kapus}} \neq a_{\text{lövő}} \\ nincs\ g\acute{o}l, & \text{különben.} \end{cases}$$

$\succeq_{\text{kapus}}^* = \{(nincs\ g\acute{o}l, g\acute{o}l), (g\acute{o}l, g\acute{o}l), (nincs\ g\acute{o}l, nincs\ g\acute{o}l)\}$,
$\succeq_{\text{lövő}}^* = \{(g\acute{o}l, nincs\ g\acute{o}l), (g\acute{o}l, g\acute{o}l), (nincs\ g\acute{o}l, nincs\ g\acute{o}l)\}$ a leegyszerűsített tizenegyesrúgás megfogalmazása stratégiai játékként.

Megjegyzendő, hogy a stratégiahalmazok függvényhalmazok is lehetnek. Így például differenciáljátékok esetén a stratégia halmazok függvények. A

Bayes-i játékok is a 2.1 definícióban szereplő formára hozhatók, ebben az esetben a preferenciarelációkat valószínűségi eloszlások terén kell érteni (lásd Osborne és Rubinstein [1994]).

A stratégiai játék absztraktabb, preferenciarelációs megadása helyett az irodalomban gyakoribb a játék kifizető (hasznossági) függvényen keresztüli megadása (lásd például Fudenberg és Tirole [1991]). Az $u_i : A \to \mathbb{R}$, $(i \in N)$ kifizetőfüggvények és a játékosok preferenciarelációi között nyilván fenn kell állnia a következő összefüggésnek:

$$\forall i \in N : u_i(a) \geq u_i(b) \Leftrightarrow a \succeq_i b.$$

A hasznossági függvényekkel adott stratégiai játékokra a $\langle N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$ jelölés is használatos. A későbbiek során ez utóbbi jelölést fogjuk használni ugyanis az általunk vizsgált oligopol modellekben a játékosok közömbösségi szintjei eleve pénzben kifejezve adottak. Mint ismeretes, a kifizetőfüggvények és a preferenciarelációk közötti összefüggésre mutat rá a következő tétel: az $\mathrm{X} \subset \mathbb{R}^n$ halmazon értelmezett folytonos $\succeq$ preferenciareláció reprezentálható folytonos kifizető függvénnyel (lásd például Debreu [1964] és Zalai [1989]). A $\succeq$ reláció folytonos, ha $\forall x \in \mathrm{X} : \{y \in \mathrm{X} : y \succeq x\}$ és $\{z \in \mathrm{X} : x \succeq z\}$ halmazok zártak.

2.1.2 Stratégiai játék kevert bővítése

Legyen adott egy $G := \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ kifizetőfüggvényekkel adott stratégiai játék. Az $i \in N$ játékos A_i stratégiahalmazainak elemeit az i játékos tiszta stratégiáinak nevezzük. Képzeljük el, hogy a játékosok az egyes tiszta stratégiáikat egy általuk egymástól függetlenül választott valószínűségi eloszlás segítségével választják ki. Ekkor felvetődik az a kérdés, hogy milyen eloszlást célszerű választani egy-egy játékosnak. Az így kapott játékot hívják a stratégiai játék kevert bővítésének. A kevert bővítés interpretációit lásd például Rasmusen [1989] vagy Osborne és Rubinstein [1994] műveiben.

Jelölje $\Delta(\Omega)$ az $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ mérhető téren értelmezett valószínűségi mértékek halmazát. Feltételezzük, hogy a kevert bővítés által generált preferenciák kifejezhetők az eloszlásfüggvények várható értékeivel (azaz Neumann-Morgenstern-féle hasznossági függvényekkel).

2.3. definíció. A $G := \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ stratégiai játék *kevert bővítésén* a

$$G^* := < N, (\Delta(A_i)), (\int_A u_i(a) dP(a)) >$$

stratégiai játékot értjük, ahol $A := \times_{j\in N} A_j$ és $P := \bigotimes_{j\in N} P_j, P_j \in \Delta(A_j)$.

A definíció értelmes, hiszen G^* valóban stratégiai játék. Egy $P_j \in \Delta(A_j)$ eloszlást a $j \in N$ játékos egy *kevert stratégiájának* hívjuk. Ha $P_j \in \Delta(A_j)$ olyan, hogy található egy $a \in A_j$ tiszta stratégia, amelyre $P_j(a) = 1$, akkor P_j egy *degenerált kevert stratégia.*

2.1.3 Extenzív játék

Szemléletesen extenzív játékon általában egy játékfával megadható játékot szoktak érteni. Ekkor a fa csúcsai egy játékost címkéznek meg, a fa élein a kiinduló csúcspont által jelölt játékos döntése található, és a fa levelein az adott úthoz tartozó kifizetések értékei szerepelnek. Ebből már érzékelhető, hogy extenzív játékoknál a döntéshozatalok időpontjai diszkrétek. Látni fogjuk, hogy az extenzív játék is a stratégiai játék alakjára hozható. Az elemzéseink azonban egyszerűbbek, ha az extenzív játék definíciójából indulunk ki, mivel az egyes döntések egymástól való függése explicite megjelenik.

Az extenzív játék definícióját előzze meg még néhány jelölés. Legyen adott egy A halmaz, ekkor:

A^*: A elemeiből képzett véges sorozatok halmaza;

A^∞: A elemeiből képzett végtelen sorozatok halmaza;

$A^{**} := A^* \cup A^\infty$;

$\tau : A^* \to A$, ha $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, akkor $\tau(\alpha) := \alpha_n$ (a sorozat utolsó eleme);

$\lambda : A^* \to \mathbb{N}$, ha $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, akkor $\lambda(\alpha) := n$ (a sorozat hossza);

$\kappa : A^{**} \times \mathbb{N} \to A^*$, ha $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots)$, akkor

$$\kappa(\alpha, k) := \begin{cases} (\alpha_1, \dots, \alpha_k), & \text{ha } k \leq n \\ \alpha, & \text{különben} \end{cases}$$

függvény az α sorozat első k elemét adja, ha $k \leq n$; ha pedig $k > n$, akkor az egész α sorozatot.

2.4. definíció. Az $\langle N, (A_i)_{i \in N}, H, P, (\succeq_i)_{i \in N} \rangle$ struktúrát tökéletes információjú *extenzív játéknak* nevezzük, ha:

- N a játékosok egy nem üres halmaza;
- A_i nem üres halmaz, amely tartalmazza az $i \in N$ játékos valamikor lehetséges akcióit;
- $H \subset A^{**}$ egy nem üres halmaz, amely a játék lehetséges akciósorozatainak halmaza, ahol $A := \times_{i \in N}(A_i \cup \{\diamond\})$. A $\diamond$ szimbólum azt jelzi, hogy egy játékos nem lép. A H halmaz elégítse ki továbbá a következő feltételeket:
  - az üres sorozat $\emptyset$, amely a játék kezdőpontját jelöli, legyen eleme H-nak;
  - $\forall \alpha \in H : \forall k < \lambda(\alpha) : \kappa(\alpha, k) \in H$,
  - $\forall \alpha \in A^\infty : ((\forall k \in \mathrm{N} : \kappa(\alpha, k) \in H) \Rightarrow \alpha \in H)$.

  Egy $\alpha \in A^{**}$ akciósorozat *terminális*, ha vagy $\alpha \in H \cap A^\infty$, vagy

  $$(\alpha \in H \cap A^*) \wedge (\nexists \beta \in H : \lambda(\alpha) < \lambda(\beta) \wedge \alpha = \kappa(\beta, \lambda(\alpha))).$$

  A terminális akciósorozatok halmazát jelöljük a továbbiakban Z-vel;
- $P : H \setminus Z \to (\mathcal{P}(N) \setminus \emptyset)$ függvény megadja, hogy a $h \in H \setminus Z$ akciósorozatnál mely játékosok lépnek. A P függvény tegyen eleget a $\forall h \in H \setminus Z : (i \notin P(h) \Leftrightarrow \tau(h)_i = \diamond)$ feltételnek;
- $\forall i \in N : \succeq_i$ egy preferenciareláció Z-n.

2.5. megjegyzés. Számos játékelméleti könyv a 2.4 definíció által megadott matematikai struktúrát extenzív formában megadott játéknak nevezi.

Az extenzív játék lehetséges időbeli lefolyásait tartalmazza a H halmaz. Egy $h \in H \setminus Z$ akciósorozat után az $i \in P(h)$ játékos akcióhalmazát az

$$A(h,i) := \{a_i \mid ((h,a) \in H) \wedge (h \in H \setminus Z)\}$$

halmaz adja meg. Jelöljük $\overline{A}$-val a játékosok lehetséges akcióinak halmazát, azaz $\overline{A} := \cup_{h \in H \setminus Z} \cup_{i \in P(h)} A(h,i)$. Továbbá jelölje $H_i \subset H$ azokat az akciósorozatokat, amelyek után az i. játékos következik, azaz $H_i := \{h \in H \setminus Z \mid i \in P(h)\}$.

Az extenzív játék stratégiai formájához először meg kell mondanunk, hogy mit is értünk egy extenzív játékban egy játékos stratégiáján.

2.6. definíció. Egy $\langle N, (A_i)_{i \in N}, H, P, (\succeq_i)_{i \in N} \rangle$ extenzív játék $i \in N$ játékosának a *stratégiáján* egy $s_i : H_i \to \overline{A}$ függvény értendő, amelyre $\forall h \in H_i : s_i(h) \in A(h,i)$. Jelölje a továbbiakban S_i az $i \in N$ játékos stratégiáinak halmazát.

Egy játékos stratégiája tehát minden olyan akciósorozatnál, amelynél a játékos következik, megmondja, hogy a számára lehetséges akciók közül melyiket fogja választani. A stratégiai forma megadásához még egy, a stratégiák halmazán értelmezett preferenciarelációra van szükségünk. Legyen az $\langle N, (A_i)_{i \in N}, H, P, (\succeq_i)_{i \in N} \rangle$ extenzív játék kimenetele az $O : \times_{i \in N} S_i \to Z$ függvény, amely a játékosok stratégiaválasztása esetén megadja, hogy melyik terminális akciósorozat valósul meg. Formálisan $\forall s \in \times_{i \in N} S_i : O(s) := \alpha \in Z$, ha

$$\begin{cases} \forall k : 0 \leq k < \lambda(\alpha) : \forall i \in P(\kappa(\alpha,k)) : s_i(\kappa(\alpha,k)) = \tau(\kappa(\alpha,k+1))_i, & \text{ha} \quad \alpha \in Z \cap A^*, \\ \forall k : 0 \leq k < \infty : \forall i \in P(\kappa(\alpha,k)) : s_i(\kappa(\alpha,k)) = \tau(\kappa(\alpha,k+1))_i, & \text{ha} \quad \alpha \in Z \cap A^\infty. \end{cases}$$

2.7. definíció. Egy $\langle N, (A_i)_{i \in N}, H, P, (\succeq_i)_{i \in N} \rangle$ tökéletes információjú *extenzív játék stratégiai alakja* az $\langle N, (S_i)_{i \in N}, (\succeq_i^*)_{i \in N} \rangle$ játék, ahol

$$\forall s, s' \in \times_{k \in N} S_k : \forall i \in N : s \succeq_i^* s' \Leftrightarrow O(s) \succeq_i O(s').$$

2.2 Egyensúly

Egy rendszer egyensúlyán — nagyon általánosan és nagyvonalúan fogalmazva — olyan állapotokat értünk, amelyek bizonyos szempontból állandónak tekinthetők. Játékok esetében a játékosok stratégiahalmazát tekinthetjük állapottérnek. A játékosokról feltesszük, hogy racionálisan viselkednek, azaz preferenciáik alapján hasznosságukat kívánják maximalizálni. Egyáltalán nem kézenfekvő, hogy mely állapotokat tekintsük egyensúlyinak, mivel a játékosok egyidejűleg kívánják hasznosságukat maximalizálni. Az 5. fejezetben a tiszta, a kevert és a tökéletes Nash egyensúly fogalmát használjuk. Ebben az alfejezetben ezen egyensúlyi koncepciókat ismertetjük.

A leírás egyszerűsítése céljából vezessük be az alábbi jelöléseket, továbbá a játékosok legjobb válasz függvényeit:
Egy $x = (x_1, \ldots, x_n)$ vektor i-edik komponensét nem tartalmazó $(x_1, \ldots, x_{i-1},\ x_{i+1}, \ldots, x_n)$ vektorra vezessük be az x_{-i} jelölést. Ekkor az (x_i, x_{-i}), illetve az (x_{-i}, x_i) jelölés mindig az eredeti x vektort jelenti.
Ha $X = \times_{i=1}^n X_i$, akkor $X_{-i} := X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \ldots X_n$.

2.8. definíció. Adott egy $G := \langle \{1, \ldots, N\}, (S_i)_{i=1}^N, (\succeq_i)_{i=1}^N \rangle$ stratégiai játék. Legyen $S := \times_{i=1}^N S_i$. Ekkor egy $B_i : S_{-i} \to \mathcal{P}(S_i)$ halmazértékű leképezést az i játékos *legjobb válasz* függvényének nevezzük, ha

$$\forall s_i^* \in B(s_{-i}) : \forall s_i \in S_i : (s_i^*, s_{-i}) \succeq_i (s_i, s_{-i}).$$

2.2.1 Nash egyensúly

A Nash-féle egyensúlyi koncepció az egyik leggyakrabban alkalmazott egyensúlyi fogalom. Lényege, hogy egy olyan pontot nevez egyensúlyinak, amelytől egymagában egyik játékosnak sem érdemes eltérnie.

2.9. definíció. Egy $G := \langle \{1, \ldots, N\}, (S_i)_{i=1}^N, (\succeq_i)_{i=1}^N \rangle$ stratégiai játék $s^* \in S$ stratégiaegyüttesét *Nash egyensúlyinak* nevezzük, ha

$$\forall i \in \{1, \ldots, N\} : \forall s_i \in S_i : (s_i^*, s_{-i}^*) \succeq_i (s_i, s_{-i}^*).$$

Könnyen igazolható, hogy egy G játéknak egy s stratégiaegyüttese akkor és csak akkor Nash egyensúlyi, ha mindegyik játékos s_i stratégiája legjobb válasz a többi játékosok s_{-i} stratégiáira, azaz $\forall i \in \{1, \ldots, N\} : s_i \in B_i(s_{-i})$.

Nem minden játéknak van Nash egyensúlyi pontja. Erre tekintsük a 2.1.1 alfejezetben leírt tizenegyesrúgás játékot, amelynek normál formáját az alábbi táblázat tartalmazza:

Játékos		Rugó		
	Akció	balra	középre	jobbra
	balra	1, 0	0, 1	0, 1
Kapus	középre	0, 1	1, 0	0, 1
	jobbra	0, 1	0, 1	1, 0

Más jellegű problémát okoz, ha egy játéknak több Nash egyensúlyi pontja is van. Ekkor nem világos, hogy egy konkrét helyzetben melyik egyensúlyi pont fog realizálódni. E probléma feloldására az irodalomban számos megoldási javaslat született (például Harsányi és Selten [1988]). Ezek egyike sem tekinthető azonban egyedül üdvözítő megoldásnak (Binmore [1992]).

Fontos kérdés, hogy milyen feltételek mellett tudjuk garantálni egy játék Nash egyensúlyának létezését.

2.10. tétel. *A* $\langle \{1, \ldots, N\}, (S_i)_{i=1}^N, (u_i)_{i=1}^N \rangle$ *stratégiai játéknak van Nash egyensúlyi pontja, ha* $\forall i \in \{1, \ldots, N\}$*:*

- $S_i \subset \mathbb{R}^n$*,* S_i *nem üres, kompakt és konvex halmaz;*
- u_i *hasznossági függvény folytonos* S*-en és kvázikonkáv* S_i*-n.*

Sajnos ez a tétel csak konvex halmazok esetén garantálja a Nash egyensúlyi pont létezését. Így például véges vagy megszámlálható halmazok esetén semmit sem mondhatunk e tétel alapján. Az általam vizsgált Bertrand-Edgeworth oligopol modellekre sem lesz alkalmazható, mivel ezek megsértik a hasznossági függvényekkel szemben támasztott folytonossági és kvázikonkavitási feltételeket.

Ha egy játéknak nincs Nash egyensúlyi stratégiája, felvetődik annak kérdése, hogy vajon a játék kevert bővítésének létezik-e Nash egyensúlya.

2.11. definíció. Egy $G = \langle N, (S_i)_{i=1}^N, (u_i)_{i=1}^N \rangle$ stratégiai játék kevert bővítésének Nash egyensúlyi megoldását a G játék *kevert Nash egyensúlyi megoldásának* hívjuk. A G játék Nash egyensúlyi megoldását *tiszta Nash egyensúlyi megoldásnak* is nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy ha egy játéknak létezik tiszta Nash egyensúlyi megoldása, akkor létezik kevert Nash egyensúlyi megoldása is, hiszen egy tiszta stratégia egy degenerált kevert stratégia. A kevert Nash egyensúlyi stratégia létezésére vonatkozóan ad elégséges feltételt Glicksberg [1952] tétele.

2.12. tétel. *A $\langle \{1, \dots, N\}, (S_i)_{i=1}^N, (u_i)_{i=1}^N \rangle$ stratégiai játéknak létezik kevert Nash egyensúlyi megoldása, ha $\forall i \in \{1, \dots, N\}$:*

- *S_i nem üres kompakt halmaz egy metrikus térben;*
- *u_i hasznossági függvény folytonos S-en.*

Az 5. fejezetben látni fogjuk, hogy sajnos Glicksberg tétele sem alkalmazható a Bertrand-Edgeworth oligopólium esetében.

A 2.10 és 2.12 tételek alapvetők a játékelméletben, bizonyításuk megtalálható a legtöbb játékelméleti könyvben. Számunkra e két tétel a későbbiek miatt azért érdekes, mert az általunk vizsgált modellekre ugyan alkalmazhatatlanok, de többek között pontosan ez a negatív tény motiválta számos további eredmény, mint például a 5. fejezetben található Dasgupta-Maskin tétel megszületését.

A kevert Nash egyensúlyi stratégiák meghatározásában az alábbi állítás bizonyul hasznosnak.

2.13. állítás. *Legyen $G := \langle \{1, \dots, N\}, (S_i)_{i=1}^N, (u_i)_{i=1}^N \rangle$ egy stratégiai játék. Ekkor $\sigma^* \in \times_{i=1}^N \Delta(S_i)$ pontosan akkor kevert Nash egyensúlyi stratégiaegyüttes,* *ha mindegyik $i \in \{1, \dots, N\}$ játékosra a σ_i tartójában található összes tiszta stratégia legjobb válasz a többi játékos által alkalmazott σ^*_{-i} stratégiákra.*

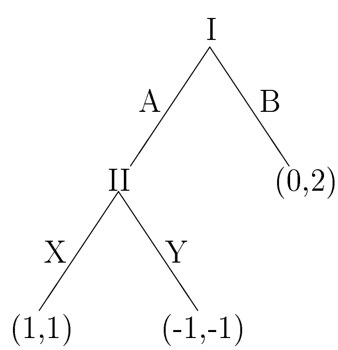
Az állítás bizonyítása véges stratégia halmazok esetében megtalálható például Osborne és Rubinstein [1994] játékelméleti könyvében.

2.2.2 Tökéletes egyensúly

A tökéletes egyensúly fogalma az extenzív játékhoz kapcsolódik. Az extenzív játék 2.4 definícióban megadott stratégiai formára közvetlenül értelmezett a Nash egyensúlyi pont.

2.14. definíció. Egy $G := \langle N, (A_i)_{i \in N}, H, P, (\succeq_i)_{i \in N} \rangle$ tökéletes információjú extenzív játék Nash egyensúlyi pontjainak nevezzük azon stratégiákat, amelyek G stratégiai formájának Nash egyensúlyi pontjai.

Az extenzív játék így definiált Nash egyensúlyi pontjai között olyan stratégia kombinációk is szerepelhetnek, amelyek nem férnek össze a döntéshozók racionális viselkedésével. Tekintsük ennek szemléltetésére az alábbi játékfával reprezentált kétszemélyes tökéletes informáltságú játékot (lásd Harsányi és Selten [1988]):



Ennek a játéknak a stratégiai formáját az alábbi táblázat tartalmazza:

	X	Y
A	(1,1)	(-1,-1)
B	(0,2)	(0,2)

Mint látható, a játék stratégiai formájának két Nash egyensúlyi pontja van, mégpedig az (A,X) és a (B,Y) stratégia kombinációk. De ezek közül a (B,Y) az eredeti extenzív játékra nézve nyilván nem racionális, ugyanis ha az I. játékos az A stratégiát választaná, akkor a II. játékos biztosan az X stratégiáját fogja alkalmazni és így az I. játékos jobban járna. Ezért az (A,X) egyensúlyi pontot nevezzük tökéletesnek.

Az extenzív játék stratégiai formájára értelmezett Nash egyensúlyi pont definíciójánál nem vettük figyelembe a játék időbeli lefolyásában rejlő információt. Ezt a hiányosságot oldja fel a Selten által bevezetett tökéletes egyensúly fogalma. Ennek lényege az, hogy a racionális egyensúlyi pontnak a teljes játékfa minden részfájában is Nash egyensúlyi pontnak kell lennie. A tökéletes egyensúly definícióját meg kell még előzze az extenzív játék részjátékának fogalma.

2.15. definíció. Adott $\Gamma := \langle N, (A_i)_{i\in N}, H, P, (\succeq_i)_{i\in N}\rangle$ tökéletes információjú extenzív játék. Γ egy $h \in H$ akciósorozatához tartozó *részjátéka* a $\Gamma|_h := \langle N, (A_i)_{i\in N}, H|_h, P|_h, (\succeq_i |_h)_{i\in N}\rangle$ extenzív játék, ahol

- $H|_h := \{h' \mid (h, h') \in H\}$,
- $\forall h' \in H|_h : P|_h(h') := P(h, h')$ és
- $\forall i \in N : \forall h', h'' \in H|_h : h' \succeq_i |_h h'' \Leftrightarrow (h, h') \succeq_i (h, h'')$.

Legyen $\Gamma|_h$ részjáték stratégiai formája $\langle N, (S_i|_h)_{i\in N}, (\succeq_i^* \ |_h)_{i\in N}\rangle$, ahol $(\succeq_i^* |_h)$ az $O_h : \times_{i=1}^N S_i|_h \to Z$ függvényen keresztül értelmezett (lásd 2.4 definíciót). Ez alapján a tökéletes egyensúly definíciója az alábbi:

2.16. definíció. Egy $\Gamma := \langle N, (A)_{i\in N}, H, P, (\succeq_i)_{i\in N}\rangle$ tökéletes információjú extenzív játék stratégiai alakjának egy s^* stratégia kombinációját *tökéletes egyensúlyinak* mondjuk, ha

$$\forall h \in H \setminus Z : \forall i \in P(h) : \forall s_i \in S_i|_h : O_h(s^*_{-i}|_h, s^*_i|_h) \succeq_i O_h(s^*_{-i}|_h, s_i).$$

2.3 Stratégiák meghatározása

Az egyensúlyi stratégiák meghatározása egyszerűbb játékoktól eltekintve bonyolult feladat.

Hagyományos[1] értelemben vett játékok nagy osztályára találhatunk nyerő stratégiákat. Az ezek megtalálására vonatkozó módszertant tárgyalja Berlekamp, Conway és Guy [1982]. E módszerek azonban nagy mértékben kihasználják már a konkrét játék szerkezetét.

Néhány matematikailag jól megragadható játékra könnyen meghatározhatjuk az egyensúlyi stratégiákat. Ilyenek a mátrixjátékok, amelyekre a lineáris programozás segítségével határozhatjuk meg az egyensúlyi pontokat (lásd például Szép és Forgó [1985]). Egy másik ilyen osztály a differenciáljátékok köre (lásd Fudenberg és Tirole [1991] és Isaacs [1968]). A differenciáljátékok egyensúlyi megoldását az irányításelméletben kulcsszerepet játszó Hamilton-Jacobi egyenlet általánosított változata segítségével kaphatjuk meg. Megjegyzendő, hogy mivel ehhez egy parciális differenciál egyenletrendszert kell megoldanunk, ezért az egyensúlyi megoldást csak speciális esetekben tudjuk zárt alakban megadni.

Véges extenzív játékoknak a tökéletes egyensúlyi pontja megtalálható dinamikus programozással. Ezzel elvileg rendelkezésünkre áll már egy algoritmus. Sajnos az algoritmus számítási igénye exponenciálisan nő a játékfa méretével, ezért gyakorlatilag csak kis feladatok megoldására alkalmas. A műveletigény valamelyest csökkenthető, ha csak egy tökéletes egyensúlyi pont meghatározásával beérjük. A legtöbb esetben azonban le kell mondanunk az optimális stratégiák, azaz a tökéletes egyensúlyi stratégia meghatározásáról. A problémát ugyanis az okozza, hogy a teljes játékfa kiértékelése túl időigényes. Ezért az egyes játékosok valamilyen heurisztikák alkalmazására kényszerülnek, hogy ezzel elkerüljék a teljes játékfa felépítését és kiértékelését.

A részleges játékfát kiértékelő eljárások közül kétszemélyes esetre a mini-

[1] Hagyományos értelemben vett játékon olyan játékot értek, amelyben kevés szereplő vesz részt, továbbá egy játékos csak nyertes vagy pedig vesztes lehet.

max, alfa-béta és a szelektív keresés a legismertebb (lásd Csákány és Vajda [1985] vagy Fekete, Gregorics és Nagy [1990]).

Az általam vizsgált oligopol játékok esetében meg fogjuk adni a tiszta Nash egyensúlyt ha létezik ilyen, különben pedig a 2.13 állítás felhasználásával meghatározzuk a kevert Nash egyensúlyt. Néhány esetben szükség lesz az extenzív játékokra és ezáltal a tökéletes egyensúly meghatározására. Az általam vizsgált modellek azonban csak legfeljebb három időszakosak.

3. fejezet

Oligopol piac

Manapság az oligopol modelleket játékelméleti keretek között szokták tárgyalni. Egyes szerzők ugyan vitatják a játékelmélet jótékony hatását az oligopólium elméletre (lásd Fisher [1989]) azzal érvelve, hogy a játékelmélet alkalmazása előtt és után lényegében ugyanannyit tudtunk a valóságban felmerülő oligopol szituációkról. Azaz most is gyakorlatilag minden egyes szituáció külön elemzés tárgya és nem beszélhetünk egy egységes elmélet kialakulásáról, sőt a jelen úton haladva ez valószínűleg nem is lehetséges. Azt azonban senki sem vitatja, hogy a játékelmélet által bevezetett matematikai struktúrák segítenek ismereteink rendszerezésében és ezáltal világosabbá válnak az egyes piaci szituációkban felelhető hasonlóságok.

Egy egységes elmélet kialakítása az értekezésemnek nem célja. Ebben a fejezetben olyan struktúrákat vezetek be, amelyek alkalmasak a Bertrand-Edgeworth típusú oligopol modellek elemzésére és lehetővé teszik a klasszikus statikus oligopol modellekhez való viszonyításukat. Ezért kiindulásként mondható, hogy egy oligopol szituációban adott számú vállalat (játékos) vesz részt, a szereplők döntési halmazai (stratégiái) és a szereplők profitfüggvényei (preferenciái) adottak.

Elemzéseim során feltesszem, hogy a vállalatok tökéletesen informáltak, azaz ismerik egymás döntési halmazait, valamint profitfüggvényeit. További feltételezésem, hogy mindegyik vállalat egy terméket állít elő és a termékeik homogének. A vizsgált modellekben a termelő vállalatok döntési változói a kínálati ár és a kínált mennyiség. A klasszikus modellekben vagy az ár (Bertrand-féle modellek) vagy pedig a mennyiség (Cournot-féle modellek) a döntési változó. A Bertrand-Edgeworth-féle modellekben mindketten egyszerre döntési változók.

A vizsgálataink során szükségessé válik a vállalatok profitfüggvényeinek részekre bontása. A klasszikus oligopol modellekkel ellentétben nem elégséges a keresleti görbe és a vállalatok költségfüggvényeinek ismerete a profitfüggvények meghatározásához. Ez pontosan abból fakad, hogy a Bertrand-Edgeworth modellek két döntési változójú modellek, ugyanis ha a legalacsonyabb áron kínáló vállalat nem képes a kereslet teljes kielégítésére az általa megállapított kínálati áron, akkor a többi vállalat kereslete attól függ, hogy mely fogyasztókat szolgálták ki az alacsonyabb áron kínáló vállalatok. A többi vállalat számára megmaradó keresletet reziduális keresletnek hívják. Ennek megállapításához ismernünk kell a fogyasztók egyéni keresleti görbéit és a fogyasztók kiszolgálásának módját. A kiszolgálási módtól függően általában a vállalatok számára adott kereslet valószínűségi változó lesz. Az általunk vizsgált feltételek mellett azonban a reziduális keresletek szerencsére gyakran egy valószínűséggel konstans valószínűségi változók. A vállalatokról pedig gyakran feltételezik, hogy kockázatsemlegesek és ezért döntéseik meghozatalakor csak a várható reziduális keresletet tartják szem előtt.

Az egyéni keresleti görbék ismerete egyrészt egy elég erős feltevés, másrészt e görbék kezelése bonyolulttá teszi a számításokat. Megnyugtató, hogy bizonyos piacokon, amelyeken egy úgynevezett adagolási szabály alkalmazható, elégséges a piaci keresleti görbe ismerete.

3.1 Oligopol piacok

Ebben az alfejezetben a vizsgált oligopol modellek leírására alkalmas matematikai struktúrát fogom bevezetni.

Jelölje $P \subset \mathbb{R}_+$ az árak halmazát és $Q \subset \mathbb{R}_+$ pedig a kibocsátások halmazát. P és Q általában a nemnegatív valós számok halmaza lesz, egyes esetekben azonban csak egy intervallum. Továbbá jelölje $\mathcal{D}$ a megengedett keresleti görbék halmazát, azaz $\mathcal{D} \subset Q^P$. Például $\mathcal{D}$ gyakran lesz a monoton csökkenő keresleti görbék halmaza. Hasonlóan jelölje $\mathcal{C}$ a megengedett költségfüggvények halmazát. Tehát $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}_+^Q$.

3.1. definíció. Az $O := \langle J, (A_j)_{j=1}^J, (C_j)_{j=1}^J, D, R, (\pi_j)_{j=1}^J \rangle$ struktúra egy *oligopol piac*, ahol

- J a termelők száma;
- A_j a j-edik termelő döntési halmaza ($j = 1, \ldots, J$);
- $C_j \in \mathcal{C}$ a j. termelő költségfüggvénye ($j = 1, \ldots, J$);
- $D \in \mathcal{D}$ az aggregált keresleti függvény;
- $R : \mathcal{D} \times A_1 \times \cdots \times A_J \to Q^J$ adagolási szabály, az adagolási szabályok összessége $\mathcal{R}$;
- $\pi_j : \mathcal{D} \times \mathcal{C} \times \mathcal{R} \times A_1 \times \cdots \times A_J \to \mathbb{R}^J$ a j-edik vállalat profitfüggvénye ($j = 1, \ldots, J$).

3.2. megjegyzés. Az általunk vizsgált modellekben $A_i = P$, $A_i = Q$ vagy $A_i = P \times Q$. Az $A_i = P \times Q$ mögött két különböző típusú játék húzódhat meg. A két vállalat ár és mennyiségi döntését egyrészt szimultán módon, másrészt rögzített sorrendben hozhatja meg. Ez utóbbi esetben a vállalatok egy extenzív játékot játszanak. A szövegkörnyezetből mindig kiderül, hogy melyik esetről van szó.

3.3. megjegyzés. Az adagolási szabályokat a 4. fejezetben tárgyalom. A Bertrand-Edgeworth típusú modellek specifikációjához az adagolási szabályok nélkülözhetetlenek.

3.4. megjegyzés. Ha megnézzük a profitfüggvény argumentumait, akkor észrevesszük a profitfüggvény három komponensét. Nevezetesen a keresleti függvényt, a költségfüggvényt valamint az adagolási szabályt.

Az oligopol piac ismeretében természetesen megadható a hozzátartozó játék stratégiai formája. Az $O := \langle J, (A_j)_{j=1}^J, (C_j)_{j=1}^J, D, R, (\pi_j)_{j=1}^J \rangle$ struktúrából ugyanis megkapható a $\langle J, (A_j)_{j=1}^J, (u_j)_{j=1}^J \rangle$ stratégiai alak, ahol $u_j(A_1, \ldots, A_J) := \pi_j(D, C_j, R, A_1, \ldots, A_j)$.

Az oligopol piac definíciójában az egyének keresleti görbéi még nem jelennek meg. Mint már említettük az adagolási szabályok pontosan meghatározott alakú keresleti görbéjű fogyasztók egy bizonyos módon történő kiszolgálása során származtathatók.

Ezért szükséges egy a fogyasztókra vonatkozó információkat hordozó struktúra, amelyet az oligopol piac környezetének nevezünk.

3.5. definíció. Az $O^k := \langle (\Omega, \mathcal{A}, \mu), d \rangle$ struktúra egy oligopol piac *környezete*, ha

- Ω a fogyasztók halmaza;
- $\mathcal{A}$ a fogyasztó csoportok egy σ-algebrája;
- μ az $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhető téren értelmezett véges mérték,
- $d : P \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ a fogyasztók keresletét írja le, ahol $d(p, \omega)$ az $\omega \in \Omega$ fogyasztó p ár melletti kereslete. Feltesszük, hogy d minden $p \in P$ ár mellett ω szerint integrálható. Ekkor az aggregált kereslet $D(p) = \int_\Omega d(p, \omega) d\mu(\omega)$.

Mint a következő alfejezetben látni fogjuk, a klasszikus oligopol piacok elemzése nem teszik szükségessé a környezet ismeretét. A Bertrand-Edgeworth típusú modellek vizsgálatához viszont a környezet ismerete elengedhetetlen. A megfelelő adagolási szabályok levezetése mindig adott oligopol piaci környezet esetében végezhető el.

3.2 Klasszikus oligopol modellek

Ebben az alfejezetben a klasszikus oligopol modelleket ágyazom be az előző alfejezetben bevezetett fogalmi rendszerbe.

3.2.1 Cournot oligopólium

A *Cournot oligopólium*

$$\begin{aligned} O_{\text{Cournot}} := \quad \langle \quad & J, Q^J, (C_i)_{i=1}^J, D, R, (\pi_i(D, C_i, R, q_1, \ldots, q_J) := \\ & q_i \cdot D^{(-1)}(q_1 + \cdots + q_J) - C_i(q_i))_{i=1}^J \rangle \end{aligned}$$

formában adható meg. Az R adagolási szabály egy tetszőleges függvény lehet, mivel a π_i kifizetőfüggvények függetlenek az R-től. Látható, hogy a modellben a mennyiség a döntési változó. A modell megfogalmazásakor csak annyi szükséges, hogy a keresleti függvény invertálható legyen. Ahhoz, hogy a Cournot oligopóliumnak létezzen Nash egyensúlya, $\mathcal{D}$ és $\mathcal{C}$-re vonatkozóan további feltételek szükségesek. Erre vonatkozóan lásd többek között Forgó [1996], Friedman [1977,1983] vagy Szidarovszky és Yakowitz [1977] műveit.

Természetesen, ha a megfelelő információk rendelkezésre állnak, akkor a Cournot oligopóliumhoz tartozó környezetet is megadhatjuk. A Cournot oligopólium viszont nem igényli egy adagolási szabály megadását és így az alkalmas adagolási szabály megválasztásának kérdése fel sem vetődik. Ezért az oligopolisták számára az egyéni keresleti görbék ismerete nem hordoz további információt és így a modell egyensúlyi viselkedése csak a piaci keresleti görbétől és a vállalatok költségfüggvényeitől függ.

A Cournot modellel szemben már Bertrand (lásd Friedman-t is, 1983) kifogásolta, hogy a modellben miért a mennyiség, illetve kizárólag a mennyiség a vállalatok döntési változója. Felvetődik annak kérdése, hogy a piacon az ár hogyan kerül meghatározásra. Erre egy fiktív árverező létét tételezik fel, aki a vállalatok által kínált mennyiség és a piaci keresleti görbe ismeretében kikiáltja a piaci árat (lásd többek között Wolfstetter [1993]).

3.2.2 Bertrand oligopólium

Bertrand szerint realisztikusabb döntési változó az ár. A Bertrand oligopólium az alábbi formában specifikálható:

$$O_{\text{Bertrand}} := \langle J, P^J, (C_i)_{i=1}^J, D, R, (\pi_i(D, C_i, R, q_1, \ldots, q_J)_{i=1}^J \rangle,$$

ahol a kifizetőfüggvények $\pi_i(D, C_i, R, p_1, \ldots, p_J) :=$

$$\begin{cases} p_i \frac{D(p_i)}{m(p_1,\ldots,p_J)} - C_i\left(\frac{D(p_i)}{m(p_1,\ldots,p_J)}\right), & \text{ha } p_i = \min_{j=1,\ldots,J} p_j \\ 0, & \text{ha } p_i > \min_{j=1,\ldots,J} p_j, \end{cases}$$

minden $i = 1, \ldots, J$ vállalatra. Itt $m(p_1, \ldots, p_J)$ azon vállalatok száma, amelyek $\min_{j=1,\ldots,J} p_j$ áron kínálják terméküket.

A Bertrand oligopóliumban feltételezés szerint a legalacsonyabb áron kínáló termelő mindig képes a piaci kereslet maradéktalan kielégítésére. Ugyanúgy mint a Cournot oligopóliumnál, az R most is egy tetszőleges függvény lehet, mivel a π_i kifizetőfüggvények függetlenek az R argumentumtól. Ezért teljesen közömbös, hogy a piaci keresleti görbe hogyan származik az egyéni keresleti görbékből. Azaz a környezet megadása a modell egyensúlyi vizsgálata szempontjából szükségtelen.

Megjegyzendő, hogy amennyiben több termelő árai megegyeznek, akkor a kereslet egyenletes megosztása önkényes. Külön vizsgálat tárgya lehetne, hogy azonos kínálati árak mellett a fogyasztók hogyan allokálódnak az egyes vállalatokhoz. Ennek elemzésétől eltekintek.

A Bertrand modell egyensúlyi viselkedését illetően lásd például Osborne [1997] vagy Tirole [1988] műveit. A legalacsonyabb áron kínáló oligopolisták rákényszerülnek a Bertrand modellben $D(p_i)/m(p_1, \ldots, p_J)$ mennyiségű termék előállítására, még akkor is, ha p_i áron számukra gazdaságosabb volna ennél kisebb kibocsátás megállapítása. Már csak ezért is felvetődik olyan modellek vizsgálatának kérdése, amelyekben mind az ár, mind a kínált mennyiség döntési változók. Ha a vállalatok átlagköltségei állandóak, ez a probléma nem vetődik fel. Ha a vállalatok átlagköltségei még meg is egyeznek, akkor Nash egyensúlyban már két vállalat esetében is a vállalatok kínálati árai egyenlők lesznek az átlagköltségeikkel. Ez tovább gyengíti a Bertrand oligopólium szerepét, ugyanis nem várható, hogy akár csak két vállalat esetében a piaci ár megegyezzen a kompetitív piaci árral. Ennek a dilemmának a feloldása is a Bertrand-Edgeworth típusú modellekhez vezet.

3.3 Bertrand-Edgeworth oligopólium

Az eddig tárgyalt oligopol modellek közös vonása, hogy minden egyes oligopolistának csak egy döntési változója volt. A termék árát és a kínált mennyiséget, mint döntési változókat figyelembevevő modellek a Bertrand-Edgeworth oligopóliumok (lásd például Dasgupta és Maskin [1986b]).

A Cournot és a Bertrand oligopóliumokkal ellentétben a Bertrand-Edgeworth oligopóliumok valóban igényelnek egy adagolási szabályt. Továbbá az oligopol piaci környezet struktúra nélkülözhetetlen az adagolási szabályok levezetéseinél. A Bertrand-Edgeworth oligopóliumok tárgyalása indokolta a 3.1 alfejezetben található fogalmak bevezetését. A 3.2 alfejezetben tárgyaltak alapján a klasszikus oligopol modellekben ugyan felesleges az adagolási szabály, azonban az egységes tárgyalás miatt figyelembe kellett venni ezt az oligopol piac definíciójában.

A Bertrand-Edgeworth modelleket leíró struktúra a következő:

$$O_{BE} := \langle J, (Q \times P)^J, (C_i)_{i=1}^J, D, R, (\pi_i)_{i=1}^J \rangle,$$

ahol a kifizetőfüggvények

$$\pi_i(D, C_i, R, (p_1, q_1), \ldots, (p_J, q_J)) := p_i R_i(D, (p_1, q_1), \ldots, (p_J, q_J)) - C_i(q_i)$$

minden $i = 1, \ldots, J$ vállalatra.

A 4. fejezet tárgyalja részletesen az adagolási szabályokat. Meg fogjuk vizsgálni, hogy egy oligopol piaci környezet és egy adott kiszolgálási mód milyen adagolási szabályt eredményez egy oligopol piacon. Az irodalomban kétféle megközelítés létezik arra vonatkozóan, hogy hogyan határozzuk meg a magasabb áron kínáló vállalatok kereslet eit.

Az egyik szerint feltételezik, hogy a keresleti oldal megadható egy reprezentatív fogyasztó hasznossági függvényén keresztül (lásd például Benassy-t [1986]). Ebben az esetben egy fogyasztó korlátozott kínálat melletti hasznosság maximalizációs döntésének vizsgálatával kell foglalkoznunk. Ilyen elemzéseket végeztek többek között Howard [1977] és Neary és Roberts [1980]. A 4.2 alfejezet a reprezentatív fogyasztó reziduális keresletét vizsgálja.

A modell teljes specifikációjának egy másik gyakrabban alkalmazott módja veti fel az adagolási szabály fogalmát. A parciális megközelítésben a fogyasztói oldal az aggregált keresleti görbével adott. Ez további információk hiányában egy elégtelenül specifikált modellt ad. Az információ hiányát egy úgynevezett adagolási szabály segítségével pótolhatjuk. Megjegyzendő, hogy az aggregált keresleti görbe ismerete akkor elégséges, ha az alacsonyabb áron kínáló duopolista lefedi az egész piacot. Ez a helyzet áll fenn a Bertrand duopóliumban. A Bertrand-Edgeworth duopólium esetében azonban az alacsonyabb áron kínáló vállalat nem képes vagy nem érdekelt a piac teljes lefedésében. Az előbbi viselkedés oka lehet a kapacitások korlátos volta, míg az utóbbi viselkedést okozhatja egy U-alakú határköltségfüggvény. Az adagolási szabályok részletes tárgyalását a következő fejezet tartalmazza.

4. fejezet

Adagolási szabályok

A Bertrand-Edgeworth oligopol modellekben a stratégiai változók az ár és a mennyiség. Az adagolási szabály a magasabb áron kínáló vállalatok keresletének megadására alkalmas.

Az elemzéseim során az oligopolisták termékéről feltételezem, hogy homogének. Továbbá az egyszerűbb tárgyalás érdekében csak duopol piacokat vizsgálok. A bevezetett fogalmak kiterjeszthetők tetszőleges számú termelő esetére.

Az első alfejezet formális definíciót ad az adagolási szabályra és ismerteti az irodalomban előszeretettel alkalmazott adagolási szabályokat. A második alfejezet egy fogyasztó reziduális keresletét vizsgálja. A harmadik alfejezet bevezeti az adagolási szabályok megvalósításának fogalmát, amelynek segítségével pontosan megvizsgálható, hogy egy ismert adagolási szabály milyen piacokon alkalmazható. A hátralevő szakaszokban olyan piacokat keresek, amelyeken az irodalomban fellelhető fontosabb adagolási szabályok alkalmazhatók.

4.1 Adagolási szabályok ismertetése

Az adagolás problémája felvetődik fogyasztói és piaci szinten. Fogyasztói szinten meg kell vizsgálni, hogy ha egy fogyasztó az alacsonyabb kínálati áron nem tudja kielégíteni teljes keresletét, akkor mekkora lesz a megmaradó kereslete a magasabb áron. Piaci szinten pedig a modellnek meg kell határoznia a magasabb áron kínáló duopolistának maradó keresletet.

A magasabb áron kínáló vállalat terméke iránti fogyasztói keresletet *reziduális kereslet*nek nevezzük. Az egyéni reziduális keresletet d_r-rel míg a piaci reziduális keresletet D_r-rel jelöljük. A piaci reziduális kereslet egyrészt függ a kiszolgálás módjától, másrészt pedig az egyének reziduális keresletétől.

A duopolisták keresletét és reziduális keresletét megadó függvény az adagolási szabály. Definiáljuk az adagolási szabályt előbb az egyének szintjén.

4.1. definíció. *Egyéni adagolási szabály*nak nevezzük azt a leképezést, amely az egyéni keresleti görbe, a vállalatok árainak és a fogyasztó által megvásárolható mennyiségek ismerete alapján megadja a fogyasztónak a termelőktől vásárolni kívánt termékmennyiségeket. Formálisan, egy duopol piacon az egyéni adagolási szabály egy $\rho : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+$ alakú leképezés.

A piaci szinten az adagolási szabály pedig a következőképpen definiálható.

4.2. definíció. *Adagolási szabály*nak nevezzük azt a leképezést, amely az aggregált keresleti görbe, a vállalatok árainak és kínálatainak ismerete alapján megadja az egyes termelők által értékesíthető termékmennyiségeket. Formálisan egy O duopol piacon az adagolási szabály egy $R : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+$ alakú leképezés.

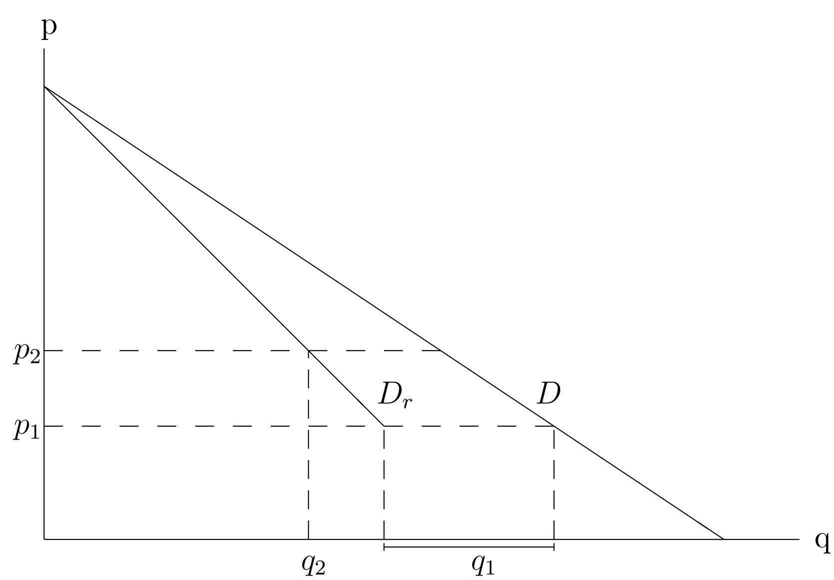
A 4.1 és a 4.2 definíció differenciált termékű piacok tárgyalását is lehetővé teszi. Homogén termékű piacokon az alacsonyabb áron az adagolási szabály mindig a kereslettel, míg a magasabb áron mindig a reziduális kereslettel egyezik meg.

Megjegyzendő, hogy ha egy piacon a fogyasztói oldal egy reprezentatív fogyasztóval leírható, akkor az egyéni és a piaci szint között nem kell különbséget tenni.

Adagolási szabályt először Edgeworth használt egy olyan speciális ár- és mennyiségvezérelt duopol modellben, amelyben a vállalatok termelési kapacitásai korlátosak voltak. Edgeworth modelljében feltételezte, hogy a magasabb áron kínáló duopolista reziduális keresleti görbéje az aggregált keresleti görbéhez képest úgy aránylik, mint az alacsonyabb áron termelő kínálata az alacsonyabb áron felmerülő kereslethez. Azaz, ha az alacsonyabb áron termelő a nála felmerülő kereslet α hányadát képes kielégíteni, akkor a reziduális keresleti görbe $D_r(p) = (1-\alpha)D(p)$. Az általa alkalmazott adagolási szabályt arányos vagy véletlenszerű adagolási szabálynak nevezik. Az arányos adagolási szabályt két termelő esetében a 4.1. ábra szemlélteti.

4.3. definíció. Egy $h : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+$ (egyéni vagy piaci) adagolási szabályt *arányos*nak nevezünk, ha $\forall j \in \{1,2\}$:

$$h_j(D, p_1, q_1, p_2, q_2) := \begin{cases} D(p_j) & \text{ha} \quad p_j < p_i,\ i \neq j; \\ \frac{q_j}{q_1+q_2} D(p_j) & \text{ha} \quad p_j = p_i,\ i \neq j; \\ \Big((1 - \frac{q_i}{D(q_i)})D(p_j)\Big)^+ & \text{ha} \quad p_j > p_i,\ i \neq j. \end{cases}$$

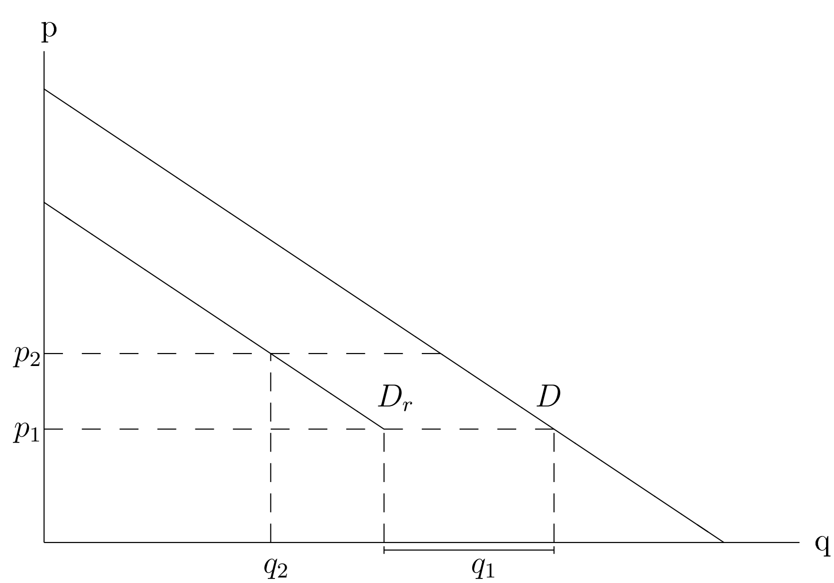


4.1. ábra: Arányos adagolási szabály

Az arányos adagolási szabály mellett gyakran alkalmazott az úgynevezett hatékony vagy más néven párhuzamos adagolási szabály. Hatékonynak azért nevezik ezt az adagolási szabályt, mert rögzített árak és kibocsátások mellett ezen adagolási szabály mellett lesz a fogyasztói többlet maximális. A hatékony adagolási szabály szerint a magasabb áron kínáló vállalat reziduális keresleti görbéje megkapható a keresleti görbe q-val balra történő vízszintes eltolásával, ahol q az alacsonyabb áron értékesített termékmennyiség. Azaz $D_r(p) = D(p) - q$. A 4.2. ábra alapján nem meglepő, hogy a hatékony adagolási szabályt párhuzamos adagolási szabálynak is szokták nevezni. Formálisan:

4.4. definíció. Egy $h : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+$ (egyéni vagy piaci) adagolási szabály *hatékony*, ha $\forall j \in \{1, 2\}$:

$$h_j(D, p_1, q_1, p_2, q_2) := \begin{cases} D(p_j) & \text{ha} \quad p_j < p_i,\ i \neq j; \\ \frac{q_j}{q_1+q_2} D(p_j) & \text{ha} \quad p_j = p_i,\ i \neq j; \\ (D(p_j) - q_i)^+ & \text{ha} \quad p_j > p_i,\ i \neq j. \end{cases}$$



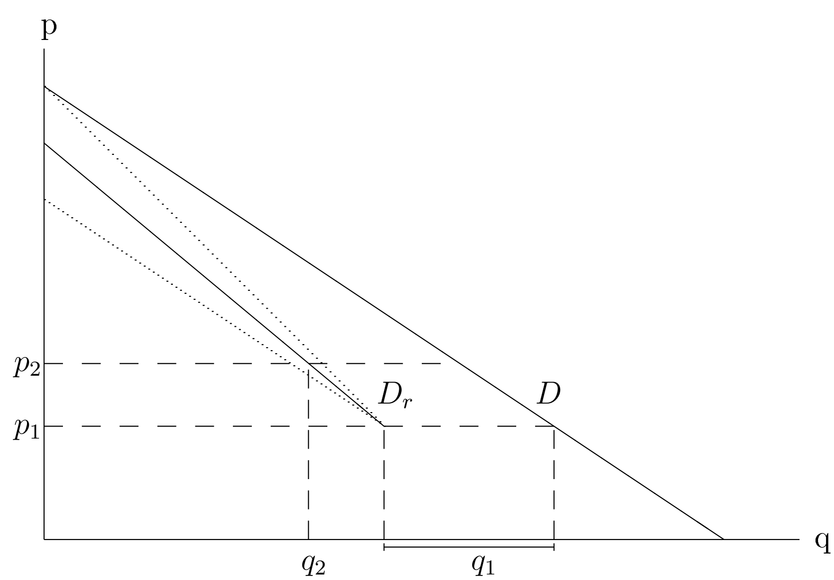
4.2. ábra: Hatékony adagolási szabály

A kombinált adagolási szabály esetén a magasabb áron kínáló termelő kereslete legalább akkora mint a hatékony adagolási szabály esetén és legfeljebb akkora mint az arányos adagolási szabály esetén. Ezt szemlélteti a 4.3 ábra, amelyben a pontozott vonalak az arányos és a hatékony adagolási szabályokhoz tartozó reziduális keresleti görbék.

4.5. definíció. A $h : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+$ függvény egy *kombinált* adagolási szabály $\lambda \in [0,1]$ paraméterrel, ha a $j \in \{1,2\}$ cég kereslete az alábbi:

$$h_j(D,p_1,q_1,p_2,q_2) := \begin{cases} D(p_j) & \text{ha} \quad p_j < p_i,\ i \neq j; \\ \frac{q_j}{q_1+q_2} D(p_j) & \text{ha} \quad p_j = p_i,\ i \neq j; \\ \max\left(D(p_j) - \alpha(p_i,p_j)q_i, 0\right) & \text{ha} \quad p_j > p_i,\ i \neq j; \end{cases}$$

ahol $\alpha(p_i,p_j) = (1-\lambda)\frac{D(p_j)}{D(p_i)} + \lambda$.



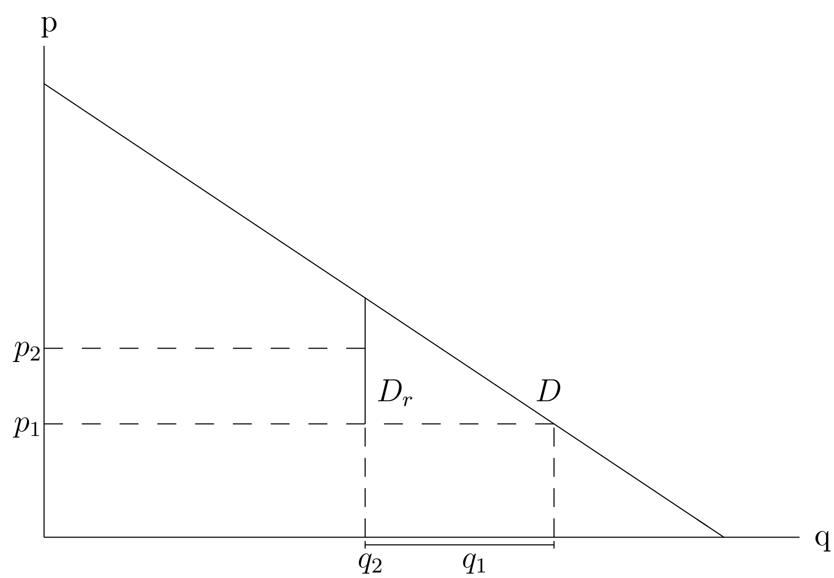
4.3. ábra: Kombinált adagolási szabály

Az arányos és a hatékony adagolási szabályok is egyben kombinált adagolási szabályok. Erről meggyőződhetünk, ha a 4.5 definícióban λ-nak rendre az 0 illetve a 1 értékeket választjuk.

Elképzelhető olyan adagolási szabály is, amely adott árak és kibocsátások mellett nem a fogyasztói többletet maximalizálja, hanem a termelői többletet. Ez a szabály megtalálható megnevezés nélkül Osborne [1997] művében. Ezt az adagolási szabályt termelő-hatékony adagolási szabálynak nevezem. A termelő-hatékony adagolási szabályt szemlélteti a 4.4. ábra. Formálisan egy duopol piacon a termelő-hatékony adagolási szabály:

4.6. definíció. Egy $h : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+$ függvény egy *termelő-hatékony* adagolási szabály, ha a $j \in \{1, 2\}$ cég kereslete az alábbi:

$$h_j(D, p_1, q_1, p_2, q_2) := \begin{cases} D(p_j) & \text{ha} \quad p_j < p_i, \; i \neq j; \\ \frac{q_j}{q_1+q_2} D(p_j) & \text{ha} \quad p_j = p_i, \; i \neq j; \\ \max\left(0, \min\left(D(p_j), D(p_i) - q_i\right)\right) & \text{ha} \quad p_j > p_i, \; i \neq j. \end{cases}$$



4.4. ábra: Termelő-hatékony adagolási szabály

4.2 Egy fogyasztó esete

Ebben az alfejezetben az egyéni adagolási szabályt kívánjuk meghatározni. A feladat megoldásához a fogyasztó hasznossági függvényéből indulunk ki. A hasznossági függvényből a mikroökonómiai fogyasztáselmélet segítségével meghatározható a fogyasztó eredeti és reziduális keresleti görbéje.

Az oligopólium irodalom fő irányvonalával összhangban az elemzésünk parciális jellegű lesz. A fogyasztó hasznossági függvénye $U(x, m)$, ahol x a duopolisták által kínált termékből fogyasztott mennyiség és m egy összetett jószágból történt fogyasztás mennyisége. Az összetett jószágot a továbbiakban pénznek nevezzük. Továbbá feltesszük, hogy U kétszer folytonosan differenciálható, és $U_x > 0$, $U_m > 0$. Jelölje $\overline{m} > 0$ a fogyasztó pénzkészletét. A fogyasztó hasznosság-maximalizációs problémája az alábbi alakba írható feltéve, hogy $p_1 < p_2$

$$\begin{aligned} U(x_1 + x_2, \overline{m} - p_1 x_1 - p_2 x_2) &\rightarrow \max \\ x_1 &\leq q_1 \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 &\leq \overline{m} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

ahol x_1 és x_2 az egyes duopolistáktól vásárolt mennyiségeket jelölik.

A fenti feltételeknek eleget tevő, U hasznossági függvényhez tartozó keresleti görbét jelölje d. A fogyasztó korlátozott kínálat melletti hasznosság-maximalizációs feladat megoldása és az adagolási szabály között a következő definíció teremt kapcsolatot:

4.7. definíció. Legyen a (4.1) feladat megoldása x_1^* és x_2^*. Ekkor azt mondjuk, hogy a fogyasztó a ρ adagolási szabályt *valósítja meg*, vagy másképpen mondva a ρ adagolási szabály *szerint viselkedik*, ha

$$\begin{aligned} \rho_1(d, p_1, q_1, p_2, q_2) &= d(p_1), \\ \rho_2(d, p_1, q_1, p_2, q_2) &= x_2^* \end{aligned}$$

a duopolisták tetszőleges $p_1 < p_2$, $q_1, q_2 \in \mathbb{R}_+$ döntése mellett.

Általános hasznossági függvények esetében a reziduális kereslet értékét explicite nem lehet megmondani, ezért a fogyasztó reziduális keresletét speciálisan Cobb-Douglas és kvázilineáris hasznossági függvények esetében vizsgálom. Az így kapott reziduális keresletek értékeit összehasonlíthatom az egyes adagolási szabályok alapján nyerhető reziduális keresletek értékeivel.

Megjegyzendő, hogy a reziduális keresleti görbe meghatározásának grafikus módjára eljárás található Shubik [1955] művében. Ennek lényege, hogy a fogyasztó költségvetési egyenese megtörik az alacsonyabb áron kínált termék mennyiségnél. Így a fogyasztó optimális döntése a megtört költségvetési egyenes és az azt metsző közömbösségi görbe érintési pontja.

4.2.1 Cobb-Douglas hasznossági függvény

Vizsgáljuk meg a fogyasztó viselkedését abban az esetben, ha a hasznossági függvénye Cobb-Douglas típusú. A Cobb-Douglas esetben összehasonlítható az optimális megoldás értéke az adagolási szabályok segítségével nyerhető értékekkel. Az eredményeket az alábbi állítás foglalja össze.

4.8. állítás. *Tegyük fel, hogy egy duopol piacon csak egy fogyasztó van. A hasznossági függvénye $u(x,m) = Ax^\alpha m^\beta$, ahol $0 < \alpha$, $0 < \beta$ és $\alpha + \beta < 1$. A pénzkészlete $\overline{m}$ pozitív. A duopolisták árai adottak és legyen $0 < p_1 < p_2$. Az alacsonyabb árú vállalat kínálata $q_1 > 0$. Ekkor a fogyasztónk haszonmaximalizációs problémájának egyértelműen létezik megoldása. Továbbá*

1. *ha*

$$\overline{m} > p_1 q_1 + \frac{\beta}{\alpha} p_2 q_1, \tag{4.2}$$

   akkor az optimális megoldás

$$x_1^* = q_1, \quad x_2^* = \frac{\alpha\overline{m} - q_1(\alpha p_1 + \beta p_2)}{(\alpha+\beta)p_2} \tag{4.3}$$

   és x_2^* értéke egy $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ paraméterű kombinált adagolási szabály megvalósulását jelenti;

2. *ha $\overline{m} \le p_1 q_1 + \frac{\beta}{\alpha} p_2 q_1$, akkor $x_2^* = 0$.*

Bizonyítás: A hasznosságát maximalizálni kívánó fogyasztónknak az alábbi feladatot kell megoldania:

$$\begin{aligned} A(x_1+x_2)^\alpha(\overline{m} - p_1x_1 - p_2x_2)^\beta &\rightarrow \max \\ x_1 &\le q_1 \\ p_1x_1 + p_2x_2 &\le \overline{m} \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Ellenőrizhető, hogy a célfüggvényünk szigorúan konkáv az α és β paraméterekre kirótt megkötések miatt. Ezért az unicitás biztosított. A (4.4) problémához tartozó Lagrange függvény $\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) =$

$$A(x_1+x_2)^\alpha(\overline{m} - p_1x_1 - p_2x_2)^\beta - \lambda_1(x_1 - q_1) - \lambda_2(p_1x_1 + p_2x_2 - \overline{m})$$

és a hozzá tartozó Kuhn-Tucker feltételek a következők:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1} = \; & A\alpha(x_1+x_2)^{\alpha-1}(\overline{m}-p_1x_1-p_2x_2)^{\beta}- \\
& A\beta p_1(x_1+x_2)^{\alpha}(\overline{m}-p_1x_1-p_2x_2)^{\beta-1}-\lambda_1-\lambda_2p_1\leq 0 \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2} = \; & A\alpha(x_1+x_2)^{\alpha-1}(\overline{m}-p_1x_1-p_2x_2)^{\beta}- \\
& A\beta p_2(x_1+x_2)^{\alpha}(\overline{m}-p_1x_1-p_2x_2)^{\beta-1}-\lambda_2p_2\leq 0 \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = \; & q_1-x_1\geq 0 \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = \; & \overline{m}-p_1x_1-p_2x_2\geq 0 \quad \text{és} \\
& x_1\geq 0, \quad x_2\geq 0, \quad \lambda_1\geq 0, \quad \lambda_2\geq 0 \quad \text{és} \\
& x_1\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1}=0, \quad x_2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2}=0, \quad \lambda_1\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda_1}=0, \quad \lambda_2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda_2}=0.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Vegyük észre, hogy a Kuhn-Tucker feltételek nincsenek értelmezve az

$$S := \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2_+ | p_1q_1+p_2q_2=\overline{m}\}\cup\{(0,0)\} \tag{4.6}$$

halmazon. S-beli értékek nem lehetnek optimálisak, ugyanis a hozzájuk tartozó hasznossági szint nulla, de látható, hogy pozitív hasznossági szintek elérhetők. Ezért $\lambda_2^*=0$.

1. Először tegyük fel, hogy az optimális megoldás, x_2^* pozitív. Belátjuk, hogy x_2^* pozitivitása maga után vonja x_1^* és λ_1 pozitivitását is. Tegyük fel, hogy $\lambda_1=0$ volna. Ha ekkor (4.5) első feltétele teljesül, akkor a második feltételben határozott egyenlőtlenség áll fenn. Így $x_2^*=0$ adódna, ami ellentmond kiinduló feltevésünknek. Ezért $\lambda_1>0$. Emiatt a harmadik komplementaritási feltételből $x_1^*=q_1$ adódik. Tehát (4.5) első három feltételében egyenlőség áll fenn. Így olyan nem negatív λ_1 értéket kell találnunk, amely kielégíti az első két egyenlőséget. (4.5) második feltételéből

$$\frac{A\alpha}{p_2}(q_1+x_2^*)^{\alpha-1}(\overline{m}-p_1q_1-p_2x_2^*)^{\beta}-A\beta(q_1+x_2^*)^{\alpha}(\overline{m}-p_1q_1-p_2x_2^*)^{\beta-1}=0$$

adódik. Az első (4.5)-beli egyenlőségből viszont következik, hogy létezik $\lambda_1>0$, mivel $p_1<p_2$. A második egyenlőségből kifejezhető x_2^* és pontosan a (4.3)-beli érték adódik. Ellenőrizhető, hogy a (4.2) feltétel ekvivalens a (4.3) által adott x_2^* pozitivitásával.

A Cobb-Douglas hasznossági függvényhez tartozó keresleti görbe (mint ismeretes)

$$D(p) = \frac{\alpha\overline{m}}{p(\alpha+\beta)} \tag{4.7}$$

(lásd például Varian [1992]). Így (4.3) a következő alakba írható:

$$x_2^* = D(p_2) - q_1\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{D(p_2)}{D(p_1)} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right) \tag{4.8}$$

Ugyanezt az értéket adja a $\beta/(\alpha+\beta)$ paraméterű kombinált adagolási szabály is.

A bizonyítás első pontjának befejezéséhez még meg kell mutatnunk, hogy (4.4) $x_2^* = 0$ megoldása esetében (4.2) nem állhat fenn. Három esetet kell megvizsgálnunk: $x_1^* = 0$, $0 < x_1^* < q_1$ és $x_1^* = q_1$.

(i) $x_1^* = x_2^* = 0$ nem lehet a (4.4) feladat megoldása, mivel ekkor $u(0, \overline{m}) = 0$ lenne és pozitív hasznossági szintek nyilván elérhetők.

(ii) Ha $0 < x_1^* < q_1$, akkor (4.5) alapján $\lambda_1 = 0$ következik. Már tudjuk, hogy ekkor $\lambda_2 = 0$. x_1^* értékét kifejezve az első feltételből $x_1^* = \frac{\alpha\overline{m}}{(\alpha+\beta)p_1}$ adódik. De ezt az értéket (4.5) harmadik feltételébe helyettesítve ellentmondáshoz jutunk a (4.2) feltétellel.

(iii) Ha $x_1^* = q_1$, akkor a költségvetési korlátból $p_1 q_1 \leq \overline{m}$ adódik. Ez pedig ellentmond (4.2)-nek.

2. Indirekten tegyük fel, hogy $x_2^* > 0$ egy megoldás és (4.2) nem áll fenn. Mint azt az első részben már beláttuk, $x_2^* > 0$ megoldás esetében, x_2^* értékét (4.3) adja meg. Feltevésünk szerint ez pozitív. De ekkor (4.2) is igaz. Tehát ellentmondásra jutottunk. □

4.9. megjegyzés. A (4.8) egyenlőségeket alaposabban szemügyre véve látható, hogy a fogyasztó megközelítőleg az arányos adagolási szabálynak megfelelően fog viselkedni, ha β nullához közeli érték. Ha pedig α esik közel nullához, akkor a fogyasztó megközelítőleg a hatékony adagolási szabálynak megfelelően viselkedik.

4.2.2 Kvázilineáris hasznossági függvény

Legyen a fogyasztó hasznossági függvénye $U(x, m) = u(x) + m$ alakú, ahol x a vizsgált oligopol piac termékéből és m egy összetett jószágból fogyasztott mennyiség. A továbbiakban feltesszük, hogy u monoton növekvő, szigorúan konkáv és kétszer folytonosan differenciálható függvény, továbbá a fogyasztó pénzkészlete $\overline{m} > 0$ adott. A fogyasztó haszonmaximalizációs problémája az alábbi:

$$\begin{aligned} u(x_1 + x_2) + \overline{m} - p_1 x_1 - p_2 x_2 &\rightarrow \max \\ x_1 &\leq q_1 \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 &\leq \overline{m} \\ x_1, x_2 &\geq 0, \end{aligned} \tag{4.9}$$

ahol $p_1 < p_2$ és q_1 az alacsonyabb áron kínáló duopolista termelése. Írjuk fel a (4.9) feladathoz tartozó Lagrange függvényt: $\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) =$

$$u(x_1 + x_2) + \overline{m} - p_1 x_1 - p_2 x_2 - \lambda_1 (x_1 - q_1) - \lambda_2 (p_1 x_1 + p_2 x_2 - \overline{m})$$

A maximalizálandó célfüggvény szigorúan konkáv, kétszer folytonosan differenciálható. Mivel a feltételi függvények konvexek (sőt lineárisak) és $q_1 > 0$, $\overline{m} > 0$, ezért teljesül a Slater-feltétel. Tehát a Kuhn-Tucker főtétel alapján a Kuhn-Tucker feltételek megoldási halmaza megegyezik a (4.9) feladat optimális megoldásával.

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = u'(x_1 + x_2) - p_1 - \lambda_1 - \lambda_2 p_1 \leq 0 & \text{és } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0, & \text{ha } x_1 > 0; \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = u'(x_1 + x_2) - p_2 - \lambda_2 p_2 \leq 0 & \text{és } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0, & \text{ha } x_2 > 0; \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = q_1 - x_1 \geq 0 & \text{és } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0, & \text{ha } \lambda_1 > 0; \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = \overline{m} - p_1 x_1 - p_2 x_2 \geq 0 & \text{és } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 0, & \text{ha } \lambda_2 > 0. \end{array} \tag{4.10}$$

Szükségünk lesz a kvázilineáris hasznossági függvényhez tartozó alábbi egyéni keresleti függvényre:

$$d(p) = \begin{cases} (u')^{-1}(p), & \text{ha} \quad u'(\overline{m}/p) < p, \\ \overline{m}/p, & \text{ha} \quad u'(\overline{m}/p) \geq p. \end{cases} \tag{4.11}$$

Most térjünk vissza a (4.10) feladat megoldására. Először tekintsük az alábbi állítást:

4.10. állítás. *A (4.9) feladatnak egyértelműen létezik megoldása. Ha* x_1^*, x_2^* *a megoldása, akkor*

1. *ha* $x_2^* > 0$, $u'(q_1 + x_2^*) > p_2$
   (a) *és* $u'(\overline{m}/p_1) \geq p_1$, *akkor az arányos adagolási szabály valósul meg;*
   (b) *és* $u'(\overline{m}/p_1) < p_1$, *akkor a fogyasztónk reziduális kereslete meghaladja az arányos adagolási szabály által meghatározott mennyiséget;*
2. *ha* $x_2^* > 0$ *és* $u'(q_1 + x_2^*) = p_2$, *akkor a hatékony adagolási szabály valósul meg.*

Bizonyítás: Jelölje a továbbiakban x_1^*, x_2^*, λ_1^* és λ_2^* a (4.10) feladat megoldását. Az u-ra és a paraméterekre vonatkozó feltevéseink mellett mindig egyértelműen létezik a (4.9) feladatnak megoldása, ugyanis a feltételi halmaz egy nem üres, kompakt, konvex halmaz és a maximalizálandó célfüggvény szigorúan konkáv.

Először megmutatjuk, hogy x_2^* pozitivitása maga után vonja x_1 és λ_1 pozitivitását. Tegyük fel, hogy $\lambda_1 = 0$. Ekkor, ha (4.10) első feltétele teljesül, akkor a második feltétel határozott egyenlőtlenség formájában teljesül. Tehát $x_2 = 0$ következne, ami ellentmondáshoz vezetne. Ezért $\lambda_1 > 0$. Így pedig $\lambda_1 > 0$ miatt $x_1 > 0$ is következik, $x_1 = q_1$ alapján a harmadik komplementaritási feltételből. A tétel belátásához csak két esetet kell megvizsgálnunk aszerint, hogy a negyedik komplementaritási feltételben egyenlőség áll-e vagy nem.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen feltételek mellett léteznek olyan $\lambda_1^* > 0$, $\lambda_2^* \geq 0$ értékek, hogy x_1^*, x_2^* értékekkel együtt a (4.10) feladat megoldását kapjuk. Írjuk le újra (4.10) első két feltételét, amelyek most egyenlőségként teljesülnek.

$$\begin{bmatrix} u'(q_1 + x_2) - p_1 \\ u'(q_1 + x_2) - p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & p_1 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

A fenti egyenletrendszerhez keressünk pozitív λ_1 és nem negatív λ_2 megoldásokat. A (4.12) egyenletrendszer mátrixa invertálható és így az alábbi ekvivalens alakra hozható.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{p_2} \begin{bmatrix} p_2 & -p_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(q_1+x_2)-p_1 \\ u'(q_1+x_2)-p_2 \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

$\lambda_1 > 0$ már önmagában a $p_2 > p_1$ és $u' > 0$ kiinduló feltevésekből adódik. λ_2 nem negativitásához két esetet kell megvizsgálnunk.

1. Az állítás első pontjában az alábbi feltételezés szerepel:

$$u'(q_1 + x_2^*) > p_2 \tag{4.14}$$

λ_2 pozitivitása ekvivalens (4.14)-gyel (4.13) miatt. Továbbá $\lambda_2 > 0$ miatt egyenlőség szerepel (4.10) utolsó egyenlőtlenségében a komplementaritási feltételek következtében. Ennek alapján a fogyasztónk jövedelmét teljes egészében elkölti. Az utolsó két egyenlőtlenség alapján $x_1^* = q_1$ és $x_2^* = \frac{\overline{m}-p_1q_1}{p_2}$ adódik.

(a) Belátjuk, hogy (4.14) és $u'(\overline{m}/p_1) \geq p_1$ teljesülése mellett az arányos adagolási szabály szerint cselekszik fogyasztónk. (4.14)-ből és az $\overline{m}/p_2 < q_1+x_2$ triviális becslésből $u'(\overline{m}/p_2) > p_2$ adódik. Az egyéni keresleti görbe (4.11) szerint $d(p_2) = \overline{m}/p_2$ valamint $d(p_1) = \overline{m}/p_1$. Tehát az

$$x_2^* = \frac{\overline{m}-p_1q_1}{p_2} = \frac{\overline{m}}{p_2}\left(1-\frac{q_1}{d(p_1)}\right) = d(p_2)\left(1-\frac{q_1}{d(p_1)}\right) \tag{4.15}$$

egyenlőségek teljesülnek. Ellenőrizhető, hogy $q_1 \leq d(p_1)$, mivel ellenkező esetben (4.10) negyedik feltétele sérülne. (4.15)-ben felismerhető az arányos adagolási szabály.

(b) Tegyük fel, hogy (4.14) és $u'(\overline{m}/p_1) < p_1$ áll fenn. Az utóbbi feltevés ekvivalens az $\overline{m}/p_1 > (u')^{-1}(p_1)$ egyenlőtlenséggel. Az egyéni keresleti görbe (4.11) szerint $d(p_1) = (u')^{-1}(p_1)$. Az eddigiek alapján kapjuk a következő egyenlőtlenségeket: $x_2^* =$

$$\frac{\overline{m}-p_1q_1}{p_2} = \frac{\overline{m}}{p_2}\left(1-\frac{q_1}{\overline{m}/p_1}\right) > \frac{\overline{m}}{p_2}\left(1-\frac{q_1}{d(p_1)}\right) = d(p_2)\left(1-\frac{q_1}{d(p_1)}\right) \tag{4.16}$$

Ez volt bizonyítandó.

Közgazdaságilag (4.14) azt jelenti, hogy a fogyasztónk határhasznossága meghaladja a magasabb kínálati árat is. Ezért a fogyasztónk teljes pénzkészletét hajlandó elkölteni a kínált termékre.

2. Még a $\lambda_2 = 0$ esetet kell megvizsgálni. Az állítás második pontjában feltételeztük, hogy az optimális megoldás kielégíti az alábbi egyenlőséget:

$$u'(q_1 + x_2^*) = p_2 \tag{4.17}$$

Ez pontosan $\lambda_2 = 0$ voltát jelenti (4.13) miatt. Ezért $x_2^* = (u')^{-1}(p_2) - q_1$. Tehát a fogyasztónk a hatékony adagolási szabály szerint viselkedik. Közgazdaságilag (4.17) azt jelenti, hogy a fogyasztónk határhasznossága megegyezik a magasabb kínálati árral. □

A feltételeket figyelembe véve a közgazdaságilag releváns esetben a fogyasztónk a hatékony adagolási szabálynak megfelelően viselkedik. Nyilvánvalóan irrealisztikus feltételezés, hogy a fogyasztó teljes jövedelmét a duopolisták által kínált termékre költi. Már pedig az arányos adagolási szabály csak e feltétel mellett fordulhat elő. Nem igazán jó érv lenne arra hivatkozni, hogy a duopolisták által kínált termék az egyetlen létfenntartáshoz szükséges termék.

Különösebb számítások elvégzése nélkül is a hatékony adagolási szabály szerinti viselkedési szabályt várnánk. A fogyasztó egyéni keresleti görbéje megadja, hogy a magasabb áron a fogyasztó $d(p_2)$ mennyiséget kíván megvásárolni. Az alacsonyabb áron már q_1 mennyiséget tudott vásárolni. A magasabb áron pedig még $\max\{d(p_2) - q_1, 0\}$ mennyiséget kíván vásárolni. Ezen érvelés az alacsonyabb áron történt vásárlásból származó jövedelmi hatás hiányában helytálló. Megjegyzendő, hogy a kvázilineáris hasznossági görbénél ilyen jövedelmi hatás várható, ha a fogyasztót a további vásárlástól csak a költségvetési korlátja tartja vissza.

A következő állítás a (4.9) feladat teljes megoldását tartalmazza.

4.11. állítás. *A $\lim_{x\to\infty} u'(x) = 0$ és a 4.10 állítás feltevései mellett a (4.9) feladat explicit megoldása az alábbi:*

1. *ha $u'(0) \leq p_1$, akkor $x_1^* = 0$ és $x_2^* = 0$;*

2. *ha $u'(0) > p_1$ és $\overline{m} \leq p_1 q_1$, akkor $x_1^* = \min\{(u')^{-1}(p_1),\ \overline{m}/p_1\}$ és $x_2^* = 0$;*

3. ha $u'(0) > p_1$, $\overline{m} > p_1 q_1$ és $u'(q_1 + \frac{\overline{m}-p_1q_1}{p_2}) > p_2$, akkor $x_1^* = q_1$ és $x_2^* = \frac{\overline{m}-p_1q_1}{p_2}$;

4. ha $u'(0) > p_1$, $\overline{m} > p_1 q_1$, $u'(q_1) > p_1$ és $u'(q_1 + \frac{\overline{m}-p_1q_1}{p_2}) \leq p_2$, akkor $x_1^* = q_1$ és $x_2^* = \max\{(u')^{-1}(p_2) - q_1, 0\}$.

5. ha $u'(0) > p_1$, $\overline{m} > p_1 q_1$, $u'(q_1) \leq p_1$ és $u'(q_1 + \frac{\overline{m}-p_1q_1}{p_2}) \leq p_2$, akkor $x_1^* = (u')^{-1}(p_1)$ és $x_2^* = 0$.

Bizonyítás: 1. Tegyük fel, hogy feltevéseinkkel ellentétben x_1^* vagy x_2^* pozitív. Ebből kifolyólag $p_2 > p_1 \geq u'(0) > u'(x_1^* + x_2^*)$. Így (4.10)-ben az első két feltétel nem elégíthető ki, ami ellentmondás.

2. Nyilván $\overline{m} \leq p_1 q_1$ maga után vonja, hogy $x_1^* \leq q_1$. Ha feltesszük, hogy $(u')^{-1}(p_1) \geq \frac{\overline{m}}{p_1}$, akkor $x_1^* = \overline{m}/p_1$, $x_2^* = 0$, $\lambda_1^* = 0$ és $\lambda_2^* = \frac{u'(\overline{m}/p_1) - p_1}{p_1}$ megoldása a (4.10) problémának.

Ha pedig $(u')^{-1}(p_1) < \frac{\overline{m}}{p_1}$, akkor az $x_1^* = (u')^{-1}(p_1)$, $x_2^* = 0$, $\lambda_1^* = 0$ és $\lambda_2^* = 0$ megoldása a (4.10) problémának.

3. Ellenőrizendő, hogy ha $u'(0) > p_1$, $\overline{m} > p_1 q_1$ és $u'(q_1 + \frac{\overline{m}-p_1q_1}{p_2}) > p_2$, akkor $x_1^* = q_1$ és $x_2^* = \frac{\overline{m}-p_1q_1}{p_2}$ megoldása (4.10)-nek. Azonnal látjuk, hogy (4.10) utolsó két feltétele egyenlőség formájában teljesül x_1^*-ra és x_2^*-ra. Ezért azt kell megmutatni, hogy léteznek olyan megfelelő nem negatív λ_1^* és λ_2^* értékek, amelyek x_1^* és x_2^* értékekkel együttesen a (4.10) megoldását szolgáltatják. De a feltételeket figyelembe véve, ezt már beláttuk az előző állítás bizonyításában.

4. Két esetet kell vizsgálni. Az elsőben tegyük fel, hogy $u'(q_1) > p_2$. Ez maga után vonja olyan $\hat{x}_2 \in (0, \frac{\overline{m}-p_1q_1}{p_2})$ érték létezését, amelyre $u'(q_1 + \hat{x}_2) = p_2$. Az előző állítás második pontjának felhasználásával megkapjuk 4.10 megfelelő részét.

A második esetben tegyük fel, hogy $u'(q_1) \leq p_2$. Belátjuk, hogy $x_1^* = q_1$ és $x_2^* = 0$ egy megoldás. (4.10) utolsó két feltétele nyilván teljesül. Az utolsó feltételből pedig $\lambda_2 = 0$ adódik. A második egyenlőtlenség pedig $u'(q_1) \leq p_2$ alakba írható, amely most feltevés szerint teljesül. Az első feltétel ekkor $u'(q_1) = p_1 + \lambda_1$ alakba írható x_1^* pozitivitása miatt. Ez az egyenlet pedig megoldható nem negatív λ_1-re, mivel $p_1 < p_2$ és a 4. pont feltevései között szerepel $u'(q_1) > p_1$.

5. Csak annyit kell belátni, hogy $x_1^* = (u')^{-1}(p_1)$, $x_2^* = 0$, $\lambda_1^* = 0$ és $\lambda_2^* = 0$ egy megoldása a (4.10) problémának. De ez viszont nyilvánvaló. □

4.12. megjegyzés. Az állítás 5. pontjában szereplő utolsó feltétel redundáns, itt csak azért szerepel, mert így jobban látható, hogy nem hagytunk el egyetlen esetet sem a (4.9) probléma megoldásakor.

4.3 Adagolási szabályok megvalósítása

A fogyasztói oldal az O^k oligopol piaci környezettel részben adott. A piaci adagolási szabály meghatározásához még a fogyasztók egyéni adagolási szabályainak megadása szükséges. A tárgyalás egyszerűsítése céljából a következő feltevéssel élünk:

4.13. feltevés. A fogyasztók a hatékony adagolási szabály szerint viselkednek.

4.14. megjegyzés. A hatékony adagolási szabály alkalmazása indokolt a 4.10 állítás feltételei mellett. Alapjában véve jövedelmi hatások hiányában a fogyasztók a hatékony adagolási szabály szerint viselkednek (lásd Shubik [1955]).

A termelők döntései ár és mennyiség párokból állnak. Jelölje $A_i = \mathbb{R}_+^2$ ($i \in \{1, 2\}$) az i-edik duopolista döntési halmazát. A $(p_i, q_i) \in A_i$ ár és mennyiség pár az $i \in \{1, 2\}$ duopolista egy döntését jelöli. Legyen továbbá $A = A_1 \times A_2$ a döntések halmaza. A továbbiakban feltesszük, hogy a termelőket úgy indexeltük, hogy $p_1 < p_2$. A $p_1 = p_2$ esetek elemzésétől eltekintünk. Adagolás nyilván csak akkor szükséges, ha $q_1 < D(p_1)$, így a továbbiakban $A' := \{a \in A \mid p_1 < p_2,\ q_1 < D(p_1)\}$ halmazbeli döntések vizsgálatára szorítkozhatunk.

A duopolisták bármely adott $a \in A'$ döntése esetén meg kell határozni, a reziduális kereslet értékét. Ehhez meg kell adnunk, hogy egy kiszolgálás során a fogyasztók mekkora termékmennyiségeket tudnak megvásárolni az alacsonyabb áron. Ennek érdekében minden egyes $\omega \in \Omega$ fogyasztóhoz hozzárendelendő egy X_ω valószínűségi változó, amely $[0, d(p_1, \omega)]$ intervallumbeli értékeket vesz fel.

Feltételezzük, hogy egy rögzített $a \in A'$ döntés esetében az X_ω valószínűségi változók az $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ valószínűségi mértéktéren adottak, ahol Ω' olyan $\Omega \to \mathbb{R}_+$ típusú mérhető leképezések egy halmaza, amelyre ha $f \in \Omega'$, akkor $f(\omega) \in [0, d(p_1, \omega)]$, továbbá $\mathcal{A}'$ egy σ-algebra Ω'-n. Ω' elemei megadják, hogy az egyes fogyasztók mekkora termékmennyiséghez jutottak az alacsonyabb áron. Ω' elemeit *elosztásnak* is nevezzük. Ekkor X_ω egy $\Omega' \to [0, d(p_1, \omega)]$ valószínűségi változó.

4.15. definíció. Egy $Y \in \Omega'$ leképezést *kiszolgálásnak* nevezzük, ha $\int_\Omega Y(\omega) d\mu(\omega) = q_1$.

A kiszolgálás a p_1 árú termékek olyan elosztása, amely során pontosan q_1 mennyiségű (p_1 árú) termék kerül elosztásra. Az O^k oligopol piaci környezetben a duopolisták ár és mennyiségi döntéseikkel, továbbá a fogyasztók kiszolgálásának módjának meghatározásával egy olyan piaci helyzetet teremtenek, amelyből már meghatározható a reziduális kereslet értéke. A szükséges információt a következő struktúra adja meg:

4.16. definíció. Egy a termelők által meghatározott *piaci szituáció* egy

$$s = \langle (\Omega, \mathcal{A}, \mu), d, \{1, 2\}, (p_1, q_1, p_2, q_2), (\Omega', \mathcal{A}', P') \rangle$$

struktúrával írható le, ahol $(p_1, q_1, p_2, q_2) \in A'$.

Egy $a \in A'$ döntéshez tartozó reziduális keresletet a továbbiakban D^a-val jelöljük. Ha a piacon az értékesíthető mennyiségek egy R adagolási szabállyal megadhatók, akkor a reziduális kereslet a következővel egyenlő:

$$D^a(p_2) = R_2(D, p_1, q_1, p_2, q_2).$$

A reziduális kereslet nem feltétlenül determinisztikus függvény, hanem valószínűségi eloszlás is lehet, mint azt a későbbiek során látni fogjuk.

Fontos kérdés annak vizsgálata, hogy milyen piaci szituációban valósul meg egy adott adagolási szabály. Mindenekelőtt modellünkben csak olyan elosztásokat engedhetünk meg, amelyek kiszolgálások.

4.17. definíció. Egy s piaci szituáció eleget tesz a *kiszolgálási feltételnek*, ha

$$P'(\{Y \in \Omega' \mid \int_\Omega Y(\omega)d\mu(\omega) = q_1\}) = 1.$$

Szavakban: egy elosztás 1 valószínűséggel kiszolgálás.

Használni fogjuk a kiszolgálási feltételnek egy enyhébb változatát.

4.18. definíció. Az $(s^{(n)})_{n=1}^\infty$ piaci szituációk sorozata kielégíti az *aszimptotikus kiszolgálási feltételt*, ha egyrészt $p_1^{(n)} = p_1$, $p_2^{(n)} = p_2$, $q_1^{(n)} = q_1$ és $q_2^{(n)} = q_2$, másrészt

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P'^{(n)}\left(\left\{Y \in \Omega'^{(n)} \ : \ \left|\int_{\Omega^{(n)}} Y(\omega)d\mu(\omega) - q_1\right| < \varepsilon\right\}\right) = 1.$$

Az adagolási szabály megvalósíthatóságának három fajtáját értelmezem.

4.19. definíció. Egy s piaci szituációban egy R adagolási szabály *valósul meg*, ha s eleget tesz a kiszolgálási feltételnek és

$$P'\left(Y \in \Omega' \mid R_2(D, p_1, q_1, p_2, q_2) = \int_\Omega (d(p_2, \omega) - Y(\omega))^+ d\mu(\omega)\right) = 1.$$

Egy adagolási szabállyal szemben annak megvalósíthatósága egy meglehetősen erős követelmény. A megvalósíthatóság fogalmának egyik gyengítése az aszimptotikus megvalósíthatóság fogalma.

4.20. definíció. Egy R adagolási szabály aszimptotikusan megvalósítható, ha létezik a piaci szituációk egy olyan $(s^{(n)})_{n=1}^\infty$ sorozata, amely kielégíti az aszimptotikus kiszolgálási feltételt, továbbá az alábbi feltételt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P'^{(n)}\left(\left\{Y \in \Omega'^{(n)} \ : \ \left|\frac{\int_{\Omega^{(n)}} \left(d^{(n)}(p_2, \omega) - Y(\omega)\right)^+ d\mu(\omega)}{R_2(D, p_1, q_1, p_2, q_2)} - 1\right| < \varepsilon\right\}\right) = 1.$$

Ha egy adagolási szabály megvalósítható, akkor aszimptotikusan is megvalósítható, ugyanis ha az s piaci szituáció megvalósítja az R adagolási szabályt, akkor az $(s, s, \dots, s, \dots)$ piaci szituációk sorozata aszimptotikusan megvalósítja az R adagolási szabályt.

A megvalósíthatóság fogalmának egy másik gyengítése a várható értékben való megvalósíthatóság.

4.21. definíció. Egy s piaci szituációban egy R adagolási szabály várható értékben valósul meg, ha s eleget tesz a kiszolgálási feltételnek és

$$R_2(D, p_1, q_1, p_2, q_2) = \int_{\Omega'} \int_{\Omega} (d(p_2, \omega) - Y(\omega))^+ d\mu(\omega) dP'(Y).$$

Ha egy adagolási szabály megvalósítható, akkor nyilván várható értékben is megvalósítható. Ennek megfordítása nem igaz, erre ellenpélda a 4.4.5 szakaszban található piaci szituáció.

4.4 Az arányos adagolási szabály megvalósításai

Tisztázandó kérdés, hogy milyen piaci helyzeteken keresztül lehet az arányos adagolási szabályt megvalósítani. Az irodalomban sok helyütt heurisztikus, vázlatos vagy pontatlan levezetések találhatók, mivel az adott tanulmányok célja nem az adagolási probléma rendszerezett tárgyalása volt. Ebben az alfejezetben ezért az irodalomban található olyan piaci szituációkat tekintem át, amelyek esetében az arányos adagolási szabály valósul meg. Továbbá ott, ahol ez szükséges, az adott levezetést pontosítom.

Az alacsonyabb áron kínáló duopolista, amíg a készlete tart, addig a sorra kerülő fogyasztó igényeit maradéktalanul kielégíti. Azaz arányos adagolási szabály megvalósításakor csak 0 és $d(p_1, \omega)$ értékű valószínűségi változókra lesz szükség.

4.22. feltevés. Adott s piaci szituáció esetén feltesszük, hogy minden $\omega \in \Omega$ fogyasztóhoz rendelt X_ω valószínűségi változó értéke 0 vagy $d(p_1, \omega)$.

A 4.22 feltevés miatt az arányos adagolási szabály megvalósításai függetlenek a fogyasztók egyéni adagolási szabályaitól, azaz attól a feltételtől, hogy a fogyasztók a hatékony adagolási szabály szerint viselkednek.

Az egyes piaci szituációkban meg kell vizsgálnunk, hogy az alacsonyabb áron kínáló vállalat mely fogyasztókat szolgálja ki előbb. Nyilván a reziduális keresletet azok a fogyasztók fogják majd alkotni, akik az alacsonyabb áron nem jutottak a termékhez. Mint majd látni fogjuk, az arányos adagolási szabályt megvalósító piaci szituációk azt feltételezik, hogy a kiszolgálás sorrendje véletlenszerű legyen.

4.23. feltevés. Adott s piaci szituációban mindegyik fogyasztó ugyanakkora eséllyel juthat az olcsóbbik termékhez, azaz $P'(X_\omega = d(p_1, \omega)) = q$ és $P'(X_\omega = 0) = 1 - q$, ahol $q = q_1/D(p_1)$.

4.4.1 Azonos egyéni keresleti görbék

Tekintsük a többek között Wolfstetter [1993] művében megtalálható piaci szituációt. Tegyük fel, hogy mindegyik fogyasztó keresleti görbéje ugyanaz a $d(p)$ függvény továbbá, hogy $\Omega = \{1, \ldots, I\}$ véges sokan vannak, valamint teljesülnek a 4.22 és 4.23 feltevések. Legyen az első termelő ára az alacsonyabbik, azaz $p_1 < p_2$. A számunkra érdekes esetben $q_1 < I \cdot d(p_1)$. Nyilván $M := \left\lfloor \frac{q_1}{d(p_1)} \right\rfloor$ személy szolgálható ki maradéktalanul. Ezt a piaci szituációt az

$$s^I = \langle (\{1, \ldots, I\}, \mathcal{P}(\{1, \ldots, I\}), \zeta), d^*, \{1, 2\}, (p_1, q_1, p_2, q_2), (\Omega', \mathcal{A}', P') \rangle$$

struktúrával írhatjuk le, ahol ζ a számláló mérték, $d^*(p, \omega) = d(p)$ minden $\omega \in \{1, \ldots, I\}$ és P' pedig az egyenletes eloszlás mértéke az

$$\{f \in \{0, d(p_1)\}^{\{1,\ldots,I\}} | \sum_{i=1}^{I} f(i) = Md(p_1)\}$$

halmazon.

Nézzük először azt az esetet, amikor $d(p_1)$ osztója q_1-nek. Ekkor a kiszolgálási feltétel nyilván teljesül. Továbbá az alábbi azonosságokból látható, hogy ekkor s^I valóban megvalósítja az arányos adagolási szabályt.

$$\int_\Omega (d^*(p,\omega) - X(\omega))^+ \, d\zeta(\omega) = (I-M)d(p) =$$
$$= (1-\frac{M}{I})D(p) = (1-\frac{q_1}{D(p_1)})D(p).$$

Ha $d(p_1)$ nem osztója q_1-nek, akkor lesz egy olyan személy, akinek a kereslete csak részben elégíthető ki az alacsonyabb áron. Ekkor ezt a fogyasztót határfogyasztónak nevezzük. Ha I elég nagy, akkor a határfogyasztó döntése egyre kisebb szerepet játszik. Ennek alapján igazolható, hogy az s^I piaci szituációk sorozata aszimptotikusan megvalósítja az arányos adagolási szabályt.

4.4.2 A fogyasztók eloszlása atommentes

Egy másik megközelítés szerint, ha a fogyasztók ár szerinti eloszlásmértéke atommentes[1], akkor (a (4.18) és a (4.19) segédfeltevés mellett) megkapható az arányos adagolási szabály. Ez a megközelítés található meg Allen és Hellwig [1986] valamint Gelman és Salop [1983] műveiben.

Az arányos adagolási szabály biztosításához fel kell téteteleznünk, hogy nincs szignifikáns különbség az alacsonyabb áron kiszolgált és a kiszolgálatlan fogyasztók között. Formálisan legyen $B \subset \Omega$ azon fogyasztók halmaza, akiket kiszolgáltak az alacsonyabb áron. Ekkor minden $p > 0$ ár mellett az

$$\int_B d(p,\omega) d\mu(\omega) = \mu(B)D(p) \tag{4.18}$$

és

$$\int_{B^c} d(p,\omega) d\mu(\omega) = \mu(B^c)D(p) \tag{4.19}$$

feltevések szükségesek.

Belátjuk, hogy a (4.18) és a (4.19) feltevések valóban biztosítják az arányos adagolási szabály alkalmazhatóságát. Tegyük fel most is, hogy $p_1 < p_2$.

[1]Az $A \subset \Omega$ egy atom az $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktérben, ha $\mu(A) > 0$ és a $B \subset A$ tartalmazásból következik, hogy $\mu(A) = \mu(B)$ vagy $\mu(B) = 0$. A μ mértéket atommentesnek mondjuk, ha $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ nem tartalmaz atomot.

Nyilván a $D(p_1) > q_1$ eset az érdekes, mivel különben a reziduális kereslet értéke nulla. Ekkor $q_1 = \int_B d(p_1, \omega) d\mu(\omega) = \mu(B)D(p_1)$, a (4.18) feltevés miatt. Átalakítva: $\mu(B) = q_1/D(p_1)$. Ezt és a (4.19) feltevést felhasználva a másik vállalat kereslete

$$\int_{B^c} d(p_2, \omega) d\mu(\omega) = \mu(B^c)D(p_2) = (1 - \mu(B))D(p_2) = \left(1 - \frac{q_1}{D(p_1)}\right) D(p_2),$$

ami pontosan az arányos adagolási szabály szerinti reziduális kereslettel egyezik meg.

Valójában a (4.18) és a (4.19) feltételek nem a fogyasztók szintjén adottak, hanem már egyfajta aggregációt tartalmazó feltételek. Allen és Hellwig [1986] levezetése precíz, azonban felveti annak a kérdésnek a vizsgálatát, hogy a fogyasztók egyéni keresleti görbéitől és a fogyasztók kiszolgálásnak módjától függően, mikor teljesülnek a (4.18) és (4.19) feltételek. Ennek a kérdésnek a megvizsgálása nem egyszerűbb az általam megfogalmazott megvalósíthatósági problémánál.

A (4.18) feltevés valójában azt követeli meg, hogy a kiszolgált fogyasztók kereslete és az összkereslet aránya egyezzen meg a kiszolgált fogyasztók halmazának mértékével. Hasonlóan interpretálható a (4.19) feltevés is. A fenti megközelítés hiányossága, hogy nem vonható le belőle aszimptotikus következtetés, vagyis a modell véges sok fogyasztó esetére semmiféle következtetésre nem jogosít fel. Ezt a kifogást küszöböli ki a 4.4.5 szakaszban a megszámlálhatóan végtelen sok fogyasztóra bemutatott levezetés.

4.4.3 Véletlen minta

Az arányos adagolási szabály alkalmazhatóságára egy heurisztikus indoklást ad többek között Davidson és Deneckere [1986]. A keresleti görbére vonatkozó feltételt külön kiemeljük, mivel a későbbiek során még több helyütt használjuk.

4.24. feltevés. Mindegyik fogyasztó pontosan $0 < \alpha < \infty$ mennyiséget hajlandó vásárolni, mégpedig legfeljebb r rezervációs áron. Azaz keresleti görbéje

$$d(p) = \begin{cases} \alpha, & \text{ha} \quad p \leq r \ ; \\ 0, & \text{ha} \quad p > r \end{cases}$$

alakú. Az ilyen alakú keresleti görbéket a továbbiakban α paraméterű egyszerű keresleti görbéknek nevezzük.

A levezetés szerint a 4.22, 4.23, 4.24 feltevések és $\alpha = 1$ paraméterérték mellett, ha az adagolási szabályt úgy próbáljuk meghatározni, hogy egy véletlen minta alapján rendeljük hozzá az alacsonyabb p_1 áron vásárolni kívánó fogyasztókat a q_1 kínálathoz, akkor bármely rezervációs áron a fogyasztók $q_1/D(p_1)$ hányadát szolgálják ki az alacsonyabb áron. Ezzel az érveléssel az a baj, hogy az összefüggés véges sok fogyasztó esetén nem áll fenn, továbbá végtelen sok fogyasztó esetében valójában nem is beszélhetünk mintavételről, ugyanis a mintaelemszám nem kicsi az alapsokaság elemszámához képest, mivel egy végtelen elemű minta vételéről lenne szó. Az, hogy ez a heurisztikus érvelés megszámlálhatóan végtelen sok fogyasztó esetében mégis helyes eredményhez vezet, a 4.4.5 szakaszban leírt hipergeometriai eloszlásra vonatkozó határeloszlási tétel miatt igaz.

4.4.4 A kiszolgálás valószínűsége azonos

Egy másik heurisztikus indoklás az arányos adagolási szabály alkalmazhatóságára Tirole [1988, p. 213-214] művében található. Feltevése szerint minden egyes fogyasztó azonos valószínűséggel juthat hozzá az alacsonyabb árú termékhez. Tekintsünk most is egy adott $a \in A'$ termelői döntést. Tegyük fel a 4.22 és 4.23 feltevések, valamint a 4.24 feltevés $\alpha = 1$ paraméterérték melletti teljesülését. Ha most azt mondjuk, hogy mindenki $q := q_1/D(p_1)$ valószínűséggel juthat hozzá az alacsonyabb áron a termékhez, akkor véges sok fogyasztó esetében nyilván ilyen módon egyáltalán nem biztos, hogy pontosan q_1 darab terméket osztunk szét.

A leírt gondolatmenet helytálló, ha kontinuum sok fogyasztó van. Célszerű a feladatot a $[0,1]$ intervallumra transzformálni. Legyen $\Omega^* = [0,1]$ a fogyasztók halmaza és legyenek a fogyasztók rezervációs áraik szerint monoton csökkenőleg rendezettek. A fogyasztókat írja le a $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ mértéktér, ahol $\mathcal{B}([0,1])$ a $[0,1]$ intervallum Borel halmazainak σ-algebrája és λ az ezen értelmezett Lebesgue-Borel mérték.

Legyen $B = [0,b] \subset \Omega^*$ azon fogyasztók halmaza, akik az alacsonyabb áron vásárolni szeretnének. Tehát $D(p_1) = b$. Jelölje $M \subset \{0,1\}^{\Omega^*}$ azon $\Omega^* \to \{0,1\}$ mérhető leképezések halmazát, amelyek az $\Omega^* \setminus B$ halmazon majdnem mindenütt nullát vesznek fel értékül. Egy adott $f \in M$ függvény $f(x)$ helyen felvett értéke ($x \in B$) megadja, hogy az x fogyasztó hozzájutott-e az alacsonyabb áron a termékhez.

Tekintsük az $\Omega := \{0,1\}$ alaphalmazt és a hozzá tartozó $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\{0,1\})$ σ-algebrát. Vegyük az $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhető téren a $t \in B$ fogyasztókhoz a P_t valószínűségi mértékeket az alábbi módon:

$$P_t(H) = \begin{cases} 0, & \text{ha } H = \emptyset; \\ q, & \text{ha } H = \{1\}; \\ 1-q, & \text{ha } H = \{0\}; \\ 1, & \text{ha } H = \Omega. \end{cases} \tag{4.20}$$

Továbbá rendeljük a $t \in \Omega^* \setminus B$ fogyasztókhoz a $P_t(H) = 0$, ha $1 \in H$; és $P_t(H) = 1$, ha $1 \notin H$ mértéket. Ekkor egyértelműen létezik (lásd például Bauer [1991] 9.2 tételét és annak következményeit) az $(\Omega', \mathcal{A}') := (\Omega^{\Omega^*}, \mathcal{A}^{\Omega^*})$ mérhető téren egy olyan P' valószínűségi mérték, amelyre:

$$\forall T \subset \Omega^* : |T| < \infty, Pr_T(P') = \prod_{t \in T} P_t,$$

ahol Pr a projekciós operátor. A P' mértéket explicite nem tudjuk megadni, de ez nem is szükséges a probléma megoldásához. Jelölje $X_t : \Omega' \to \{0,1\}$ az egymástól független olyan valószínűségi változókat, amelyekre $X_t(f) = f(t)$, ahol $t \in [0,b]$ és $f \in \Omega'$.

Vezessük be az $r := D(p_2)$ jelölést. Ekkor a legalább p_2 rezervációs árú fogyasztók a $[0,r]$ intervallumon helyezkednek el. A nagy számok Kolmogorov-féle erős törvénye alapján $Y_n := \sum_{i=1}^{n} X_{t_i} r \frac{1}{n} \to qr$ egy valószínűséggel, ha $n \to \infty$, ahol $t_i \in [r\frac{i-1}{n}, r\frac{i}{n}]$. Az Y_n egy Riemann-féle integrál közelítő összeg. Ezért ha $f \in M$ az X_t valószínűségi változók egy realizációja, akkor az f Riemann-féle integrálja egy valószínűséggel létezik és méghozzá egy valószínűséggel qr. Az $\int_0^r f d\lambda$ értéke megadja, hogy a magasabb rezervációs árú fogyasztók közül hányan jutottak hozzá p_1 áron a termékhez.

Az $\int_0^b f d\lambda$ érték megadja, hogy a fogyasztók közül összesen hányan jutottak a p_1 áron a termékhez (ahol $f \in M$). Ahhoz, hogy pontosan annyi terméket osszunk szét, mint amennyi a kínálat, az $\int_0^b f d\lambda = q_1$ feltételnek kell teljesülnie. Ez utóbbi pedig fennáll, azaz f egy valószínűséggel egy kiszolgálás, mivel az előző bekezdésben leírt gondolatmenetben $r = b$ választva azt kapjuk, hogy az integrál értéke qb, tehát pontosan q_1 mennyiségű alacsonyabb áron kínált termék talál gazdára. Beláttuk, hogy $D(p_2) - D^a(p_2) = qr$, amely átalakításával megkapható az alábbi tétel:

4.25. tétel. *Teljesüljenek a 4.22 és 4.23 feltételek, valamint 4.24 feltétel az* $\alpha = 1$ *paraméterérték mellett. Ekkor az*

$$s = \langle (\Omega^*, \mathcal{A}^*, \lambda), d, \{1, 2\}, (p_1, q_1, p_2, q_2), (\Omega', \mathcal{A}', P') \rangle$$

piaci szituációban a reziduális kereslet egy valószínűséggel:

$$D^a(p_2) = D(p_2)(1 - q) = D(p_2)\left(1 - \frac{q_1}{D(p_1)}\right), \tag{4.21}$$

ha $a = (p_1, q_1, p_2, q_2) \in A'$.

A kontinuum sok fogyasztóra elvégzett levezetés megszámlálható sok fogyasztóra átvihető. Ehhez azonban a piaci szituáció fogalma kisebb módosításra szorul. A fogyasztókat egy $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, \nu)$ végesen additív mértéktérrel írjuk le, ahol ν legyen a természetes számok részhalmazainak sűrűsége. Azaz

$$\nu(A) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_A(i), \tag{4.22}$$

feltéve, hogy a fenti határérték létezik. Legyen

$$\mathcal{N} := \{A \subset \mathbb{N} \mid \exists \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_A(i)\}.$$

Belátható, hogy $\mathcal{N}$ egy algebra és ν pedig egy végesen additív mérték az $\mathcal{N}$ halmazon.

A fogyasztók rezervációs árai legyenek az $(r_n, n \in \mathbb{N})$ sorozattal adottak. Feltesszük, hogy a rezervációs árak sorozata olyan, hogy minden $p > 0$ ár mellett a p ár mellett vásárolni szándékozó fogyasztók halmazának létezik sűrűsége, azaz $C(p) := \{n \in \mathbb{N} \mid r_n \geq p\} \in \mathcal{N}$. Mivel a 4.24 feltevés fennáll $\alpha = 1$ mellett, ezért $D(p) = \nu(C(p))$. Legyen $K := C(p_2) = \{k_1, k_2, \dots\}$, valamint $\kappa := \nu(K)$. Egy adott $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ sorozat $f(n)$ helyen felvett értéke $(n \in \mathbb{N})$ megadja, hogy az n-edik fogyasztó hozzájutott-e az alacsonyabb áron a termékhez.

A kontinuum esethez hasonlóan most is egyértelműen létezik az $(\Omega', \mathcal{A}') := (\Omega^{\mathbb{N}}, \mathcal{A}^{\mathbb{N}})$ mérhető téren egy olyan P' valószínűségi mérték, amelyre

$$\forall T \subset \mathbb{N} : |T| < \infty, Pr_T(P') = \prod_{t \in T} P_t.$$

Jelölje $X_n : \Omega' \to \{0,1\}$ az egymástól független olyan valószínűségi változókat, amelyekre $X_n(f) = f(n)$, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $f \in \Omega'$.

A nagy számok Kolmogorov-féle erős törvénye alapján

$$Y_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} 1_K(i) X_i \approx \frac{j}{n} \sum_{i=1}^{j} X_{k_i} \frac{1}{j} \to q\kappa$$

egy valószínűséggel, ha $n \to \infty$, ahol j értéke olyan, hogy $k_j \leq n$ és $n < k_{j+1}$. Az Y_n egy sűrűség közelítő összeg. Ezért ha f az X_n valószínűségi változók egy realizációja, akkor a $H = \{n \in K \mid f(n) = 1\}$ halmaz az alacsonyabb áron kiszolgált magasabb áron is vásárolni hajlandó fogyasztók halmaza. Ennek alapján a H sűrűsége egy valószínűséggel létezik, továbbá az értéke egy valószínűséggel $q\kappa$. Ezek szerint a magasabb rezervációs árú fogyasztók $q\kappa$ hányada lesz kiszolgálva az alacsonyabb áron.

Tehát beláttuk, hogy $D(p_2) - D^a(p_2) = q\kappa$, amely átalakításával megkapható az alábbi tétel:

4.26. tétel. *Teljesüljenek a 4.22 és 4.23 feltételek, valamint 4.24 feltétel az*

$\alpha = 1$ paraméterérték mellett. Ekkor a $(p_1, q_1, p_2, q_2) \in A'$ döntéshez tartozó

$$s = \langle (\mathbb{N}, \mathcal{N}, \nu), d, \{1, 2\}, (p_1, q_1, p_2, q_2), (\Omega', \mathcal{A}', P') \rangle$$

piaci szituációban a reziduális kereslet egy valószínűséggel:

$$D^a(p_2) = D(p_2)(1 - q) = D(p_2) \left(1 - \frac{q_1}{D(p_1)}\right). \tag{4.23}$$

4.4.5 Megszámlálhatóan végtelen sok fogyasztó esete

A 4.26 tételben már megszámlálhatóan végtelen sok fogyasztó mellett levezettük az arányos adagolási szabályt. A levezetést a piaci szituáció fogalmának gyengítése mellett végeztük. Ebben a szakaszban a piaci szituáció fogalmának módosítása nélkül vezetjük le az arányos adagolási szabályt megszámlálhatóan végtelen sok fogyasztó esetében a 4.23 és 4.24 feltételek mellett.

Véges számú fogyasztók esete egyszerű keresleti görbék mellett

A duopolisták döntései legyenek $(p_1, q_1, p_2, q_2) \in A'$. Tegyük fel egyelőre, hogy a fogyasztók száma véges, azaz $\Omega = \{1, \ldots, I\}$. A fogyasztókat az $(\{1, \ldots, I\}, \mathcal{P}(\{1, \ldots, I\}), \zeta)$ mértéktér írja le, ahol ζ a számláló mértéket jelöli. Legyenek a d_i egyéni keresleti görbék $1/I$ paraméterű egyszerű keresleti görbék. Jelölje r_i az $i \in \Omega$ fogyasztó rezervációs árát. A $B \subset \Omega$ legyen azon fogyasztók halmaza, akiknek a rezervációs ára legalább p_1. A piaci szituáció megadásához $\Omega' = \{0, 1/I\}^\Omega$ halmazon, illetve a $\mathcal{P}(\Omega')$ σ-algebrán kell még megadnunk egy valószínűségi mértéket. Vegyük az Ω'-nek az

$$L := \{f \in \Omega' \mid \sum_{i=1}^{I} f(i) = \frac{\lfloor I q_1 \rfloor}{I}, \forall i \in \Omega \setminus B : f(i) = 0\}$$

részhalmazát. Legyen ekkor

$$P'(\{f\}) = \begin{cases} 1/|L|, & \text{ha } f \in L; \\ 0, & \text{ha } f \notin L. \end{cases} \tag{4.24}$$

Az így megadott piaci szituációt jelölje s_I.

Vezessük be a $H_k(N, M, n) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ jelölést. Azaz $H(N, M, n)$ az N, M, n paraméterű hipergeometriai valószínűségi eloszlást jelöli.

4.27. tétel. *Az s_I piaci szituációban a reziduális kereslet eloszlása*

$$D^a(p_2) = \frac{1}{I} H(ID(p_1), ID(p_2), Iq_1), \tag{4.25}$$

ha a duopolisták döntése olyan, hogy $Iq_1 \in \mathbb{N}$ is teljesül.

Bizonyítás: Minden fogyasztó pontosan $1/I$ egységet igényel. Azon fogyasztók halmazát, akik hajlandóak megadni a p_2 összeget jelölje M_2, míg azon fogyasztók halmazát, akik a magasabb árért nem veszik meg a terméket, de az alacsonyabb árért még igen, jelölje M_1. Formálisan $M_1 := \{i \in \Omega : p_1 \leq r_i < p_2\}$ és $M_2 := \{i \in \Omega : p_2 \leq r_i\}$. Nyilván $D(p_1) - D(p_2) = |M_1|/I$ és $D(p_2) = |M_2|/I$. Az M_2 halmazba tartozó fogyasztók p_2-nél olcsóbban is hozzájuthatnak a termékhez. Jelölje az X valószínűségi változó azon M_2 halmazbeli fogyasztók számát, akik p_1 áron hozzájutnak a termékhez. Az alacsonyabb áron termékhez jutó $M_1 \cup M_2$-beli fogyasztók száma Iq_1. Az $M_1 \cup M_2$ halmazbeli fogyasztók összesen $\binom{|M_1|+|M_2|}{Iq_1}$ féleképpen szerezhetik meg a q_1 olcsóbb terméket. X hipergeometriai eloszlású, mivel feltettük, hogy mindegyik fogyasztó azonos eséllyel juthat az olcsóbb termékhez, ezért

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{|M_2|}{k}\binom{|M_1|}{Iq_1 - k}}{\binom{|M_1|+|M_2|}{Iq_1}}.$$

Figyelembe véve M_1 és M_2 jelentését, a tételt bebizonyítottuk. □

4.28. megjegyzés. A reziduális kereslet várható értéke pontosan az arányos adagolási szabályt adja. Ezzel azt is beláttuk, hogy a fent leírt piaci szituációban az arányos adagolási szabály várható értékben valósul meg.

4.29. megjegyzés. Az $Iq_1 \in \mathbb{N}$ feltétel azért szükséges, mert a reziduális kereslet értéke különben még attól is függne, hogy az a fogyasztó, akinek kereslete csak részben teljesíthető p_1 áron, a magasabb vagy az alacsonyabb rezervációs árú fogyasztók köréből kerül ki. Vezessük be a $\tilde{q}_1 = \lfloor Iq_1 \rfloor$ jelölést. A későbbiekben szükségünk lesz arra a könnyen igazolható megállapításra, hogy ha I elég nagy, akkor a reziduális kereslet eloszlása

$$D^a(p_2) \approx \frac{1}{I} H(ID(p_1), ID(p_2), \tilde{q}_1). \tag{4.26}$$

A hipergeometriai eloszlás egy határeloszlása

A megszámlálhatóan végtelen sok fogyasztóra való áttéréshez szükséges a hipergeometriai eloszlás egy speciális határeloszlása, amelyben a „selejtarány" mellett a kiválasztási arány is állandó marad. Tekintettel arra, hogy az alábbi tétel bizonyítása nem szerepel standard valószínűségszámítási könyvekben, a tétel egy bizonyítását is megadom.

4.30. tétel. *Legyen* $x_k := \frac{k-\mu(N,M,n)}{\sigma(N,M,n)}$, *ahol* $\mu(N,M,n) := n\frac{M}{N}$ *és* $\sigma(N,M,n) := \sqrt{n\frac{M}{N}\frac{N-M}{N}\frac{N-n}{N}}$. *Tegyük fel, hogy* M *és* n *értékei eleget tesznek az alábbi összefüggésnek:*

$$\frac{M}{N} \to r, \frac{n}{N} \to q, \text{ha } N \to \infty, \ \text{ahol } r, q \in (0,1). \tag{4.27}$$

Ha $N \to \infty$ *és*

$$|x_k| := \frac{|k-\mu(N,M,n)|}{\sigma(N,M,n)} \ \text{korlátos}, \tag{4.28}$$

akkor

$$H_k(N,M,n) \sim \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k-\mu(N,M,n)}{\sigma(N,M,n)}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma(N,M,n)}. \tag{4.29}$$

Bizonyítás: A bizonyítás során szükségünk lesz a Stirling formulára:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{4.30}$$

ahol O egy olyan függvény, amelyre

$$\lim_{n\to\infty}\frac{O(f(n))}{f(n)} = K, \ \text{ahol } K \text{ konstans}. \tag{4.31}$$

Továbbá felhasználjuk az alábbi összefüggést:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3), \ \text{ha } |x| < 1. \tag{4.32}$$

Vezessük be még a következő jelölést:

$$y_k := x_k\sigma(N,M,n), \tag{4.33}$$

ekkor nyilván $k = n\frac{M}{N} + y_k$ és $n - k = n\frac{N-M}{N} - y_k$.

A bevezetett jelöléseket felhasználva és (4.30)-at alkalmazva: $H_k(N, M, n) =$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{M(N-M)n(N-n)}}{\sqrt{(n\frac{M}{N}+y_k)(M\frac{N-n}{N}-y_k)(n\frac{N-M}{N}-y_k)(\frac{(N-n)(N-M)}{N}+y_k)N}}\cdot \\
&\cdot\frac{M^M(N-M)^{N-M}n^n(N-n)^{N-n}}{(n\frac{M}{N}+y_k)^{n\frac{M}{N}+y_k}(M\frac{N-n}{N}-y_k)^{M\frac{N-n}{N}-y_k}(n\frac{N-M}{N}-y_k)^{n\frac{N-M}{N}-y_k}}\cdot \\
&\cdot\frac{1}{(\frac{(N-n)(N-M)}{N}+y_k)^{\frac{(N-n)(N-M)}{N}+y_k}N^N}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

ahol a Stirling formulából adódó O tagokat már elhagytuk, ezek (4.27) és (4.28) miatt mind nullához tartanak, ha $N \to \infty$. A nevező y_k-t is tartalmazó tagjait hozzuk $(1 \pm \frac{y_k}{a})$ alakra. Egyszerűsítések elvégzése után csoportosítsuk (4.34)-et egy négy tagú szorzattá:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{NNN}{nM(N-M)(N-n)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1+\frac{y_k}{n\frac{M}{N}})(1-\frac{y_k}{M\frac{N-n}{N}})(1-\frac{y_k}{n\frac{N-M}{N}})(1+\frac{y_k}{\frac{(N-n)(N-M)}{N}})}}\cdot$$

$$\frac{M^M(N-M)^{N-M}n^n(N-n)^{N-n}N^{-N}}{(n\frac{M}{N}+y_k)^{n\frac{M}{N}+y_k}(M\frac{N-n}{N}-y_k)^{M\frac{N-n}{N}-y_k}(n\frac{N-M}{N}-y_k)^{n\frac{N-M}{N}-y_k}(\frac{(N-n)(N-M)}{N}+y_k)^{\frac{(N-n)(N-M)}{N}+y_k}}\cdot$$

$$\frac{1}{(1+\frac{y_k}{n\frac{M}{N}})^{n\frac{M}{N}+y_k}(1-\frac{y_k}{M\frac{N-n}{N}})^{M\frac{N-n}{N}-y_k}(1-\frac{y_k}{n\frac{N-M}{N}})^{n\frac{N-M}{N}-y_k}(1+\frac{y_k}{\frac{(N-n)(N-M)}{N}})^{\frac{(N-n)(N-M)}{N}+y_k}}$$

Az első tag nyilván $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(N,M,n)}$. Továbbá (4.27) és (4.28) miatt a második tag 1-hez tart, ha $N \to \infty$. Egyszerű átalakításokkal meggyőződhetünk arról, hogy a harmadik tényező értéke 1. A legtöbb megfontolást a negyedik tag igényli:

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\left(n\tfrac{M}{N}+y_k\right)\log\left(1+\tfrac{y_k}{n\frac{M}{N}}\right)\right) * \\
&\exp\left(\left(M\tfrac{N-n}{N}-y_k\right)\log\left(1-\tfrac{y_k}{M\frac{N-n}{N}}\right)\right) * \\
&\exp\left(\left(n\tfrac{N-M}{N}-y_k\right)\log\left(1-\tfrac{y_k}{n\frac{N-M}{N}}\right)\right) * \\
&\exp\left(\left(\tfrac{(N-n)(N-M)}{N}+y_k\right)\log\left(1+\tfrac{y_k}{\frac{(N-n)(N-M)}{N}}\right)\right).
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Most (4.32) alkalmazásával, figyelembe véve, hogy (4.27) és (4.28) miatt az O tagot elhagyhatjuk, ha $N \to \infty$, akkor (4.35) egyenlő az alábbi kifejezéssel:

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\tfrac{1}{2}y_k^2\left(\tfrac{N}{nM}+\tfrac{N}{M(N-n)}+\tfrac{N}{n(N-M)}+\tfrac{N}{(N-n)(N-M)}\right)\right) * \\
&\exp\left(-\tfrac{1}{2}y_k^3\left(\tfrac{N^2}{(nM)^2}-\tfrac{N^2}{M^2(N-n)^2}-\tfrac{N^2}{n^2(N-M)^2}+\tfrac{N^2}{(N-n)^2(N-M)^2}\right)\right).
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Az y_k^2 mögött szereplő szorzótényező — amely egyszerű átalakításokkal ellenőrizhető — éppen $1/\sigma^2(N, M, n)$. Az y_k^3 mögötti szorzó tényező pedig nullához tart, ha $N \to \infty$. Így y_k jelentését figyelembe véve bebizonyítottuk a tételt. □

Megszámlálható számosságú fogyasztók esete egyszerű keresleti görbék mellett

Gondoljuk végig, hogy mit is várunk a megszámlálható esettől. Tartsuk meg továbbra is a 4.23 és a 4.24 feltételeket. Legyen adott egy D^* monoton csökkenő és folytonos keresleti görbe, amelyre $D^*(0) < \infty$. A D^* keresleti görbe tetszőlegesen közelíthető egyszerű egyéni keresleti görbék aggregálásával, ha a fogyasztók számát, az α paramétert és a rezervációs árakat megfelelően választjuk. Ehhez az egyes fogyasztók keresleteinek végtelenül kicsivé kell válnia, mert különben a $D^*(0)$ értéke végtelen lenne. A megszámlálható esetet a 4.27 tétel segítségével a fogyasztók számának végtelenbe tartásával kaphatjuk meg.

Jelölje az áttekinthetőbb jelölés érdekében I helyett i a fogyasztók számát. Tegyük fel, hogy $p_1 < p_2$ és ekkor legyen $M_i = i \cdot D_i(p_2)$, $N_i = i \cdot D_i(p_1)$, $n_i = \lfloor i \cdot q_1 \rfloor$, $r_i := \frac{M_i}{N_i} = \frac{D_i(p_2)}{D_i(p_1)}$ és $t_i := \frac{n_i}{N_i} \approx \frac{q_1}{D_i(p_1)}$. Tegyük fel továbbá, hogy az $r = \lim_{i\to\infty} r_i$, $q = \lim_{i\to\infty} t_i$ és a $D(p) = \lim_{i\to\infty} D_i(p)$ $(\forall p \in \mathbb{R}_+)$ határértékek léteznek.

Amennyiben csak megszámlálhatóan végtelen sok fogyasztónk van, akkor a 4.29 megjegyzés és a 4.30 tétel alapján megoldható a feladat.

4.31. tétel. *A fenti feltételek mellett a reziduális kereslet* $(p_1 < p_2)$*:*

$$D^a(p_2) = D(p_2)(1 - q). \tag{4.37}$$

Bizonyítás: A 4.27 tétel és 4.29 megjegyzés alapján a véges eset hipergeometriai eloszlással leírható. Legyen $\mu_i = t_i r_i$ és $\sigma_i^2 = t_i(1 - t_i) r_i(1 - r_i)$. A 4.30 tétel alapján megfelelő feltételek esetén

$$H_k(N_i, M_i, n_i) \sim \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{(k - N_i\mu_i)^2}{N_i\sigma_i^2}}}{\sqrt{2\pi N_i}\sigma_i}. \tag{4.38}$$

Első lépésként meghatározzuk, hogy a terméket magasabb áron is megvásárolni hajlandó fogyasztók hányad része jut hozzá alacsonyabb áron a termékhez. Ezért végrehajtjuk az $x = k/N_i$ transzformációt. Ha $Y \sim \mathrm{N}(N_i\mu_i, \sigma_i\sqrt{N_i})$, akkor az $X_i = Y/N_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i/\sqrt{N_i})$. De ha $i \to \infty$, akkor X_i szórása nullához tart. Tehát ha X_i határeloszlását X-szel jelöljük, akkor az X konstans valószínűségi változó, mégpedig $\mu := \lim_{i\to\infty}\mu_i$ állandóval. Tehát $\frac{D(p_2)-D^a(p_2)}{D(p_1)} = \mu = qr$ eredményhez jutottunk. Ebből már egyszerű átrendezéssel belátható a tétel. $\square$

4.4.6 Monoton csökkenő keresleti görbék

Az arányos adagolási szabály eddigi megvalósításai mindig tartalmaztak a keresleti görbére vonatkozóan legalább egy erős megszorítást. A legenyhébb kikötést a 4.4.2 szakaszban leírt megvalósítás jelentette. Ez a megközelítés azonban kontinuum sok fogyasztót tételezett fel és aszimptotikus következtetés levonására használhatatlan.

Természetes módon felvetődik az a kérdés, hogy mit tudunk mondani a véletlenszerű kiszolgálási sorrend feltevését megtartva nagy számú, véges sok fogyasztó esetében, ha az egyének keresleti görbéiről annyit tételezünk fel, hogy monoton csökkenőek és mindegyik fogyasztó egyéni kereslete elenyésző az összkereslethez képest.

Az eddigiek nyilván nem garantálják, hogy ez utóbbi feltevésnek eleget tevő oligopol piacon az arányos adagolási szabály érvényesüljön. Ehhez tekintsük a következő példát.

4.32. példa. A piacon két eltérő típusú fogyasztó van, ezen az értendő, hogy az azonos típusbeli fogyasztók egyéni keresleti görbéi megegyeznek, míg a különböző típusú fogyasztók keresleti görbéi eltérőek. Mindkét fogyasztói típusból N darab van. Az a A típusú fogyasztónak $P_A(Q) = \left(8 - \frac{2Q}{N}\right)^+$, a B típusú fogyasztónak pedig $P_B(Q) = \left(4 - \frac{Q}{2N}\right)^+$ az inverz keresleti görbéje. A piacon két termelő van. Legyenek $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $q_1 = 6$ a termelők által adott értékek.

A piac inverz aggregált keresleti görbéje N-től függetlenül

$$P(Q) = \begin{cases} 8 - 2Q, & \text{ha } 0 \leq Q \leq 2; \\ 4.8 - \frac{2Q}{5}, & \text{ha } 2 < Q \leq 12; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases} \tag{4.39}$$

Ha N kicsi, akkor nem mindegy, hogy az a fogyasztó amelyik az alacsonyabb árú termelőnél még éppen hozzájut a termékhez, milyen adagolási szabály szerint viselkedik. Nyilván nagy N esetén a határfogyasztó reziduális kereslete elhanyagolható. A következő két számpéldában a hatékony határfogyasztó (4.13 feltevés) esetén kívül az arányos határfogyasztó esetét is megvizsgáljuk. Az $N = 1$ esetén eredményeit az alábbi táblázat foglalja össze.

Kiszolgálási sorrend	Valószínűség	$D_{r,a}$	$D_{r,h}$
(A,B)	1/2	7/3	3/2
(B,A)	1/2	3	3

A $D_{r,a}$ a magasabb áron kínáló termelő reziduális keresletét jelöli arányos határfogyasztó feltételezése mellett, míg $D_{r,h}$ a reziduális keresletet jelöli hatékony határfogyasztó feltételezése esetén. $D_r(p_2)$ a piaci aggregált keresleti görbe és az arányos adagolási szabály alkalmazásával kapott reziduális kereslet értéke $49/19 \approx 2.5789$. Nem meglepő, hogy akárcsak a véges számú egyszerű keresleti görbével rendelkező fogyasztó eseténél, most sem jutunk az egyik nevezetes adagolási szabályhoz sem. De ott legalább várható értékben az arányos adagolási szabályt kaptuk, míg a példában még ez sem teljesül (lásd a 4.27 tételt és a hozzá tartozó megjegyzéseket). A fenti táblázat alapján ugyanis a reziduális kereslet várható értéke arányos adagolási szabály szerint cselekvő határfogyasztó esetében $\frac{1}{2}\frac{7}{3} + \frac{1}{2}3 = \frac{8}{3}$, míg hatékony adagolási szabály szerint cselekvő határfogyasztó esetében $\frac{1}{2}\frac{3}{2} + \frac{1}{2}3 = \frac{9}{4}$. A következő táblázat $N = 2$ esetére tartalmazza a megfelelő értékeket:

Kiszolgálási sorrend	Valószínűség	$D_{r,a}$	$D_{r,h}$
(A,A,B,B)	1/6	2	2
(A,B,A,B)	1/6	9/4	17/7
(A,B,B,A)	1/6	9/4	8/3
(B,A,A,B)	1/6	9/4	17/7
(B,A,B,A)	1/6	9/4	8/3
(B,B,A,A)	1/6	3	3

Így a reziduális kereslet várható értéke az arányos adagolás szerint viselkedő fogyasztóknál 14/6, a hatékony adagolási szabály szerint viselkedő fogyasztók esetében pedig mintegy 2.53. Ezek a számértékek már közelebb állnak az aggregált keresleti görbe alapján számított 49/19-hez. Felvetődik az a kérdés, hogy N növelésével vajon legalább a várható értékek tartanak-e az aggregált keresleti görbe és az arányos adagolási szabály mellett számított értékhez, azaz az arányos adagolási szabály várható értékben aszimptotikusan megvalósítható-e, ha $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ a fenti piaci szituációk sorozata. Hangsúlyozandó, hogy semmilyen N-re sem valósítható meg az arányos adagolási szabály az s_N piaci szituációban, ugyanis például a

$$\overbrace{B, B, \ldots, B}^{N}, \overbrace{A, A, \ldots, A}^{N}$$

kiszolgálási sorrend esetében a reziduális kereslet értéke hárommal egyenlő N bármely értékére.

Tegyük fel, hogy $n < \infty$ számú fogyasztói típus van, azaz a fogyasztók lehetséges keresleti görbéinek halmaza véges. Jelölje Ω_i az i típusú fogyasztók halmazát és $m_i := |\Omega_i|$ az ilyen típusú fogyasztók számát $(i = 1, \ldots, n)$. Ekkor a fogyasztók halmaza $\Omega = \cup_{i=1}^{n} \Omega_i$. Legyen $m := |\Omega|$. Vezessük be a $t : \Omega \to \{1, \ldots, n\}$ függvényt, amely megadja egy $\omega \in \Omega$ fogyasztó típusát. Az $\mathcal{A}$ σ-algebra tartalmazza az Ω összes részhalmazát. Legyen ζ a számláló mérték az $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhető téren. Az i-edik típusú $(i = 1, \ldots, n)$ fogyasztók aggregált keresleti görbéjét jelölje d_i. Ekkor egy i-edik típusú $(i = 1, \ldots, n)$ fogyasztó egyéni keresleti görbéje $\frac{1}{m_i}d_i$, valamint a piaci összkeresleti görbe $D = \sum_{i=1}^n d_i$. Jelölje B az $\Omega \to \{0,1\}$ leképezések halmazát és legyen

$$F := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid \exists b \in B : \forall \omega \in \Omega : f(\omega) = b(\omega) \frac{d_{t^{(j)}(\omega)}(p_1)}{m^{(j)}_{t^{(j)}(\omega)}} \right\}.$$

Egy $f \in F$ függvény egy *majdnem kiszolgálás*, ha $\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) \leq q_1$ és minden $\hat{f} \in F, \hat{f} \neq f, \hat{f} \geq f$ függvényre $\sum_{\omega \in \Omega} \hat{f}(\omega) d_{t(\omega)}(p_1) > q_1$. A majdnem kiszolgálások halmazát jelölje $\hat{F}$. Ekkor az alábbi típusú piaci szituációkat kellene vizsgálnunk:

$$s = \langle (\Omega, \mathcal{A}, \zeta), d', \{1,2\}, (p_1, q_1, p_2, q_2), (F, \mathcal{P}(F), P') \rangle,$$

ahol ζ most a számláló mérték, $d'(p, \omega) := d_{t(\omega)}(p)/m_{t(\omega)}$ és P' pedig az egyenletes eloszlás mértéke a $\hat{F} \subset F$ halmazon. Jelöljük az ilyen típusú piaci szituációk halmazát $\mathcal{S}$-sel.

A továbbiakban olyan $(s^{(j)})_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{S}^N$ piaci szituáció sorozatot kellene vizsgálni, amelyekre

1. mindegyik fogyasztói típushoz tartozó személyek száma nem korlátos, azaz minden $i = 1, \ldots, n$ típusra $\lim_{j \to \infty} m_i^{(j)} = \infty$ teljesül;
2. a termelők döntései ugyanazok, azaz $p_1 := p_1^{(j)}$, $p_2 := p_2^{(j)}$, $q_1 := q_1^{(j)}$ és $q_2 := q_2^{(j)}$ minden $j = 1, 2, \ldots$.

Az $(s^{(j)})_{j=1}^{\infty}$ piaci szituáció sorozat helyett az $(s_*^{(j)})_{j=1}^{\infty}$ piaci szituáció sorozatot vizsgáljuk, amely csak a $P'^{(j)}$ valószínűségi mértékekben tér el. A 4.4.4 szakaszban járt utat követjük. Tegyük fel, hogy a j-edik piaci szituációban annak a valószínűsége, hogy egy $\omega \in \Omega^{(j)}$ fogyasztó az alacsonyabbik áron jut a termékhez $q := q_1/D(p_1)$ és hogy a személyek kiszolgálása egymástól független. Így a $(F^{(j)}, \mathcal{P}(F^{(j)}))$ mérhető téren megadtunk egy $P'^{(j)}_*$ valószínűségi mértéket, amely szerint $P'^{(j)}_*(f) = q^m$ minden $f \in F^{(j)}$ függvényre.

A $P'^{(j)}_*$ mértékek mellett nyilván nem teljesül a kiszolgálás feltétele, de még a majdnem kiszolgálás feltétele sem teljesül. Azonban egy könnyebben elemezhető $(s_*^{(j)})_{j=1}^{\infty}$ piaci szituáció sorozatot kaptunk, amelyről azért annyit tudunk, hogy a kiszolgálási feltétel várható értékben teljesül minden egyes $j = 1, 2, \ldots$ szituációra, sőt a kiszolgálási feltétel 1-valószínűséggel aszimptotikusan teljesül. Ezt az állítást azonnal be is látjuk. Jelölje $X_\omega^{(j)}$ azt a bináris értékű valószínűségi változót, amely a j-edik piaci szituációban megmondja, hogy az $\omega \in \Omega^{(j)}$ fogyasztó hozzájut-e a p_1 áron a termékhez. Minden $j = 1, 2, \ldots$-re az $X_\omega^{(j)}$ valószínűségi változók egymástól független q paraméterű karakterisztikus eloszlású valószínűségi változók. Ezért a kiszolgálás várható értéke:

$$\mathrm{E}\left(\sum_{\omega\in\Omega^{(j)}} X_\omega^{(j)} \frac{d_{t^{(j)}(\omega)}(p_1)}{m_{t^{(j)}(\omega)}^{(j)}}\right) = q \sum_{\omega\in\Omega^{(j)}} \frac{d_{t^{(j)}(\omega)}(p_1)}{m_{t^{(j)}(\omega)}^{(j)}} = qD(p_1) = q_1.$$

Az $Y_{\omega,p}^{(j)} := X_\omega^{(j)} \frac{d_{t^{(j)}(\omega)}(p)}{m_{t^{(j)}(\omega)}^{(j)}}$ valószínűségi változók (ahol $j = 1, 2, \ldots$ rögzített, és $p \geq p_1$) függetlenek és az $Y_p^{(j)} := \sum_{\omega\in\Omega^{(j)}} Y_{\omega,p}^{(j)}$ valószínűségi változó szórásnégyzete az alábbi:

$$\mathrm{Var}\left(Y_p^{(j)}\right) = q(1-q) \sum_{i=1}^{n} \sum_{\omega\in\Omega_i^{(j)}} \frac{d_i^2(p)}{(m_i^{(j)})^2} = q(1-q) \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i^2(p)}{m_i^{(j)}} \tag{4.40}$$

Ezért minden $p \geq p_1$ ár esetén

$$\lim_{j\to\infty} \mathrm{Var}\left(Y_p^{(j)}\right) = 0. \tag{4.41}$$

A (4.41) a $p = p_1$ ár esetén azt jelenti, hogy a kiszolgálási feltétel aszimptotikusan teljesül.

Ezek után határozzuk meg a reziduális kereslet értékét p_2 áron.

$$D_r(p_2) = \sum_{\omega\in\Omega^{(j)}} (1 - X_\omega^{(j)}) \frac{d_{t^{(j)}(\omega)}(p_2)}{m_{t^{(j)}(\omega)}^{j}} = D(p_2) - \sum_{\omega\in\Omega^{(j)}} X_\omega^{(j)} \frac{d_{t^{(j)}(\omega)}(p_2)}{m_{t^{(j)}(\omega)}^{j}} \tag{4.42}$$

A (4.41) a $p = p_2$ ár esetén pontosan azt adja, hogy a reziduális kereslet aszimptotikusan egy valószínűséggel konstans. A (4.42) egyenletet folytatva tehát a reziduális kereslet értéke aszimptotikusan egy valószínűséggel megegyezik a

$$\begin{aligned} D_r(p_2) &= D(p_2) - \mathrm{E}\left(\sum_{\omega \in \Omega^{(j)}} X_\omega^{(j)} \frac{d_{t^{(j)}(\omega)}(p_2)}{m^j_{t^{(j)}(\omega)}} \right) = \\ &= D(p_2) - q \sum_{\omega \in \Omega^{(j)}} \frac{d_{t^{(j)}(\omega)}(p_2)}{m^j_{t^{(j)}(\omega)}} = \\ &= D(p_2) - q \sum_{i=1}^{n} d_i(p_2) = D(p_2) - q_1 \frac{D(p_2)}{D(p_1)} \end{aligned}$$

értékkel. Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy az $(s_*^{(j)})_{j=1}^{\infty}$ piaci szituáció sorozat aszimptotikusan megvalósítja az arányos adagolási szabályt.

4.5 Hatékony adagolási szabály megvalósításai

A hatékony adagolási szabály megvalósítását először azonos keresleti görbék, majd azonos kiszolgálási hányad és végül egyszerű keresleti görbék mellett vizsgálom.

4.5.1 Azonos egyéni keresleti görbék

Tekintsük például az Osborne [1997] művében megtalálható piaci szituációt. Tegyük fel, hogy mindegyik fogyasztó keresleti görbéje $d(p)$ azonos továbbá, hogy $\Omega = \{1, \ldots, I\}$ véges sokan vannak. Legyen az első termelő ára az alacsonyabbik, azaz $p_1 < p_2$. A számunkra érdekes esetben $q_1 < I \cdot d(p_1)$. Tegyük fel továbbá, hogy mindegyik személy pontosan $q := \frac{q_1}{I}$ mennyiséget vásárolhat az alacsonyabb áron kínáló termelőtől. Ezt a piaci szituációt az

$$s = \langle (\{1, \ldots, I\}, \mathcal{P}(\{1, \ldots, I\}), \zeta), d^*, \{1, 2\}, (p_1, q_1, p_2, q_2), (\Omega', \mathcal{A}', P') \rangle$$

struktúrával írhatjuk le, ahol ζ a számláló mérték, $d^*(p, \omega) = d(p)$ minden $\omega \in \{1, \ldots, I\}$ és P' pedig a karakterisztikus eloszlás mértéke az

$$\{f \in [0, q]^{\{1, \ldots, I\}} \mid \forall i \in \{1, \ldots, I\} : f(i) = q\}$$

paraméterrel.

A kiszolgálási feltétel teljesüléséről könnyen meggyőződhetünk. A

$$\int_\Omega (d^*(p_2,\omega) - Y(\omega))^+ d\zeta(\omega) = D(p_2) - Iq = D(p_2) - q_1. \tag{4.43}$$

egyenlőségek egy valószínűséggel teljesülnek. Ez azt jelenti, hogy s megvalósítja a hatékony adagolási szabályt.

4.5.2 A kiszolgálási hányad minden fogyasztóra azonos

Az előző szakaszban található gondolatmenet általánosítható. Tekintsük az $O^k = \langle(\Omega, \mathcal{A}, \mu), d\rangle$ oligopol piaci környezetet. Tegyük fel, hogy $p_1 < p_2$ és $q_1 < D(p_1)$. Továbbá tegyük fel, hogy mindegyik személy p_1 áron felmerülő keresletének $q := \frac{q_1}{D(p_1)}$ hányadát teljesíti az első vállalat. Legyen Ω' olyan $\Omega \to \mathbb{R}$ mérhető leképezések halmaza, amelyre minden $f \in \Omega'$-re és minden $\omega \in \Omega$ fogyasztóra $f(\omega) \in \{0, qd(p_1,\omega)\}$ teljesül. Ezt a piaci szituációt az

$$s = \langle(\Omega, \mathcal{A}, \mu), d, \{1,2\}, (p_1, q_1, p_2, q_2), (\Omega', \mathcal{A}', P')\rangle$$

struktúrával írhatjuk le, ahol μ most egy tetszőleges mérték az $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhető téren és P' pedig a karakterisztikus eloszlás mértéke az

$$\{f \in \Omega' \mid \forall\omega \in \Omega : f(\omega) = qd(p_1,\omega)\}$$

paraméterrel.

A kiszolgálási feltétel teljesül, mivel

$$\int_\Omega X(\omega)d\mu(\omega) = q\int_\Omega d(p_1,\omega)d\mu(\omega) = qD(p_1) = q_1$$

egy valószínűséggel. Tegyük fel még, hogy minden $\omega \in \Omega$ fogyasztó kereslete p_2 áron legalább akkora, mint a p_1 áron kapott termékmennyiség. Ekkor az alábbi egyenlőségek egy valószínűséggel teljesülnek:

$$\begin{aligned}\int_\Omega (d(p_2,\omega) - X(\omega))^+ d\mu(\omega) &= D(p_2) - \int_\Omega X(\omega)d\mu(\omega) = \\ &= D(p_2) - qD(p_1) = D(p_2) - q_1.\end{aligned}$$

Tehát s megvalósítja a hatékony adagolási szabályt.

4.5.3 Egyszerű keresleti görbék

Tegyük fel, hogy a fogyasztók keresleti görbéi egyszerűek $\alpha = 1$ paraméterrel. Tegyük fel továbbá, hogy egy vállalat egy fogyasztó kiszolgálásakor, annak teljes igényét kielégíti, amíg ezt készlete lehetővé teszi. Tehát a 4.22 feltevés teljesül.

Tegyük fel, hogy a fogyasztók kereslete leírható egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ atommentes mértéktérrel. Az $r : \Omega \to \mathbb{R}$ legyen a fogyasztók rezervációs árait megadó $\mathcal{A}$ mérhető függvény. Tehát $d(p, \omega) = 1$, ha $p \leq r(\omega)$, és $d(p, \omega) = 0$, ha $p > r(\omega)$. Ekkor a fogyasztók egy $A_p = \{\omega \in \Omega \mid p \leq r(\omega)\} \in \mathcal{A}$ részhalmazának kereslete a

$$D(p) = \int_{A_p} d(p, \omega) d\mu(\omega) = \int_{\Omega} 1_{A_p}(\omega) d\mu(\omega) = \mu(A_p)$$

összefüggés alapján is meghatározható.

Az alacsonyabb áron kínáló vállalat a magasabb rezervációs áru fogyasztókat szolgálja ki. Tegyük fel most is, hogy $p_1 < p_2$ és $q_1 < D(p_1)$. Ezért mivel μ atommentes, létezik olyan $A \in A_{p_1} \cap \mathcal{A}$ halmaz, amelyre $\mu(A) = q_1$ és $\forall \omega \in A : \forall \omega' \in A_{p_1} \setminus A : r(\omega') \leq r(\omega)$. Ezt a piaci szituációt az

$$s = \langle (\Omega, \mathcal{A}, \mu), (d(p, \omega))_{\omega \in \Omega}, \{1, 2\}, (p_1, q_1, p_2, q_2), (\Omega', \mathcal{A}', P') \rangle$$

struktúrával írhatjuk le, ahol P' a karakterisztikus eloszlás mértéke az $1_A : \Omega \to \{0, 1\}$ paraméterrel.

A kiszolgálási feltétel teljesül az A halmaz és P' választása miatt. A következő egyenlőségek egy valószínűséggel teljesülnek:

$$\int_{\Omega} (d(p_2, \omega) - X(\omega))^+ d\mu(\omega) = D(p_2) - \mu(A) = D(p_2) - q_1.$$

Ez azt jelenti, hogy s megvalósítja a hatékony adagolási szabályt.

Természetesen a kérdés az, hogy hogyan tudja elérni egy vállalat a magasabb rezervációs áru fogyasztói réteg kiszolgálását. Gelman és Salop [1983] leírja, hogy ez kuponok bevezetésével elérhető. Tekintsük a következő helyzetet. Mindkét vállalat kínálatával azonos mennyiségű kuponokat bocsát ki. A kuponok kibocsátási ára egyezzen meg a termékek kínálati árával. Legyen most is $p_1 < p_2$. A fogyasztók első lépésben kuponokat vásárolnak, majd az így megszerzett kuponokat bármelyik vállalatnál beválthatják. A kuponokat p_1 áron kínáló vállalat mondjuk véletlenszerűen elégíti ki az igényeket. A fogyasztók a kuponokat egymás között is cserélhetik. A p_2-nél kisebb rezervációs árú fogyasztók nyilván csak p_1 áron vásárolhattak kuponokat. Nekik érdekükben áll kuponjaik eladása, ha a rezervációs áraiknál magasabb összeget kapnak érte. A p_1 áron kuponhoz nem jutó legalább p_2 rezervációs árú fogyasztók pedig érdekeltek a p_2 ár alatti kuponok megvételében. Tehát a kuponok másodlagos piacán keresztül a magasabb rezervációs árú fogyasztók mindegyike vásárol az alacsonyabb rezervációs árú fogyasztóktól kuponokat. Ha $D(p_2) > q_1$, akkor végeredményként a p_1 áru kuponok mindegyike átkerül a magasabb rezervációs áru fogyasztók kezébe. A kuponok tulajdonképpen lehetővé teszik illetve leegyszerűsítik a másodlagos piacon a csere folyamatot a termék jellegétől függetlenül. A kupon vásárlási és kupon csere folyamat lezárása után következhet befejezésül a kupon beváltási folyamat.

4.6 Kombinált adagolási szabály megvalósításai

Már a 4.2 szakaszban láthattuk, hogy amennyiben a keresleti oldal megadható egy Cobb-Douglas hasznossági függvénnyel rendelkező reprezentatív fogyasztóval, akkor a piacon egy kombinált adagolási szabály valósul meg. A kombinált adagolási szabály további megvalósításai nem meglepő módon az arányos és a hatékony adagolási szabályok megvalósításainak kombinálásából kaphatók meg.

4.6.1 Azonos egyéni keresleti görbék

Tegyük fel, a piacon I darab fogyasztó van azonos $d(\cdot)$ keresleti görbével. A fogyasztók halmaza legyen $\Omega = \{1, \ldots, I\}$. Rögzítsünk egy tetszőleges $\lambda \in [0, 1]$ értéket. Legyen az első termelő ára az alacsonyabb, azaz $p_1 < p_2$. A számunkra érdekes esetben $q_1 < Id(p_1)$.

E piacon a λ paraméterű adagolási szabály megvalósításának az elve a következő: a kínálat $1-\lambda$ hányadát véletlenszerűen kiválasztott fogyasztók igényeinek teljes kielégítésére kell fordítani, míg a kínálat λ hányadát a maradék fogyasztók között kell egyenletesen elosztani. Ez a megvalósítás tulajdonképpen az ugyanezen a piacon bemutatott arányos és hatékony adagolási szabályok kombinációját jelenti.

Az alacsonyabb áron kínáló vállalat $m := \lfloor q_1/d(p_1) \rfloor$ fogyasztót képes teljes egészében kiszolgálni. Tegyük fel, hogy csak $m_1 := \lfloor (1-\lambda)q_1/d(p_1) \rfloor$ fogyasztót szolgál ki teljes egészében. A többi fogyasztó mind $q := \frac{q_1 - m_1 d(p_1)}{I - m_1}$ termékmennyiséget kap. Ezt a piaci szituációt az

$$s^I = \langle (\{1,\dots,I\}, \mathcal{P}(\{1,\dots,I\}), \zeta), d^*, \{1,2\}, (p_1,q_1,p_2,q_2), (\Omega', \mathcal{A}', P') \rangle$$

struktúrával írhatjuk le, ahol ζ most is a számláló mértéket jelöli, $d^*(p,\omega) = d(p)$ minden $\omega \in \{1,\dots,I\}$ és P' pedig az egyenletes eloszlás mértéke az

$$\{f \in [0, d(p_1)]^{\{1,\dots,I\}} \mid |f^{-1}(d(p_1))| = m_1 \text{ és } |f^{-1}(q)| = I - m_1\}$$

halmazon.

Ekkor a kiszolgálási feltétel teljesül, mivel

$$\int_\Omega X(\omega) d\zeta(\omega) = m_1 d(p_1) + (I - m_1) q = q_1.$$

Jelölje A azon fogyasztók halmazát, amelyek igényeit a p_1 áron nem elégítették ki teljesen az X kiszolgálás során. Az alábbi egyenlőségek egy valószínűséggel aszimptotikusan teljesülnek.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (d^*(p_2,\omega) - X(\omega)\zeta(\omega))^+ &= \int_A (d^*(p_2,\omega) - X(\omega))^+ \zeta(\omega) = \\
&= (I - m_1)(d(p_2) - q)^+ = \\
&= (D(p_2) - m_1 d(p_2) - (q_1 - m_1 d(p_1)))^+ \approx \\
&= (D(p_2) - q_1(1-\lambda)\frac{D(p_2)}{D(p_1)} - q_1\lambda)^+,
\end{aligned}$$

ha I elég nagy. Tehát az s^I piaci szituációk sorozata aszimptotikusan megvalósít egy λ paraméterű kombinált adagolási szabályt.

4.6.2 Egyszerű keresleti görbék

Most azt az esetet vizsgáljuk, amikor a fogyasztók keresleti görbéi $\alpha = 1$ paraméterű egyszerű keresleti görbék. Tegyük fel továbbá, hogy a 4.22 feltevés teljesül, azaz egy vállalat egy fogyasztó kiszolgálásakor annak teljes igényét kielégíti, amíg ezt készlete megengedi.

Induljunk ki újra a 4.4.4 szakaszban leírt piaci szituációból. A fogyasztói oldalt tehát az $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ mértéktér és

$$d(p, \omega) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad p \leq r\ ; \\ 0, & \text{ha} \quad p > r \end{cases}$$

alakú keresleti görbék adják meg (ahol $\omega \in \Omega$). Az $r : \Omega \to \mathbb{R}$ a fogyasztók rezervációs árait megadó monoton csökkenő $\mathcal{A}$ mérhető függvény. Ekkor a fogyasztók egy $A_p = \{\omega \in \Omega \mid p \leq r(\omega)\} \in \mathcal{A}$ részhalmazának keresletére a

$$D(p) = \int_{A_p} d(p, \omega) d\lambda(\omega) = \int_{\Omega} 1_{A_p}(\omega) d\lambda(\omega) = \lambda(A_p)$$

összefüggés áll fenn.

Legyen most is $p_1 < p_2$ és $q_1 < D(p_1)$. A 4.4.4 szakaszban található piaci szituációt módosítjuk. A p_1 áron kínáló vállalat két lépésben szolgálja ki a fogyasztókat. Az első lépésben $(1-\gamma)q_1$ terméket értékesít véletlenszerűen. Ekkor a 4.25 tételt az

$$s = \langle (\Omega, \mathcal{A}, \lambda), d, \{1, 2\}, (p_1, (1-\gamma)q_1, p_2, q_2), (\Omega', \mathcal{A}', P') \rangle$$

piaci szituációra kell alkalmazni, ahol itt $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ a 4.4.4 szakaszban található megfelelő mértéktér. A 4.25 tétel alapján ekkor az első lépés után a még kielégítetlen kereslet $D_{r1}(p_2) = D(p_2)\left(1 - \frac{(1-\gamma)q_1}{D(p_1)}\right)$.

A második lépésben a maradék γq_1 terméket a kielégítetlen fogyasztók közül a magasabb rezervációs áru fogyasztóknak adja el a p_1 áru vállalat. Ekkor a 4.5.3 szakaszban leírtak alapján már felírható a második lépéshez tartozó piaci szituáció. Jelölje $A \in A_{p_2} \cap \mathcal{A}$ az első lépés után kielégítetlen legalább p_2 rezervációs áru fogyasztók halmazát. Megjegyzendő, hogy $\lambda(A) = D_{r1}(p_2)$.

Mivel λ atommentes van olyan $B \in A \cap \mathcal{A}$ halmaz, amelyre $\lambda(B) = \gamma q_1$ és $\forall \omega \in B : \forall \omega' \in A \setminus B : r(\omega') \leq r(\omega)$. Ezt a piaci szituációt az

$$s = \langle (A \cap \Omega, A \cap \mathcal{A}, \lambda), d, \{1,2\}, (p_1, \gamma q_1, p_2, q_2), (\Omega', \mathcal{A}', P') \rangle$$

struktúrával írhatjuk le, ahol P' az indikátor eloszlás mértéke az $1_B : \Omega \to \{0,1\}$ paraméterrel.

Meggyőződhetünk arról, hogy a kiszolgálási feltétel teljesül. Az alábbi egyenlőségek egy valószínűséggel teljesülnek.

$$\begin{aligned}
\int_A (d(p_2,\omega) - X(\omega))^+ d\lambda(\omega) &= D_{r1}(p_2) - \lambda(B) = D_{r1}(p_2) - \gamma q_1 = \\
&= D(p_2)\left(1 - \frac{(1-\gamma)q_1}{D(p_1)}\right) - \gamma q_1 = \\
&= D(p_2) - q_1\left(\gamma + (1-\gamma)\frac{D(p_2)}{D(p_1)}\right).
\end{aligned}$$

Tehát s megvalósítja a hatékony adagolási szabályt.

Természetesen ugyanúgy mint az már a hatékony adagolási szabály 4.5.3 szakaszban leírt megvalósításánál felvetődött, itt is felmerül az a kérdés, hogy hogyan tudja elérni egy vállalat a magasabb rezervációs áru fogyasztói réteget a második lépésben. Kuponok segítségével a kérdés megoldható. Az alacsonyabb áron kínáló vállalat az első lépésben érkezési sorrend szerint értékesíti termékeinek $1-\gamma$ hányadát. A második lépésben viszont kuponokat bocsát ki a fennmaradó kínálatára. Ezt a módszert akkor érdemes alkalmazni, ha a termékeknek nincsen másodlagos piaca, míg a kuponoknak van.

4.7 Termelő-hatékony adagolási szabály megvalósítása

Mint láttuk, a hatékony adagolási szabály egyik megvalósításánál az alacsonyabb áron kínáló vállalat először a magasabb rezervációs árú fogyasztók igényeit elégíti ki. Nyilván elképzelhető egy olyan adagolási szabály, amely szerint először az alacsonyabb rezervációs árú fogyasztók igényei elégülnek ki.

Legyenek ehhez most is mint a 4.5.3 szakaszban a fogyasztók keresleti görbéi egyszerűek $\alpha = 1$ paraméterrel. Egy vállalat, amíg a készlete tart, egy fogyasztó kiszolgálásakor annak teljes igényét kielégíti, azaz a 4.22 feltevés teljesül.

Tegyük fel, hogy a fogyasztók kereslete leírható egy $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ mértéktérrel. Az $r : \Omega \to \mathbb{R}$ legyen a fogyasztók rezervációs árait megadó $\mathcal{A}$ monoton csökkenő mérhető függvény. Tehát $d(p, \omega) = 1$, ha $p \leq r(\omega)$, és $d(p, \omega) = 0$, ha $p > r(\omega)$. Ekkor a fogyasztók egy $A_p = \{\omega \in \Omega \mid p \leq r(\omega)\} \subset \mathcal{A}$ részhalmazának kereslete (mint már ismeretes) a

$$D(p) = \int_{A_p} d(p, \omega) d\lambda(\omega) = \int_{\Omega} 1_{A_p}(\omega) d\lambda(\omega) = \lambda(A_p)$$

összefüggés alapján határozható meg.

Az alacsonyabb áron kínáló vállalat az alacsonyabb rezervációs árú fogyasztókat szolgálja ki. Tegyük fel most is, hogy $p_1 < p_2$ és $q_1 < D(p_1)$. Mivel μ atommentes, létezik olyan $A \in A_{p_1} \cap \mathcal{A}$ halmaz, amelyre $\lambda(A) = q_1$ és $\forall \omega \in A : \forall \omega' \in A_{p_1} \setminus A : r(\omega') \geq r(\omega)$. Ezt a piaci szituációt az

$$s = \langle (\Omega, \mathcal{A}, \lambda), d, \{1, 2\}, (p_1, q_1, p_2, q_2), (\Omega', \mathcal{A}', P') \rangle$$

struktúrával írhatjuk le, ahol P' az indikátor eloszlás mértéke az $1_A : \Omega \to \{0, 1\}$ paraméterrel.

A kiszolgálási feltétel az A választása miatt teljesül. Két esetet kell megvizsgálnunk.

Ha $D(p_2) < D(p_1) - q_1$, akkor az A_{p_2} és az A halmazok diszjunktak. Ezért az alábbi 1-valószínűséggel teljesül.

$$\int_{\Omega} (d(p_2, \omega) - X(\omega))^+ d\lambda(\omega) = D(p_2). \tag{4.44}$$

Ha pedig $D(p_2) \geq D(p_1) - q_1$, akkor az A_{p_2} és az A halmazoknak van közös része. Az alábbi egyenlőségek pedig 1-valószínűséggel teljesülnek.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (d(p_2,\omega) - X(\omega))^+ d\lambda(\omega) &= D(p_2) - \int_{A\cap A_{p_2}} X(\omega) d\lambda(\omega) = \\
&= D(p_2) - \lambda(A \cap A_{p_2}) = \\
&= D(p_2) - \lambda(A) - \lambda(A_{p_2}) + \lambda(A \cup A_{p_2}) = \\
&= D(p_2) - q_1 - D(p_2) + D(p_1) = \\
&= D(p_1) - q_1.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

A (4.44) és (4.45) egyenlőségek miatt s megvalósítja a termelő-hatékony adagolási szabályt.

4.8 Egyéb adagolási szabályok

Az általam vizsgált adagolási szabályokon kívül számtalan további adagolási szabály létezik. Az összes olyan függvény, amelyik kielégíti a 4.2 definíciót, egy adagolási szabály. Az 5. fejezetben végzett számításoknál az ebben a fejezetben ismertetett adagolási szabályokat használom.

Az irodalomban általában csak az arányos és a hatékony adagolási szabályokat szokták alkalmazni. Ez alól kivétel Davidson és Deneckere [1986] egyik eredménye, amely minden olyan adagolási szabályra érvényes, amely megvalósítása során a vállalatok az egyes fogyasztók keresletének legalább $q_1/D(p_1)$ hányadát elégítik ki. Ez utóbbi követelményt az általam bevezetett kombinált adagolási szabály teljesíti.

5. fejezet

Bertrand-Edgeworth oligopol modellek

A klasszikus oligopol modellekkel szemben a Bertrand-Edgeworth típusú modellek egy kellemetlen tulajdonsága, hogy a keresleti és költségfüggvényekre általában kirótt konvexitási és konkávitási feltételek nem garantálják a tiszta Nash egyensúlyi megoldás létezését. Sőt mint látni fogjuk, egyszerűbb esetekben is hamar tiszta Nash egyensúlyi megoldás hiányába ütközünk. Elkerülhetetlen a kevert Nash egyensúlyi stratégiák vizsgálata. Sajnos csak igen speciális esetben tudjuk meghatározni egy Bertrand-Edgeworth oligopólium kevert Nash egyensúlyi megoldását zárt alakban. Általában a megoldást csak integrálegyenlet formájában lehet megadni.

A Bertrand-Edgeworth játék két fajta lefolyása lehetséges. Az első változat szerint az ár és mennyiségi döntések szimultán módon születnek meg. Az első változat a 3.3 alfejezetben található O_{BE} struktúrával írható le.

A második változat szerint az oligopolisták először szimultán módon meghozzák árdöntéseiket, majd egymás árdöntéseinek ismeretében meghozzák a mennyiségi döntéseiket. A két változat nyilván két külön játékot eredményez. Ez utóbbi változatnak előnye, hogy a vállalatok kínálatukat teljes egészében értékesíteni tudják. A második változatnak a 3. fejezetben bevezetett jelölésrendszerrel a következő struktúra felel meg: $O_{BE2} :=$

$$\langle J, (Q \times P)^J, (C_i)_{i=1}^J, D, R, (\pi_i)_{i=1}^J \rangle,$$

ahol a kifizetőfüggvények $\pi_i(D, C_i, R, (p_1, q_1), \ldots, (p_J, q_J)) :=$

$$p_i R_i(D, (p_1, q_1), \ldots, (p_J, q_J)) - C_i(\min(q_i, R_i(D, (p_1, q_1), \ldots, (p_J, q_J))))$$

minden $i = 1, \ldots, J$ vállalatra.

Megjegyzendő, hogy amennyiben bármelyik változatnak létezik megoldása tiszta stratégiákban, akkor a másik változatnak is létezik ilyen megoldása, és az egyensúlyi stratégiák halmaza azonos. Erről könnyen meggyőződhetünk. Ezért a tiszta egyensúlyi stratégiák meghatározásakor teljesen mindegy, hogy melyik változatot vizsgáljuk. Mi a tárgyalás során az első változatot részesítjük előnyben.

Nem ilyen egyszerű a helyzet, ha a játéknak nem létezik egyensúlyi megoldása tiszta stratégiákban. Ekkor az általunk vizsgált keretek között, a kevert egyensúlyi stratégiák létezését illetően nincs különbség a két változat között. Azonban az egyik változat kevert egyensúlyi stratégiája nem szükségszerűen egyensúlyi stratégiája a másik változatnak, és fordítva.

Elemzéseink során számos egyszerűsítő feltevéssel fogunk élni. Az irodalomban előszeretettel vizsgálják azt az esetet, amikor a vállalatok átlagköltségei állandóak egy rögzített termelési kapacitásig. Továbbá megvizsgáljuk a konvex költségfüggvényű modelleket.

Általában azt fogjuk feltételezni, hogy az alacsonyabb áron kínáló oligopolisták a fogyasztókat kombinált adagolási szabály alapján szolgálják ki. Ha az egyes oligopolisták $\lambda_1, \ldots, \lambda_J$ paraméterű kombinált adagolási szabályt alkalmaznak, akkor a $\lambda_1, \ldots, \lambda_J$ kombinált adagolási szabályokhoz tartozó Bertrand-Edgeworth játékot az $O_{BE(\lambda_1,\ldots,\lambda_J)}$, illetve az $O_{BE2(\lambda_1,\ldots,\lambda_J)}$ szimbólumokkal jelöljük.

Tárgyalásunk menete a következő. Az első alfejezetben megvizsgáljuk a tiszta Nash egyensúlyi stratégiák létezésének feltételeit. A kapacitáskorlátos Bertrand-Edgeworth oligopóliumra meghatározzuk azon keresleti görbék körét, amelyek esetében mindig létezik tiszta Nash egyensúly. Továbbá megvizsgáljuk, hogyan függnek a tiszta egyensúlyi stratégiák a kombinált adagolási szabály λ paraméterétől. Majd szigorúan konvex, szigorúan monoton növekedő költségfüggvényekre meghatározzuk a tiszta Nash egyensúlyi megoldást, ha létezik egyáltalán ilyen. A második alfejezetben ismertetjük a Dasgupta-Maskin tételt, amely a kevert stratégiák létezésére ad elégséges feltételt. A Dasgupta-Maskin tétel segítségével megmutatjuk, hogy megfelelő feltételek mellett létezik a Bertrand-Edgeworth játéknak kevert Nash egyensúlyi megoldása. A harmadik alfejezetben meglehetősen erős feltételek mellett meghatározzuk a kapacitáskorlátos Bertrand-Edgeworth oligopólium kevert Nash egyensúlyi stratégiáját. A negyedik alfejezetben megnézzük, hogy hogyan változik az egyensúlyi megoldás, ha az oligopolisták számát a végtelenbe növeljük. Az ötödik alfejezet a Bertrand-Edgeworth játék egy olyan módosítását tartalmazza, amelyben az oligopolisták az adagolási szabályaikat külön-külön választhatják meg. Az utolsó alfejezet végül egy irodalmi áttekintést ad a Bertrand-Edgeworth oligopóliumokkal kapcsolatos eredményekről.

5.1 Tiszta Nash egyensúly

A 2. fejezetben ismertetett 2.10 egzisztencia tétel nem alkalmazható a Bertrand-Edgeworth játék esetében, ugyanis a Bertrand-Edgeworth játék kifizetőfüggvényei nem folytonosak és nem is kvázikonkávak. A súlyosabb problémát a kvázikonkávitás hiánya okozza. A kifizetőfüggvények folytonosak, eltekintve azon ár kombinációktól, amelyekben a vállalatok azonos árakat állapítanak meg. Ezen „kellemetlen” stratégiák Lebesgue mértéke nulla. Ezért a Bertrand-Edgeworth játék közelíthető olyan játékokkal, amelyek kifizetési függvényei csak a szakadási pontok egy kis környezetében térnek el a Bertrand-Edgeworth játék kifizetőfüggvényeitől és már folytonosak. Megmutatható, hogy ha a kiindulási Bertrand-Edgeworth játéknak nem létezett tiszta Nash egyensúlyi pontja, akkor a hozzá tartozó közelítő játéknak sem létezik tiszta Nash egyensúlya.

A kifizetőfüggvények kellemetlen tulajdonságai miatt a Bertrand-Edgeworth játék tiszta Nash egyensúlyi stratégiájának létezésének vizsgálatához és meghatározásához a Nash egyensúly definíciójához kell visszanyúlnunk.

Mint ismeretes, lineáris keresleti görbét, állandó átlagköltségfüggvényeket, továbbá kapacitáskorlátokat feltételezve alacsony kapacitáskorlátok mellett az egyensúlyi árakat tekintve a monopolista megoldást, míg magas kapacitáskorlátok mellett a Bertrand megoldást kapjuk. A kapacitáskorlátok egy köztes tartományában csak kevert Nash egyensúlyi megoldás létezik (lásd Osborne [1997], Tirole [1988] és Wolfstetter [1993]). Ezek az eredmények minőségileg függetlenek a választott adagolási szabálytól. Az adagolási szabály csak a közbülső tartomány határainak értékét határozza meg.

Ez az állítás nem általánosítható tetszőleges keresleti görbére. Erről szól a következő alfejezet.

5.1.1 Kapacitáskorlátos Bertrand-Edgeworth oligopóliumok

A tiszta stratégiák vizsgálatát kapacitáskorlátos Bertrand-Edgeworth oligopóliumokban két irányból végezzük. Előbb megnézzük, hogy milyen alakú keresleti görbék esetén létezik a vállalatok tetszőleges kapacitáskorlátai mellett tiszta Nash egyensúlyi stratégia.

Egyensúlyi vizsgálatainkat azzal a kérdéssel folytatjuk, hogy egy adott keresleti görbe esetén mekkora kapacitáskorlátok mellett létezik a kapacitáskorlátos Bertrand-Edgeworth játéknak egyensúlya tiszta stratégiákban.

Egyensúlyt biztosító keresleti görbék

Tekintsünk egy $O_{BE(\lambda_1,\dots,\lambda_J)}$ Bertrand-Edgeworth oligopóliumot. Legyenek a keresleti görbék a következő alakúak:

5.1. feltevés. $\forall p > 0 : D(p) > 0$ és $D'(p) < 0$.

Jelölje $\epsilon(p)$ a keresleti görbe p helyen vett árrugalmasságát. Az oligopolistákról az alábbi feltételekkel élünk.

5.2. feltevés. A piacon J oligopolista van azonosan nulla átlagköltségekkel és $0 < k_i$ kapacitáskorlátokkal ($i \in \{1, \ldots, J\}$).

Először duopóliumokat vizsgálunk.

Az alábbi állítás egy szükséges és elégséges feltételt ad meg arra vonatkozóan, hogy milyen alakú keresleti görbék esetén létezik a vállalatok tetszőleges kapacitáskorlátai mellett tiszta Nash egyensúlyi megoldás.

5.3. állítás. *Az 5.1, 5.2 feltételek teljesüljenek az $O_{BE(\lambda_1,\lambda_2)}$ oligopol piacon. Ekkor az alábbi állítások fogalmazhatók meg a kapacitáskorlátos Bertrand-Edgeworth duopol játékra:*

1. *Ha*

$$\forall p > 0 : \epsilon(p) \leq -1, \tag{5.1}$$

akkor bármely $k_1 > 0$ és $k_2 > 0$ kapacitáskorlátok esetén létezik Nash egyensúlyi megoldás tiszta stratégiákban. Az egyensúly

$$q_i^* = k_i \quad \textit{és} \quad p_1^* = p_2^* = D^{-1}(k_1 + k_2). \tag{5.2}$$

2. *Ha D' folytonos és*

$$\exists p > 0 : \epsilon(p) > -1, \tag{5.3}$$

akkor találhatók olyan k_1 és k_2 pozitív kapacitáskorlátok, hogy ne létezzen a játéknak tiszta Nash egyensúlyi megoldása.

Bizonyítás: 1. Először belátjuk, hogy (5.1) maga után vonja, hogy $\lim_{p\to 0+} D(p) = \infty$. Tegyük fel, hogy nem; ekkor $\lim_{p\to 0+} D(p) < \infty$ mivel D monoton csökkenő, és ezért $\lim_{p\to 0} pD(p) = 0$ következne. (5.1)-ből adódik, hogy $pD(p)$ nem növekvő a $(0, \infty)$ intervallumon. Ezért $\forall p > 0 : pD(p) \leq 0$, ami ellentmond a triviálisan igaz $\forall p > 0 : pD(p) > 0$ állításnak. Tehát arra a következtetésre jutunk, hogy az (5.1) feltevést kielégítő keresleti görbék nem metszhetik a vízszintes tengelyt. Ebből kifolyólag $D^{-1}(k_1 + k_2)$ értelmezett és $p_i^* > 0$.

Most megmutatjuk, hogy Nash egyensúlyként csak (5.2) jöhet szóba. A $p_1 < p_2$ eset nem lehet egyensúlyi, mivel ha $D(p_1) > k_1$, akkor az első vállalat érdekében áll árának emelése, és ha $D(p_1) \leq k_1$, akkor pedig a második vállalatnak érdemes árát p_1 alá csökkentenie. Hasonlóan igazolható, hogy a $p_2 > p_1$ eset sem lehet egyensúlyi. A $p_1 = p_2 > p_i^*$ eset sem egyensúlyi, ugyanis ekkor mindkét cég érdekelt árainak kis mértékű csökkentésében. Nyilván a p_i^* alatti árak választása irracionális.

Még be kell látnunk, hogy egyik duopolistának sem áll érdekében egyoldalúan árát p_i^* fölé emelnie. Ehhez meg kell mutatnunk, hogy a reziduális profit függvénye nem növekvő. Kombinált adagolási szabályt feltételezve az i-edik vállalat profitfüggvénye $p > p^*$ árakra:

$$\pi_i(p) = pD^r(p) = p\left(D(p) - \lambda_j k_j - (1-\lambda_j)k_j\frac{D(p)}{D(p_j^*)}\right),$$

ahol $j \neq i$ és $D^r(\overline{p}) = 0$.

Az első derivált nempozitív volta egy elégséges feltétel:

$$\frac{\mathrm{d}\pi_i}{\mathrm{d}p}(p) = (pD'(p) + D(p))\left(1 - (1-\lambda_j)\frac{k_j}{k_i + k_j}\right) - \lambda_j k_j \leq 0 \tag{5.4}$$

Ez a feltétel pedig teljesül az (5.1) feltevés miatt.

2. Legyen $F(p) := pD'(p) + D(p)$. Az (5.3) feltevés miatt az $F^{-1}((0,\infty))$ halmaz nem üres. Ekkor vegyünk az $F^{-1}((0,\infty))$ halmazból egy $I = (a,b)$ nyílt intervallumot és ebből az I intervallumból egy p árat. Legyen a j-edik vállalatnak a kapacitáskorlátja olyan, hogy

$$F(\tilde{p}) > \frac{\lambda_j k_j D(\tilde{p})}{D(\tilde{p}) - (1-\lambda_j)k_j}. \tag{5.5}$$

Ilyen $k_j \in (0, D(\tilde{p}))$ érték létezik az (5.3) feltevés és $\tilde{p}$ választása miatt, ugyanis az (5.5) jobboldala folytonos k_j-ben és a $k_j = 0$ helyen felvett értéke nulla. Legyen a másik vállalat kapacitás korlátja $k_i := D(\tilde{p}) - k_j$.

Az első ponthoz hasonlóan igazolható, hogy csak $p_i := \tilde{p}$ lehet egyensúlyi ár. De, ha $p_j = \tilde{p}$, akkor az i-edik vállalatnak érdekében áll árának emelése, mivel

$$F(\tilde{p}) - \frac{\lambda_j k_j D(\tilde{p})}{D(\tilde{p}) - (1-\lambda_j)k_j} > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\mathrm{d}\pi_i}{\mathrm{d}p}(\tilde{p}) > 0. \qquad \square$$

Példának okáért a $D(p) = p^{-\frac{1}{\alpha}}$ keresleti függvény kielégíti az 5.3 állítás első pontjának feltevéseit, ahol $p > 0$ és $0 < \alpha \leq 1$. Ezért az ilyen alakú keresleti görbék esetében a Bertrand-Edgeworth játéknak mindig van tiszta Nash egyensúlyi megoldása.

Az 5.3 állításban az 5.1 feltevést helyettesíteni lehet a $\forall \overline{p} > p > 0 : D(p) > 0$, $D'(p) < 0$ és a $\forall p \geq \overline{p} : D(p) = 0$ feltevésekkel. A bizonyításunk ekkor csak annyiban módosul, hogy a vállalatok legfeljebb csak $\overline{p}$ árat állapítanak meg. Beláthatjuk, hogy ha $\lim_{p \to \overline{p}-0} D'(p)$ korlátos, akkor $\lim_{p \to \overline{p}-0} \epsilon(p) = -\infty$, tehát vannak olyan mindenütt árrugalmas keresleti függvények, amelyek csak a függőleges tengelyt metszik. Mint ahogyan azt már az 5.3 állítás bizonyításában láttuk, a vízszintes tengelyt nem metszhetik.

Dasgupta és Maskin (1986b) a harmadik végjegyzetükben arányos adagolási szabály esetére ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$) belátták, hogy ha a keresleti görbe árrugalmatlan a $D^{-1}(k_1 + k_2)$ ár mellett, akkor nem létezik tiszta Nash egyensúlya a Bertrand-Edgeworth játéknak. Az 5.3 állításunk ezt a megállapítást általánosítja. Megjegyzendő, hogy amennyiben mindkét vállalat arányos adagolási szabályt alkalmaz, akkor az 5.3 állítás második pontja még egyszerűbben is belátható. Ebben az esetben ugyanis a vállalatok kapacitáskorlátai választhatók $k_1 = k_2 = D(\tilde{p})/2$-nek. Allen és Hellwig [1986] a 3.1 állításukban már adtak egy szükséges és elégséges feltételt a tiszta stratégiájú Nash egyensúly létezésére arányos adagolás esetére.

Az 5.3 állítás bizonyítását, ha alaposan szemügyre vesszük, akkor észre vehetjük, hogy azon kapacitási szintek, amelyek mellett a Bertrand-Edgeworth játéknak nincs tiszta Nash egyensúlyi megoldása az első vállalat számára nagyon alacsony kapacitáskorlátot eredményezhet. Arra az esetre, amikor mindkét vállalat a hatékony adagolási szabályt alkalmazza, akkor a következő állítás igaz.

5.4. állítás. *A 5.1, 5.2 feltételek teljesüljenek az $O_{BE(1,1)}$ oligopol piacon. Le-*

gyen továbbá a megengedett kapacitások halmaza

$$\mathrm{K}_\alpha := \{(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \mid k_i > 0,\ \frac{k_i}{k_1 + k_2} \geq \alpha,\ i = 1, 2\} \tag{5.6}$$

valamilyen $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ *értékre. Ekkor az alábbi állítások fogalmazhatók meg a kapacitáskorlátos Bertrand-Edgeworth duopol játékra:*

1. *Ha*

$$\forall p > 0 : \epsilon(p) \leq -1 + \alpha, \tag{5.7}$$

akkor a játéknak pontosan egy tiszta Nash egyensúlyi megoldás van minden $(k_1, k_2) \in \mathrm{K}_\alpha$ *kapacitáskorlátok esetén. Az egyensúlyt (5.2) adja meg.*

2. *Ha* D' *folytonos és*

$$\exists p > 0 : \epsilon(p) > -1 + \alpha, \tag{5.8}$$

akkor léteznek olyan $(k_1, k_2) \in \mathrm{K}_\alpha$ *kapacitáskorlátok, amelyek mellett a játéknak nincs tiszta Nash egyensúlyi megoldása.*

Bizonyítás: 1. Ugyanúgy mint az 5.3 állítás bizonyításakor, meg kell mutatnunk, hogy az (5.7) feltételből következik $\lim_{p\to 0} D(p) = \infty$. Ehhez először mutassuk meg, hogy $\lim_{p\to 0} D^r(p) = \infty$. Ez utóbbi igazolásakor úgy járhatunk el, mint az 5.3 állítás bizonyításában azzal a kis eltéréssel, hogy a reziduális keresleti görbét kell használnunk a keresleti görbe helyett. Ezekből már $\lim_{p\to 0} D(p) = \infty$ is adódik.

Nyilván most is csak a $p^* := p_1^* = p_2^*$ ár lehet egyensúlyi. Már csak azt kell belátnunk, hogy egyik vállalatnak sem érdemes árát egyoldalúan p_i^* fölé emelnie. Ezt az első vállalatra fogjuk belátni. Megint az (5.4) feltételt kell ellenőrizni. Mivel minden $p > p_2^*$ árra $D(p) < k_1 + k_2$ teljesül, ezért az (5.7) feltevésből

$$\epsilon(p) \leq -1 + \alpha \leq -1 + \frac{k_2}{k_1 + k_2} < -1 + \frac{k_2}{D(p)} \tag{5.9}$$

adódik minden $(k_1, k_2) \in \mathrm{K}_\alpha$ kapacitás párra. Az (5.9) egyenlőtlenségből pedig megkapjuk az (5.4) feltételt $\lambda_j = 1$ paraméterérték esetében. Tehát az első vállalatnak nem érdemes árát p_1^* fölé emelnie.

2. Definiáljuk a $G(p) := pD'(p) + (1-\alpha)D(p)$ függvényt. Az (5.8) feltevésünk és G folytonossága miatt választható egy $I = (a, b) \subset G^{-1}((0, \infty))$ nyílt intervallum.

Rögzítsünk egy tetszőleges $\tilde{p} \in I$ értéket. Legyen $k_1 := \alpha D(\tilde{p})$ és $k_2 := (1-\alpha)D(\tilde{p})$. Nyilván $(k_1, k_2) \in \mathrm{K}_\alpha$ és $D(b) < k_1 + k_2 < D(a)$. A (k_1, k_2) kapacitáskorlátok esetében a második vállalatnak érdemes eltérnie a $p_1 = p_2 = \tilde{p}$ ártól, mivel $\tilde{p}D'(\tilde{p}) + D(\tilde{p}) - k_1 = G(\tilde{p}) > 0$. □

A kapacitások egy K_α halmazra korlátozása azt jelenti, hogy egyik vállalat kapacitása sem válhat tetszőlegesen kicsivé a másik vállalat kapacitásához képest. Ez a megszorítás elfogadhatónak tűnik, mivel ha egy duopóliumot kívánunk modellezni, akkor alapjában véve nem olyan piacok vizsgálatában vagyunk érdekeltek, amelyeken az egyik vállalat elhanyagolható a másik vállalathoz képest.

Az 5.4 állítás jelentősége, hogy ha mindkét vállalat mérete egymáshoz viszonyítva szignifikáns, akkor még árrugalmatlan keresleti görbék mellett is mindig létezik tiszta Nash egyensúlyi megoldás. Kiemelendő az $\alpha = \frac{1}{2}$ esete, amely esetében a két duopolista kapacitásai azonosak.

Megjegyzendő, hogy az 5.4 állításban nem lehet a hatékony adagolási szabályt az arányos adagolási szabályra kicserélni.

Most rátérünk az oligopol eset vizsgálatára. Az 5.3 és az 5.4 állításokkal analóg állítások érvényesek az oligopóliumokra.

5.5. állítás. *Az 5.1, 5.2 feltételek teljesüljenek az $O_{BE(\lambda,\ldots,\lambda)}$ oligopol piacon. Legyen továbbá D' folytonos. A kapacitáskorlátos Bertrand-Edgeworth oligopol játéknak akkor és csak akkor létezik tiszta Nash egyensúlyi megoldása, ha minden $k_j > 0$ kapacitáspár mellett a keresleti görbe kielégíti az (5.1) feltételt. Ha*

(5.1) teljesül, akkor a tiszta Nash egyensúlyi megoldás

$$\forall j \in \{1, \ldots, J\}: \quad q_j^* = k_j \quad \textit{és} \quad p_j^* = D^{-1}(\sum_{j=1}^{J} k_j). \tag{5.10}$$

Bizonyítás: Az elégségesség az 5.3 állítás bizonyításával analóg. Meg kell mutatnunk, hogy ha a vállalatok árai nem mind azonosak, akkor az árak nem lehetnek Nash egyensúlyiak. Továbbá be kell látnunk, hogy csak (5.10) lehet Nash egyensúlyi.

A szükségesség igazolásához válasszuk a J-edik vállalat kapacitáskorlátját úgy, hogy elégítse ki a

$$F(\tilde{p}) - \frac{\lambda(D(\tilde{p}) - k_J)D(\tilde{p})}{D(\tilde{p}) - (1-\lambda)(D(\tilde{p}) - k_J)} > 0$$

feltételt, ahol a $\tilde{p} > 0$ egy árrugalmatlan pontja a keresleti görbének. A többi vállalat kapacitáskorlátait válasszuk meg úgy, hogy $D(\tilde{p}) - k_J = \sum_{j=1}^{J-1} k_j$. Meggyőződhetünk arról, hogy a J-edik vállalatnak érdekében áll árát megemelnie. □

5.6. következmény. *Ha az aggregált kapacitások értéke,* $\sum_j k_j$ *végtelenbe tart, amint egyre növeljük az oligopolisták számát, akkor az egyensúlyi ár* 0*-hoz azaz a vállalatok határköltségéhez tart.*

Hasonló eredményekre jutott Vives [1986] hatékony adagolási szabály és Allen és Hellwig [1986] arányos adagolási szabály alkalmazása mellett. A bizonyításunk azért volt ilyen egyszerű, mert a keresleti görbére kirótt feltevéseink miatt nem kellett kevert Nash egyensúlyi megoldásokkal foglalkoznunk.

Az 5.4 állítással analóg állításban hatékony adagolást és azonos kapacitásokat feltételezünk.

5.7. állítás. *Az 5.1, 5.2 feltételek teljesüljenek az* $O_{BE(1,\ldots,1)}$ *oligopol piacon. Legyen továbbá* D' *folytonos és a vállalatok kapacitáskorlátai* (k) *azonosak. A kapacitáskorlátos Bertrand-Edgeworth oligopol játéknak akkor és csak akkor létezik tiszta Nash egyensúlya minden* $k > 0$ *kapacitásra, ha*

$$\forall p > 0 : \epsilon(p) \leq -1 + \frac{1}{J}. \tag{5.11}$$

Ha (5.11) fennáll, akkor a tiszta Nash egyensúlyi megoldás a következő:

$$\forall j \in \{1, \ldots, J\}: \quad q_j^* = k \quad \textit{és} \quad p_j^* = D^{-1}(Jk). \tag{5.12}$$

Bizonyítás: A bizonyítás menete megegyezik az 5.4 állítás bizonyításával. □

Az 5.7 állítás feltételeinek eleget tevő árrugalmatlan keresleti görbék esetén is létezhet tetszőleges kapacitáskorlátok mellett tiszta Nash egyensúlyi megoldása a Bertrand-Edgeworth játéknak. De minél több oligopolistánk van, annál szűkebb lesz azon keresleti görbék halmaza, amelyek tetszőleges kapacitáskorlát mellett biztosítják a tiszta Nash egyensúlyi megoldás létezését.

Egyensúlyt biztosító kapacitáskorlátok

Ebben a pontban olyan $O_{BE(\lambda_1,\lambda_2)}$ oligopol piacokat vizsgálunk, amelyek keresleti görbéi kielégítik a következő két feltételezést.

5.8. feltevés. A keresleti görbék legyenek szigorúan monoton csökkenők, folytonosan differenciálhatóak és messék mind a két tengelyt.

5.9. feltevés. A $F(p) := pD'(p) + D(p)$ függvény legyen szigorúan csökkenő.

Annak a monopolistának, aki egy az 5.8 és az 5.9 feltételnek eleget tevő keresleti görbével szembesül egyértelműen létezik bevételmaximalizáló ára. Jelöljük az 5.8 és az 5.9 feltételeknek eleget tevő keresleti görbék halmazát $\mathcal{D}$-vel.

A költségfüggvények tegyenek eleget az 5.2 feltevésnek. A vállalatok számára a kapacitáskorlátok adottságok.

A λ_1 és λ_2 rögzített értékeire meghatározzuk azon kapacitások halmazát, amelyre a kapacitáskorlátos Bertrand-Edgeworth játéknak létezik tiszta Nash egyensúlyi megoldása. Megjegyzendő, hogy az 5.2.1 szakaszban található Dasgupta-Maskin tétel segítségével igazolható, hogy létezik kevert Nash egyensúlyi megoldás.

A vizsgálandó kapacitáskorlátok halmaza leszűkíthető a

$$L := \{(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2_{++} \mid k_1 + k_2 \leq D(0)\}$$

halmazra, mivel L-en kívüli kapacitásokra a Bertrand-Edgeworth játék vagy a Bertrand duopóliumra redukálódik vagy pedig nem lesz tiszta Nash egyensúlyi megoldása. A $K(\lambda_1, \lambda_2) \subset L$ halmaz legyen azon kapacitások halmaza, amelyek mellett a megfelelő Bertrand-Edgeworth játéknak létezik tiszta Nash egyensúlyi megoldása. Az 5.9 feltevés biztosítja, hogy a $K(\lambda_1, \lambda_2)$ nem üres.

5.10. állítás. *Adott egy $O_{BE(\lambda_1,\lambda_2)}$ oligopol piac, amely kielégíti az 5.2, az 5.8 és az 5.9 feltevéseket. A $K(\lambda_1, \lambda_2) \neq L$ halmaz szigorúan növekszik, ha $\min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ növekszik. Ha $(k_1, k_2) \in K(\lambda_1, \lambda_2)$, akkor a tiszta Nash egyensúlyi megoldás*

$$q_i^* = k_i \quad \textit{és} \quad p^* = p_1^* = p_2^* = D^{-1}(k_1 + k_2). \tag{5.13}$$

Bizonyítás: Először belátjuk, hogy csak (5.13) lehet egyensúlyi. A $p_1 < p_2$ eset nem lehet egyensúlyi, mivel ha $D(p_1) > k_1$ állna, akkor az első vállalat növelné árát; míg ha $D(p_1) \leq k_1$ állna, akkor a második vállalat p_1 alá csökkentené árát. Hasonlóan, a $p_2 > p_1$ eset sem lehet egyensúlyi. A $p_1 = p_2 > p^*$ eset sem lehet egyensúlyi, ugyanis ekkor mindkét vállalat érdekében áll árainak kis mértékű csökkentése. Nyilván p^* alatti ár alkalmazása mindkét vállalat számára irracionális.

Tehát csak a p^* ár lehet egyensúlyi. Ehhez az szükséges, hogy egyik vállalatnak se álljon érdekében árát p^* fölé emelnie. Az i-edik vállalat profitfüggvénye $p^* < p \leq \overline{p}$ árakra:

$$\pi_i(p) = pD^r(p) = p\left(D(p) - \lambda_j k_j - (1 - \lambda_j)k_j \frac{D(p)}{D(p_j^*)}\right),$$

ahol $j \neq i$ és $\overline{p}$ a legkisebb olyan ár, amelyre $D^r(\overline{p}) = 0$. $\overline{p}$ feletti árakra a reziduális profitfüggvény azonosan nulla. Az i-edik vállalatnak egyoldalúan nem érdemes az árát $\overline{p}$ fölé emelni, mivel például p^* egy pozitív profitot eredményező ár. Ha

$$\frac{\mathrm{d}\pi_i}{\mathrm{d}p}(p^*) = (p^* D'(p^*) + D(p^*))\left(1 - (1 - \lambda_j)\frac{k_j}{k_i + k_j}\right) - \lambda_j k_j \leq 0 \tag{5.14}$$

fennáll, akkor az 5.9 feltevés miatt a profitfüggvény a $p \in (p^*, \overline{p})$ intervallumon nem növekvő. Az (5.14)-et átrendezve

$$F(D^{-1}(k_i + k_j)) \leq \frac{\lambda_j k_j}{1 - (1-\lambda_j)\frac{k_j}{k_i+k_j}} = \frac{\lambda_j k_j (k_i + k_j)}{k_i + \lambda_j k_j} \tag{5.15}$$

adódik. Azt kaptuk, hogy ha $\min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ növekszik, akkor $K(\lambda_1, \lambda_2)$ is növekszik, mivel (5.15)-nek fenn kell állnia mindkét vállalatra és $\frac{\lambda_j k_j (k_i+k_j)}{k_i+\lambda_j k_j}$ szigorúan monoton növekvő λ_j-ben.

Meg kell még mutatni, hogy a $K(\lambda_1, \lambda_2)$ halmaz szigorúan monoton növekszik. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} K^\alpha(\lambda_1, \lambda_2) &:= \{(k, \alpha k) \in L \mid (k, \alpha k) \in K(\lambda_1, \lambda_2)\}, \\ K_*^\alpha(\lambda_1, \lambda_2) &:= \{(k, \alpha k) \in L \mid k \in (0, D(0)/(1+\alpha)]\} \end{aligned}$$

minden $\alpha > 0$. Az (5.15) átrendezésével és azonos kapacitásokat tekintve

$$\frac{F(D^{-1}((1+\alpha)k))}{k} \leq \frac{(1+\alpha)\lambda_j}{\alpha + \lambda_j} \tag{5.16}$$

adódik. Nyilván analóg feltételt kapunk (5.16)-hoz a másik (j) vállalatra is. Ezért $(k, \alpha k) \in K^\alpha(\lambda_1, \lambda_2)$ akkor és csak akkor ha

$$\frac{F(D^{-1}((1+\alpha)k))}{k} \leq \min\left\{\frac{(1+\alpha)\lambda_1}{\alpha+\lambda_1}, \frac{(1+\alpha)\lambda_2}{\alpha+\lambda_2}\right\}. \tag{5.17}$$

A $K^\alpha(\lambda_1, \lambda_2)$ szigorúan növekszik, ha $\min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ növekszik és $K^\alpha(\lambda_1, \lambda_2) \neq K_*^\alpha(\lambda_1, \lambda_2)$, mivel (5.17) bal oldala folytonos minden $k \in (0, \frac{D(0)}{1+\alpha}]$ értékre és a $\frac{(1+\alpha)\lambda}{\alpha+\lambda}$ függvény szigorúan növekszik λ-ban a $\lambda \in [0, 1]$ intervallumon.

Ha $K(\lambda_1, \lambda_2) \neq L$, akkor található olyan $\alpha > 0$ érték, hogy $K^\alpha(\lambda_1, \lambda_2) \neq K_*^\alpha(\lambda_1, \lambda_2)$. Tegyük fel, hogy $\lambda_1 < \lambda_1' < \lambda_2$. Ekkor $K^\alpha(\lambda_1, \lambda_2)$ valódi részhalmaza a $K^\alpha(\lambda_1', \lambda_2)$ halmaznak. Végül, mivel $K^\alpha(\lambda_1, \lambda_2) \subset K(\lambda_1, \lambda_2)$ és $K^\alpha(\lambda_1', \lambda_2) \setminus K^\alpha(\lambda_1, \lambda_2)$ nem üres és diszjunkt a $K(\lambda_1, \lambda_2)$ halmaztól azt kapjuk, hogy $K(\lambda_1, \lambda_2)$ valódi részhalmaza $K(\lambda_1', \lambda_2)$-nek. Hasonló érveléssel állításunk igazolható a $\lambda_1 > \lambda_2$ és $\lambda_1 = \lambda_2$ esetekben. □

Lineáris keresleti görbe és azonos kapacitások esetében a $K(\lambda_1, \lambda_2)$ halmaz egyszerű struktúrájú. Erre vonatkozik az 5.11 állítás. Lineáris keresleti görbe esetén (mint ismeretes) az ár és mennyiségi egységek megfelelő választásával a keresleti görbe $D(p) = 1 - p$ alakra hozható. Legyen

$$H(\lambda_1, \lambda_2) := \{k \in (0, D(0)/2] \mid (k,k) \in K^1(\lambda_1, \lambda_2)\}.$$

5.11. állítás. *Ha egy $O_{BE(\lambda_1,\lambda_2)}$ oligopol piac teljesíti az 5.2 feltevést és a keresleti görbéje $D(p) = 1 - p$, akkor*

$$H(\lambda_1, \lambda_2) = \left(0, \frac{1}{2} \min\left\{\frac{1+\lambda_1}{2+\lambda_1}, \frac{1+\lambda_2}{2+\lambda_2}\right\}\right]. \tag{5.18}$$

Bizonyítás: Az 5.10 állítás bizonyítását tekintve elég meghatároznunk azokat a kapacitásokat, amelyek kielégítik az (5.14)-et azonos kapacitásokra. Ez azt jelenti, hogy az $i \in \{1, 2\}$ vállalat számára teljesülni kell az alábbi egyenlőtlenségnek:

$$(-p^* - 1 - p^*)(1 - \frac{1}{2}(1 - \lambda_i)) - \lambda_i k = (4k - 1)\frac{1}{2}(1 + \lambda_i) - \lambda_i k \leq 0. \tag{5.19}$$

Az (5.19) átrendezve megkapjuk (5.18)-at. □

Ha mindkét vállalat a hatékony adagolási szabály szerint szolgálja ki a fogyasztókat, akkor az 5.11 állítás szerint $H(1, 1) = (0, 1/4]$. Ez a jól ismert eredmény megtalálható többek között Wolfstetter [1993] művében. Továbbá, ha mindkét vállalat az arányos adagolási szabály szerint szolgálja ki a fogyasztókat, akkor $H(0, 0) = (0, 1/3]$. Ez a szintén jól ismert eredmény megtalálható például Tirole [1988] könyvében.

5.1.2 Szigorúan monoton növekedő és szigorúan konvex költségfüggvények

Ebben a szakaszban olyan $O_{BE(\lambda_1,\ldots,\lambda_J)}$ oligopol piacot vizsgálunk, amely keresleti görbéje kielégíti az alábbi feltételeket.

5.12. feltevés. A $D : [0, \overline{p}] \to [0, \overline{q}]$ keresleti görbe egy a $[0, \overline{p}]$ intervallumon folytonos, a $(0, \overline{p})$ intervallumon kétszer folytonosan differenciálható függvény, amelyre $D(0) = \overline{q}$, $D(\overline{p}) = 0$, $D(p) > 0$ minden $p < \overline{p}$ árra és a $F(p) := D(p) + pD'(p)$ szigorúan monoton csökkenő a $(0, \overline{p})$ intervallumon.

Legyen az árdöntések halmaza $P = [0, \overline{p}]$ és a kibocsátások halmaza $Q = [0, \overline{q}]$. A $D : P \to Q$ keresleti függvény az 5.12 feltétel fennállása esetében nyilván invertálható.

A költségfüggvényekre vonatkozó feltételek a következők.

5.13. feltevés. Mindegyik $j \in \{1, \ldots, J\}$ vállalat költségfüggvénye pozitív értékű, kétszer folytonosan differenciálható, szigorúan monoton növekedő és szigorúan konvex.

Vezessük be a j-edik vállalat költségfüggvényének inverzére az $S_j(p) := (C_j')^{-1}(p)$ jelölést. Jelölje továbbá az S függvény az S_j függvények összegét, azaz $S(p) := \sum_{j=1}^{J} S_j(p)$.

Továbbá a keresleti függvények és a költségfüggvény egymáshoz való viszonyára teljesüljön az alábbi feltétel.

5.14. feltevés. $\forall j \in \{1, \ldots, J\} : 0 \leq C_j'(0) < D(0)$.

Legyen $p^c > 0$ az az ár, amely mellett az S függvény és a D keresleti görbe metszik egymást. A p^c jelölés arra utal, hogy p^c az egyensúlyi ár egy olyan kompetitív piacon, amelyen a piaci kínálati görbe S és a keresleti görbe D. A feltevések alapján egyértelműen létezik p^c pozitív ár.

Jelölje $p_j^m \in P$ a $j \in \{1, \ldots, J\}$ vállalat monopolista árát és q_j^m a hozzátartozó monopolista kibocsátását, azaz

$$
\begin{aligned}
p_j^m &\in \operatorname{argmax}\{p \in P \mid pD(p) - C_j(D(p))\} \quad \text{és} \\
q_j^m &\in \operatorname{argmax}\{q \in Q \mid qD^{-1}(q) - C_j(q)\}.
\end{aligned}
$$

Az 5.12, az 5.13 és az 5.14 feltevések biztosítják, hogy pontosan egy profitmaximalizáló kibocsátás létezik, ugyanis az $f(q) := qD(q) - C_j(q)$ függvényre $f'(0) > 0$, $f'(\overline{q}) < 0$ és $f''(q) < 0$. A j-edik vállalat monopolista profitfüggvényét a továbbiakban $\pi_j^m(p)$ szimbólummal jelöljük. Nyilván, ha $p < \min_{i \neq j} p_i$, akkor $\pi_j^m(p) = \pi_j(p)$.

A vállatokat monopolista áraik szerint monoton növekvően fogjuk indexelni, azaz feltesszük, hogy $p_1^m \leq p_2^m \leq \cdots \leq p_J^m$.

5.15. lemma. *Minden egyes monopolista ár nagyobb p^c-nél, azaz* $\forall j \in \{1, \dots, J\} : p^c < p_j^m$.

Bizonyítás: Jelöljük q_j^c-vel azt a kibocsátást, amelyre $C_j'(q_j^c) = D(q_j^c)$. A q_j^c kibocsátás egyértelműen meghatározott és pozitív. A monopolista kibocsátásra fennáll a

$$q_j^m D'(q_j^m) + D(q_j^m) = C_j'(q_j^m) \tag{5.20}$$

egyenlőség, amiből megkapható a $D(q_j^m) > C_j'(q_j^m)$ egyenlőtlenség. Az 5.12 és az 5.13 feltevések miatt $q_j^m < q_j^c$ teljesül. Ez pedig azt jelenti, hogy $p_j^m > p_j^c$. Most már csak azt kell meggondolnunk, hogy $p_j^c > p^c$. Ez utóbbi pedig nyilván igaz, mivel $S_j < S$. □

Vizsgálatainkat a továbbiakban egy $O_{BE(0,0)}$ oligopol piacon végezzük, azaz feltételezzük hogy mindkét duopolista a fogyasztókat az arányos adagolási szabály szerint szolgálja ki. Tekintsük a következő lemmát, amely megadja a j-edik vállalat optimális termelését az i-edik vállalat (p_i, q_i) és a j-edik vállalat p árdöntése esetén.

5.16. lemma. *Az i-edik vállalat p ár melletti feltételes kibocsátása, a j-edik vállalat $(i \neq j)$ adott (p_j, q_j) döntése mellett:*

$$q_i(p) = \begin{cases} \min(S_i(p), D(p)), & ha \quad C_i'(0) < p < p_j; \\ \min(S_i(p), D^r(p)), & ha \quad p > p_j \ \textit{és}\ C_i'(0) < p; \\ 0, & ha \quad 0 \le p \le C_i'(0). \end{cases}$$

Bizonyítás: Először vizsgáljuk a lemma első ágát, azaz legyen $C_i'(0) < p < p_j$. Ekkor az i-edik vállalat által megoldandó feladat a következő:

$$\max\{pq - C_i(q) \mid 0 \le q \le D(p)\}.$$

A feladathoz tartozó Lagrange függvény

$$\mathcal{L}(q, \lambda) = pq - C_i(q) - \lambda(q - D(p)),$$

és a Kuhn-Tucker feltételek

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = p - C_i'(q) - \lambda \leq 0 \quad && \text{és } \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0, \quad \text{ha } q > 0; \\ &\tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = D(p) - q \geq 0 && \text{és } \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0, \quad \text{ha } \lambda > 0. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Ha $S_i(p) \leq D(p)$, akkor $\lambda = 0$, $q = S_i(p)$ megoldása az (5.21) feltételeknek. Ekkor ugyanis a $p - C_i'(q) = 0$ feltételnek létezik pontosan egy megoldása a $C_i'(0) < p$ feltétel miatt. Ellenőrizhető, hogy csak a $q = S_i(p)$ megoldás lehet maximumhely.

Ha $S_i(p) > D(p)$, akkor a $\lambda = p - C_i'(q) > 0$, $q = D(p)$ megoldása az (5.21) feltételeknek, ugyanis az $S_i(p) > D(p)$ feltétel ekvivalens a $p > C_i'(D(p))$ egyenlőtlenséggel.

Most térjünk rá a lemma második ágának vizsgálatára, azaz legyen $p_j < p$ és $C_i'(0) < p$. Ekkor az i-edik vállalat által megoldandó feladat a következő:

$$\max \left\{ pq - C_i(q) \mid 0 \leq q \leq D(p) \left(1 - \frac{q_j}{D(p_j)} \right) \right\}.$$

A feladathoz tartozó Lagrange függvény

$$\mathcal{L}(q, \lambda) = pq - C_i(q) - \lambda \left(q - D(p) \left(1 - \frac{q_j}{D(p_j)} \right) \right),$$

és a Kuhn-Tucker feltételek

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = p - C_i'(q) - \lambda \leq 0 && \text{és } \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0, \quad \text{ha } q > 0; \\ &\tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = D(p) \left(1 - \tfrac{q_j}{D(p_j)} \right) - q \geq 0 \quad && \text{és } \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0, \quad \text{ha } \lambda > 0. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Ha $S_i(p) \leq D(p) \left(1 - \frac{q_j}{D(p_j)} \right)$, akkor $\lambda = 0$, $q = S_i(p)$ megoldása az (5.22) feltételeknek. Ekkor ugyanis a $p - C_i'(q) = 0$ feltételnek létezik legalább egy megoldása a $C_i'(0) < p$ feltétel miatt. Ellenőrizhető, hogy csak a $q = S_i(p)$ megoldás lehet maximumhely.

Ha $S_i(p) > D(p) \left(1 - \frac{q_j}{D(p_j)} \right)$, akkor $\lambda = p - C_i'(q) > 0$, $q = D(p) \left(1 - \frac{q_j}{D(p_j)} \right)$ megoldása az (5.22) feltételeknek, ugyanis az $S_i(p) > D(p) \left(1 - \frac{q_j}{D(p_j)} \right)$ feltétel ekvivalens a $p > C_i' \left(D(p) \left(1 - \frac{q_j}{D(p_j)} \right) \right)$ egyenlőtlenséggel.

Végül vizsgáljuk a lemma harmadik ágát, azaz legyen $0 \leq p \leq C_i'(0)$. A vállalatnak ekkor p és p_j egymáshoz való viszonyától függően az (5.21) vagy pedig az (5.22) feladatot kell megoldania. Leellenőrizhető, hogy bármelyik esetben a $\lambda = 0$ és a $q = 0$ értékeket kapjuk eredményül. $\square$

5.17. lemma. *A Bertrand-Edgeworth játék egy tiszta Nash egyensúlyi megoldásában a pozitív egyensúlyi kibocsátású vállalatok egyensúlyi árai mindenképpen csak a* $[p^c, \min\{p_1^m, p_2^m\})$ *intervallumból kerülhetnek ki.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az $s = ((p_1^*, q_1^*), (p_2^*, q_2^*))$ egy Nash egyensúly és van olyan p_j^*, amely nem eleme a $[p^c, \min_{j \in \{1,2\}}\{p_j^m\})$ intervallumnak. Legyen $i \neq j$ és $i \in \{1, 2\}$ a másik vállalat indexe.

Ha $p_j^* \geq p_i^m$, akkor szükségszerűen $p_i^* = p_i^m$ ugyanis feltettük, hogy s egy Nash egyensúly. Ekkor viszont az 5.16 lemma miatt az i-edik vállalat p_i^* áron a teljes keresletet kielégíti, azaz $q_i^* = D(p_i^*)$. Ezért p_j^* áron a j-edik vállalat profitja legfeljebb nulla lehet, méghozzá $q_j^* = 0$ kibocsátás mellett. Azonban $(p_j^*, 0) \notin B_j(p_i^m, D(p_i^m))$ ugyanis például $p_j = p^c$ ár mellett a j-edik vállalatnak a profitja nyilván pozitív. Tehát ellentmondásra jutottunk, mivel azt kaptuk, hogy s nem lehet Nash egyensúly.

Ha pedig $p_j^* < p^c$, akkor a j-edik vállalat jobban járna a p^c ár megállapításával, mivel p^c ár alatt az 5.16 lemma miatt a vállalat kibocsátása Nash egyensúlyban $q_j = S(p_j)$. Tehát feltevésünkkel ellentétben s nem lehet Nash egyensúly. $\square$

5.18. definíció. Az O_{BE} Bertrand-Edgeworth játék egy $((p_1^*, q_1^*), \ldots, (p_J^*, q_J^*))$ Nash egyensúlyi megoldását *árakban szimmetrikus* Nash egyensúlyi megoldásnak nevezzük, ha $p_1^* = \cdots = p_J^*$. Egy árakban nem szimmetrikus Nash egyensúlyi megoldást pedig *árakban aszimmetrikus* megoldásnak nevezünk.

5.19. állítás. *A kétszemélyes Bertrand-Edgeworth játéknak nem lehet árakban aszimmetrikus tiszta Nash egyensúlya.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az $s = ((p_1^*, q_1^*), (p_2^*, q_2^*))$ egy árakban aszimmetrikus Nash egyensúly. Az 5.17 lemma miatt $p_1^*, p_2^* \in [p^c, \min_{j \in \{1,2\}}\{p_j^m\})$. Ha $p_1^* < p_2^*$, akkor az első vállalatnak érdemes árat növelnie ugyanis a profitfüggvénye árakban növekvő a p_1^m árig. Ha pedig fordítva $p_1^* > p_2^*$, akkor a második vállalatnak érdemes árat emelnie. Tehát s nem lehet Nash egyensúly. $\square$

5.20. állítás. *A kétszemélyes Bertrand-Edgeworth játéknak nem létezik tiszta Nash egyensúlyi megoldása.*

Bizonyítás: Először belátjuk, hogy a kétszemélyes Bertrand-Edgeworth játéknak csak a $p_1^* = p_2^* = p^c$ árak mellett lehet árakban szimmetrikus tiszta Nash egyensúlya. Az előző 5.19 állítás alapján csak a $p^c \leq p_1^* = p_2^* < \min_{j\in\{1,2\}}\{p_j^m\}$ ár lehet Nash egyensúlyi. Ha $p_1 = p_2 > p^c$, akkor mindkét vállalat érdekelt egyoldalúan árának csökkentésében. Ezért csak a $p_1^* = p_2^*$ árak mellett lehet a Bertrand-Edgeworth játéknak tiszta Nash egyensúlya.

Végezetül már csak azt kell igazolni, hogy a $p_1^* = p_2^* = p^c$ árak mellett sincs tiszta Nash egyensúlyi megoldás. Tekintsük az első vállalat reziduális profitfüggvényét:

$$\begin{aligned}\pi^r(p) &= D^r(p)p - C_1(D^r(p)) = \\ &= D(p)\left(1 - \frac{S_2(p^c)}{D(p^c)}\right)p - C_1\left(D(p)\left(1 - \frac{S_2(p^c)}{D(p^c)}\right)\right),\end{aligned} \tag{5.23}$$

az 5.16 lemma alapján. Mivel $S_1(p^c) = D^r(p^c)$, ezért $p^c = (dC_1/dq)(D^r(p^c))$. Ez utóbbit felhasználva a reziduális profitfüggvény jobboldali deriváltja p^c-ben az alábbi:

$$\begin{aligned}\frac{d\pi^r}{dp}(p^c+) &= D^r(p^c) + \frac{dD^r}{dp}(p^c)\left(p^c - \frac{dC_1}{dq}(D^r(p^c))\right) = \\ &= D^r(p^c) = D(p^c)\left(1 - \frac{S_2(p^c)}{D(p^c)}\right) > 0.\end{aligned} \tag{5.24}$$

Tehát az első vállalatnak érdemes p^c-nél magasabb árat megállapítania. $\square$

5.2 Kevert Nash egyensúly létezése

Egy játék kevert Nash egyensúlyi pontjának egzisztenciájára vonatkozik Glicksberg tétele (a játékelméleti fejezetben található 2.12 tétel). Glicksberg tétele a Bertrand-Edgeworth oligopóliumokra nem alkalmazható, ugyanis az oligopolisták kifizetőfüggvényeinek folytonossága sérül. Dasgupta és Maskin [1986a] egy játék kevert Nash egyensúlyi pontjának létezésére vonatkozó egzisztencia tételt adtak olyan játékokra, amelyekben a kifizetőfüggvények folytonossága speciális módon sérül. A tételeik erejét ezt követően Dasgupta és Maskin [1986b] több közgazdaságilag érdekes játékon is bemutatta, amelyek között az állandó átlagköltségű, kapacitáskorlátos és arányos adagolásos Bertrand-Edgeworth duopólium is szerepelt. Dixon [1984] két azonos konvex költségfüggvényű duopolista esetén a Dasgupta-Maskin tétel segítségével belátta a kevert egyensúly létezését. Dixon az arányos és hatékony adagolás esetét vizsgálta. Maskin [1986] a Dasgupta-Maskin tétel felhasználásával eltérő költségfüggvények esetén is igazolta a kevert egyensúly egzisztenciáját. Simon [1987] később közölt egy a Dasgupta-Maskin tételnél általánosabb tételt a kevert egyensúlyi stratégia létezésére vonatkozóan. Reny [1999] tovább általánosította a nem folytonos kifizetőfüggvényű játékokra vonatkozó egzisztencia tételeket.

Ebben az alfejezetben először a Dasgupta-Maskin tételt ismertetjük, majd ezek segítségével kombinált adagolási szabály alkalmazása mellett belátjuk a kevert Nash egyensúlyi pont létezését.

5.2.1 Dasgupta-Maskin tétel

Tekintsünk egy $\langle \{1,\dots,N\}, (A_i)_{i=1}^N, (u_i)_{i=1}^N \rangle$ stratégiai játékot. Feltesszük, hogy $A_i \subset \mathbb{R}^m$ $(m \geq 1)$ nem üres, konvex és kompakt halmaz (minden $i = 1,\dots,N$-re). Az A_i egy elemét a_i-vel és a k-adik komponensét a_i-nek a_{ik}-val jelöljük $(k = 1,\dots,m)$. Az A_{ik}-val jelöljük az A_i halmaz k-adik tengelyvetületét.

Meg kell adnunk, hogy az u_i kifizetőfüggvények milyen típusú halmazokon sérthetik meg a folytonosság feltételét. Ehhez szükségünk lesz még néhány további jelölésre. Legyen $M \subset \{1,\dots,m\}$. Vegyünk két $i, j \in \{1,\dots,N\}$ tetszőleges játékost és legyen $D(i)$ egy pozitív szám érték. Minden $d \in \{1,\dots,D(i)\}$ egész értékhez legyenek az $f_{ij}^d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan kölcsönösen egyértelmű és folytonos függvények, amelyekre $f_{ij}^d = (f_{ji}^d)^{-1}$. Végül értelmezzük minden játékosra az $A^*(i) =$

$$\{a \in A \mid \exists j \neq i, \exists k \in M, \exists d \in \{1, \ldots, D(i)\} : a_{jk} = f_{ij}^d(a_{ik})\} \qquad (5.25)$$

halmazokat. Az u_i kifizetőfüggvényeknek egy $A^{**}(i) \subset A^*(i)$ halmazon lehet szakadásuk. Az $A^*(i)$ halmaz Lebesgue mértéke nulla. Értelmezzük minden $a_i \in A_i$ stratégiára az alábbi halmazokat:

$$\begin{aligned} A^*_{-i}(a_i) &:= \{a_{-i} \in A_{-i} \mid (a_i, a_{-i}) \in A^*(i)\} \\ A^{**}_{-i}(a_i) &:= \{a_{-i} \in A_{-i} \mid (a_i, a_{-i}) \in A^{**}(i)\}. \end{aligned}$$

Az i-edik játékos kifizetőfüggvényének az a_i saját változójában szakadása lehet akkor, ha valamelyik másik $j \in \{1, \ldots, N\}$, $i \neq j$ játékos és valamilyen $k \in M$, $d \in \{1, \ldots, D(i)\}$ értékekre a j-edik játékos döntésének k-adik komponense megegyezik az $f_{ij}^d(a_{ik})$ értékkel. A legtöbb gazdasági játéknál az f_{ij}^d függvények az identitás függvények. A Bertrand-Edgeworth duopóliumoknál például a szakadási helyek azok a stratégiapárok, amelyeknél mindkét duopolista azonos árat állapít meg.

Megjegyzendő, hogy mivel két játékos szakadási helyei között csak véges sok f_{ij}^d függvény teremt kapcsolatot, ezért ha $a \in A^{**}(i)$, akkor bármely $i \in \{1, \ldots, N\}$ játékosra az $\{a' \in A^{**}(i) \mid (a_i, a'_{-i}) \in A^{**}(i)\}$ halmazok végesek. Ezzel az $m = 1$ és $N = 2$ esetben kizártuk, hogy a szakadási helyek halmaza egy vertikális vagy horizontális szakasz lehessen. Magasabb dimenziós stratégia halmazok, illetve több játékos esetében analóg állítás igaz.

A kifizetőfüggvények a szakadási helyekben nem viselkedhetnek bárhogyan. Ehhez szükségünk lesz a függvények felülről félig-folytonosságának és a függvények gyenge alulról félig-folytonosságának fogalmára.

5.21. definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}^m$ $(m \geq 1)$ egy nem üres kompakt halmaz. Egy $u : A \to \mathbb{R}$ függvény *felülről félig-folytonos*, ha tetszőleges A-beli $a^n \to a \in A$ konvergens sorozatra $\limsup_{n \to \infty} u(a^n) \leq u(a)$.

5.22. definíció. Az $u : A \to R$ függvény *gyengén alulról félig-folytonos* az a_i

pontban, ha $\forall \overline{a}_i \in A_i^{**}(i) : \exists \lambda \in [0,1] : \forall a_{-i} \in A_{-i}^{**}(\overline{a}_i)$:

$$\lambda \lim \inf_{a_i^n \nearrow \overline{a}_i} u(a_i^n, a_{-i}) + (1-\lambda) \lim \sup_{a_i^n \searrow \overline{a}_i} u(a_i^n, a_{-i}) \geq u(\overline{a}_i, a_{-i}).$$

Ezen előkészületek után már kimondhatjuk a Dasgupta-Maskin tételt.

5.23. tétel. *Legyenek az $A_i \subset \mathbb{R}^m$ $(m \geq 1)$ nem üres, konvex és kompakt halmazok minden $(i = 1, \ldots, N)$-re, továbbá az $u_i : A_i \to \mathbb{R}$ függvények legyenek az $A^*(i)$ egy $A^{**}(i)$ részhalmazától eltekintve folytonosak, ahol $A^*(i)$ az (5.25) összefüggéssel adott $(i = 1, \ldots, N)$-re. Tegyük fel, hogy a $\sum_{i=1}^N u_i(a)$ függvény felülről félig-folytonos, továbbá minden $i = 1, \ldots, N$ játékosra $u_i(a_i, a_{-i})$ korlátos és gyengén alulról félig-folytonos a_i-ben. Ekkor az $\langle \{1, \ldots, N\}, (A_i)_{i=1}^N, (u_i)_{i=1}^N \rangle$ stratégiai játéknak létezik kevert Nash egyensúlyi pontja.*

5.2.2 Kevert egyensúly létezése kapacitáskorlátos Bertrand-Edgeworth játékokban

A Dasgupta-Maskin tétel (5.23 tétel) segítségével ebben a szakaszban belátjuk, hogy a kapacitáskorlátos Bertrand-Edgeworth duopol játéknak létezik kevert Nash egyensúlyi pontja. Ehhez a keresleti görbére vonatkozóan az alábbi feltételekkel kell élnünk.

5.24. feltevés. A $D : [0, \overline{p}] \to [0, \overline{q}]$ keresleti görbe egy folytonos és monoton csökkenő függvény, amelyre $D(0) = \overline{q}$, $D(\overline{p}) = 0$ és $\forall p \in (0, \overline{p}) : D(p) > 0$.

Legyen $P = [0, \overline{p}]$ az árdöntések halmaza és $Q = [0, \overline{q}]$ a kibocsátások halmaza.

A költségfüggvények pedig tegyenek eleget az alábbi feltételeknek.

5.25. feltevés. Mindegyik $j \in \{1, 2\}$ vállalat átlagköltsége legyen nulla egy vállalat-specifikus $k_j \in \mathbb{R}_{++}$ kapacitáskorlátig.

Tehát a j-edik vállalat költségfüggveénye

$$C_j(q) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad q_j \in [0, k_j], \\ \infty, & \text{ha} \quad q_j \in (k_j, \infty). \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy $k_1 + k_2 < D(0)$. Jelölje p^c azt az árat amely mellett a piac tisztul, azaz $k_1 + k_2 = D(p^c)$.

A Bertrand-Edgeworth játék második változatát fogjuk vizsgálni, amelyben emlékeztetőül a vállalatok az árdöntéseiket a mennyiségi döntéseik előtt hozzák meg. Ennek a változatnak az az előnye, hogy az árdöntések már meghatározzák a mennyiségi döntéseket és ezért tulajdonképpen a termék ára az egyetlen igazi stratégiai változó. Ugyanis, ha a termék iránt van kereslet és a termék ára eléri legalább az egységköltséget, akkor a vállalatok kapacitáskorláton fognak termelni. Ezért a Dasgupta-Maskin tételt az $m = 1$ esetre fogjuk alkalmazni az $A_i = P$ stratégia halmazokra.

5.26. tétel. *Az $O_{BE(\lambda_1,\lambda_2)}$ oligopol piacon teljesüljenek az 5.24 és az 5.25 feltételek. Ekkor a kapacitáskorlátos Bertrand-Edgeworth játéknak létezik kevert Nash egyensúlyi pontja.*

Bizonyítás: Alkalmazzuk a Dasgupta-Maskin tétel kimondásakor használt jelöléseket. Legyen $m = 2$, $N = 2$, $M = \{1\} \subset \{1, 2\}$, $D(1) = 1$, $D(2) = 1$, $f^1_{1,2}(p_1) = p_1$ és $f^1_{2,1}(p_2) = p_2$. A szakadási pontok halmazát behatároló $A^*(1), A^*(2)$ halmazok legyenek

$$A^*(j) = \{(((p_1, q_1), (p_2, q_2)) \in ([p^c, \overline{p}] \times Q)^2 \mid p_1 = p_2\}.$$

A j-edik vállalat hasznosságfüggvénye $u_j((p_1, q_1), (p_2, q_2))) = \pi_j(D, C_j, R_j, ((p_1, q_1), (p_2, q_2)))$. Az u_j függvény a $P^J \times Q^J \setminus A^*(j)$ halmazon folytonos. Továbbá mindkét vállalat kifizetőfüggvényei ugrásszerűen növekednek, ha a vállalat árait bármilyen kismértékben is csökkenti egy $(p_1, p_2) \in (p^c, \overline{p})^2$ pontból. Ezért az u_j függvények balról alulról félig-folytonosak p_j-ben, amiből viszont következik, hogy az u_j függvények p_j-ben gyengén alulról félig-folytonosak. Az u_j függvények nyilván korlátosak. Végül pedig az $u_1 + u_2$ függvény folytonos, mivel az u_j függvények ugrásai egymást kompenzálják. Tehát teljesülnek a Dasgupta-Maskin tétel feltételei. $\square$

Megjegyzendő, hogy az 5.26 tétel állítása oligopóliumokra is igaz.

5.3 Kevert Nash egyensúlyi stratégiák meghatározása

A kevert Nash egyensúlyi stratégiák meghatározása nehéz feladat. Az irodalomban található eredmények a kapacitáskorlátos Bertrand-Edgeworth oligopóliumokra vonatkoznak.

Elsőként Beckmann [1965] végzett ilyen jellegű számításokat. Beckmann explicite meghatározta a Bertrand-Edgeworth duopólium kevert Nash egyensúlyi pontját lineáris keresleti függvény, állandó határköltségek, azonos kapacitáskorlátok és arányos adagolás feltételezése mellett. Számításaiban néhány hibát vétett (lásd Osborne és Pitchik [1986]). Levitan és Shubik [1972] hatékony adagolási szabályt választva különben Beckmann-nal megegyező feltételek mellett meghatározták a kevert Nash egyensúlyi pontot.

Davidson és Deneckere [1986] arányos adagolási szabály, szigorúan monoton csökkenő keresleti görbe és nulla határköltségek feltételezése mellett egymástól eltérő kapacitáskorlátok esetére megadtak egy differenciálegyenletet, amely megoldása segítségével megkapható a kapacitáskorlátos Bertrand-Edgeworth duopólium kevert Nash egyensúlyi pontja. Allen és Hellwig [1993] Davidson és Deneckere [1986] eredményét meghaladva explicit formulát adtak a kevert Nash egyensúlyi pontra lényegében azonos feltételek mellett. Továbbá részletesen elemezték a kevert egyensúlyi megoldás tartóját.

Vives [1986] az oligopóliumokra és szigorúan monoton csökkenő keresleti görbékre terjesztette ki Levitan és Shubik [1972] eredményét. Megoldását részletesen ismertetjük.

Tekintsünk tehát egy olyan kapacitáskorlátos Bertrand-Edgeworth oligopóliumot, amelyre a következő két feltétel teljesül.

5.27. feltevés. A $D : [0, \overline{p}] \to [0, \overline{q}]$ keresleti görbe egy kétszer folytonosan differenciálható, szigorúan monoton csökkenő és konkáv függvény, amelyre $D(0) = \overline{q}$, $D(\overline{p}) = 0$ és $\forall p \in (0, \overline{p}) : D(p) > 0$.

5.28. feltevés. Az oligopolisták átlagköltségei legyenek nullák egy $k > 0$ kapacitáskorlátig.

Tehát a j-edik vállalat költségfüggvénye

$$C_j(q) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad q_j \in [0, k], \\ \infty, & \text{ha} \quad q_j \in (k, \infty). \end{cases}$$

Jelölje most is $P = [0, \overline{p}]$ az árdöntések és $Q = [0, \overline{q}]$ a kibocsátások halmazát.

Az 5.27 feltevés biztosítja, hogy a megfelelő Cournot oligopóliumnak egyértelműen létezik Nash egyensúlyi pontja. Jelöljük ezt a Cournot egyensúlyi kibocsátást y-nal.

5.29. tétel. *Tegyük fel, hogy teljesülnek az 5.27 és az 5.28 feltevések az $O_{BE(1,\ldots,1)}$ oligopol piacon. Ekkor a Bertrand-Edgeworth játék szimmetrikus Nash egyensúlyi megoldása az alábbi:*

1. *ha $k \leq y$, akkor mindegyik vállalat $p_j^* = D^{-1}(Jk)$ árat és $q_j^* = k$ kibocsátást állapít meg;*

2. *ha $y < k < \overline{q}/(J-1)$, akkor az oligopolisták áraikat egymástól függetlenül a*

$$\phi(p) = \begin{cases} \left(\frac{k-\pi/p}{Jk-D(p)}\right)^{1/(J-1)}, & ha \quad p \in [p', p''], \\ 0, & ha \quad p \in [0, p') \cup (p'', \overline{p}] \end{cases} \tag{5.26}$$

   eloszlásfüggvény alapján határozzák meg, ahol $p'' = \arg\max_{p \in P}\{p(D(p) - (J-1)k)\}$, $\pi = p''(D(p'') - (J-1)k)$ és $p' = \pi/k$;

3. *ha $k \geq \overline{q}/(J-1)$, akkor mindegyik oligopolista a $p = 0$ árat állapítja meg.*

Bizonyítás: Vegyük sorra a tétel három pontját.

1. Egyik vállalatnak sem érdemes $p^* = D^{-1}(Jk)$ ár alá menni, mivel korlátos kapacitása miatt ugyis legfeljebb k mennyiséget tud értékesíteni és ezért profitja csökkenne. Ha egy vállalat egyoldalúan p^*-nál magasabb árat állapít

meg, akkor a $D(p)-(J-1)k$ reziduális kereslettel szembesül. De ekkor a többi vállalat (p^*, k) döntésére a legjobb válasz p^* a $p \geq p^*$ megszorítás mellett, mivel feltevés szerint a vállalat kapacitása kisebb a Cournot megoldásnál és ezért az 5.27, 5.28 feltevések miatt érdemes a kapacitáskorláton termelnie.

2. Az $y < k < \overline{q}/(J-1)$ feltétel mellett, a kapacitáskorlátos Bertrand-Edgeworth játéknak nem létezik tiszta Nash egyensúlyi megoldása. Dasgupta és Maskin [1986a, 6. tétel] szimmetrikus kevert Nash egyensúlyi stratégiák létezésére vonatkozó tétele segítségével könnyen belátható, hogy a feltevéseink mellett a kapacitáskorlátos Bertrand-Edgeworth játéknak létezik szimmetrikus kevert Nash egyensúlyi megoldása, amely tartója a $[p', p''] \subset [0, \overline{p}]$ halmaz. A tartó alsó határa $p' = D^{-1}(Jk)$, mivel p' ár alá nem érdemes menni, mint azt már az 1. pont bizonyítása során beláttuk. A tartó felső határa p'', a reziduális kereslet melletti profitmaximalizáló ár, azaz $p'' = \arg\max_{p \in P}\{p(D(p)-(J-1)k)\}$. Megjegyzendő, hogy az $y < k$ feltevés miatt a vállalat nem fog mindig kapacitáskorláton termelni. Jelöljük a vállalatok szimmetrikus kevert Nash egyensúlyi stratégiáihoz tartozó eloszlásfüggvényt ϕ-vel. Tegyük fel, hogy az i-edik vállalattól eltekintve a többi a ϕ kevert stratégiát alkalmazza. Ekkor a kevert Nash egyensúly tulajdonsága alapján (2.13 állítás) az i-edik vállalat várható profitja, bármely $p \in [p', p'']$ ár választása esetén azonos. Jelöljük ennek a várható profitnak az értékét π-vel. Nyilván $\pi = p''(D(p'')-(J-1)k)$, mivel a versenytársak egy valószínűséggel a p'' ár alá fognak menni. A p' ár megállapítása esetén az i-edik vállalat profitja $p'k$, ugyanis ebben az esetben a vállalat kapacitáskorláton termel. Ezért $p' = \pi/k$. Bármely $p \in (p', p'')$ ár alkalmazása esetén fennáll a

$$\pi = (1 - \phi^{J-1}(p))pk + \phi^{J-1}(p)p(D(p) - (J-1)k) \tag{5.27}$$

egyenlőség. Az (5.27) azonosság átrendezésével megkapjuk a kevert Nash egyensúlyi stratégiát megadó (5.26) formulát.

3. A $p_j = 0$ nyilván Nash egyensúlyi ár, mivel ha egy oligopolista egyoldalúan pozitív árat állapít meg, akkor a többi $J-1$ oligopolista $p = 0$ áron

lefedi a teljes keresletet, így a pozitív árat megállapító oligopolista reziduális kereslete nulla lesz. □

5.30. megjegyzés. A számítások hatékony adagolás mellett sokkal egyszerűbbek mint arányos adagolás mellett, mivel ekkor a magasabb áron kínáló termelő reziduális kereslete csak az alacsonyabb áron kínált mennyiségtől függ és független az alacsonyabb áron kínáló oligopolisták kínálati áraitól.

5.4 Approximációs tételek

A Cournot oligopóliumra közismert eredmény, hogy az oligopolisták számának határtalan növelésével a Cournot piaci ár a termék határköltségéhez tart (lásd például Ruffin [1971]). Ez a megállapítás a kompetitív piac egyfajta legitimációját adja. Felvetődik az a kérdés, hogy a Bertrand-Edgeworth oligopóliumokra is igaz-e hasonló állítás. Egy ilyen jellegű állítás azért is érdekes, mivel a Bertrand-Edgeworth modell közelebb áll a tekintetben a valósághoz, hogy véges sok szereplő esetén minden egyes oligopolistának lehet ármeghatározó szerepe, míg a Cournot modellben az árakat egy fiktív árverező állapítja meg.

A kapacitáskorlátos Bertrand-Edgeworth oligopóliumra pozitív eredményre jutottak Vives [1986], és Allen és Hellwig [1986, 1989]. Előbbi elemzéseit a hatékony adagolási szabály feltételezése mellett végezte, míg az utóbbiak az arányos adagolási szabály esetét vizsgálták. Eredményképpen azt kapták, hogy a parciális elemzés keretei között az oligopolisták számának végtelenbe tartásával a kompetitív piac approximálható a Bertrand-Edgeworth modellel. Börgers [1992] Vives [1986] eredményét enyhébb egyensúlyi koncepció alkalmazása mellett látta be. Nevezetesen Börgers [1992] a Nash egyensúlyi koncepció helyett a dominált stratégiák iterált törlésével dolgozott. Dixon [1987] pedig konvex költségfüggvények mellett bizonyított egy approximációs tételt, amelyben a Nash egyensúly fogalom helyett az annál gyengébb ε-egyensúly fogalmát használja.

Ebben az alfejezetben Vives [1986] eredményét ismertetjük.

5.31. feltevés. Legyen az oligopolisták összkapacitása rögzített $K > 0$ érték. Jelölje J az oligopolisták számát. Továbbá legyenek az oligopolisták átlagköltségei nullák a $k_J := K/J$ kapacitáskorlátig.

Tehát olyan oligopóliumok sorozatát vizsgálunk, amelyben az oligopolisták száma a végtelenbe tart, az egyes vállalatok kapacitásai végtelenül kicsivé válnak, míg az összkapacitásuk változatlan marad.

5.32. tétel. *Tegyük fel, hogy teljesülnek az 5.27 és az 5.31 feltevések továbbá, hogy az oligopolisták a hatékony adagolási szabály szerint szolgálják ki a fogyasztókat. Ekkor*

1. *ha $K < \overline{q}$, akkor elég nagy J-re mindegyik vállalat $D^{-1}(K)$ árat állapít meg;*

2. *ha $K = \overline{q}$, akkor létezik egy szimmetrikus kevert Nash egyensúly a vállalatok tetszőleges $J = 1, \ldots$ száma mellett, amely tartójának szuprémuma $1/J$-ed rendben monoton konvergál nullához;*

3. *ha $K > \overline{q}$, akkor elég nagy J-re mindegyik oligopolista a $p = 0$ árat állapítja meg.*

Bizonyítás: Emlékeztetni kívánunk arra, hogy a Cournot összkibocsátások sorozata Jy_J monoton konvergál a $\overline{q}$ értékhez. Vegyük sorra a tétel három pontját.

1. Legyen

$$n := \begin{cases} \max\{J \in \mathbb{N} \mid Jy_J < K\}, & \text{ha} \quad y_1 < K, \\ 1, & \text{ha} \quad y_1 \geq K. \end{cases}$$

Ha $J \in \{2, \ldots, n\}$, akkor az 5.29 tétel 2. pontja megadja a J oligopolistát tartalmazó oligopóliumnak egy szimmetrikus kevert Nash egyensúlyi megoldását. Számunkra most az az érdekes, hogy minden $J > n$ szereplős oligopóliumban mindegyik vállalat $p = D^{-1}(K)$ árat állapít meg az 5.29 tétel 1. pontja felhasználásával.

2. A $K = \overline{q}$ feltevés miatt $y_J < K/J < \overline{q}/(J-1)$ fennáll minden $J \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor a J szereplős oligopólium egy ϕ_J szimmetrikus Nash egyensúlyi stratégiáját az 5.29 tétel 2. pontja adja meg. A ϕ_j tartója a $[p'_J, p''_J]$ intervallum. A p''_J érték megoldása és méghozzá az egyetlen megoldása a

$$pD'(p) + D(p) = (1 - 1/J)\overline{q} \tag{5.28}$$

egyenletnek. Az (5.28) baloldalán szereplő kifejezés monoton csökkenő, ugyanis deriváltja $pD''(p) + 2D'(p)$ negatív az 5.27 feltevés alapján. Az (5.28) egyenletből adódik a $p''_J \leq \overline{q}/(J|D'(0)|)$ becslés, amelyből megállapítható, hogy p''_J monoton csökkenőleg konvergál nullához méghozzá $1/J$ rendben. Felhasználva az (5.28) egyenletet a várható profit

$$\pi_J = p''_J(D(p''_J) - (1 - 1/J)\overline{q}) = (p''_J)^2|D'(p''_J)|. \tag{5.29}$$

Mivel p''_J monoton csökkenőleg konvergál $1/J$ rendben a nulla árhoz, ezért (5.29) alapján π_J monoton csökkenőleg konvergál $1/J^2$ rendben a nullához. Ebből pedig a $p'_J = J\pi_J/\overline{q}$ összefüggés miatt adódik, hogy p'_J monoton csökkenőleg konvergál nullához $1/J$ rendben.

3. Legyen $m = \max\{J \in \mathbb{N} \mid 1 - 1/J < \overline{q}/K\}$. Ha $J \in \{2, \ldots, m\}$, akkor az 5.29 tétel 2. pontja megadja a J oligopolistát tartalmazó oligopóliumnak egy szimmetrikus kevert Nash egyensúlyi megoldását. A számunkra a releváns esetben $J > m$. Ekkor a J szereplős oligopóliumban az 5.29 tétel 3. pontja alapján mindegyik vállalat $p = 0$ árat állapít meg. $\square$

5.5 Adagolási játék

Ebben az alfejezetben egy olyan kétlépéses játékot vizsgálunk, amely első lépésében a vállalatok szimultán módon megválaszthatják azt a kombinált adagolási szabályt, amely szerint ki fogják szolgálni a fogyasztókat. Majd a második lépésben szimultán módon meghozzák ár és mennyiségi döntéseiket. A továbbiakban ezt a játékot *adagolási játék*nak hívjuk.

Mivel a második lépés egy egyszerű kapacitáskorlátos Bertrand-Edgeworth játék, ezért a második lépésnek általában nem létezik tiszta Nash egyensúlyi megoldása. Kevert Nash egyensúlyi megoldás esetében a kifizetések várható értékeitől függnek a vállalatok preferenciái. Amikor az első lépésben a duopolisták az általuk alkalmazott adagolási szabályokat megválasztják, döntéseiket nem csak az motiválhatja, hogy mekkora lesz a második lépés során elérhető várható profitjuk, hanem az is, hogy mekkora lesz a döntéseik kockázata. Ha a vállalatok a bizonytalanságot a profitjaik szórásával mérik, akkor induljunk ki abból, hogy mindkét duopolistának van egy preferenciarendezése a várható profitok és a profitok szórása terén.

Davidson és Deneckere [1986] megmutatták, hogy az adagolási játék egy tökéletes Nash egyensúlyi megoldásában a duopolisták az első lépésben az arányos adagolási szabályt fogják választani. Eredményük akkor érvényes, ha a vállalatok kockázatsemlegesek, azaz csak várható profitjaik maximalizálásával törődnek.

Rámutatunk, hogy Davidson és Deneckere [1986] eredménye nem helytálló, ha a vállalatok kockázatkerülő magatartást követnek. Sőt bizonyos feltételek mellett a hatékony adagolásai szabály választása egy tökéletes Nash egyensúlyi megoldás első lépése lehet.

A duopolisták első lépésbeli akcióhalmaza legyen a $[0, 1]$ intervallum. A második lépésben a duopolisták árdöntéseik eloszlásfüggvényét válasszák meg. A választható eloszlásfüggvények tartója a $[0, \hat{p}]$ intervallum része, ahol $\hat{p}$ a legkisebb olyan ár amelyre $D(\hat{p}) = 0$. Egy elfajult eloszlás választása egy tiszta stratégia alkalmazását jelenti a második lépésben. A vállalatok preferenciái a várható profitok és a profitok szórása terén adott. A vállalatok preferenciáitól függő kevert egyensúlyi stratégiák meghatározása ezzel egy még jóval bonyolultabb feladattá válik mint az 5.3 alfejezetben. Ezért Davidson és Deneckere-vel szemben egy másik extrém esetet vizsgálunk. Legyenek a vállalatok preferenciái a következő $\succ \subset \mathbb{R}^2_+$ lexikografikus preferenciarendezéssel adottak:

$$(e, v) \succ (e', v') \quad \Leftrightarrow \quad v < v' \text{ vagy } (v = v' \text{ és } e > e'),$$

ahol e, e' a várható profitok és v, v' a profitok varianciáit jelöli.

Vezessük be a $\Lambda : L \to \mathcal{P}([0,1]\times[0,1])$ halmazértékű függvényt a következőképpen:

$$\Lambda(k_1, k_2) := \{(\lambda_1, \lambda_2) \mid \exists (k_1, k_2) \in K(\lambda_1, \lambda_2)\}.$$

5.33. állítás. *Ha az adagolási játéknak van tiszta tökéletes Nash egyensúlyi megoldása, akkor az első lépésben a hatékony adagolási szabály választása mindkét vállalat számára egy tökéletes Nash egyensúlyi akció.*

Bizonyítás: Ha az adagolási játéknak van tiszta tökéletes Nash egyensúlyi megoldása, akkor $\Lambda(k_1, k_2) \neq \emptyset$. Bármelyik $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda(k_1, k_2)$ első lépésbeli akció után mindkét vállalat $p^* = D(k_1 + k_2)$ árat állapít meg az 5.10 állítás alapján. A vállalatok számára közömbös, hogy a $\Lambda(k_1, k_2)$-beli adagolási szabály párok melyikét válasszák, mivel bármelyikük alkalmazása esetén az egyensúlyi profitok ugyanakkorák, méghozzá kockázatmentesen. A hatékony adagolási szabály pedig mindig az első lépés egy egyensúlyi akciója, mivel $(k_1, k_2) \in K(\lambda_1, \lambda_2)$ miatt $(k_1, k_2) \in K(1, 1)$ figyelembe véve az 5.10 állítást. □

Sejthető, hogy általános esetekben a vállalatok preferenciáitól függően az egyensúlyi adagolási szabályok valahol az arányos és a hatékony adagolási szabályok között helyezkednek el. Ennek a kérdésnek a pontosabb megvizsgálása további elemzések tárgyát képezheti. Azonban mivel a kevert egyensúlyi stratégiák általában zárt alakban nem fejezhetők ki, a problémát feltehetően csak konkrét numerikus példákon lehet megoldani.

5.6 Irodalmi áttekintés

Ebben az alfejezetben kiemelés jelleggel, vázlatosan ismertetem a Bertrand-Edgeworth oligopóliumokkal kapcsolatos érdekesebb eredményeket. Az eredmények egy része az 5. fejezetben bemutatott „alap" Bertrand-Edgeworth modell kiterjesztését jelenti, illetve átmenetet teremt más jellegű modellek között (mint például a monopolisztikus verseny).

5.6.1 Differenciált termékű piac

A differenciált termékű Bertrand-Edgeworth oligopóliumok elemzésével többen is foglalkoztak. A modell előnye, hogy a kifizetőfüggvények folytonossága könnyen biztosítható. A homogén termékű változatnál a problémát az okozza, hogy a fogyasztók az egyes vállalatok termékeit csak áraik alapján különböztetik meg és ezért egy vállalat végtelenül kis árcsökkentéssel is elhódíthatja riválisainak fogyasztóit. Ebben a szakaszban három eredményt emelek ki.

Benassy [1986] modelljében a fogyasztói oldal egy reprezentatív fogyasztó hasznossági függvényével adható meg. Az U hasznossági függvény legyen szigorúan konkáv és folytonosan differenciálható. E feltételek biztosítják, hogy a keresleti leképezés pont értékű. A piacon termelő J vállalat termékeit a fogyasztó különböző termékeknek tekinti. Jelölje $\hat{D}_j(p_1, \ldots, p_J)$ a j-edik vállalat terméke iránti keresletet.

Az alábbi feladat megoldása megadja a reprezentatív fogyasztó j-edik oligopolistától igényelt termékmennyiségét.

$$\begin{aligned} U(x_1, \ldots, x_J, m) &\rightarrow \max \\ p_1 x_1 + \cdots + p_J x_J + m &= \overline{m} \\ x_i &\leq q_i \qquad (j \neq i,\ i = 1, \ldots, J) \\ x_1, \ldots, x_J &\geq 0 \end{aligned} \tag{5.30}$$

Az x_j a j-edik oligopolistától vásárolt mennyiség, p_j és q_j a j-edik oligopolista ár és mennyiségi döntése, $\overline{m}$ a fogyasztó pénzkészlete és m a fogyasztó el nem költött pénze. Az (5.30) feladat megoldása az U-ra vonatkozó feltevések miatt egyértelműen létezik és jelölje a $D_j(p_j, p_{-j}, q_{-j})$ ezt a mennyiséget a j-edik vállalat árdöntése, a többi vállalat ár és mennyiségi döntéseinek függvényében. Ekkor a vállalatok profitmaximalizációs feladatai az alábbi alakba írhatók.

$$\begin{aligned} p_j s_j - C_j(q_j) &\to \max \\ s_j &= \min\{q_j, D_j(p_j, p_{-j}, q_{-j})\} \\ q_j &\geq 0 \end{aligned} \tag{5.31}$$

Benassy [1986, 2. tétel] bebizonyította, hogy ha

- mindegyik vállalat terméke iránti kereslet egy ár fölött nulla, azaz $\forall j \in \{1, \ldots, J\} : \forall p_{-j} \in \mathbb{R}^{J-1}_{++} : \exists \overline{p}_j \in \mathbb{R}_+ : \forall p_j \geq \overline{p}_j : \hat{D}_j(p_j, p_{-j}) = 0$,
- mindegyik vállalat $p_j \hat{D}_j(p_j, p_{-j}) - C_j(\hat{D}_j(p_j, p_{-j}))$ profitfüggvénye kvázikonkáv p_j-ben,
- a termékek normál jószágok és egymás szigorú helyettesei, azaz $\forall i \neq j \in \{1, \ldots, J\} : \partial \hat{D}_i / \partial p_j > 0$,
- és a költségfüggvények folytonosan differenciálhatók,

akkor a (5.31) célfüggvényű differenciált termékű Bertrand-Edgeworth játéknak nem létezik tiszta Nash egyensúlyi megoldása.

Benassy megjegyzi, hogy megfelelő kapacitáskorlátok mellett a játéknak létezhet tiszta Nash egyensúlyi megoldása. A játéknak akkor is létezhet tiszta Nash egyensúlya, ha a mennyiségi döntések az árdöntések után születnek meg.

Benassy eredményei arra hívják fel a figyelmet, hogy a termék differenciáció bevezetése sem garantálja a Bertrand-Edgeworth oligopóliumban a tiszta Nash egyensúlyi megoldás létezését.

Benassy egy későbbi munkájában [1989] folytatja elemzéseit. Azonos költségfüggvényű vállalatok esetében a tiszta Nash egyensúly létezését a piacon lévő vállalatok számával és a termékek közötti (Allen-Hicks-féle) helyettesítési rugalmasság segítségével ragadja meg. Mint lehetséges tiszta Nash egyensúlyi megoldás, csak a kompetitív megoldás jöhet szóba. Egyik fontos eredménye

(Benassy, [1989, 2. tétel]) szerint, amennyiben a helyettesítési rugalmasság korlátos, akkor elég sok vállalat esetén a kompetitív megoldás egy Nash egyensúly az általa Bertrand-Edgeworth-Chamberlin névre keresztelt modellben. Tehát elég sok oligopolista esetén mindenképpen megjelenik a tiszta Nash egyensúly. A másik fontos eredménye szerint pedig rögzített számú oligopolista esetében, „megfelelően" közeli helyettes termékek esetén — azaz a helyettesítési rugalmasság elég nagy értéke mellett — a modelljének nem létezik tiszta Nash egyensúlyi megoldása. Benassy a monopolisztikus verseny Chamberlin-féle modelljét és a Bertrand-Edgeworth modellt ötvözi egy modellben.

Canoy [1996] egy olyan differenciált termékű Bertrand-Edgeworth duopol modellt alkotott, amelyben be tudta látni, hogy amennyiben a duopolisták termékei eléggé különböznek egymástól, akkor létezik a játéknak tiszta Nash egyensúlyi megoldása. Modelljében az egyik vállalatnak helyzeti előnye van, azaz a fogyasztók olcsóbban jutnak hozzá a termékéhez. Egy θ paraméterű fogyasztó az első vállalattól akar vásárolni, ha $p_2 - p_1 \geq \theta$. Canoy számításai során felteszi, hogy θ egyenletes eloszlású a $[-\Delta\beta, \beta]$ intervallumon. A $\beta \geq 0$ egy fajta mérőszáma a termék differenciációnak. A $\beta = 0$ esetén a homogén termékű modellt kapjuk. A $\Delta \geq 0$ paraméter pedig a két vállalat közötti helyzeti aszimmetriát méri. Ha például $\Delta < 1$, akkor több fogyasztó részesíti előnyben a második céget azonos árak esetén.

Canoy felteszi, hogy a keresleti görbe folytonos, monoton csökkenő, log-konkáv, metszi a vízszintes tengelyt és kétszer differenciálható azokban az árakban, amelyekhez pozitív kereslet tartozik. A két vállalat költségfüggvénye egy nem negatív, kétszer differenciálható, szigorúan monoton növekvő, szigorúan konvex függvény, amelyre $c_i(0) = 0$ és $\lim_{q\to\infty} c_i'(q) = \infty$. Továbbá $d(c_i'(0)) > 0$ teljesüljön. Ekkor léteznek olyan $\beta' > 0$ és $\beta'' > 0$ értékek, hogy a differenciált termékű Bertrand-Edgeworth játéknak minden $\beta < \beta'$ differenciáltsági paraméterre nincs, míg minden $\beta > \beta''$ differenciáltsági paraméterre van, tiszta Nash egyensúlyi megoldása (Canoy [1996], 1. és 2. állítása). Ez összhangban van Benassy [1989] eredményével.

5.6.2 Domináns vállalat modellje

Az iparági szervezetek irodalomban előszeretettel használják a domináns vállalati árvezérlés modelljét. A modell leírása megtalálható magyar nyelven Kopányi [1993] Mikroökonómia tankönyvében. A modellben egy nagy vállalat található, amely ármeghatározó szerepben van, míg a piacon lévő sok kis vállalat árelfogadó módon viselkedik. Ezért a kis vállalatok kínálatát a határköltség-görbéi adják meg. A nagy vállalat pedig a piaci árat a reziduális profitfüggvényének maximalizálásával állapítja meg.

A modell legfőbb problémája, hogy nem a piacon lévő vállalatok profitmaximalizáló magatartásából vezetik le a domináns vállalat által diktált piaci árat és a kis vállalatok árelfogadó magatartását. A modell egyfajta játékelméleti megalapozását adta Deneckere és Kovenock [1992] egy duopol piacon. A kapacitáskorlátos Bertrand-Edgeworth duopóliumot kibővítették egy időzítési játékkal, amelyben a vállalatok először arról döntenek, hogy mikor hozzák árdöntésüket nyilvánosságra. Belátták, hogy a nagyobb kapacitású vállalat érdekelt ár döntését azonnal meghozni, míg a kisebb kapacitású vállalatnak érdemes kivárni a nagy vállalat árdöntését. A nagy vállalat a tökéletes Nash egyensúlyi árát a reziduális profitfüggvényének maximalizálásával határozhatja meg. A Deneckere és Kovenock [1992] által bevezetett modell abban tér el a domináns vállalati árvezérlés modelljétől, hogy nem teszi szükségessé egy sok kis vállalatból összetevődő kompetitív szegély meglétét az árvezérlés kialakulásához.

Furth és Kovenock [1993] egy differenciált termékű piacra terjesztette ki Deneckere és Kovenock [1992] eredményét.

5.6.3 Dinamikus modellek

Kreps és Scheinkman [1983] kétidőszakos modelljében a duopolisták előbb termelési kapacitásaikat építik ki, majd egy kapacitáskorlátos Bertrand-Edgeworth játékban vesznek részt. Hatékony adagolási szabály feltételezése mellett belátták, hogy tökéletes egyensúlyban a vállalatok a megfelelő Cournot modell egyensúlyához tartozó árakat és mennyiségeket választják. Ezzel Kreps és Scheinkman [1983] kapcsolatot létesített az addig összeegyeztethetetlenek vélt Cournot és Bertrand modell között. Davidson és Deneckere [1986] rámutatott, hogy Kreps és Scheinkmann eredménye csak a hatékony adagolási szabály mellett áll fenn.

Maskin és Tirole [1988b] egy olyan véges időszakú modellt vizsgált, amelyben a duopolisták felváltva hozzák meg ár döntéseiket. A duopolisták áraikat csak egy véges halmazból választhatják. Ezzel elérték, hogy a duopolistáknak egymás döntéseire mindig létezzen legjobb válaszuk. Belátták, hogy elegendően nagy diszkonttényező esetén, létezik olyan tökéletes Nash egyensúlyi megoldás, amely az ár ciklizálásához vezet. Ezt a megoldást Edgeworth ciklusnak nevezték el, bár modelljük egy ismételt Bertrand játék. Ha azonban egy olyan Bertrand-Edgeworth játékot vizsgálunk, amelynek csak kevert Nash egyensúlyi megoldása van, akkor a duopolisták egymás döntéseire adott ár válaszai hasonló ciklizálást mutatnak. Modelljük fő eredménye, hogy a dinamikus Bertrand duopóliumban az árak jóval meghaladják a kompetitív piaci árat.

Davidson és Deneckere [1990] egy olyan modellt vizsgált, amelyben a duopolisták a termelési kapacitásuk felépítése után végtelen sokszor egy kapacitáskorlátos Bertrand-Edgeworth játékban vesznek részt. Arra az érdekes eredményre jutottak, hogy a kamatlábtól és a tőke költségétől függően a következő három tökéletes egyensúly lehetséges:

- a duopolisták jelentős többletkapacitásokat építenek ki és a piacon a monopolista ár alakul ki;
- a duopolisták többletkapacitásokat építenek ki és a piacon az ár a kompetitív és a monopolista ár között alakul ki továbbá
- a duopolisták kapacitáskorláton termelnek és a piacon a kompetitív piaci ár alakul ki.

Ez az eredmény azért is érdekes, mert azt gondolhatnánk, hogy a többletkapacitások az árak csökkenéséhez vezetnének. Davidson és Deneckere eredményüket úgy interpretálják, hogy a dinamikus játékban az árak csökkenése azért nem következik be, mert az árháború kezdeményezésétől mindkét vállalatot a többletkapacitások tartják vissza.

6. fejezet

Összefoglalás

A Bertrand-Edgeworth oligopóliumokkal kapcsolatban két problémakört vizsgáltunk:

- az adagolás kérdését,
- a modell egyensúlyi viselkedését.

Az adagolás kérdésének vizsgálata elkerülhetetlen, mivel az alacsonyabb áron kínáló oligopolista nem képes a teljes kereslet kielégítésére. A magasabb áron kínáló oligopolisták reziduális kereslete nyilván attól függ, hogy az alacsonyabb áron kínáló oligopolisták hogyan teljesítették a fogyasztók igényeit. A reziduális kereslet meghatározásához úgynevezett adagolási szabályokat szoktak bevezetni.

A 4. fejezetben egy egységes fogalmi rendszert vezettem be, amely alkalmas az adagolási probléma egységes tárgyalására. Az új fogalmi rendszer segítségével megvizsgáltam, hogy az egyes adagolási szabályok milyen piaci helyzetekben alkalmazhatók. A leírt piaci szituációkon kívül elképzelhető, hogy még további piaci szituációk is találhatók egy konkrét adagolási szabály alkalmazhatóságára. Ez további vizsgálat tárgya lehet.

Ha a valósághoz tovább akarunk közelíteni, akkor olyan problémákkal találjuk magunkat szemben mint, hogy

- a fogyasztók egyéni keresleti görbéi nem ismertek az oligopolisták számára és

- a fogyasztók érkezési sorrend szerinti kiszolgálása nem garantálja a véletlen kiszolgálást.

Az első probléma kezelése összetettebb információs struktúrák bevezetését igényli. Megnyugtató, hogy az arányos adagolási szabály megvalósításai nem igénylik az egyéni keresleti görbe ismeretét, így ebben az esetben az egyéni keresleti görbék ismeretének problémája fel sem vetődik. A hatékony, illetve a kombinált adagolási szabály pedig kuponok kibocsátása segítségével megvalósítható az egyéni keresleti görbék ismerete nélkül. A kuponok alkalmazhatósága azonban a termék jellegétől függ. A második probléma pedig a sorban állás modellezésével kezelhető. Ehhez valamilyen formában meg kell tudnunk adni, hogy az egyes fogyasztók „milyen sebességgel" foglalják el helyüket a sorban.

Véleményem szerint az információs struktúrákat és a sorban állást is figyelembe vevő modell ugyan képes lehet a reziduális kereslet meghatározására, azonban annak a kérdésnek az eldöntésére, hogy milyen feltételek mellett valósul meg egy konkrét adagolási szabály alkalmatlan. Már pedig pontosan ez az a kérdés, ami igazán érdekes a Bertrand-Edgeworth oligopóliumok szempontjából.

A Bertrand-Edgeworth oligopóliumoknak általában nem létezik tiszta Nash egyensúlyi megoldása. Sőt a kevert egyensúlyi stratégia létezésének bizonyítása is külön megfontolás tárgya. Továbbá még ha létezik is kevert Nash egyensúlyi megoldás, akkor annak meghatározása nehéz feladat. Az adagolási játék részletes vizsgálata szintén az előbbiek miatt bonyolult. Igazából az 5.5 alfejezetben található következtetés általánosításához elég lenne annyit megmutatni, hogy a kombinált adagolási szabály paraméterének növelésével a várható profitok és a profitok szórásai csökkennek. Kérdéses, hogy vajon a kevert Nash egyensúlyi stratégiák explicit meghatározása nélkül eldönthető-e a sejtés igaz volta. Az adagolási játék elemzése további kutatások tárgya lehet.

Az értekezésem irodalmi áttekintésében (5.6.2 szakasz) megemlítettem, hogy Deneckere és Kovenock [1992] a domináns vállalati árvezérlés modelljének egyfajta játékelméleti megalapozását adták egy kapacitáskorlátos Bertrand-Edgeworth duopólium segítségével. Feltevéseik meglehetősen erősek. További kutatásaimban részletesen megkívánom vizsgálni a domináns vállalati árvezérlés modelljének játékelméleti implementációit. Erre vonatkozó eddigi eredményeimet két beterjesztett tanulmány tartalmazza (Tasnádi [1999d, 1999e]).

Irodalomjegyzék

ALLEN B. - HELLWIG M. [1986]: Bertrand-Edgeworth oligopoly in large markets. *Review of Economic Studies* 53, 175-204.

ALLEN B. - HELLWIG M. [1989]: The approximation of competitive equilibria by Bertrand-Edgeworth equilibria in large markets. *Journal of Mathematical Economics* 18, 103-127.

ALLEN B. - HELLWIG M. [1993]: Bertrand-Edgeworth duopoly with proportional demand. *International Economic Review* 34, 39-60.

BARÓTI GY. - BOGNÁR J. - FEJES TÓTH G. - MOGYORÓDI J. [1995]: *Valószínűségszámítás, tizenegyedik kiadás.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

BAUER H. [1991]: *Wahrscheinlichkeitstheorie, negyedik kiadás.* Walter de Gruyter, Berlin, New York.

BECKMANN M. B. [1965]: Edgeworth-Bertrand Duopoly Revisited, in R. Henn, ed. *Operations Research Verfahren III.* Meisenheim: Verlag Anton Hain.

BENASSY J-P. [1986]: On the existence of Bertrand-Edgeworth equilibria with differentiated commodities. In: *Contributions to Mathematical Economics,* eds. W. Hildenbrand and A. Mas-Collel, North-Holland, 57-78.

BENASSY J-P. [1989]: Market Size and Substitutability in Imperfect Competition: A Bertrand-Edgeworth-Chamberlin Model. *Review of Economic*

Studies 56, 217-234.

Berlekamp E.R.-Conway J.H.-Guy, R.K. [1982]: *Winning Ways for Your Mathematical Plays.* Academic Press, London.

Binmore K. [1992]: *Fun and Games. A Text on Game Theory.* D.C. Heath and Company, Lexington, Massachusetts.

Böhm V. - Maskin E. - Polemarchakis H. - Postlewaite A. [1983]: Monopolistic Quantity Rationing. *Quaterly Journal of Economics* 98, 189-197.

Börgers T. [1992]: Iterated Elimination of Dominated Strategies in a Bertrand-Edgeworth Model. *Review of Economic Studies* 59, 163-176.

Canoy M. [1996]: Product differentiation in a Bertrand-Edgeworth duopoly. *Journal of Economic Theory* 70, 158-179.

Cayseele P. - Furth D. [1996]: Bertrand-Edgeworth duopoly with buyouts or first refusal contracts. *Games and Economic Behavoir* 16, 153-180.

Csákány A. - Vajda F. [1985]: *Játékok számítógéppel, második kiadás.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

Chamberlin E.H. [1956]: *The theory of Monopolistic Competition, hetedik kiadás.* Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.

Dasgupta P. - Maskin E. [1986a]: The existence of equilibria in discontinous games I: Theory. *Review of Economic Studies* 53, 1-26.

Dasgupta P. - Maskin E. [1986b]: The existence of equilibria in discontinous games II: Applications. *Review of Economic Studies* 53, 27-41.

d'Aspremont C. - Gabszewicz J.J. [1980]: *On quasi-monopolies.* CORE Discussion Paper 8011.

DAVIDSON C. - DENECKERE R. [1986]: Long-run competition in capacity, short-run competition in price, and the Cournot model. *Rand Journal of Economics* 17, 404-415.

DAVIDSON C. - DENECKERE R. [1990]: Excess capacity and collusion. *International Economic Review* 31, 521-541.

DEBREU G. [1964]: Continuity properties of Paretian utility. *International Economic Review* 5, 285-293.

DENECKERE R. - KOVENOCK D. [1992]: Pricel Leadership. *Review of Economic Studies* 59, 143-162.

DIXON H. [1984]: The existence of mixed-strategy equilibria in a price setting oligopoly with convex costs. *Economics Letters* 16, 205-212.

DIXON H. [1987]: Approximate Bertrand Equilibria in a Replicated Industry. *Review of Economic Studies* 54, 47-62.

DRÈZE J.H. [1975]: Existence of an Exchange Equilibrium under Price Competition. *International Economic Review* 16, 301-320.

DUBEY P. [1982]: Price-Quantity Strategic Games. *Econometrica* 50, 111-126.

FEKETE I. - GREGORICS T. - NAGY S. [1990]: *Bevezetés a mesterséges intelligenciába,* LSI Oktatóközpont, Budapest.

FELLER W. [1978]: *Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

FISHER F.M. [1989]: Games economists play: noncooperative view. *Rand Journal of Economics* 20, 113-123.

FORGÓ F. [1996]: Cournot-Nash equilibrium in concave oligopoly games. *PU.M.A.* 6, 161-169.

FRIEDMAN J.W. [1977]: *Oligopoly and the theory of games.* Oxford University Press, New York-Oxford.

FRIEDMAN J.W. [1983]: *Oligopoly theory.* Cambridge University Press, Cambridge.

FUDENBERG D. - TIROLE J. [1986]: *Dynamic Models of Oligopoly.* Harwood Academic Press, Chur, Switzerland.

FUDENBERG D. - TIROLE J. [1991]: *Game Theory.* Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts.

FURTH D. - KOVENOCK D. [1993]: Price Leadership in a Duopoly With Capacity Constraints and Product Differentiation. *Journal of Economics* 57, 1-35.

GELMAN J.R. - SALOP S.C. [1983]: Judo economics: capacity limitation and coupon competition. *Bell Journal of Economics* 14, 315-325.

GLICKSBERG I.L. [1952]: A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem with Application to Nash Equilibrium Points. *Proceedings of the American Mathematical Society* 38, 170-174.

HARSÁNYI J.C. - SELTEN R. [1988]: *A General Theory of Equilibrium Selection in Games.* Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts.

HERK L.F. [1993]: Consumer choice and Cournot behavior in capacity-constrained duopoly competition. *Rand Journal of Economics* 24, 399-419.

ISAACS R. [1968]: *Jeux Différentiels.* Dunod, Paris.

KOPÁNYI M. (SZERK.) [1993]: *Mikroökonómia, második javított kiadás.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

KOVENOCK D. - SUDDHASATWA R. [1998]: Dynamic capacity choice in a Bertrand-Edgeworth framework. *Journal of Mathematical Economics* 29, 135-160.

KREPS D.M. - SCHEINKMAN J.A. [1983]: Quantity precommitment and Bertrand competition yield Cournot outcomes. *Bell Journal of Economics* 14, 326-337.

LEVITAN R. - SHUBIK M. [1972]: Price duopoly and capacity constraints. *International Economic Review* 13, 111-122.

MAS-COLLEL A. - WHINSTON M.D. - GREEN J.R. [1995]: *Microeconomic Theory.* Oxford University Press, New York-Oxford.

MASKIN E. [1986]: The existence of Equilibrium with Price-setting Firms. *American Economic Review* 76, 382-386.

MASKIN E. - TIROLE J. [1988a]: A theory of dynamic oligopoly, I: Overview and quantity competition with large fixed costs. *Econometrica* 56, 549-569.

MASKIN E. - TIROLE J. [1988b]: A theory of dynamic oligopoly, II: Price competition, kinked demand curves, and Edgeworth cycles. *Econometrica* 56, 571-599.

MOORTHY K.S. [1988]: Product and price competition in a duopoly. *Marketing Science* 7, 141-168.

HOWARD D.H. [1977]: Rationing, quantity constraints and consumption theory. *Econometrica* 45, 399-412.

OSBORNE M.J. - PITCHIK C. [1986]: Price Competition in a Capacity-Constrained Duopoly. *Journal of Economic Theory* 38, 238-260.

OSBORNE M.J. - RUBINSTEIN A. [1994]: *A Course in Game Theory.* Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts.

OSBORNE M.J. [1997]: *Lectures on the theory of industrial organization.* Kézirat, McMaster University, Hamilton, Canada.

NEARY J.P. - ROBERTS K.W.S. [1980]: The theory of household behaviour under rationing. *European Economic Review* 13, 25-42.

POLLACK R.A. [1969]: Conditional demand functions and consumption theory. *Quaterly Journal of Economics* 83, 60-78.

RASMUSEN E. [1989]: *Games and Information. An Introduction to Game Theory.* Basil Blackwell Ltd, Oxford.

RENY P.J. [1999]: On the Existence of Pure and Mixed Strategy Nash Equilibria in Discontinuous Games. *Econometrica* 67, 1029-1056.

RUFFIN R.J. [1971]: Cournot Oligopoly and Competitive Behaviour. *Review of Economic Studies* 38, 47-62.

SIMON L.K. [1987]: Games with Discontinous Payoffs. *Review of Economic Studies* 54, 569-597.

SHUBIK M. [1955]: A comparison of treatments of a duopoly problem (part II). *Econometrica* 23, 417-431.

SHUBIK M. [1959]: *Strategy and Market Structure.* Wiley, New York.

SINGH N. - VIVES X. [1984]: Price and quantity competition in a differentiated duopoly. *Rand Journal of Economics* 15, 546-554.

STAIGER R.W. - WOLAK F.A. [1992]: Collusive pricing with capacity constraints in the presence of demand uncertainity. *Rand Journal of Economics* 23, 203-220.

SZÉP J. - FORGÓ F. [1985]: *Introduction to the Theory of Games.* D. Reidel, Dordrecht.

SZIDAROVSZKY F. - YAKOWITZ S. [1977]: A New Proof of the Existence and Uniqueness of the Cournot equilibrium. *International Economic Review* 18, 787-789.

TIROLE J. [1988]: *The Theory of Industrial Organization.* Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts.

VARIAN H.R. [1992]: *Microeconomic Analysis, harmadik kiadás.* W.W. Norton and Company, New York.

VIVES X. [1986]: Rationing Rules and Bertrand-Edgeworth Equilibria in Large Markets. *Economics Letters* 21, 113-116.

WOLFSTETTER E. [1993]: *Oligopoly and Industrial Organization.* Humboldt-Universität zu Berlin, Discussion Paper, Berlin.

ZALAI E. [1989]: *Bevezetés a matematikai közgazdaságtanba.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

A szerző témával kapcsolatos publikációi

Tasnádi A. [1998a]: Egy racionális fogyasztó döntése, hogyan viszonyul a hatékony és a véletlen adagolási szabályokhoz? In: A jövő a jelenben - átalakuló társadalom új tudományos problémák, Ph.D. hallgatók konferenciája, szerk. Blahó A., Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem, Budapest, 241-252.

Tasnádi A. [1998b]: A véletlen adagolási szabály alkalmazhatóságának piaci feltételei, *Szigma* XXIX., 141-153.

Tasnádi A. [1999a]: Existence of Pure Strategy Nash Equilibrium in Bertrand-Edgeworth Oligopolies. *Economics Letters* 63, 201-206.

Tasnádi A. [1999b]: A Two-stage Bertrand-Edgeworth game. *Economics Letters* 65, 353-358.

Tasnádi A. [1999c]: Implementation of Rationing Rules. Kézirat, Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem.

Tasnádi A. [1999d]: A Price-setting Game with a Nonatomic Fringe. Kézirat, Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem.

Tasnádi A. [1999e]: Price versus Quantity in the Presence of a Dominant Firm. Kézirat, Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem.