

**Matematikai Közgazdaságtan és Gazdaságelemzés Tanszék  
Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék**

**TÉZISGYŰJTEMÉNY**

**Marossy Zita**

**A spot villamosenergia-árak elemzése statisztikai és ökonofizikai  
eszközökkel**

című Ph.D. értekezéséhez

**Témavezető:**

**Dr. Csekő Imre, Ph.D.**  
egyetemi docens

© Marossy Zita



# Tartalomjegyzék

<b>KUTATÁSI ELŐZMÉNYEK ÉS A TÉMA INDOKLÁSA.....</b>	<b>5</b>
<b>A FELHASZNÁLT MÓDSZEREK.....</b>	<b>9</b>
<b>AZ ÉRTEKEZÉS EREDMÉNYEI .....</b>	<b>19</b>
1. HIPOTÉZIS.....	19
2. HIPOTÉZIS.....	22
3. HIPOTÉZIS.....	22
4. HIPOTÉZIS.....	24
5. HIPOTÉZIS:.....	25
6. HIPOTÉZIS.....	29
7. HIPOTÉZIS.....	31
<b>FŐBB HIVATKOZÁSOK .....</b>	<b>37</b>
<b>A TÉMAKÖRREL KAPCSOLATOS SAJÁT PUBLIKÁCIÓK.....</b>	<b>39</b>



## Kutatási előzmények és a téma indoklása

A villamosenergia-piaci liberalizáció és dereguláció következtében világszerte megjelentek a szervezett villamosenergia-piacok. Ezek egyik formája a villamosenergia-tőzsde (pl. EEX, APX, Nord Pool), amelyeken az ún. másnapi (*day-ahead*) árammal is kereskednek, azaz a következő munkanap vagy naptári nap (ill. a nap egy órája, csúcsidőszaka, csúcsidőszakon kívüli időszaka stb.) alatt szolgáltatott villamos energiát lehet adni-venni. A tőzsdén résztvevő piaci szereplők vételi, illetve eladási ajánlatot tesznek egy adott időszak termékére, melyekből a tőzsde piaci vételi és eladási görbét készít, amelyek metszéspontja fogja meghatározni a piactisztító árat, amely általában megegyezik az adott időszaki árral. A szereplők árazási és kockázatkezelési döntéseinek segítése érdekében szükség van az ár modellezésére. Dolgozatomban az óránkénti (spot) villamosenergia-árak idősorának viselkedésével foglalkozom.

A spot villamosenergia-árak leggyakrabban emlegetett **stilizált tényei** az alábbiak (l. Weron [2006]):

1. Az adatsorban kiugró értékek (*price spikes*) találhatóak.

Kiugróan magas villamosenergia-árak (ártüskék) jelennek meg időnként az adatsorban. A szakirodalom alapján nem egyértelmű az a mérték, milyen (fix vagy változó) küszöb felett tekinthetjük az árat kiugrónak. A kiugrások intenzitása változik: sokkal gyakoribbak a magas árak a csúcsidőszak elején és végén, illetve amikor az ár egyébként is magasabb (l. (Simonsen, Weron, Mo [2004])). A kiugrások ideiglenesek: miután ugrásszerűen megnőtt az ár, utána gyorsan visszatér az eredeti nagyságrendre (l. Weron [2006]). A kiugró árak oka a különböző szerzők szerint külső sokk („kínálati sokk”), a tőzsdei ajánlattétel struktúrája, illetve a piaci faktorok hosszú távú trendje.

2. Magas az autokorreláció az idősorban.

Bár a spot adatsor nem más, mint különböző termékek (más-más időszak alatt szolgáltatott villamos energia) ára egymás után rendezve, a modellezést lehetővé teszi, hogy stabil korrelációs struktúra található az adatsorban. Az autokorrelációs együtthatók magasak, és az autokorrelációs függvény a szezonálisnak megfelelően ingadozik.

3. A volatilitás időben változik, az idősor heteroszkedasztikus (*heteroscedasticity*).

A pénzügyi piacokhoz hasonló módon a villamosenergia-ár esetében is felfedezhetjük, hogy a volatilitás tömörül (a nagyobb árváltozások összecsomósodnak), a volatilitás időben változik. Az árváltozás azokban az órákban a legmagasabb, amikor csúcsidőszak van, illetve maga az ár is magas (Weron [2000]).

4. Az adatsor szezonális vonásokat mutat (*seasonality*).

Az árak idősorában éves, heti és napi fluktuációt lehet felismerni.

5. Az árak, hozamok eloszlása vastag szélű (*fat tails*).

Az árak eloszlásfüggvénye a magas árak esetén az exponenciálisnál lassabban közelíti meg az 1-et, az eloszlásfüggvénynek 3-3,5-ös hatványkitevője van.

6. Egyes szerzők szerint a villamos energia ár antiperzisztens, egy-egy kiugró értéket követően visszatér az átlaghoz (átlaghoz való visszahúzás, *mean reversion*), míg mások szerint az ár időSORA hosszú távú memóriával rendelkezik (*long memory*). A vizsgálatok szerint a villamos energia ára multifraktál folyamatot követ (*multifractality*).

A szakirodalomban nagyságrendileg is különbözik a folyamat memóriáját jelző Hurst exponensre kapott becslést érték. A szakirodalom egyik része Weron és Przybyłowicz [2000] alapján 0,4 körüli értékre becsli a H mutató értékét, míg mások (pl. Haldrup és Nielsen [2006]) hangsúlyozzák, hogy a villamos energia árának Hurst exponense 0,5 feletti (0,8-0,9 körüli). Ez jelentős ellentmondás, mivel a kétféle megállapításból egymással ellentétes következtetés vonható le a folyamat perzisztenciájára való tekintettel.

A szakirodalomban a szerzők úgy találták, hogy a villamos energia ára multifraktál folyamatot követ, és ebben vegyesen játszik szerepet a korrelációk és a vastag szélek hatása. (Kivételt képez Serletis és Andreadis [2004], akik megmutatják, hogy az Albertai Áramtőzsdén az árak monofraktál folyamatot követnek. A szerzők a többi idézett cikktől és az általam felhasználttól eltérő módszereket használnak.)

7. Nincs konszenzus a szakirodalomban azzal kapcsolatban, vajon található-e egységgyök az ár időSORÁBAN, azaz integrált-e a folyamat.

A hagyományos egységgyök (ADF, KPSS) tesztek elutasítják azt a hipotézist, mely szerint az ár időSORÁBAN egységgyök található. Ezen módszerek hátránya, hogy nem veszik figyelembe a vastag széleket, a kiugró értékek jelenlétét, a szezonalitást és a heteroszkedaszticitást (GARCH hatást). Ellentmondó eredményre jutottak azok a szerzőcsoportok, akik a felsorolt hatások különböző kombinációi mellett végeztek egységgyök tesztet.

A villamos energia nem tárolható, legalábbis ésszerű tárolási veszteséget feltételezve. Ezt a tényt figyelembe kell vennünk a modellezés során.

Nincs egységes álláspont az irodalomban azzal kapcsolatban, hogy a villamosenergia-ár modellje mely változót állítsa középpontba. Találhatunk az árat, az árnövekményt, a log árat és a loghozamot leíró modelleket is.

Az árnövekményt és a loghozamot általában  $\alpha$ -stabil (Lévy), hiperbolikus vagy NIG (*normal inverse Gaussian*) eloszlással modellezik a szakirodalomban. Weron [2006] megmutatja, hogy a Lévy eloszlás jobb illeszkedést eredményez az árnövekmény és a loghozam esetén, mint a többi említett eloszlás.

Számtalan modellípussal találkozhatunk a szakirodalomban. A redukált és a statisztikai modellek azok, amelyek a disszertáció témájához kapcsolódnak. Az ún. ugrásos modellek szerint az ártüskék egy hirtelen felfelé ugrást jelentenek az ár folyamatában. A hagyományos ugrásos modelleket módosítani kell azonban, mivel csak egy nagyon erős átlaghoz visszahúzás illeszkedik az áramár idősorára, ami nem írja le jól az átlagos szintű árak viselkedését (Eydeland és Wolyniec [2003]). A rezsimváltó modellek az ártüskéket különálló rezsimként kezelik, melyben az árdinamika sajátos. Számos idősoros modellt (ARMA, ARIMA, SARIMA, ARFIMA, PAR, TAR, GARCH, rezsimváltó modellek, stb.) alkalmaztak az áramár leírására. A TAR és a rezsimváltó modellek megmagyarázhatnák ugyan az ártüskéket, de az elemzések (Weron és Misiorek [2006], Misiorek, Trück és Weron [2006]) azt mutatják, hogy ezek nem teljesítenek jobban az előrejelzés során, mint a hagyományos ARMA modellek.

Az áramárakat előfeldolgozási eljárásokkal módosíthatjuk a fent említett modellek alkalmazása előtt. Egy adott küszöböt túllépő ártüskéket kiszűrhetjük az „azonos nap”, a „küszöb” és a „csillapító” módszerek segítségével, amelyek helyettesítik az ártüskét rendre az azonos időszak átlagával, a megadott küszöbvel vagy egy speciális képletből származó értékkel. A küszöböt tekinthetjük endogén változónak is a modellezés során (Geman és Roncoroni [2006]). A modellezők az ártüskéket „wavelet shrinkage” eljárással is kiszűrhetik (Stevenson ([2001])).

A szezonális szűrés eljárások az alábbiak (Weron [2006]): differenciálás, medián vagy átlagos hét, mozgóátlagolás, spektrálfelbontás, gördülő volatilitásos technika és a wavelet felbontás. Ezek a módszerek úgy tekintik a villamosenergia-árat mint egy determinisztikus szezonális rész és egy sztochasztikus tag összege. Ez azt jelenti, hogy a szezonális rész csak a (periodikusan) változó eloszlások várható értékében jelenik meg. Meg fogom mutatni, hogy a szezonális rész miatt az eloszlások nemcsak a várható értékükben, hanem az alakjukban is eltérnek. Emiatt szükség van egy újfajta szezonális szűrő megalkotására.

Trück, Weron és Wolff [2007] hangsúlyozza, hogy az ártüskék szűrése és a szezonális rész szűrése egymástól nem független, mivel az ártüskék szűréséhez szezonális nélküli árakra van szükség, és a szezonális szűrőknek ártüskéktől megszürt értékekre van szükségük. A szerzők egy iteratív eljárást javasolnak a probléma kezelésére.

### **A disszertáció célja**

1. a szakirodalomban szereplő ellentmondások feloldása:

Megmagyarázom és feloldom a különböző nagyságrendű Hurst exponensek jelenlétének dilemmáját.

2. a szakirodalommal ellentétes vélemény megfogalmazása és bizonyítása:

Megmutatom, hogy az ár multifraktál jellegének oka az eloszlás vastag széle, nem pedig a korreláció struktúrája, ezért korrelációs szempontból monofraktálnak tekinthető.

3. új állítások megfogalmazása

Ki fogom mutatni, hogy a kiugró értékek nem jelentenek az ár folyamatában különálló viselkedési mintát, hanem egyszerűen egy vastag szélű eloszlás magas realizációi, és jelenlétük oka a kereskedés mechanizmusában és a kínálat jellegében keresendő.

A disszertációban empirikus illeszkedésvizsgálattal és egy elméleti modellel igazolom, hogy az ár eloszlása általánosított extrémérték-eloszlás, ezen belül Fréchet eloszlás.

Levezetem, mi a kapcsolat a villamosenergia-kínálat struktúrája és az ár eloszlása között.

Bemutatok egy determinisztikus rezsinváltó modellt, amely leírja, hogyan változik a kiugró értékek intenzitása.

Az előző modellt felhasználva tervezek egy eljárást, amely segítségével kiszűrhető a héten belüli szezonális, a vastag szélek és a heteroszkedaszticitás egy része az idősről.



# A felhasznált módszerek

Dolgozatomban több hipotézis vizsgálatát végeztem el, melyek bár a villamosenergia-árak viselkedésének leírásához és megértéséhez kapcsolódnak, különböző módszereken alapszanak. Az egyes hipotézisek vizsgálatában felhasznált módszereket ezért hipotézisekre lebontva tárgyalom.

A számítások elvégzéséhez rendelkezésemre álltak az óránkénti árak a másnapi piacokról a Nord Pool esetén 1999. január 2-ától 2007. január 26-ig; az EEX esetén 2000. június 16-tól 2007. április 19-ig; az APX esetén 2002 januárjától 2003 decemberéig.

## **1. hipotézis: A villamos energia ára perzisztens folyamatot követ, tehát hosszú távú memóriája van.**

Önaffin<sup>1</sup> folyamatok perzisztenciájának (a folyamat perzisztens illetve antiperzisztens jellegének) mérésére az általánosan elfogadott mérőszám a Hurst mutató (*Hurst exponent*, Hurst exponens, jelölés: H). Stacionárius folyamatok esetén a 0,5-ös H mutató esetén a folyamat értékei között nulla az autokorreláció (pl. gaussi fehér zaj). A 0,5-nél kisebb értékek jelzik azt, hogy a folyamat antiperzisztens (a folyamat elemei között negatív az autokorreláció), míg 0,5 feletti értékek esetén a folyamat perzisztens (az elemek között pozitív az autokorreláció). Az 1-es H exponenssel rendelkező folyamatokat rózsaszín zajnak (*pink noise*) nevezik. A H mutató néhány gyakrabban használt kiszámítási módszere az alábbi:

1. R/S (Rescaled Range) módszer<sup>2</sup>
2. Aggregated Variance módszer<sup>3</sup>
3. Differenced Variance módszer<sup>4</sup>
4. Periodogram regresszió<sup>5</sup>
5. Average Wavelet Coefficient (AWC) módszer<sup>6</sup>
6. ARFIMA alapú becslés<sup>7</sup>
7. DFA (*detrended fluctuation analysis*)<sup>8</sup>

---

<sup>1</sup> Önaffin egy  $B(t)$  sztochasztikus folyamat, ha vesszük a folyamat  $t$  hosszúságú szakaszon vett növekményét  $t_0$ -tól:

$$b(t_0, t) = B(t_0 + t) - B(t_0)$$

Ekkor önaffin (önhasonló) a folyamat H Hurst mutatóval, ha a  $b(t_0, t)$  és a  $r^{-H}b(t_0, rt)$   $r > 0$ ,  $\forall t$  esetén statisztikailag megkülönböztethetetlen, azaz ha a két növekmény eloszlása ugyanaz.

<sup>2</sup> Weron [2006].

<sup>3</sup> Montanari, Rosso, Taqqu [1997].

<sup>4</sup> Montanari, Rosso, Taqqu [1997].

<sup>5</sup> Sarker [2007].

<sup>6</sup> Simonsen, Hansen, Nes [1998].

<sup>7</sup> L. pl. Haldrup és Nielsen [2006].

A dolgozatban az EEX és Nord Pool villamosenergia-ár, a log ár, az árnövekmény és a logszázalékos változás (loghozam) Hurst mutatóját elemzem.

Megvizsgálom a hosszú távú memóriában történő strukturális törés helyét az idősorban. Bashan és szerzőtársai [2006] a DFA-t vizsgálták meg a strukturális törések felismerése tekintetében. Úgy találták, hogy a DFA meglehetősen pontosan ismeri fel a strukturális törés igazi helyét. A szerzők az alábbi képletet adták meg, hogy meg tudjuk határozni a törés  $s_x$  valós helyét a becsült  $s'_x$  alapján a DFA esetében:

$$\ln s_x \approx \ln s'_x - 0,25$$

## **2. hipotézis: Célszerű a modellezés során nem a hozamot, hanem az árat vagy az ár logaritmusát használni.**

Két érvem van amellett, hogy az árat (vagy log árat) célszerű használni a loghozammal szemben:

1. Nincs egyértelmű statisztikai oka annak, hogy loghozamot számoljunk. Az ár folyamatáról nem sikerült egyértelműen bemutatni, hogy egységgyököt tartalmaz, ezért nincs szükség a differenciálásra.

2. A loghozamnak nincs közvetlenül értelmezhető tartalma. A pénzügyi piacok esetén ésszerű hozam jellegű mutatót használni, hiszen az minden időszakban megmutatja a befektetett vagyonunk változásának mértékét. Ha az egyik nap 1% a loghozam, másnap -1%, akkor az induló értéket éri a befektetésünk. A villamosenergia-piacon mind a termelők, mind a fogyasztók napról napra ugyanazzal a gazdálkodási problémával kerülnek szembe: a villamos energia árát ki kell fizetni, vagy elkönnyvelhetik bevételként. Ha például egy adott órában 100-ról 99-re csökken a villamos energia ára, akkor ez egy egységgel változtatja meg az adott időszaki eredményemet, termelőként csökkenteti azt. Hiába lesz a következő órában ismét 100 az ár, összességében 1 egységet vesztettem (a várakozásaimhoz képest), pedig a hozam először negatív, utána pozitív volt.

A villamos energiát nem megvesszük, tároljuk, eladjuk, és realizáljuk rajta a hozamot a következő időszakban, hanem (termelőként) minden egyes időszakban eladjuk. A termelők (fogyasztók) nem abban érdekeltek, hogy a hozam legyen magas (alacsony), hanem hogy az ár legyen magas (alacsony). Az ár áll tehát a piaci szereplők érdeklődésének középpontjában, tehát ha nem kell mást szem előtt tartanunk, akkor az ár lehet a modellezés természetesen kiválasztott célpontja.

---

<sup>8</sup> Ezt a módszert a későbbiekben mutatom be (1. 3. hipotézis).

A fenti érvek mellé DFA módszerrel megvizsgálom azt is, mennyiben mutat az EEX és Nord Pool loghozam és ár önaffin jelleget.

**3. hipotézis: A villamos energia árának multifraktál jellegét az eloszlás vastag széle okozza. A vastag eloszlásszél okozta hatás kiszűrése után a folyamat monofraktál.**

Az egyik módszer annak eldöntésére, hogy a folyamat multifraktál vagy monofraktál jellegű, az általánosított Hurst exponens, a  $h(q)$  alapján történik, melyet például MF-DFA (multifractal DFA) módszerrel lehet kiszámolni. Ennek menete a következő<sup>9</sup>:

1. Számítsuk ki a kumulált idősort, az ún. profilt.
2. Osszuk az idősort  $s$  hosszúságú részidősorokra.
3. Illesszünk (lineáris, kvadratikus, stb) trendet<sup>10</sup> mindegyik részidősorra. Számítsuk ki az illesztés négyzetes hibáját,  $F_{v,s}^2$ -et minden  $v$  részidősorra.
4. Átlagoljuk a négyzetes hibákat a részek között az alábbi képlet szerint, ahol  $V$  a részsorozatok számát jelöli:

$$F_s = \left( \frac{1}{v} \sum_v (F_{v,s}^2)^{q/2} \right)^{1/q}, \text{ ha } q \neq 0$$

és

$$F_s = \exp \left( \frac{1}{v} \sum_v \ln(F_{v,s}^2) \right), \text{ ha } q = 0$$

5. Végezzük el a fenti számítást sok  $s$  esetén, és mivel

$$F_s \sim s^{h(q)}$$

ezért a sorozathosszt és az átlagos hibát log-log skálán ábrázolva a görbe meredeksége fogja adni az adott  $q$  értékhez tartozó  $h(q)$ -t. Ezt tetszőleges  $q$  értékre elvégezve kapunk egy  $h(q)$  görbét, és ezt nevezik általánosított Hurst exponensnek. A  $h(2)$  érték stacionárius idősor esetén a Hurst mutatót adja vissza ( $q = 2$  érték mellett elvégzett MF-DFA egybeesik a DFA-val<sup>11</sup>). Az MF-DFA

<sup>9</sup> A módszert Kantelhardt és szerzőtársai [2002] alapján mutatom be.

<sup>10</sup> A trend fokszámának függvényében beszélünk MF-DFA1, MF-DFA2, stb. eljárásokról.

<sup>11</sup> Kantelhardt és szerzőtársai [2002].

módszerrel nemstacionárius folyamatokat is vizsgálhatunk. Ráadásul az algoritmus arra is választ ad, hogy stacionárius-e a folyamatunk. Ha  $h(2) \geq 1$ , akkor az idősor nem stacionárius. Elsőrendben integrált folyamat esetén például a Hurst exponens a következőképpen számítható ki:  $H = h(2) - 1$ <sup>12</sup>.

A 4. lépésben leírt képletből látszik, hogy nagy  $q$  esetén a trendtől jobban eltérő értékek fogják dominálni az  $F$  statisztika értékét, kis  $q$  esetén a trendhez közeleiek. A nagy  $q$  értékek tehát a nagy változások perzisztenciáját, a kis  $q$  értékek a kis változások perzisztenciáját mérik. Ha a  $h(q)$  függvény vízszintes, akkor a kis és nagy változások hasonlóan viselkednek, és az idősor monofraktál jellegű. Ha a  $h(q)$  nem vízszintes, akkor multifraktál idősróról beszélhetünk.

Kantelhardt és szerzőtársai [2002] a multifraktál jelleg két formáját különböztetik meg az idősorokban. Az első típusú multifraktalitás annak köszönhető, hogy az az eloszlásfüggvény, amely idősor elemeit generálja, vastag szélű. A szerzők szerint a második típusú multifraktalitás a hosszabb késleltetésű autokorrelációk viselkedésének tudható be. Ez az a típus, amely ténylegesen szerepet játszik a hosszú távú függőség kialakításában, ezért a multifraktalitásnak ez a típusa érdekel mindet. A szerzők bemutatnak egy módszert, amellyel szeparálni lehet a két hatást. Véletlenszerűen össze kell keverni az idősor elemeit, ez megszünteti a korrelációkat. Ha így kiszámítjuk az általánosított  $H$  mutatót ( $h_{\text{shuffled}}(q)$ ), és multifraktál jellegre utaló jeleket látunk, akkor ennek az oka az eloszlás alakja. A korrelációk hatása nem más, mint a  $h(q) - h_{\text{shuffled}}(q)$ . Ha a folyamatban a normális eloszlás lenne a véletlen hatások motorja, akkor a  $h_{\text{shuffled}}(q)$  vízszintes lenne 0,5-ös érték mellett. Ezért kiszámítható a korrigált általánosított Hurst mutató a következőképpen:

$$h_{\text{mod}}(q) = h(q) - h_{\text{shuffled}}(q) + 0,5$$

Ez már csak tisztán a korrelációk hatását fogja mutatni.

Formális multifraktalitási tesztet ír le Jiang és Zhou [2007]. Kantelhardt és szerzőtársai [2002] leírják, hogy a skálázási kitevő (*scaling exponent*) kiszámítható az általánosított Hurst exponens segítségével:

$$\tau(q) = qh(q) - 1$$

Ebből az ún. Hölder exponens (*Hölder exponent*):

$$\alpha(q) = \tau'(q)$$

---

<sup>12</sup> Norouzzadeh és szerzőtársai [2007].

Jiang és Zhou [2007] úgy érvel, hogy ha a  $h(q)$  vízszintes, akkor a  $\tau(q)$  egyenes, az  $\alpha(q)$  pedig konstans. A teszt azon alapszik, hogy ha az  $\alpha$ -beli nem vízszintes jelleg megegyezik a kevert idősor  $\alpha$ -jának a vízszintestől eltérő jellegétől, akkor a multifraktál jelleg oka az eloszlás vastag széle, nem pedig a korrelációk struktúrája. Az  $\alpha$  nem egyenes jellegét az  $\alpha$  terjedelmével méri:

$$\Delta\alpha = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$$

A teszt nullhipotézise és ellenhipotézise:

$$H_0 : \Delta\alpha \leq \Delta\alpha_{\text{shuffled}}$$

$$H_1 : \Delta\alpha > \Delta\alpha_{\text{shuffled}}$$

ahol  $\Delta\alpha_{\text{shuffled}}$  a kevert idősor  $\alpha$ -jának terjedelme. A nullhipotézis azt jelenti, hogy az  $\alpha$ -beli változékonyság az eloszlásnak tulajdonítható, míg az ellenhipotézis esetén az  $\alpha$  változékonysága nagyobb, mint amit az eloszlás széle indokol. Ezek alapján a teszt nullhipotézise a monofraktál, ellenhipotézise a multifraktál jelleg. A kevert idősor  $\Delta\alpha_{\text{shuffled}}$  eloszlását szimulációval határozhatjuk meg, az elemeket újra és újra keverve, majd p-értéket számítunk:  $1 - (a \Delta\alpha / \Delta\alpha_{\text{shuffled}})^{1/a}$  (a  $\Delta\alpha$  a  $\Delta\alpha_{\text{shuffled}}$  eloszlásának hányadik kvantilise). Ha a p-érték 0,05 felett van, akkor a nullhipotézist nem tudjuk elutasítani, azaz a folyamat monofraktál. Ellenkező esetben a folyamat multifraktál.

A dolgozatban kiszámítom az EEX és Nord Pool spot villamosenergia-ár általánosított Hurst exponensét, a kevert idősor általánosított Hurst exponensét, illetve grafikusán és formális teszttel is megvizsgálom a multifraktál jellegét. A Nord Pool esetén 168 részidősorra bontom az adataimat a hét óráinak megfelelően, és azokkal is elvégzem a számításokat.

**4. hipotézis: A kiugró villamosenergia-árak az idősor szerves részét képezik, ugyanúgy viselkednek, mint az átlagos szintű árak, ezért kiugró árakról sem beszélhetünk.**

Amennyiben elfogadjuk, hogy a villamos energia ára monofraktál folyamatot követ a korrelációk tekintetében, akkor a kiemelkedően magas árak viselkedése ugyanúgy jellemezhető, mint az átlagos áraké. Nem alkotnak külön rezsimet, amelyben a korrelációk szerkezete sajátos. A kiugró árak egyszerűen egy vastag szélű (mint később látni fogjuk: Fréchet) eloszlás magas realizációi.

## **5. hipotézis: A villamosenergia-ár eloszlása általánosított extrémérték eloszlás.**

Az általánosított extrémérték eloszlások (*generalized extreme value –GEV– distributions*) eloszlásfüggvénye a következő alakú:

$$F_{k,\mu,\sigma}(x) = \exp\left\{-\left[1+k\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-1/k}\right\}, \text{ ha } 1+k(x-\mu)/\sigma > 0$$

A GEV eloszlásoknak három paramétere van:  $k$  az eloszlás jellegét meghatározó alakparaméter,  $\sigma$  ( $>0$ ) az eloszlás szóródásáért felelős skálaparaméter és  $\mu$  a lokációs paraméter. A GEV eloszláscsalád három eloszlás általánosítása. Fréchet eloszlásról beszélünk, ha  $k>0$ ; Weibullról, ha  $k<0$ ; és Gumbelről, ha  $k\rightarrow 0$ . A Fréchet eloszlás  $1/k$  kitevővel esik az eloszlásfüggvény jobb szélén (I. Embrechts, Klüppelberg, Mikosch [2003]).

Az EEX és APX napi árakra (adott napon az óránkénti árak összegére) GEV eloszlást illeszttem.

Az illeszkedésvizsgálatot khi-négyzet teszttel végeztem el. A khi-négyzet teszt esetén az adatokat osztályközös gyakorisági sorokba soroljuk, és az egyes osztályközők esetén kiszámítjuk az osztályközbe esés  $f^*$  elméleti és  $f$  empirikus gyakoriságát. A tesztstatisztika értéke:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(f_i - f_i^*)^2}{f_i^*}$$

ahol  $i$  az osztályközre vonatkozik. A teszt nullhipotézise, hogy az empirikus adatok eloszlása megegyezik az elméleti eloszlással. Ellenhipotézise, hogy a két eloszlás nem egyezik meg. Nagy minta<sup>13</sup> és a nullhipotézis fennállása esetén a tesztstatisztika eloszlása khi-négyzet eloszlás, amelynek szabadságfoka = osztályközők száma – az eloszlás becsült paramétereinek száma – 1 (Hunyadi, Mundruczó, Vita [1997]).

A khi-négyzet teszt mellett felhasználtam a Kolmogorov-Smirnov (KS) statisztikát is az illeszkedés jóságának meghatározására. A KS statisztika az elméleti és empirikus eloszlásfüggvény közötti távolságon alapszik (Weron [2006]):

---

<sup>13</sup> A nagy minta jelen esetben azt jelenti, hogy az egyes osztályközőkben az elméleti gyakoriságok meghaladják az ötöt (I. Kovács [2003]).

$$D = \sup |F - F_{emp}|$$

ahol  $F$  az elméleti eloszlásfüggvényt, az  $F_{emp}$  a kumulált relatív gyakoriságokat jelöli. Minél kisebb a  $D$  távolság, annál inkább illeszkednek az empirikus adatok az elméleti eloszláshoz. A dolgozatban összehasonlítom, hogy a GEV vagy a Lévy eloszlás illeszkedik jobban az empirikus adatokra.

Egy kapacitásbővítési modell keretén belül bemutatom, hogy a villamosenergia-ár eloszlása GEV, illetve bizonyos feltételek esetén Fréchet. A modellben feltételezem, hogy a villamosenergia-kereslet egy rögzített  $K$  magas mennyiség, amelyet egyesével hirdetnek meg az erőművek között. Az erőmű eldöntheti, hogy ajánlatot tesz-e az adott egység eladására. Végtelen számú ( $i = 1, 2, \dots$ ) erőmű létezik. Az  $i$ . indexű erőmű  $i$  árat ajánl az áram megvételére, amennyiben meg tudja termelni az adott egységet, azaz ki tudja egy egységgel bővíteni a kapacitását. A kapacitás kibővítését rögzített  $p_i$  valószínűséggel tudja elvégezni az erőmű. A keresleti egységet az a nyertes erőmű fogja eladni, amelyik a legalacsonyabb árat ajánlta azon erőművek közül, amelyek meg tudták növelni a kapacitásukat. Az 1. erőmű  $p_1$  valószínűséggel nyer. A 2. erőmű akkor nyer és ad el, ha meg tudja növelni a kapacitását, és az 1. erőmű nem tesz ajánlatot, azaz nem tudta megnövelni a kapacitását. A 2. erőmű nyerési valószínűsége ezért:  $p_2(1 - p_1)$ . Az  $i$ . erőmű akkor nyer és ad el, ha az alacsonyabb árú erőművek nem tudták megnövelni a kapacitásukat. Annak a valószínűsége, hogy az  $i$ . erőmű nyer és adja el a keresleti egységet (azaz a „nyerési valószínűség”):

$$\hat{p}_i = p_i \prod_{j=1}^{i-1} (1 - p_j)$$

Belátható, hogy ha a  $p_i$  valószínűségek „jelentősen csökkennek” magas  $i$  indexek esetén, akkor a nyerési (és eladási) valószínűségek hatványszerű eloszlást fognak követni. A „jelentősen csökkenő” nem jelent feltétlenül nagyon gyors csökkenést (pl. a valószínűségek eshetnek hatványszerűen  $0,9/i^\alpha$  szerint  $\alpha = 0,22$  vagy annál nagyobb hatványkitevővel), de elegendőt ahhoz, hogy az elfogadott árak eloszlása gyorsan (hatványszerűen) essen.

Az az ár, amin a nyertes erőmű hajlandó eladni a keresleti egységet, a fenti eloszlásból származik. A  $K$  keresleti egységet egymástól függetlenül hirdetik meg. A piaci ár a nyertes erőművek ajánlatai közül a legnagyobb. Ez az az ár, amin mindegyik nyertes erőmű hajlandó eladni.

A piaci ár levezetéséhez felhasználok a Fisher-Tippett tételt (l. Embrechts, Klüppelberg, Mikosch [2003]):

Ha léteznek  $c_n > 0$ ,  $d_n$  konstansok, hogy a centrált és normált  $M_n = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$  maximumok eloszlásának határértéke nem degenerált H eloszláshoz tart

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{\text{eloszl.}} H$$

akkor H GEV típusú eloszlás, ha az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  független és azonos eloszlású.

A nyertes árak (a nyertes erőművek által ajánlott ár) FAE véletlen változóknak tekinthetők, mivel ugyanabból az eloszlásból származnak, és függetlenek, mivel a keresleti egységeket egymástól függetlenül hirdetik meg. A centrált és normált piaci ár határeloszlása tehát GEV típusú. A centrált és normált piaci ár magas  $K$  esetén ezért jól közelíthető GEV eloszlással, ezért a piaci ár szintén jól közelíthető GEV eloszlással, mivel a GEV eloszlások zártak a véletlen változó affín transzformációjára.

Ha a kapacitás-bővítési valószínűségek „jelentősen csökkenőek”, akkor a nyertes árak eloszlása hatványyszerűen csökken. A hatványszerű eloszlások a Fréchet eloszlás vonzási medencéjébe tartoznak (l. Embrechts, Klüppelberg, Mikosch [2003]), ezért a maximum (a piaci ár) eloszlása közelítőleg Fréchet eloszlás.

A modell feltétele a függetlenül meghirdetett rögzített nagyságú kereslet és a konstans kapacitás-bővítési valószínűség. A rögzített nagyságú kereslet megfelel a valóságnak, hiszen a piaci keresleti görbe meglehetősen rugalmatlan. A konstans kapacitás-bővítési valószínűség azt foglalja magában, hogy annak a valószínűsége, hogy  $K$  nagyságú keresletből  $k_i$ -ra ajánlatot tegyen az erőmű, binomiális eloszlású. Ez (mivel egymódusú) kizárja a leállások (*outages*) jelenlétét, melyeket a kiugró árak jelenlétéért szoktak felelőssé tenni. Látható, hogy a leállások jelenléte nélkül is levezethető, hogy az ár eloszlása vastag szélű (Fréchet), tehát a vastag szélek és a kiugróan magas árak megjelenésének oka a kereskedés rendszere és „jelentősen csökkenő” kapacitás-bővítési valószínűségek. Mint látni fogjuk, a kapacitás-bővítési valószínűségek a piaci kínálati görbéhez kötődnek, így az ártüskék és a vastag szélek meghatározója végső soron a kereskedés rendszere és a piaci kínálati görbe alakja.

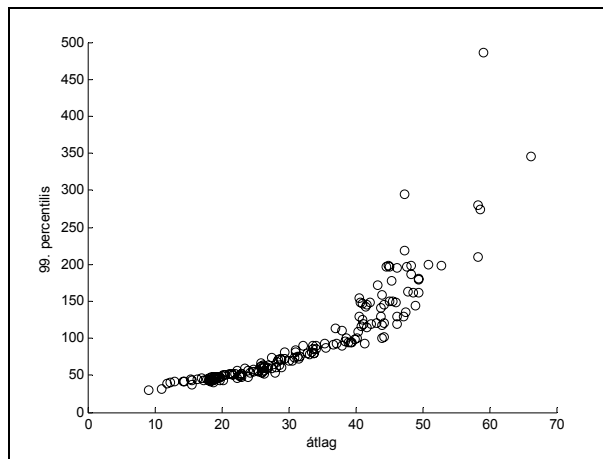
A keresleti egységek független meghirdetése a valóságban nem teljesül. A következtetésünk (a Fréchet eloszlás) mégis helyes. Mondhatjuk egyrészt, hogy úgy is tekinthetjük a piacot, mintha a keresleti egységeket függetlenül hirdetnék meg; ez a következtetésen nem változtat. Másrészt mivel a függetlenség feltétele a valóságban nem igaz, ezért a vállalatok más valószínűséggel fognak eladni kis  $K$  kereslet és nagy  $K$  kereslet esetén, hiszen nagyobb  $K$  esetén a magasabb árú erőművek ajánlatait gyakrabban fogadják el. Az életszerűség kedvéért változtathatunk a modellen úgy, hogy



megengedjük a  $\hat{p}_i$  valószínűségek K kereslettől való függését, azaz a piaci ár eloszlása (egyik napról a másikra) változhat a keresleti mennyiség függvényében, de továbbra is Fréchet eloszlásúnak tekinthetjük az empirikusan tapasztalt eloszlásnak megfelelően. Ezt a megközelítést a későbbi hipotézisek vizsgálatokor alkalmazni fogom.

**6. hipotézis: A villamos energia ára rezsimváltó modellt követ, és a rezsimok determinisztikusan követik egymást.**

Megmutatható, hogy ha az adatsort a hét órájának megfelelően 168 részre osztjuk, akkor az eloszlások átlaga és 99%-os kvantilise egymásnak nem lineáris függvénye (l. EEX, 1. ábra). Ebből az következik, hogy az eloszlások nemcsak a várható értéküket változtatják, hanem az alakjukat is. Ha az előző hipotézisnél vizsgáltaknak megfelelően 168 darab különböző paraméterű GEV eloszlást becsültem a Nord Pool és EEX árakra, és azt vizsgáltam, milyen paramétereket kapok, illetve van-e összefüggés az eloszlások paraméterei között.



1. ábra: Az óránkénti EEX eloszlások átlaga és magas kvantilise

**7. hipotézis: A héten belüli szezonálisitás kiszűrhető az eloszlások jellegének megváltoztatásával**

A 6. hipotézis vizsgálata során láttuk, hogy 168 darab GEV eloszlás váltogatja egymást a hét órájának váltakozásával. Ez magában foglalja a héten belüli szezonálisitás jelenségét is. A szezonálisitás tehát nem más, mint az eloszlások szabályos váltakozása. Ha például a csúcsidőszakban magas az ár, akkor ez magas helyzetparaméterű GEV eloszlásban fog testet ölteni. A szezonálisitás tehát kiszűrhető, ha az eloszlásokat transzformáljuk ugyanabba az eloszlásba.

Az általam GEV szűrésnek nevezett módszer lényege az alábbi változó-transzformáció:

$$y = F_{\ln}^{-1} F_i(x)$$

ahol  $F_{\ln}^{-1}$  a lognormális eloszlás eloszlásfüggvényének inverze, míg  $F_i$  a GEV eloszlás eloszlásfüggvénye, ahol az  $i$  alsó index arra az órára utal, amelynek az áráról éppen szó van. Az  $x$  jelöli az eredeti, az  $y$  a transzformált adatokat. Megmutatható, hogy ha az eloszlásfüggvények értelmezési tartományát az eloszlások tartójára korlátozzuk, akkor a fenti összefüggés mindig értelmezhető (létezik a lognormális eloszlás eloszlásfüggvényének inverze). Könnyen levezethető, hogy ha a kiinduló feltételezésünk helyes, és az eredeti adatok GEV eloszlást követnek, akkor a transzformált adatok lognormális eloszlásúak lesznek. A szűrés során a lognormális eloszlás választását az indokolja, hogy az alakja nagyon hasonlít a GEV eloszlásokhoz (így viszonylag kevés torzítást visz az adatokba a szűrés), valamint közgazdaságilag értelmes a tartója, tehát az eredő, szűrt adatokat is értelmezhetjük árakként. Előny továbbá, hogy számos időszorosmodell épül lognormális eloszlású adatokra, így a szűrt árak további modellezése is könnyen megoldható. Mivel a lognormális eloszlás gyorsabb lecsengésű a széleken, mint a Fréchet eloszlás, így a transzformált adatok eloszlása esetén csökken az eloszlás széle az eredetihez képest, így a szezonális szűrés egyben a kiugró villamosenergia-árak szűrését is magában foglalja. Ez nem jelenti azt, hogy a szűrés után a magas árak eltűnnek az időszorból, hanem a nagyságrendjük kisebb lesz.

A szűrési eljárás előnye, hogy ha már dolgoztunk a szezonálisan szűrt adatokkal, és előrejelzést tudunk adni, akkor könnyű az inverz transzformációt definiálni:

$$x = F_i^{-1} F_{\ln}(y)$$

ahol az  $y$  a szezonálisan szűrt adatokat, az  $x$  a visszatranszformált adatokat jelöli. Az eloszlásfüggvények jelentése ugyanaz, mint korábban. Az inverz transzformáció értelmes, ha az eloszlásfüggvények értelmezési tartományát leszűkítjük a tartóra.

Az inverz transzformációval módosított adatok ugyancsak GEV eloszlást fognak követni, mint ahogy az eredeti adataink. Ez egyben azt is jelenti, hogy visszacsempésszük a vastag széleket az eloszlásba.

Az EEX árak esetén megvizsgálom a GEV szűrő működését.

## Az értekezés eredményei

### 1. hipotézis

(A villamos energia ára perzisztens folyamatot követ, tehát hosszú távú memóriája van.)

Az ismertett módszerek segítségével kiszámítottam az ár, a log ár, a loghozam és az árnövekmény Hurst exponensét. Az eredményeket az 1. táblázat szemlélteti<sup>14</sup>.

<b>EEX</b>	<b>Ár</b>	<b>Log ár</b>	<b>Loghozam</b>	<b>Árnövekmény</b>
R/S**	0,88 (0,0929)	0,77 (0,0703)	0,26[0,77]* (0,0404)[0,5623]	0,30[0,71]* (0,0323)[0,2865]
Aggregated Variance**	0,86 (0,0167)	0,88 (0,0309)	-0,03 (0,0807)	-0,03 (0,0441)
Differenced Variance**	0,79 (0,0505)	0,70 (0,1625)	0,11 (0,1149)	-0,02 (0,0966)
Periodogram regresszió**	0,83 (0,0037)	1,07 (0,0066)	0,22 (0,0041)	-0,08 (0,0037)
AWC**	0,85 (0,0874)	0,94 (0,0858)	0,11 (0,0931)	0,05 (0,0478)
h(2)***	0,84	0,87	0,06	0,08
h <sub>mod</sub> (2) ***	0,83	0,86	0,06	0,08
<b>Nord Pool</b>	<b>Ár</b>	<b>Log ár</b>	<b>Loghozam</b>	<b>Árnövekmény</b>
R/S**	0,87 (0,0399)	0,86 (0,0412)	0,36[0,88]* (0,0327)[0,5981]	0,39[0,87]* (0,0329)[0,5171]
Aggregated Variance**	0,99 (0,0244)	0,99 (0,0095)	0,07 (0,0769)	0,19 (0,0475)
Differenced Variance**	0,98 (0,2064)	0,90 (0,2066)	-0,03 (0,2295)	0,11 (0,1789)
Periodogram regresszió**	1,21 (0,0037)	0,96 (0,0042)	0,06 (0,0042)	0,30 (0,0039)
AWC**	0,93 (0,0480)	0,93 (0,0688)	-0,01 (0,0558)	0,03 (0,1027)
h(2)***	1,15	1,11	0,18	0,17
h <sub>mod</sub> (2) ***	1,14	1,11	0,11	0,17

1. táblázat: A H becslései az EEX és Nord Pool esetén

Egyes esetekben a számítási módszer és az adatsor jellege folytán nem feltétlenül kapunk megfelelő ( $0 < H < 1$ ) értékeket.

\* A „multiscaling” jelenség következtében „napon belül” a H értéke 0,78 és 0,88, „napon kívül” 0,26 és 0,36 (a loghozam esetén).

\*\* R programcsomag fArma könyvtár.

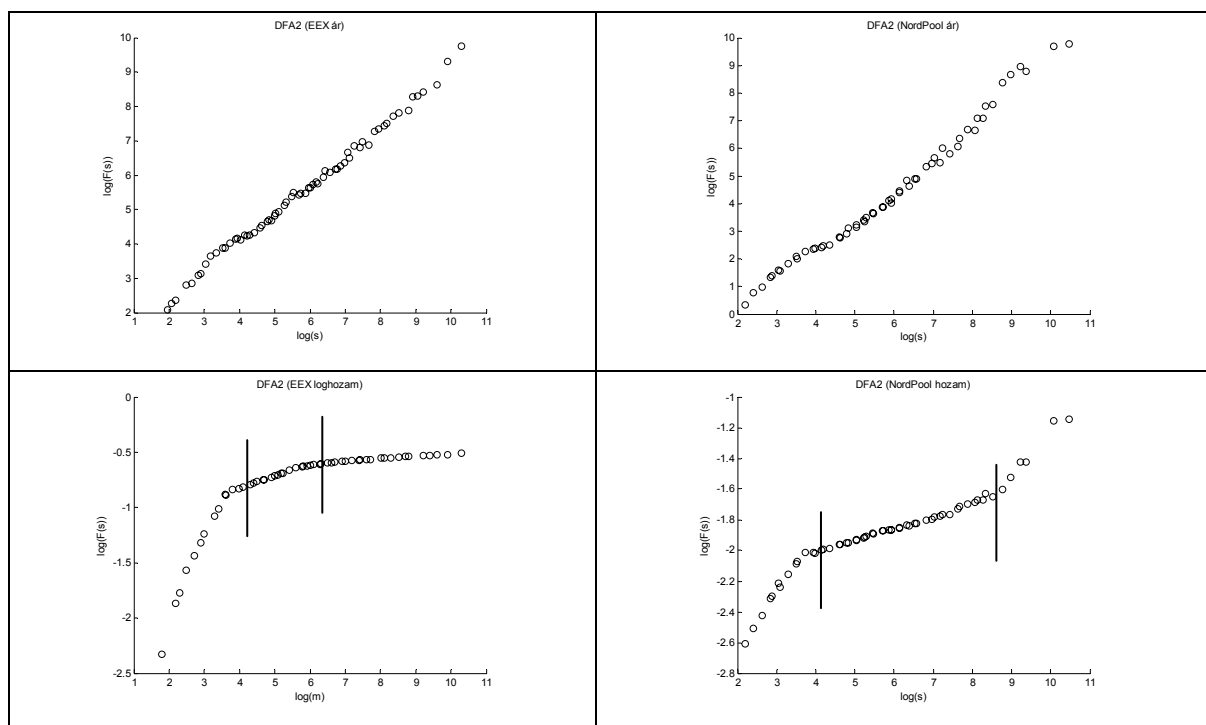
\*\*\* MATLAB saját program.

Zárójelben a sztenderd hibák szerepelnek.

<sup>14</sup> Az R program ARFIMA alapú becslése nem adott megbízható eredményeket, ezért a becsléseket nem szerepeltetem.

A szakirodalomban a különböző  $H$  értékek oka, hogy a szerzők más-más változót vizsgálnak: hol az árat, hol a hozamot. Az 1. táblázatból kiolvasható, hogy az ár és a log ár  $H$  mutatójára jellemzően 0,8 és (különösen a Nord Pool esetén rózsaszín zajra utaló) 1 közötti értékeket kaptunk, tehát ez a helyes érték. A loghozamot vizsgáló szerzők abból indulnak ki, hogy az ár egységgyök, tehát eleve a loghozam (vagy az árnövekmény)  $H$  mutatóját számolják. Célszerű azonban ezt nem az ár, hanem a loghozam  $H$  mutatójának nevezni, és ezzel elkerülni a félreértéseket.

**1a. tézis:** A villamos energia ára perzisztens folyamatot követ, tehát hosszú távú memóriája van. A Hurst mutató értékének nagyságrendje az ár esetén 0,8 és 1 között található. A logaritmizált ár Hurst exponensének nagyságrendje szintén 0,8 és 1 közé tehető. A Nord Pool ár folyamata rózsaszín zaj lehet.



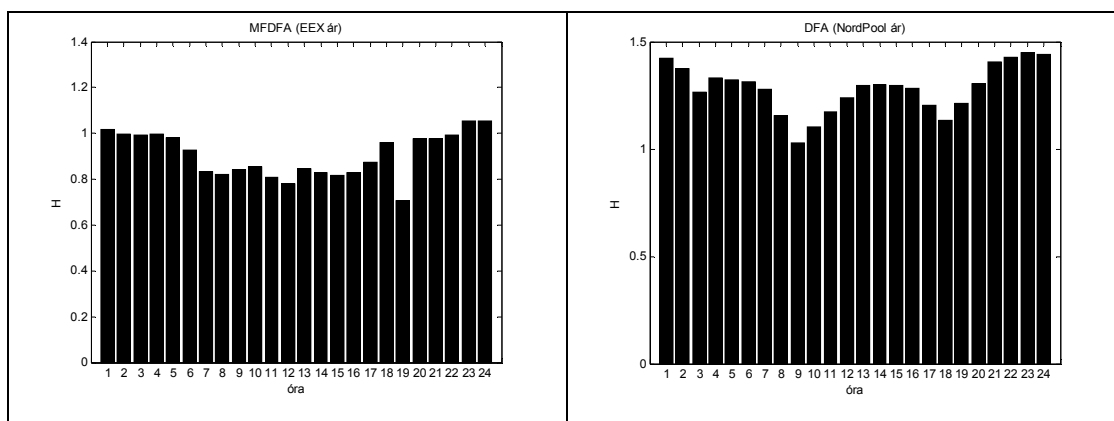
2. ábra: EEX és Nord Pool ár és loghozam DFA elemzése

A 2. ábrán látszik, hogy az EEX és Nord Pool ár önaffin, hiszen a DFA elemzés log-log skálán egyenes képet mutat. Ezzel szemben a hozam esetén az ábra nem egyenes. A loghozam esetén a függőleges vonallal (az ábra alapján intuitíven) elválasztott részek meredekségei a Nord Pool esetén rendre (0,39; 0,08; 0,28), míg az EEX esetén rendre (0,76; 0,11; 0,03). Ezt a „multiscaling” jelenséggel szokták magyarázni (Simonsen [2003]), amely szerint a hozam máshogy viselkedik napon belül, mint napon kívül. Bár a DFA és az R/S módszer nem különbözteti meg úgy a különböző frekvenciájú ingadozásokat, mint az AWC módszer, a DFA és R/S módszer mégis használható a strukturális törések vizsgálatára. A 2. ábra és egy (itt nem bemutatott) R/S elemzés

segítségével azonban megállapítható, hogy a törés nem 24, hanem 44,7 óránál következik be. A strukturális törés becsült helye alapján Bashan és szerzőtársai [2008] módszerét követve kiszámíthatjuk a törés tényleges helyét: az igazi töréspont ez alapján 34,8 óránál van. Ennélfogva a viselkedési törés nehezen indokolható heurisztikusan. A valószínűbb magyarázat (ezt erősíti a 2. ábrán szereplő második töréspont is), hogy a loghozam egyszerűen nem önaffin.

**1b. tézis:** A loghozam és az árnövekmény 0,8 – 0,9 körüli H értékkel rendelkezik rövidtávon, azaz kb. 35 órán belül. Hosszabb időhorizonton a loghozam nem mutat tiszta önaffin jelleget.

Erzgräber és szerzőtársai [2008] bemutatják a Nord Pool loghozam esetén, hogy a H változik időben, illetve változik akkor is, ha a nap órájának megfelelő részidősorokat választunk ki a teljes idősorból, és azokra végezzük el a számítást. A szerzők nagyjából konstans értékeket kapnak, kivéve a reggel 9 és este 6 körüli időszakokat, amikor a H értéke kicsit alacsonyabb a többi óránál. A 3. ábra ugyanezt az elemzést mutatja, de nem a hozam, hanem az ár esetén. A következtetést az 1c. tézis fogalmazza meg:



3. ábra: A H becslései az EEX és Nord Pool esetén (MF)DFA módszerrel a nap 24 órájára

**1c. tézis:** Ha az idősort feldaraboljuk, akkor a nap különböző órájához tartozó részidősorok H mutatói eltérnek. Az éjszakai (csúcsidőszakon kívüli) órákban a Hurst exponens magasabb.

## **2. hipotézis**

**(Célszerű a modellezés során nem a hozamot, hanem az árat vagy az ár logaritmusát használni.)**

A korábban említett két érv (a statisztikai kényszer hiánya, és hogy a loghozamnak nincs értelmezhető tartalma) mellé sorakoztathatjuk az 1b. tézist, miszerint a loghozam nem önaffin, az ár pedig igen, ezért a modellezés szempontjából az ár használata előnyösebb. Összefoglalva:

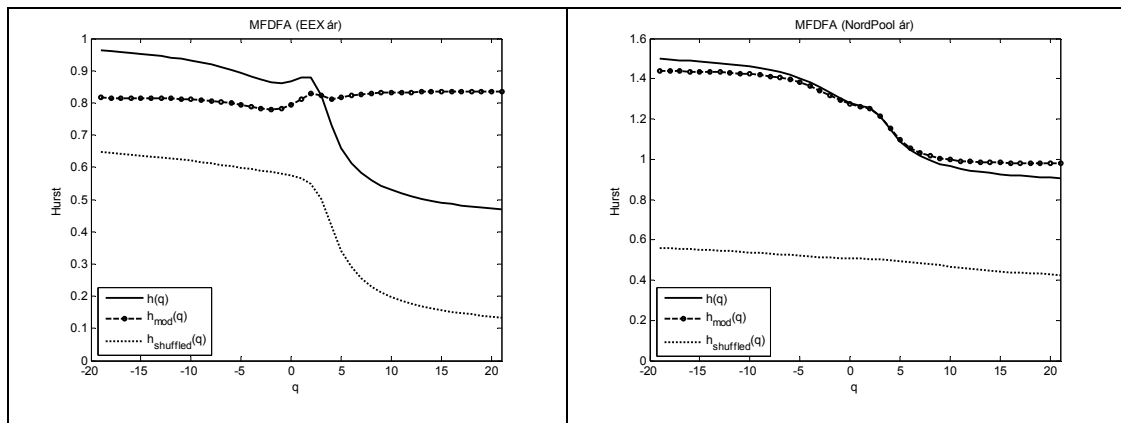
**2. tézis:** A loghozam és az árnövekmény nem mutat önaffin jelleget, nincs közvetlenül értelmezhető tartalma, nincs egyértelmű bizonyíték az áralakulás folyamatának integrált voltára, ezért a modellezés során célszerű nem a hozamot vagy az árnövekményt, hanem az árat vagy az ár logaritmusát használni.

## **3. hipotézis**

**(A villamos energia árának multifraktál jellegét az eloszlás vastag széle okozza. A vastag eloszlásszél okozta hatás kiszűrése után a folyamat monofraktál.)**

A 4. ábra mutatja be az EEX és Nord Pool árák és kevert árák általánosított Hurst exponensét. Látható, hogy az EEX esetén a kevert eloszlás általánosított Hurst exponensét jelző pöttyös vonal jelentősen eltér a vízszintestől, és a korrigált általánosított Hurst exponens (szaggatott vonal jelölővel) vízszintes valamivel 0,8 feletti szinten. Az EEX ár tehát multifraktál ugyan, de a multifraktál jelleg oka az eloszlás vastag széle, nem pedig a korrelációs struktúra alakulása. A Nord Poolra vonatkozó ábráról az derül ki, hogy a kevert árákra vonatkozó görbe nem tér el 0,5-től, és úgy tűnik, hogy a Nord Pool ár nem az eloszlás alakja miatt multifraktál folyamat, hanem az autokorrelációk struktúrája miatt.

A grafikus vizsgálatot támasztja alá a formális multifraktalitás teszt is: az EEX esetén a p-érték 0,36, míg a Nord Pool esetén 0,00, tehát ez alapján azt a következtetést vonhatjuk le, hogy az EEX idősor a korrelációkat tekintve monofraktál (elfogadjuk a nullhipotézist), míg a Nord Pool nem (elutasítjuk a nullhipotézist).



4. ábra: Az EEX és Nord Pool árak MF DFA elemzése

Ha azonban a Nord Pool idősort 168 darab részre bontjuk a hét órájának megfelelően, és úgy végezzük el a tesztet, akkor a 168 darab idősről 14 esetén éri el a 0,05-öt a p-érték, azaz csak 14 idősről állíthatjuk, hogy multifraktál. Ráadásul ezen 14 érték közül 4 esetén lesz a p-érték 0,01-nél kisebb, azaz 99%-os szignifikanciaszinten már csak 4 részidősor viselkedik multifraktálként. Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a részidősorok döntő többsége monofraktál az eloszlás lecsengése hatásának kiszűrése után.

Ha kiszámítjuk a módosított Hurst exponenst a 168 részidősor esetén, akkor 0,87 és 1,42 közötti  $h_{\text{mod}}(2)$  értékeket kapunk. A becsült H együtthatók fele az 1,21-1,32 intervallumon belül helyezkedik el.

A Nord Pool árakat monofraktálnak találtuk a feldarabolt adatsor esetén, míg a teljes idősor multifraktál. A vastag szélek jelensége tehát csak az óránkénti idősorok esetén van jelen. Erre egy lehetséges magyarázat az, hogy az óránkénti eloszlások jelentősen különböznek egymástól. Ha ezeket a különböző eloszlásokat összerakjuk egy eloszlásba, akkor a kevert eloszláson a vastag eloszlásszélek nem érvényesülnek, így a multifraktál jelleg az eloszlás-korrekciónak is fennmarad. Az EEX óránkénti árak kevésbé különböznek egymástól, így az eloszlások összekeverése kevésbé káros az eloszlás szélére, így a teljes idősről számított eloszlás vastag szélű, és az idősor monofraktál.

**3a. tézis:** A villamos energia árának multifraktál jellegét döntően az eloszlás vastag széle okozza. A vastag eloszlásszél okozta hatás kiszűrése után a folyamat monofraktálnak tekinthető.

**3b. tézis:** A multifraktál elemzésben a vastag szélek hatása nem minden esetben szűrhető ki a teljes adatsor vizsgálatával. A Nord Pool esetén a monofraktál jelleg csak a hét órájának megfelelően felbontott részidősorokban mutatható ki.

#### **4. hipotézis**

**(A kiugró villamosenergia-árak az idősor szerves részét képezik, ugyanúgy viselkednek, mint az átlagos szintű árak, ezért kiugró árakról sem beszélhetünk.)**

A 3. tézisben elfogadtuk, hogy korrelációs szempontból az ár folyamata monofraktál, tehát:

**4a. tézis:** A kiugró villamosenergia-árak a korrelációk tekintetében ugyanúgy viselkednek, mint az átlagos szintű árak.

Az áramár adatsorának monofraktál jellegéből adódóan a korrelációs szerkezet egységes a teljes idősorra (ártüskékre és átlagos szintű árakra egyaránt). Nincs szükség arra, hogy „ártüskékről” beszéljünk, mert azok ugyanolyan tulajdonságokkal rendelkeznek, mint az átlagos szintű árak.

Természetesen magas árak időnként megjelennek a villamosenergia-ár idősorában. Ráadásul empirikusan az is megállja a helyét, hogy a magas árak gyorsan visszatérnek az átlagos szintre, és a nagy sokkok ténylegesen gyorsabban szűnnek meg, mint a kis sokkok. Ez ellentmondani látszik az áramár-adatsor monofraktál jellegének. A multifraktál elemzésünk eszközül szolgál, hogy feloldjuk ezt az ellentmondást. A nem valós multifraktalitást a vastag szélű óránkénti eloszlások okozzák. A 3a. tézis eredménye az volt, hogy ha a vastag szélek hatását kiszűrjük, akkor a multifraktál jelleg eltűnik. Ez azt jelenti, hogy a kiugróan magas árak csak a vastag szélű óránkénti eloszlásokból származó magas realizációk. Ha egy órában magas az ár (magas realizációt húzunk az eloszlásból), a következő órában az áram ára szintén egy adott eloszlásból származó realizáció, amely nagy valószínűséggel átlagos szintű lesz. Ez olyan hatást kelt, mintha felfelé ugrott volna az ár, és gyorsan visszatért volna, de ennek semmi köze a korrelációkhoz. Következtetésképpen az „ártüskéket” vastag szélű eloszlásokkal célszerű leírni ugrások vagy sztochasztikus rezsimmváltás helyett. Megmutatható például (l. 'Spring Wind' 2010 Conference előadásomat), hogy a Markov rezsimmváltó modellek a vastag szélek hatásának kiszűrése után is multifraktál idősort implikálnak.

**4b. tézis:** A kiugró ár (ártüske) egy magas realizáció egy vastag szélű eloszlásból, nem pedig outlier vagy másik rezsimm. Külön névvel illetni csak zavart okoz.

A villamosenergia-árak viselkedése rendkívül komplex. Úgy gondolhatnánk, hogy a napi, heti és éves szezonális elrontja a számítási eredményeket és csökkenti a belőlük levonható következtetések erejét. A szezonális és a változó intenzitású kiugróan magas árak megjelenése ugyanis az áridősor nemstacionárius jellegéhez vezet.



Azzal, hogy az idősort 168 részre osztottuk a hét órájának megfelelően, sikeresen megszabadultunk a napi és heti szezonális hatásától. Ennélfogva a bemutatott multifaktál elemzés héten belüli szezonális jelenléte esetén is érvényes. A 168 részidősor esetén kapott  $h_{\text{mod}}(2)$  értékeket a Nord Pool árak Hurst mutatójának tekinthetjük. Ezek az értékek már nem tartalmazzák a héten belüli szezonális hatását.

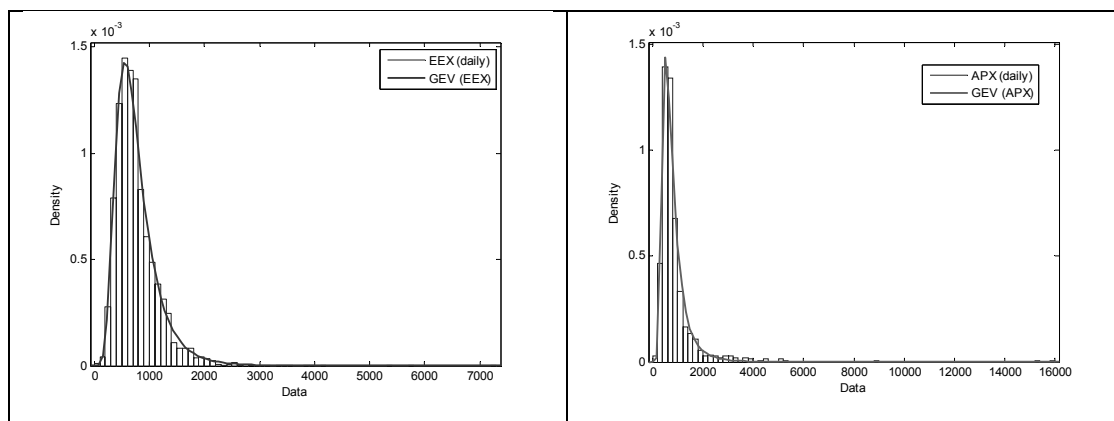
A 4b. tézisben megmutattam, hogy az ártüskék vastag szélű eloszlásból származó magas realizációk. A módosított általánosított Hurst exponens kiszűri a vastag szélű eloszlások hatását, így az ártüskék hatását eltávolítottuk a multifraktál elemzésből. Ennek következtében az árfolyamat monofraktálnak tekinthető a korrelációk tekintetében.

A változó intenzitás az ártüskék esetén azt jelenti, hogy a magas árak nagyobb valószínűséggel jelennek meg a csúcsidezőszak elején és végén. Más nézőpontból ez azzal analóg, hogy az ár eloszlása vastagabb szélű a csúcsidezőszak elején és végén. Ha az idősort 168 részre osztjuk a hét órájának megfelelően, és azután számítjuk ki a módosított általánosított Hurst exponenst, a vastag szélek (és így a változó ártüske-intenzitás) hatása eltűnik az egyes órák esetén, így a fejezetben levont következtetések érvényben maradnak változó intenzitású ártüskék esetén is.

**4c. tézis:** A változó intenzitású kiugró értékek és a héten belüli szezonális okozta nemstacionáris jelleg hatása kiszűrhető a Hurst exponens becsléséből a módosított általánosított Hurst exponens használatával és az idősor óránkénti részidősorokra bontásával.

## **5. hipotézis:**

**(A villamosenergia-ár eloszlása általánosított extrémérték eloszlás.)**



5. ábra: A GEV becslés illeszkedése az EEX és APX napi árak esetén (hisztogram és elméleti gyakoriság)

*Baloldali ábra: EEX napi árak. Jobboldali ábra: APX napi árak.*

*Vízszintes tengelyek: ár. Függőleges tengelyek: gyakoriság.*

Az 5. ábrán az EEX és APX napi árak esetén látható a GEV eloszlás illeszkedése az adatokra (MATLAB dfittool toolbox). Az illesztett GEV eloszlásból számított elméleti gyakoriság követi a hisztogram alakulását. Ugyanez a következtetés vonható le a kumulált gyakoriságok és a Q-Q plotok alapján is, ezért a grafikus módszerek alapján azt állíthatjuk, hogy az EEX és APX napi árak eloszlása GEV eloszlás.

A 2. táblázat mutatja az illesztett együtthatókat az EEX és APX napi árak esetén. Mivel a  $k$  értéke mindkét esetben pozitív, ezért Fréchet eloszlást kaptunk mindkét esetben. Az EEX esetén az ár eloszlása  $1/0,124 = 8,06$ -os hatványkitevővel, az APX esetén  $1/0,266 = 3,76$ -os hatványkitevővel esik az eloszlás szélénél.

Paraméter	Becslés (EEX)	Becslés (APX)
$k$	0,124 (0,0132)	0,266 (0,0277)
$\mu$	586,8 (5,729)	584,9 (10,838)
$\sigma$	258,4 (4,325)	261,8 (8,885)

2. táblázat: A GEV becslés illeszkedése az EEX és APX napi árak esetén  
Zárójelben a sztenderd hibák szerepelnek.

A 3. táblázatban az illeszkedésvizsgálat eredményeit mutatom be. A tesztstatisztikák értékei és a p-értékek alapján azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a szokásos szignifikancia-szinteken nem utasítható el az a hipotézis, miszerint az EEX és APX árak GEV eloszlást követnek a korábban ismertetett becslt paraméterekkel. Összevetésképpen megadtam a lognormális eloszlás esetén is a tesztstatisztikákat és a p-értékeket. Látható, hogy elutasítható az a hipotézis, hogy az árak lognormális eloszlást követnek, hiszen a p-értékek kisebbek 0,05-nél. A GEV és a lognormális eloszlás esetén a tesztelést ugyanazzal az osztályközös bontással végeztem.

	GEV eloszlás		Lognormális eloszlás	
	Khi-négyzet statisztika	p-érték	Khi-négyzet statisztika	p-érték
APX	39,63	0,112	96,43	0,000
EEX	141,87	0,075	154,75	0,015

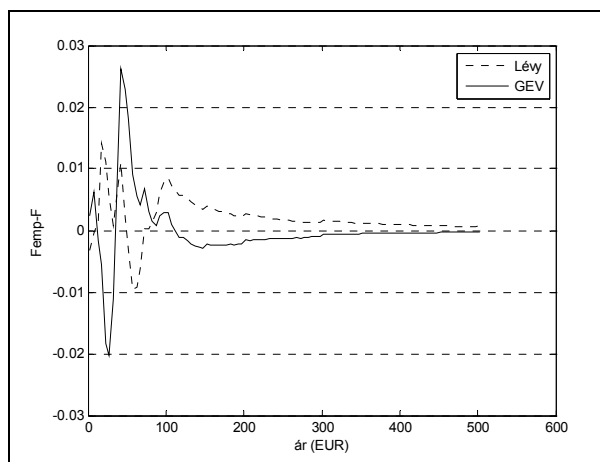
3. táblázat: Illeszkedésvizsgálat az APX és EEX esetén: GEV és lognormális eloszlás

A Kolmogorov-Smirnov statisztikát használtuk fel Szenes Márkkal végzett elemzésünk (Marossy és Szenes [2008]) során az EEX adatok esetén arra, hogy megnézzük, a Lévy vagy a GEV eloszlás illeszkedik-e jobban az adatokra. Az adatokra illesztettünk GEV és Lévy eloszlást (ez

utóbbi paraméterkorlátozás mellett, hogy biztosítsuk az árak pozitivitását). Felírtuk az elméleti és empirikus eloszlásfüggvényeket, majd kiszámítottuk a

$$D(x_i) = F_{emp}(x_i) - F(x_i)$$

különbségeket a valószínűségi változó (az ár) adott  $x_i$  értékei mellett. A KS statisztika a  $D(x_i)$  értékek abszolút értékének maximuma. Ez a Lévy esetén 0,0141, míg a GEV esetén 0,0262. Mivel a  $D$  távolság a Lévy esetében kisebb, ez alapján azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a Lévy jobban illeszkedik az adatokhoz, mint a GEV. Ha azonban a  $D(x_i)$  abszolút értékeinek nem a maximumát, hanem az átlagát vesszük, akkor ez a Lévy esetén  $8.07 \cdot 10^{-4}$ , a GEV esetén  $7.18 \cdot 10^{-4}$ . Ez azt jelenti, hogy bár a KS statisztika alapján azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a Lévy eloszlás jobban illeszkedik az EEX árakra, hiszen az eloszlásfüggvény a Lévy esetén jobban követi az empirikus kumulált relatív gyakoriságokat, de a GEV eloszlás átlagosan kevesebbet téved. Ha a hiba (az eloszlásfüggvények eltérése) legnagyobb értékét nézzük, akkor a Lévy teljesít jobban, ha az átlagos hibát tekintjük, akkor a GEV eloszlást preferálhatjuk. Érdeemes tehát megvizsgálni a hibák alakulását.



6. ábra: Az empirikus és illesztett eloszlásfüggvény különbsége a GEV és a Lévy esetén  
*Vízszintes tengely: ár. Függőleges tengely: az eloszlásfüggvények  $D(x_i)$  különbsége.*

A 6. ábra mutatja be a  $D(x_i)$  távolságokat a Lévy és a GEV esetén. Az ábráról ténylegesen leolvasható, hogy a GEV nagy hibát vét az eloszlás közepén, de az eloszlás jobb szélén (az ár nagy értékeinél) a GEV kisebb hibákat produkál (közelebb van a 0-hoz). Az eloszlásnak ez az a területe, amely a kockázat szempontjából a legfontosabb. Az eloszlás szélét a GEV, az eloszlás közepét a Lévy közelíti jobban.

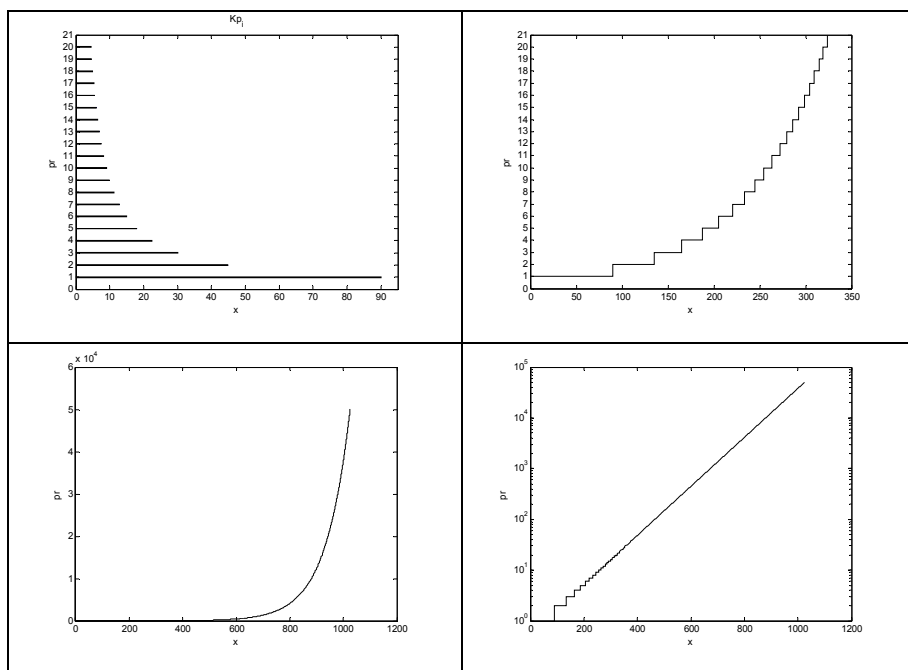
A GEV eloszlások a centrált és normált maximumok határeloszlásai a Fisher-Tippett tétel szerint. Később megmutatom, hogy a villamosenergia-árak előállnak maximumként. Szimulációs

módszerrel megmutatható, hogy a határeloszláshoz (GEV eloszláshoz) történő konvergencia gyorsabb az eloszlás felső szélé esetén. Emiatt a 6. ábra a Fisher-Tippett tétel jelenléte melletti érv lehet.

Az eloszlás Fréchet jellegének elfogadása beleillik az árak viselkedéséről alkotott képbe: az árak eloszlása hatványszerűen esik a Fréchet esetében és a valóságban is. A Fréchet eloszlás rugalmasságát az illesztés során az adja, hogy bármekkora hatványkitevő előállhat, míg a Lévy eloszlás csak 2-es hatványkitevőig működhet. Az eloszlás lecsengése, momentumainak létezése szempontjából tehát elfogadható a Fréchet eloszlás mint az árak viselkedését leíró eloszlás.

**5a. tézis:** A khi-négyzet illeszkedési teszt nem utasítja el, hogy a spot villamosenergia-árak Fréchet eloszlást követnek. A Fréchet eloszlás az adatok eloszlását az eloszlás szélénél jobban közelíti, mint a Lévy eloszlás.

A korábban bemutatott kapacitásbővítési modellből látható, hogy a piaci ár eloszlása GEV, és ha feltételezzük kapacitás-bővítési valószínűségek hatványszerű csökkenését, akkor az ár eloszlása Fréchet.



7. ábra: A várható aggregált kínálati görbe hatványszerű eloszlás esetén

*Bal felső ábra:* várható kínálatok,  $K=100$ ,  $\text{konst}=0,9$ ,  $\alpha=1$ . *Jobb felső ábra:* várható aggregált kínálati görbe. *Bal alsó ábra:* várható aggregált kínálat 50000 vállalatra. *Jobb alsó ábra:* a várható aggregált kínálat log skálán

Mennyire életszerű a „jelentősen csökkenő” bővítési valószínűségek feltételezése? Ehhez nézzük meg az erőművek kínálatát. Ha az  $i$ . erőmű bővítési valószínűsége  $p_i$ , és a kereslet teljes

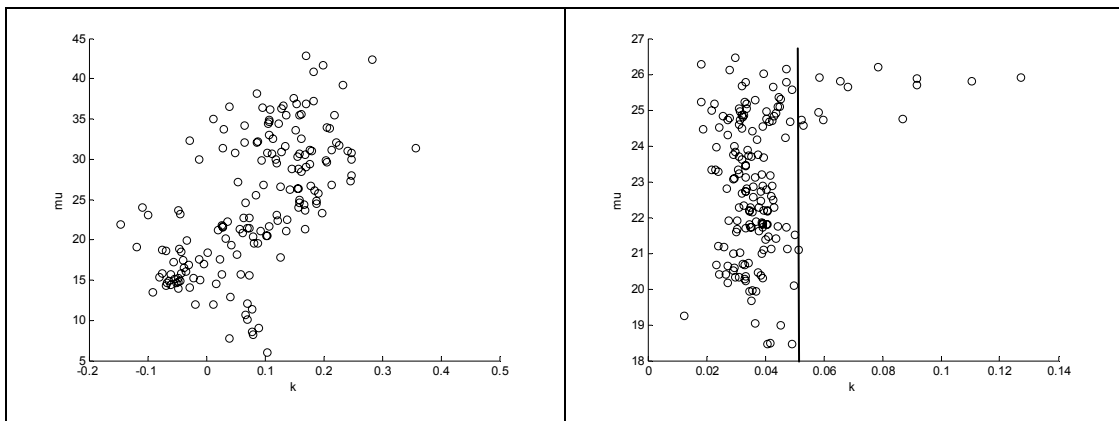
nagysága  $K$ , akkor az erőmű várható ajánlata  $x_i = Kp_i$ . Ha ezt az erőmű kínálatának tekintjük az  $i$  árhoz, akkor ebből várható kínálati görbét konstruálva azt kapjuk, hogy az ár a mennyiség exponenciális függvénye, ha pl. a  $p_i$  valószínűségek  $0,9^i$  képlet szerint hatványszerűen esnek (l. 7. ábra). A piaci ár tehát Fréchet eloszlású lesz a modell szerint, ha a piaci kínálati görbén az ár a mennyiség exponenciális függvénye. A valóságban ténylegesen ez az exponenciális viselkedés tapasztalható (Bunn [2004]). Így azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a kapacitás-bővítési valószínűségek „jelentős csökkenése” és a Fréchet eloszlás az exponenciális piaci kínálati görbével van összhangban. Természetesen a piaci kínálati görbe nem tökéletesen exponenciális, de az exponenciálishoz közeli piaci kínálati görbe hatványszerű nyeresi valószínűségeket és „jelentősen csökkenő” kapacitás-bővítési valószínűségeket jelent, mivel a piaci kínálati görbe és így a kapacitás-bővítési valószínűségek kismértékű módosítása továbbra is „jelentősen csökkenő” bővítési valószínűséget és Fréchet eloszlást eredményez.

**5b. tézis:** Egy kapacitás-bővítési modellben megmutattam, hogy a Fréchet eloszlás illeszkedésének oka, hogy a villamosenergia-piacon a piaci kínálati görbe exponenciális. A levezetés az extrémérték-elméletből, speciálisan a Fisher-Tippett tételből adódik. A modell kulcsfeltétele, hogy a villamosenergia-kereslet rögzített, és a keresleti egységeket egyesével hirdetik meg az erőművek számára.

## **6. hipotézis**

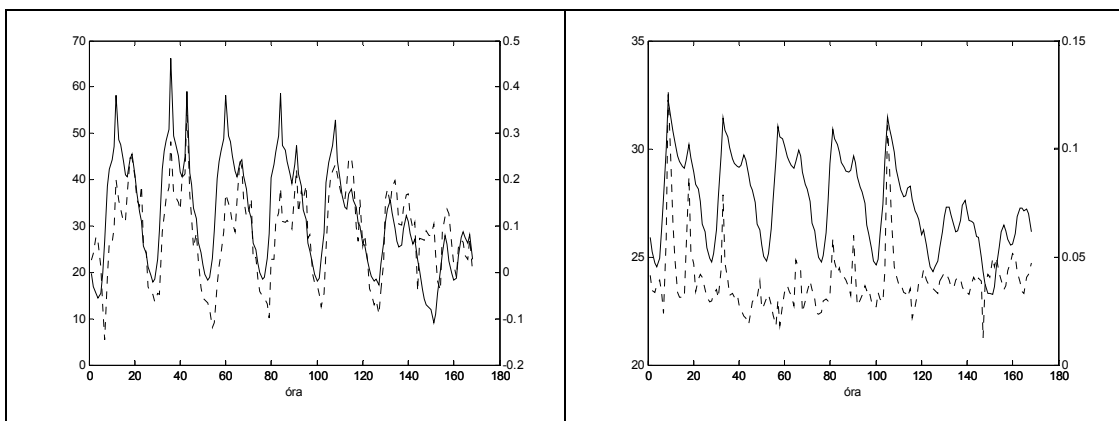
**(A villamos energia ára rezsimváltó modellt követ, és a rezsimok determinisztikusan követik egymást.)**

A 168 darab eloszlásra illesztett GEV helyzet- és alakparamétereinek összefüggése a 8. ábrán látható. Az ábráról leolvashatjuk, hogy pozitív kapcsolat van az eloszlás alakparamétere és helyzete között: minél magasabb az átlagos ár, annál lassabb az eloszlás lecsengése, azaz magas átlagos értékhez magas kockázat tartozik. Ezek alapján a Nord Pool esetén két rezsimet különböztethetünk meg. A függőleges vonaltól balra lévő eloszlások alakparamétere kicsi, a kockázat alacsony. A függőleges vonaltól jobbra található eloszlások magas kockázattal és magas várható értékkel jellemezhetőek: ezek a kockázatos eloszlások. Attól függően, hogy a hét mely órájában vagyunk, az ár váltakozva található az egyes eloszlásokon. Néha a kockázatos, néha a kevésbé kockázatos tartományban vagyunk. Olyan, mintha két rezsim között ugrálna az ár. A rezsimváltás azonban determinisztikus, mivel attól függ, hol vagyunk időben.



8. ábra: A becsült GEV eloszlások  $\mu$  lokációs és  $k$  alakparamétere a (baloldali) EEX és (jobboldali) Nord Pool esetén

Ugyanezt jelzi a 9. ábra is, ahol az óra átlagár és alakparaméterét adtam meg a hét órájának függvényében. A magas átlag és magas ár jellemzően a magas keresletű órában jelenik meg. Ahogy az az előző két ábrán is látható, a kereslet növekedése vélhetően először az ár várható értékét emeli, majd ha elér egy küszöböt, akkor az átlag helyett az eloszlás kockázatát növeli.



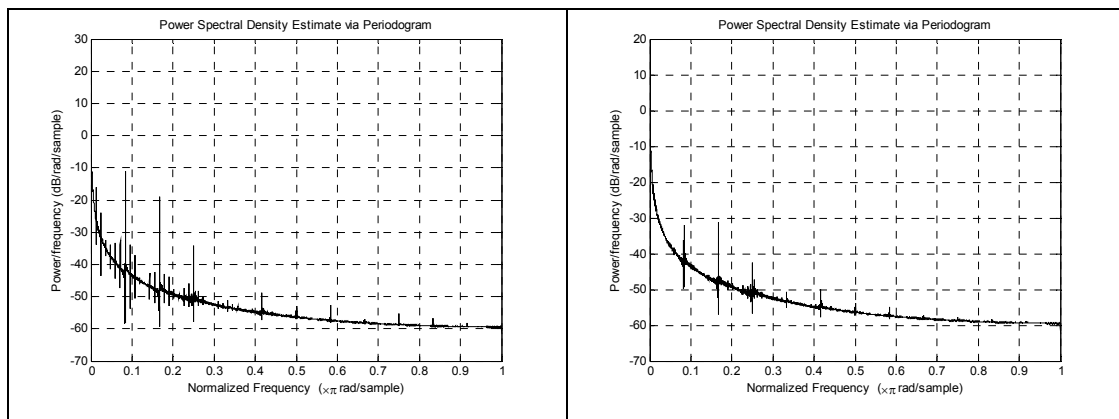
9. ábra: Rezsinváltás az EEX (bal oldal) és Nord Pool (jobb oldal) esetén  
Függőleges tengelyek: *bal*: az óra átlagára; *jobb*:  $k$  alakparaméter (szaggatott vonal).

**6. tézis:** A hét különböző óráiban más-más paraméterű GEV eloszlás a villamosenergia-árak eloszlása. Néhány, magasabb várható értékű óra esetén a hatványszerű lecsengés lassabb, így nagyobb a magas árak kockázata. Mivel az eloszlások determinisztikusan váltják egymást, ezért a jelenséget determinisztikus rezsinváltásnak neveztem el.

## 7. hipotézis

(A héten belüli szezonális kiszűrhető az eloszlások jellegének megváltoztatásával.)

Az EEX adatokon a szűrő működését a szűrés előtti és utáni periodogrammal szemléltetem a 10. ábrán. Látható, hogy a héten belüli periodicitást jelző tüskék a periodogramról eltűntek, azaz a héten belüli szezonális sikeres volt. A 168 órához (és annak többszöröseihez) tartozó tüskék megmaradtak. Ezek nem héten belüli szezonális jeleket jeleznek, így ezek kiszűrése nem volt célom.



10. ábra: Az EEX periodogramja a szűrés előtt (bal) és a szűrés után (jobb)

**7a. tézis:** A héten belüli szezonális kiszűrhető az eloszlások jellegének megváltoztatásával: a hét minden órájához definiálunk egy transzformációt, amely a Fréchet és a lognormális eloszlás eloszlásfüggvényén alapszik. (GEV-szűrő)

Mivel a transzformáció a GEV (Fréchet) eloszlások vastag széleiből exponenciálisan lecsengő szélű eloszlást állít elő, ezért a vastag szélek jelensége a szűrés után megszűnik. Mivel valamennyi eloszlást ugyanabba a (lognormális) eloszlásba vittünk át, ezért a különböző eloszlások miatti determinisztikus rezsinváltás eltűnik. Mindezek mellett a GEV szűrő az ártüskék és a szezonális hatását egyszerre szűri ki, ezzel megoldja a két szűrési eljárás összefüggésének a problémáját.

**7b. tézis:** A GEV-szűrő segítségével a kiugró értékek és a determinisztikus rezsinváltás szűrése is megtörténik.

Megvizsgáltam a GEV szűrés hatását az idősor becsült Hurst exponensére. A 4. táblázat tartalmazza a becslés eredményeit az EEX és a Nord Pool esetén. A következtetést a 7c. tézis fogalmazza meg.

	EEX		Nord Pool	
	Ár	Szűrt ár	Ár	Szűrt ár
R/S	0,88 (0,0929)	0,78 (0,0350)	0,87 (0,0399)	0,93 (0,0465)
Aggregated Variance	0,86 (0,0167)	0,86 (0,0258)	0,99 (0,0244)	0,99 (0,0365)
Differenced Variance	0,79 (0,0505)	0,85 (0,1341)	0,98 (0,2064)	1,02 (0,1902)
Periodogram regresszió	0,83 (0,0037)	0,89 (0,0079)	1,21 (0,0037)	1,08 (0,0062)
AWC	0,85 (0,0874)	0,93 (0,0587)	0,93 (0,0480)	0,98 (0,0601)
h(2)	0,84	0,90	1,15	1,18
h <sub>mod</sub> (2)	0,83	0,90	1,14	1,19

4. táblázat: Az eredeti és GEV-szűrt árak H mutatói  
Zárójelben a sztenderd hibák szerepelnek.

**7c. tézis:** A GEV-szűrési eljárás nem változtatja meg szignifikánsan a becsült Hurst mutató értékét.

Nem triviális, hogy milyen eszközökkel lehet leírni a GEV-szűrt árak viselkedését. A GEV-szűrő ugyanis komplex transzformáció, amely a lineáris korrelációt nem tartja. Bár az eredeti és szűrt árak közötti átjárás nem triviális, mégis lehet összefüggéseket találni az eredeti és a szűrt árak között. A 7c. tézisben láttuk, hogy az autokorrelációs struktúra hosszú távú lefutása nem változik a GEV-szűréssel, ezért a szűrt árak nem igényelnek lényegében más tulajdonságú idősoros modelleket, mint az eredeti árak. Szerencsére az idősor komplexitását (pl. kiugró értékek hatása, szezonális) sikerült csökkentenünk a GEV-szűrés alkalmazásával.

Az autokorrelációk mellett más kérdés is fellép a determinisztikus rezsimműtő modellel és a GEV szűréssel kapcsolatban. A modell feltételezi, hogy az eloszlása más-más az egyes órák esetén, de az eloszlás ugyanaz egy, két, stb. hét múlva a hét azonos órájában. Ez a feltevés nyilvánvalóan nem tartható, hiszen az árakban trend figyelhető meg. A GEV-szűrés előtt ezért célszerű a trend eltávolítása az adatokból. A 7. hipotézis empirikus elemzése során én az árakban található exponenciális trendet szűrtem ki az eloszlás-transzformáció előtt. A modellezőnek kell mérlegelnie, milyen trendet szűr ki az idősorból (pl. a villamosenergia-termelés input árainak szisztematikus változásának hatását). A GEV-szűrés a trend kiszűrése után alkalmazható.

A komplex villamosenergia-ár idősor modellezése során ezért célszerű először eltávolítani a trendet (és a ciklikus komponenseket) az adatokból, ezután GEV-szűréssel transzformálni az adatokat, majd a kapott idősorra megfelelő modellt keresni. Az általam ajánlott modellezési keret az alábbi:

$$Y = T + C + f_s(E)$$



ahol Y az adatsort, T a trendet, C a ciklikus komponenst, S a szezonalitást és E a véletlen hatásokat jelöli.

### **Empirikus modell**

A disszertáció eredményeit Ujfalusi [2008] alkalmazza. A szerző ARMA-GARCH modellt illesztett a GEV-szűrt és a hosszú távú memóriától megtisztított árakra, és a modellt megfelelőnek találta az árak leírására. Az eredményei alapján a hosszú távú memória szűrése és a GEV-szűrő eredményesen használható a modellezés során. Azok a hatások, amelyeket a két szűrési eljárás nem távolít el, könnyen modellezhetők autoregresszív és GARCH tagokkal. A két szűrési eljárás nélkül az áramár folyamata sokkal összetettebb, bonyolultabb és átláthatatlanabb lenne.

## Következtetések

Az eredmények fényében érdemes újra **átgondolni a spot villamosenergia-árak stilizált tényeit**. A zárójelekben szereplő számok a tézisek sorszámára utalnak.

1. Az adatsorban kiugró értékek (*price spikes*) találhatóak.

Az időnként magas villamosenergia-árak szerves részei az idősoroknak. Ezek azonban nem hirtelen megjelenő kilógó értékek, hanem a villamos energia árának vastag szélű eloszlásából adódó magas realizációk (4). Egyes időszakokban a magas értékek valószínűsége növekszik, de a magas értékek nagyobb valószínűségét az okozza, hogy a hétnek egy kockázatosabb órájában vagyunk, ennél fogva determinisztikus jellegű a magasabb kockázat (6). Természetesen nem állíthatjuk, hogy adott órában kiugró értékkel lesz dolgunk, de azt igen, hogy a bekövetkezés valószínűsége nagyobb. A kiugró értékeket keresleti-kínálati sokkokkal magyarázó elméletek természetesen nem dőltek meg, hiszen a GEV eloszlás változó paramétereinek oka a kereslet változásában és a kínálat struktúrájában keresendő.

2. Magas az autokorreláció az idősorban.

A dolgozat eredményei alapján a lassan lecsengő autokorrelációs struktúra egyik oka az árfolyamat hosszú távú memóriája (1a). Az autokorreláció periodikus jellegének okozója a szezonális, amelynek nagy részét GEV szűrővel el lehet távolítani (7).

3. A volatilitás időben változik, az idősor heteroszkedasztikus (*heteroscedasticity*).

A heteroszkedasztikus jelleg részbeni oka, hogy a különböző órák eloszlásainak szórása nem azonos, hiszen más-más paraméterű GEV eloszlásból származnak a hét különböző óráinak árai (6). A különböző paraméterű GEV eloszlás nem magyarázza meg teljes mértékben a heteroszkedaszticitást, hiszen láttuk, hogy az említett hatást eltávolító GEV szűrő alkalmazása után is szignifikáns GARCH modellt lehet a szűrt adatsorra illeszteni.

4. Az adatsor szezonális vonásokat mutat (*seasonality*).

A szezonális okozója a GEV eloszlások determinisztikusan változása, váltakozása (6). A GEV eloszlások leírják a volatilitás megfigyelt szezonális jellegét is. A szezonalitást a különböző eloszlások létének figyelembe vételével ki lehet szűrni, ha az eloszlásokat ugyanabba az eloszlásba transzformáljuk (7). Az általam kidolgozott GEV szűrő a lognormális eloszlásba transzformálja az adatokat.

5. Az árak, hozamok eloszlása vastag szélű (*fat tails*).

Az árak eloszlása szignifikánsan GEV, azon belül Fréchet eloszlás (5a). A vastag széleket a Fréchet eloszlás hatványszerű lecsengése jelzi. Egy kapacitás-bővítési modell keretein belül azt találtam, hogy a Fréchet eloszlás, ezen belül a vastag szélek oka az, hogy a másnapi villamosenergia-tőzsdén a piaci kínálati görbén az ár a mennyiség exponenciális függvénye (5b). Másképpen fogalmazva: a vastag szélek oka, hogy az alacsony határkölségű erőművek átlagosan magasabb valószínűséggel tudják kibővíteni a kapacitásukat.

6. Egyes szerzők szerint a villamos energia ár antiperzisztens, egy-egy kiugró értéket követően visszatér az átlaghoz (átlaghoz való visszahúzás, *mean reversion*), míg mások szerint az ár időSORA hosszú távú memóriával rendelkezik (*long memory*). A vizsgálatok szerint a villamos energia ára multifraktál folyamatot követ (*multifractality*).

A vizsgálataim azt mutatják, hogy a villamos energia ára perzisztens folyamatot követ 0,8 és 1 közötti Hurst exponenssel (1a). A más-más vizsgált változó az oka, hogy a szakirodalom nem egységes a perzisztencia tekintetében (1a). Ha nem az árat, hanem a loghozamot vizsgáljuk, akkor reprodukálhatóak a szakirodalom egyes eredményei, de véleményem szerint nem érdemes a loghozam Hurst exponensét vizsgálni, mert a loghozam folyamata nem mutat stabil önaffin jelleget (1b). Éppen ezért (egyéb ok hiányában) nem célszerű a loghozam használata az ár ellenében (2).

7. Nincs konszenzus a szakirodalomban azzal kapcsolatban, vajon található-e egységgyök az ár időSORÁBAN, azaz integrált-e a folyamat.

Formális egységgyök vizsgálatnál a dolgozatban nem foglalkoztam. A Hurst exponenssel foglalkozó eredményeim (1) azonban meggyőztek arról, hogy célszerű a loghozam helyett az árat vizsgálni a modellezés során, hiszen az ár jobban kezelhető matematikai tulajdonságokkal rendelkezik, a hozamnak nincs közvetlenül értelmezhető tartalma, illetve nincs ökonometriai jellegű kényszerünk sem: nincs arra egyértelmű bizonyíték, hogy az ár egységgyök folyamatot követne (2).

A dolgozat legfontosabb eredménye annak bemutatása, hogy a kereskedés mechanizmusa minden egyes órában ugyanazt az áreloszlást (az általánosított extrémérték-eloszlást) hozza létre, melyben a kiugróan magas árak az eloszlás vastag széleként jelennek meg. A villamosenergia-kereslet (és -kínálat) jellegzetes ciklikussága azt eredményezi, hogy az eloszlások periodikusan változtatják egymást. Ennek a megfigyelésnek a segítségével a szezonális kiszűrhető az adatsorból. A kiugró értékek (vastag eloszlásszélek) és a heteroszkedaszticitás egy része a szezonális szűréssel (az óránként különböző eloszlások megváltoztatásával) szintén eltávolítható.

Az általam felépített villamosenergiaár-modellben a (hosszú távú memóriával rendelkező) véletlen hatásokra rátevéődik egy szezonális, amely megváltoztatja a hét óráinak eloszlását, végül ezekhez hozzáadódik egy trend, illetve ciklikus komponens. A modellezési eljárás nem bonyolultabb, mint additív szezonális esetén. Az általam felépített modellel azt nyertük, hogy a szezonális hatások után fennmaradó véletlen komponens könnyebben modellezhető.

A disszertáció-tervezet eredményeinek gyakorlati alkalmazását az alábbi területeken tartom elképzelhetőnek:

- A Hurst exponenssel kapcsolatos félreértések tisztázása megkönnyíti a modellválasztást (hosszú távú memória, monofraktál jelleg).
- A loghozam hátrányos tulajdonságaira felhívtam a figyelmet, így a jövőben a modellezők körültekintőbben tudnak eljárni.
- A kutatás rávilágított, hogy a kiugró árakat az eloszlás széleként, nem pedig különálló rezsimeként vagy ugrásként kell beépíteni a modellekbe.
- A villamosenergia-ár (az adott órának megfelelő) feltételes eloszlásának ismeretében egyszerűen lehetővé válik a közép és hosszú távú árelőrejelzés.
- A szűrési eljárás megkönnyíti a rövid távú árelőrejelzést.
- A piaci kínálati görbe elemzésével képet kaphatunk a villamosenergia-ár adott időszakos feltételes eloszlásáról.
- A determinisztikusan változó paraméterű GEV eloszlások modellje alkalmas a kiugró árak, a szezonális és a változó volatilitás leírására a modellezés során.

További lehetséges kutatási kérdések, melyek a dolgozat készítése során felmerültek bennem, de megválaszolásuk már nem fért a dolgozat keretei közé:

- Formális elméleti keretek felépítése a kiugró árak kockázatának előrejelzésére (*early warning system*).
- ARFIMA-GARCH modell illesztése, és annak megvizsgálása, hogy az illesztett modell mekkora hibát ad az ár előrejelzése során.
- A determinisztikus rezsimeváltó modellben a becsült GEV eloszlások szórásának és az alakparaméterének kapcsolata.
- A GEV szűrés hatékonyságának összehasonlítása a többi szezonális szűrési eljárással a gyakorlatban.

A felépített vizsgálati keretek között ezek a kérdések egyszerűen vizsgálhatók.

## Főbb hivatkozások

- De Jong, Cyriel [2006]: The Nature of Power Spikes: A Regime-Switch Approach. *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*. Vol 10 (3).
- Embrechts, Paul – Klüppelberg, Claudia – Mikosch, Thomas [2003]: Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Corrected Fourth Printing. Springer. Heidelberg, Germany.
- Erzgräber, Hartmut – Strozzi, Fernanda – Zaldívar, José-Manuel – Touchette, Hugo – Gutiérrez, Eugénio – Arrowsmith, David K. [2008]: Time series analysis and long range correlations of Nordic spot electricity market data. *Physica A*. Vol 387 (26), pp. 6567-6574.
- Eydeland, Alexander – Wolyniec, Krzysztof [2003]: Energy and Power Risk Management. New Developments in Modeling, Pricing, and Hedging. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, U.S.A.
- Geman, Hélyette – Roncoroni, Andrea [2006]: Understanding the Fine Structure of Electricity Prices. *Journal of Business*. Vol 79 (3), pp. 1225-1261.
- Haldrup, Niels – Nielsen, Morten Ørregaard [2006]: A regime switching long memory model for electricity prices. *Journal of Econometrics*. Vol 135, pp. 349-376.
- Jiang, Zhi-Qiang – Zhou, Wei-Xing [2007]: Multifractality in stock indexes: Fact or fiction? *Physica A*. Vol 387, pp. 3605-3614.
- Kantelhardt, Jan W. – Zschienger, Stephan A. – Koscielny-Bunde, Eva – Havlin, Shlomo – Bunde, Armin – Stanley, H. Eugene [2002]: Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A*. Vol 316, pp. 87-114.
- McNeil, Alexander J. – Frey, Rüdiger – Embrechts, Paul [2005]: Quantitative Risk Management. Concepts, Techniques and Tools. Princeton University Press. Princeton Series in Finance. Princeton, U.S.A.
- Misiorek, A. – Trück, S. – Weron, R. [2006]: Point and Interval Forecasting of Spot Electricity Prices: Linear vs Non-Linear Time Series Models. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*. Vol 10 (3), Article 2.
- Montanari, Alberto – Rosso, Renzo – Taqqu, Murad S. [1997]: Fractionally differenced ARIMA models applied to hydrologic time series: Identification, estimation, and simulation. *Water Resources Research*. Vol 33 (5), pp. 1035-1044.
- Norouzzadeh, P. – Dullaert, W. – Rahmani, B. [2007]: Anti-correlation and multifractal features of Spain electricity spot market. *Physica A*. Vol 380, pp. 333-342.
- Serletis, Apostolos – Andreadis, Ioannis [2004]: Nonlinear Time Series Analysis of Alberta's Deregulated Electricity Market. In: Bunn, Derew W. (ed.): Modelling prices in competitive electricity markets. John Wiley & Sons. Wiley Finance Series. Chichester, England.

- Simonsen, Ingve [2003]: Measuring Anti-Correlations in the Nordic Electricity Spot Market by Wavelets. *Physica A*. Vol 322, pp. 597-606.
- Simonsen, Ingve – Weron, Rafal – Mo, Birger [2004]: Structure and stylized facts of a deregulated power market. *Working paper*. 1st Bonzenfreies Colloquium on Market Dynamics and Quantitative Economics.
- Trück, Stefan – Weron, Rafal – Wolff, Rodney [2007]: Outlier Treatment and Robust Approaches for Modeling Electricity Spot Prices. *Working paper*. Munich Personal RePEc Archive 4711.
- Ujfalusi Dóra [2008]: Kockázatos érték és extrémérték-elmélet a villamosenergia-piacon. *Szakdolgozat*. Budapesti Corvinus Egyetem.
- Weron, Rafal [2000]: Energy price risk management. *Physica A*. Vol 285, pp. 127-134.
- Weron, Rafal [2006]: Modeling and forecasting electricity loads and prices. A Statistical Approach. John Wiley & Sons. Wiley Finance Series. Chichester, England.
- Weron, Rafal [2008a]: Heavy-tails and regime-switching in electricity prices. *Mathematical Methods of Operations Research*. Forthcoming.
- Weron, Rafal [2008b]: Market price of risk implied by Asian-style electricity options. *Energy Economics*. Vol 30 (3), pp. 1098-1115.
- Weron, Rafal – Przybyłowitz, Beata [2000]: Hurst analysis of electricity price dynamics. *Physica A*. Vol 283, pp. 462-468.

A hivatkozások teljes listája az értekezésben található.

## A témakörrel kapcsolatos saját publikációk

(Szerzői nevek: Marossy Zita, Petrimán Zita)

- Marossy Zita [2010]: Multifractality testing of Markov regime switching models in spot electricity price modelling. *'Spring Wind' Conference 2010 kiadvány*. 315-320. o.
- Marossy Zita [2010]: Hurst exponent of deseasonalized spot electricity prices. *XXIV. microCAD Nemzetközi Tudományos Konferencia kiadvány*. Energiagazdálkodás szekció, 27-32. o.
- Marossy Zita [2009]: The behaviour of day-ahead electricity prices. MANMADE Workshop on Deregulated European Energy Market. Budapest, 2009. szeptember 24-25.
- Marossy Zita [2008]: A spot villamosenergia-árak szezonális szűrése. *Tavaszi Szél Konferencia 2008 kiadvány*. 211-219. o.
- Marossy Zita [2008]: Seasonality filtering of spot electricity prices using GEV distributions. Computers and Algorithms in Mathematical Economics and Finance Conference. Budapest, 2008. január 29-február 1.
- Marossy Zita – Szenes Márk [2008]: Analysis of day-ahead electricity data. MANMADE workshop. Budapest, 2008. január 21-22.
- Marossy Zita [2007]: A villamosenergia-árak modellezése extrémérték-elmélet alapján. A Közgazdasági Doktori Iskola III. Éves Konferenciája. Budapest, 2007. december 14.
- Marossy Zita [2007]: Modeling electricity prices using extreme value theory. Tanszéki konferencia. Szervező: BCE Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék, illetve Universität Passau Lehrstuhl für Finanzierung. Budapest, 2007. december 7.
- Marossy Zita [2007]: EVT in electricity price modeling: extreme value theory not only on the extreme events. *EuroPES 2007 Konferencia kiadvány*. Palma de Mallorca. 319-323. o.
- Marossy Zita [2007]: A villamosenergia-árak modellezése. *Tavaszi Szél Konferencia 2007 kiadvány, társadalomtudományok*. 336-341. o.
- Marossy Zita [2006]: Villamosenergia-piacok modellezése. A Közgazdasági Doktori Iskola II. Éves Konferenciája. Budapest, 2006. november 24.
- Petrimán Zita [2005]: A villamosenergia-árak modellezése: itt az idősor, hol az idősor. *Tavaszi Szél Konferencia 2005 kiadvány*. 324-327. o.
- Petrimán Zita – Tulassay Zsolt [2005]: Bepillantás az ARCH modellek világába. *Hitelintézeti Szemle*. 4. évf. 2. szám, 74-79. o.