

PALÁGYI ZOLTÁN

STABIL ELOSZLÁSOK ALKALMAZÁSA PÉNZÜGYI
IDŐSOROK MODELLEZÉSÉBEN

MATEMATIKA TANSZÉK

TÉMAVEZETŐ

DR. KŐRÖSI GÁBOR, MTA KÖZGAZDASÁGTUDOMÁNYI KUTATÓKÖZPONT

©Palágyi Zoltán, BKÁE.

A disszertáció csak a szerző, illetve az egyetem írásbeli engedélye alapján másolható vagy sokszorosítható, mind elektronikus mind hagyományos formában. A benne szereplő információk és adatok felhasználásához is szükség van a szerző, illetve az egyetem jóváhagyására.

BUDAPESTI KÖZGAZDASÁGTUDOMÁNYI ÉS ÁLLAMIGAZGATÁSI
EGYETEM

KÖZGAZDASÁGTANI PH.D. PROGRAM

STABIL ELOSZLÁSOK ALKALMAZÁSA PÉNZÜGYI
IDŐSOROK MODELLEZÉSÉBEN
PH.D. ÉRTEKEZÉS

PALÁGYI ZOLTÁN
BUDAPEST, 2002

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	12
2. A stabil eloszlások tulajdonságai	18
3. Kötésenkénti hozamok vizsgálata a Budapesti Értéktőzsdén	25
3.1. A vizsgált adatok és változók	25
3.2. Korreláció, memória	27
3.3. A kötésenkénti hozamok sűrűségfüggvénye	31
4. Percenkénti és árváltozásonkénti hozamok modellezése	38
4.1. Adatok, változók, vizsgálati módszerek	38
4.2. Az árváltozásonkénti hozamok eloszlása	39
4.3. A percenkénti hozamok eloszlása	51
4.4. Kockáztatott érték számítás napon belüli hozamokból	56
4.4.1. A kockáztatott érték fogalma	56
4.4.2. Adott kockáztatott érték eléréséhez szükséges várakozási idők vizsgálata	57
5. A hozamok idősorának leírása stabil GARCH modellekkel	63
5.1. Előzmények	63
5.2. A stabil hatvány <i>GARCH</i> modell	67
5.2.1. A modell leírása	67
5.2.2. A függetlenség vizsgálata, identifikáció	69
5.2.3. Becslés, eredmények	72
5.2.4. Illeszkedés vizsgálat	80
6. Összefoglalás	85

Ábrák jegyzéke

1. Szimmetrikus stabil eloszlások sűrűségfüggvényeinek grafikonjai. A skálaparaméter (σ) értéke 1. A farokrészekben a legalsó görbe a normális, fölötte csökkenő α szerint ($\alpha = 1, 8; 1, 5; 1, 2$) jönnek sorban a Lévy görbék. A metszéspontokban a sorrend megfordul. 23
2. Szimmetrikus stabil eloszlások sűrűségfüggvényeinek grafikonjai. A függőleges tengelyen tizes alapú logaritmus skálát használunk. Az eloszlások skálaparaméterének (σ) értéke 1. A farokrészekben a legalsó görbe a normális (lefelé forduló parabola), fölötte csökkenő α szerint ($\alpha = 1, 8; 1, 5; 1, 2$) jönnek sorban a Lévy görbék. 24
3. A napi tranzakciók számának idősora (MOL). 26
4. A kötésenkénti hozamok (h), valamint abszolút értékük (a) és négyzetük (n) autokorrelációs függvénye (MOL, 1998. második negyedév). 28
5. A μ paraméter becslése a $\sigma(T) \sim T^\mu$ relációból (MOL, 1998. második negyedév). $\sigma(T)$ a T másodpercenként mért hozamok szórása. A függőleges tengelyen $\log_{10} \sigma(T)$, a vízszintes tengelyen pedig $\log_{10} T$ szerepel. μ becsült értéke 0.46. 30
6. A függőleges tengelyen a $\sigma(T) \sim T^\mu$ relációból a μ paraméter becsült értékei láthatók negyedévenként. $\sigma(T)$ a T időközönként mért hozamok (MOL) szórása. Az időt kétféleképp mérjük: a kötések számával (tbt), és másodpercekben (fiz). Az első negyedév 1997 januárjával kezdődik. 31
7. Kötésenkénti hozamok ($\log P'$ - $\log P$) empirikus sűrűségfüggvénye (hisztogram), valamint az illesztett Lévy és normális (Gauss) eloszlások sűrűségfüggvényei. A függőleges tengelyen tizes alapú logaritmus skálát használtunk. A kiindulási adatsor: MOL összes kötés, 1998. második negyedév. Az origótól jobbra és balra a vízszintes tengelyen megjelöltük a minta szórásának tízszeresére lévő pontokat (10szigma). 33

8.	A stabilitás indexének (α) becslése az $f_n(0) = n^{-1/\alpha} f_1(0)$ relációból. A függőleges tengelyen $\log_{10} f_n(0)$, a vízszintes tengelyen $\log_2 n$. (MOL, 1998. második negyedév.)	35
9.	A stabilitás indexének (α) időfüggése negyedéves lépésközönként az OTP, MOL, TVK és MATÁV részvényekre.	37
10.	A szimmetrikus stabil eloszlás α és σ paramétereinek becslési hibája (%) a mintaelemek számának függvényében.	39
11.	A CISCO részvény nullától különböző kötésenkénti hozamainak (1998) hisztogramja, és a maximum likelihood módszerrel illesztett stabil eloszlás (Lévy) sűrűségfüggvénye. A függőleges tengelyen tizes alapú logaritmus skálát használtunk.	41
12.	A CISCO részvény n árváltozás után elért hozamaira (1998) illesztett stabil eloszlás α paramétere n függvényében.	42
13.	$\alpha = 1.8$ indexű szimulált stabil eloszlású minta (az elemszáma 200000) stabilitásának vizsgálata. A függőleges tengelyen a minta n -szeres konvolúcióiból maximum likelihood módszerrel becsült α paraméter értéke látható n függvényében.	43
14.	σ_n^α grafikonja n függvényében. Szimulált adatsor.	44
15.	σ_n^α grafikonja n függvényében (CISCO).	45
16.	A CISCO részvény n árváltozás után elért hozamaira (1998) illesztett stabil eloszlás α paramétere n függvényében. Fél napra átlagosan 2000 árváltozás jut.	46
17.	A MOL részvény n árváltozás után elért hozamaira (1998) illesztett stabil eloszlás α paramétere n függvényében. Fél napra átlagosan 160 árváltozás jut.	47
18.	A MOL részvény nullától különböző kötésenkénti hozamaira illesztett MA(1) modell innovációinak stabilitása.	49
19.	A MATÁV részvény (BÉT adatok) n árváltozás után elért hozamaira (1998) illesztett stabil eloszlás α paramétere n függvényében.	50

20.	A MATÁV részvény (NYSE adatok) n árváltozás után elért hozamaira (1998) illesztett stabil eloszlás α paramétere n függvényében.	51
21.	A CISCO részvény percenkénti hozamainak (1998) hisztogramja, a maximum likelihood módszerrel illesztett stabil eloszlás (Lévy) sűrűségfüggvénye, és a mintára illesztett normális eloszlás (Gauss) sűrűségfüggvénye. A függőleges tengelyen tizes alapú logaritmus skálát használtunk.	52
22.	A CISCO részvény n perces hozamaiból (1998) maximum likelihood módszerrel becsült stabil eloszlás α indexe n függvényében. 200 perc kb. fél napnak felel meg.	53
23.	A MOL részvény n perces hozamaiból (1998) maximum likelihood módszerrel becsült stabil eloszlás α indexe n függvényében. 50 perc kb. fél napnak felel meg.	54
24.	A MATÁV részvény n perces hozamaiból (BÉT, 1998) maximum likelihood módszerrel becsült stabil eloszlás α indexe n függvényében. 50 perc kb. fél napnak felel meg.	55
25.	Adott kockázatotott érték (vízszintes tengely, %) eléréséhez szükséges idő (függőleges tengely, perc). A "tbt" jel az árváltozások számából konvertált átlagos fizikai időt jelenti, a "fiz" pedig az eleve fizikai időskálán mért VaR-t.	59
26.	Adott kockázatotott érték (vízszintes tengely, %) eléréséhez szükséges idő (függőleges tengely, perc). A "tbt" jel az árváltozások számából konvertált fizikai időt jelenti, a "fiz" pedig az eleve fizikai időskálán mért VaR-t.	60
27.	Adott kockázatotott érték (vízszintes tengely, %) eléréséhez szükséges idő (függőleges tengely, perc). A "tbt" jel az árváltozások számából konvertált fizikai időt jelenti, a "fiz" pedig az eleve fizikai időskálán mért VaR-t.	61

28. Adott kockáztatott érték (vízszintes tengely, %) eléréséhez szükséges, az árváltozások számából konvertált idő (függőleges tengely, perc).	62
--	----

Táblázatok jegyzéke

1.	Lévy hatvány GARCH paraméterek becslése, CISCO	75
2.	Normális hatvány GARCH paraméterek becslése, CISCO	76
3.	Normális GARCH paraméterek becslése, CISCO	77
4.	Ljung-Box teszt statisztikák és kritikus értékek, CISCO	78
5.	A MOL részvény 15 perces hozamaiból becsült Lévy hatvány GARCH és normális GARCH modellek paraméterei, valamint a modellek maradéktagjaiból számított Ljung-Box teszt statisztikák és kritikus értékek.	79
6.	A Lévy hatvány <i>GARCH</i> modell maradéktagjainak stabilitása	83

Köszönöm Kőrösi Gábornak, Rosario N. Mantegna-nak és Medvegyev Péternek a kutatásban nyújtott segítségüket. Külön köszönöm Kőrösi Gábornak a témavezetői munkáját, valamint Hunyadi László és Varga József előopponenseimnek segítő észrevételeiket és tanácsaikat.

1. Bevezetés

A pénzügyi eszközök piacainak modellezése a közgazdaságtan fontos területévé vált, mert az utóbbi évtizedekben ezek a piacok olyan fejlődésen mentek keresztül, hogy mára a világ gazdaságának stabilitását és növekedését döntő mértékben tudják befolyásolni. A piacok fejlődését elsősorban az elektronikus kereskedelem elterjedése, a számítógépek kapacitásának bővülése és az információ áramlásának felgyorsulása segítették. Az internet terjedésével például egyre többen tudnak közvetlenül bekapcsolódni a kereskedésbe, így az néha egy hétköznapi értelemben vett elektronikus játékhoz hasonlít. Ennek a játéknak azonban komoly gazdasági kihatásai vannak.

A piacok modellezése lényegében két irányba halad. Az egyik játékelméleti modellekkel próbálja a piaci szereplők viselkedését leírni, és a kereskedési mechanizmusok hatását vizsgálja az árak folyamatára (ld. pl. Amihud, Mendelson [1987]). A másik a „generáló folyamatot” figyelmen kívül hagyva, pusztán az adatsorokat próbálja sztochasztikus folyamatokkal modellezni. Mindkét esetben az a cél, hogy a megfigyelt idősorokhoz hasonló statisztikai tulajdonságú idősorokat tudjunk a modellel szimulálni és előrejelezni.

A tranzakciók elektronikus rögzítése következtében hatalmas adatbázisok állnak rendelkezésre, amelyek a különböző piacokon lezajlott összes tranzakciót tartalmazzák. Ezek száma részben azért nagy, mert sok eszközzel kereskednek, részben pedig azért, mert likvid eszközökre nem ritkák az egymást másodpercenként, vagy még rövidebb időközönként követő tranzakciók. A tranzakciónként rögzített adatok a következők: dátum, idő (általában másodperc pontossággal), az eszköz neve, a kötési ár és a kötés mennyisége. A tranzakciónkénti adatok (nagy frekvenciás) idősorának elemzése az adatsor természete miatt új problémákat vet fel (Campbell, Lo, MacKinlay [1997], Goodhart, O’Hara [1997], Engle [2000]). Általában persze a modellel megválaszolható kérdés dönti el, hogy az adatbázist milyen mélységig elemezzük. Ha például arra vagyunk kíváncsiak, hogy egy ajánlat milyen valószínűséggel teljesül az adott kereskedési napon, vagy napon belüli kereskedési stratégiákat akarunk

kidolgozni, akkor szükségünk van a tranzakciónkénti adatokra (beleértve a mennyiséget). Ha viszont egy befektetési döntést kell hoznunk, akkor minden esetben a várható hozamot és a kockázatot mérlegeljük, amelyhez általában elég a hozamok idősorát modellezni. Ebben dolgozatban csak az utóbbi problémával foglalkozunk.

A modern pénzügyi elméletek többsége azzal a feltevessel él, hogy a befektetések hozamai normális eloszlásúak (Campbell, Lo, MacKinlay [1997]). A hozamok eloszlásának ismerete kulcsfontosságú például a pénzügyi kockázatok mérlegelésénél, az opciók árazásánál, vagy optimális befektetési (pl. fedezeti) portfóliók kialakításánál, de az említett problémák megoldásához nem szükséges a normalitás feltevése. Mára számtalan empirikus tanulmány támasztja alá, hogy a hozamok eloszlása nem normális (Mandelbrot [1963], Mantegna [1991,1995]) a kérdés már csak az, hogy ez mennyire rossz közelítés: pontosabban, hogy mekkora hibával alkalmazhatók a fenti elméletek. Ez a kérdés azért érdekes, mert a gyakorló piaci szakemberek többsége még a normális eloszláson alapuló modelleket használja. Az új modellek elterjedését elsősorban az akadályozza, hogy a piac (és a tudományos közvélemény) megosztott abban a tekintetben, hogy a normális helyett milyen eloszlást használjunk közelítésként. Egyelőre ugyanis nincs olyan modell, amely meggyőzően jobban írja le a hozamok idősorát, mint a többi.

Ebben a dolgozatban a stabil eloszlásokat fogjuk használni a hozamok modellezésére. A stabil eloszlások - ezek közé tartozik a normális is - természetes módon merülnek fel a normális alternatívájaként (általánosításaként). Ennek szemléltetéséhez először gondoljuk meg, mivel indokolható a normalitás feltevése azon túl, hogy a hozamok hisztogramjai haranggörbéhez hasonlítanak. Gondolkozhatunk úgy, hogy egy adott időszakban elért hozam sok véletlen hatás eredménye - ilyen hatás lehet például egy piacra érkező hír. Tegyük fel, hogy ezek a hatások független, azonos eloszlású, véges szórású valószínűségi változókkal írhatók le, továbbá hogy az egymást követő azonos hosszúságú időszakokra ugyanannyi hatás esik. Ekkor a központi határeloszlás tétele szerint

a hatások összegei, a hozamok normális eloszlással közelíthetők. A közelítés annál jobb, minél hosszabb időskálán mérjük a hozamokat, hiszen hosszabb idő alatt több hatást összegzünk. A fenti feltevések mindegyike megkérdőjelezhető közgazdasági szempontból (Fama [1965], Mandelbrot, Taylor [1967], French, Roll [1986], A. H.-L. Lau, H.-S. Lau, Wingender [1990], Pagan [1996]). A hozamok idősorának leírására született modellek lényegében aszerint osztályozhatók, hogy a fenti feltevések közül melyiket milyen mértékben gyengítik, illetve melyikre helyezik a hangsúlyt. Ugyanakkor megjegyezzük, hogy a fenti tétel feltevései is gyengíthetők úgy, hogy a következtetés megmaradjon.

A stabil eloszlások fogalmához a szórásra vonatkozó feltevés elhagyásával jutunk. A stabil eloszlások definíció szerint független, azonos eloszlású valószínűségi változók normált összegeinek határeloszlásai. Mint említettük, ilyen a normális is. A nem normális stabil eloszlásokat Pareto stabil, vagy Lévy eloszlásoknak hívjuk (Paul Lévy francia matematikus munkássága nyomán). A Pareto stabil elnevezés arra utal, hogy a nem normális stabil eloszlások sűrűségfüggvénye aszimptotikusan Pareto típusú hatványfüggvény alakú, és olyan lassan tart nullához, hogy ezeknek az eloszlásoknak nincs szórásuk. Első közgazdasági alkalmazásuk Benoit Mandelbrot nevéhez fűződik, aki a hatvanas években a gyapotárak hozamait próbálta ezekkel az eloszlásokkal jellemezni (Mandelbrot [1963]). A nem normális stabil eloszlások a normálishoz képest két új paramétert tartalmaznak: egyik az aszimmetriát méri, a másik pedig a stabilitás indexe, amely egy pozitív, kettőnél kisebb szám (normális eloszlásra kettő). A stabilitás indexe a legfontosabb paraméter, az eloszlás lényeges tulajdonságait ezzel lehet megragadni. A stabil eloszlások fontos tulajdonsága (innen ered a nevük is), hogy összegük szintén stabil: a stabilitás indexe a konvolúcióra nézve invariáns. Ebből az következik, hogy a különböző időskálákon mért hozamok eloszlásának azonos az indexe. A stabilitás további hasznos következménye, hogy stabil hozamú komponensekből összeállított portfólió hozamai szintén stabil eloszlásúak.

A stabil eloszlások alkalmazását számos kritika is éri. Az a feltevés, hogy a

hozamok szórása nem véges, sok közgazdász számára „a priori” elfogadhatatlan, és a hatvanas évek óta vita tárgyát képezi. Azzal lényegében minden szerző egyetért, hogy az empirikus eloszlások farokrésze vastag, de számos tanulmány rámutat arra, hogy a Lévy eloszlások farokrésze túl vastag az empirikus eloszlásokéhoz képest (Akgiray, Booth [1988], Lux, Varga [1996], Varga [1999], Gopikrishnan, Meyer, Amaral, Stanley [1998]). E jelenség egyik lehetséges modellje a levágott farkú Lévy eloszlás (Mantegna, Stanley [1994], Koponen [1995], Mantegna [1998]), amelynek van szórása. Másik lehetőség például az, hogy Lévy eloszlások helyett t eloszlásokat használunk (Praetz [1972], Brittenberg, Gorles [1974]). Az adatsorok vizsgálatakor azonban gyakran azt tapasztaljuk, hogy a növekvő mintaelemszámból számolt szórásértékekben „ugrások” vannak, ami arra utal, hogy a szórás a mintaelemszám függvényében esetleg nem konvergál. Ennek ellenkezőjére is találunk azonban utalásokat (Officer [1972], Tucker [1992]). Gyakori kifogás a szórás végtelen volta ellen az, hogy a mért hozamok korlátos tartományban vannak, így szórásuk nyilván véges. Megjegyezzük, hogy hasonlóan érvelhetünk a normális eloszlás alkalmazása ellen olyan alapon, hogy a normális sűrűségfüggvény tartója nem korlátos. Gyakorlati szempontból az a kérdés érdekes, hogy melyik modell illeszkedik jobban az adatsorra, és melyik ad használhatóbb eredményeket. Másik fontos érv a stabil eloszlások ellen az a gyakorlati tapasztalat, hogy a növekvő időskálákon mért hozamok stabilitásának indexe nem állandó (ami a stabilitást jelentené), hanem kettőhöz tart (ez a normális eloszlásnak felel meg). Ez jelentheti azt, hogy a hozamok nem függetlenek, nem azonos eloszlásúak, vagy nem stabilak, de nem zárja ki azt, hogy a hozamokat leíró modell stabil eloszlásokra épüljön (Rachev, Mittnik [2000]).

A stabil eloszlások gyakorlati alkalmazásainak (Adler, Feldman, Taqqu [1998]) elterjedését napjainkig több tényező akadályozta. Mivel sűrűségfüggvényüknek általában nincs explicit kifejezése, numerikusan nehezen kezelhetők. Ez a körülmény egyre kevesebb nehézséget okoz egyrészt az új, hatékony algoritmusoknak (Mantegna [1994], McCulloch [1998]), másrészt a számítógé-

pek gyorsulásának köszönhetően. Másik probléma, hogy a normális eloszlásra építő pénzügyi elméletek általánosítása stabil eloszlásokra nehéz feladat, és ma is aktívan kutatott terület (Rachev, Mittnik [2000]). A harmadik probléma az elméletek statisztikai tesztelhetőségének nehézsége: ez abból fakad, hogy a nem normális stabil eloszlásoknak nincs szórásuk. Ezzel kapcsolatban fontos hangsúlyoznunk, hogy a normális eloszlást használó elméletek statisztikai tesztjeinek alkalmazhatósága amúgy is erősen megkérdőjelezhető az empirikus szórás viselkedésében tapasztalt anomáliák miatt.

Néhány szó a dolgozat szerkezetéről, és a benne található új eredményekről. A második fejezetben a stabil eloszlások matematikai tulajdonságait foglaljuk össze, kiemelve azokat, amelyek a pénzügyi alkalmazásaikat motíválják. A harmadik fejezet a dolgozat témájában elért első eredményeket tartalmazza (Palágyi [1999], Palágyi, Mantegna [1999]). Újdonságnak számított a publikációk megjelenésekor az, hogy a hozamokat nem a szokásos fizikai időskálákon (perc, óra, nap, hónap) tanulmányoztuk, hanem kötésenként. Ez a megközelítés teljesen új modellek kidolgozását teszi szükségessé (Engle, Russell [1994], [1998], Engle [2000]) elsősorban azért, mert a kötések között eltelt várakozási idők változók, így egyszerre kell modellezni a hozamokat és a várakozási időket. Ezzel kapcsolatos eredményünk egyelőre nincs, a fejezetben csak a kötésenkénti hozamok rövid- és hosszútávú memóriáját, valamint empirikus eloszlását vizsgáltuk. Az utóbbit stabil eloszlásokkal írtuk le. Az induló magyar értékpapírpiac (BÉT) vezető részvényeinek hozamait elsőként elemeztük a fenti módon. Egymást követő negyedéves adatsorokat vizsgálva a stabilitás indexének időbeli fejlődését részvényenként követtük nyomon. Az eredményekből kitűnik, hogy a piac fejlődésével az index növekvő trendet mutat.

A negyedik fejezetben bemutatott eredmények (Palágyi, Kőrösi, Mantegna [2002]) tömören a következők: bevezetünk egy új időskálát (az árváltozások számával mérjük az időt), magyar és amerikai piacokon forgalmazott részvényekre összehasonlítjuk az árváltozásonkénti és percenkénti hozamok stabilitását, kockázatotott értéket számolunk napon belüli (day trade) ügyletekhez.

Előrelépés a harmadik fejezethez képest, hogy maximum likelihood módszerrel becsüljük a stabilitás indexét, és a hozamok rövid távú autokorrelációjának leírására stabil eloszlású innovációkkal hajtott ARMA modelleket használunk. A magyar és amerikai piacok összehasonlítása önmagában érdekes. A percenkénti és árváltozásonkénti hozamok stabilitásának összehasonlítása új megvilágításba helyezi a Pareto stabil és a sztochasztikus volatilitás modellek kapcsolatát, és részben előrevetíti az ötödik fejezet eredményeit. A kockázatotott érték számításokkal kapcsolatban újdonság az, hogy adott kockázatotott érték eléréséhez szükséges várakozási időket vizsgálunk.

Az ötödik fejezetben részletesen foglalkozunk a *GARCH* és a Pareto stabil modellek kapcsolatával (az itt ismertetett új eredmények publikációjának előkészítése folyamatban van), a fejezet egyes részeiben ismertetjük a témakörrel kapcsolatos irodalmat. A két modell ötvözetét, a stabil hatvány *GARCH* modellt (Mittnik, Paolella, Rachev [2000]) - Magyarországon elsőként alkalmazva - illesztjük a CISCO részvény 15, 30 és 60 perces hozamaira, valamint a MOL részvény 15 perces hozamaira. A fejezet legérdekesebb eredménye a modellek illeszkedésével kapcsolatos: mindkét részvény 15 perces hozamaira illesztett modellek maradéktagjainak aggregátumaiból becsült α indexek gyorsan tartanak kettőhöz, így a maradéktagok stabilitásának hipotézise elvetethető. Ugyanakkor a Lévy hatvány *GARCH* modell mindkét idősorra jobban illeszkedik, mint a normális hatvány *GARCH*. Nyitott kérdés marad, hogy a *GARCH* modellekben milyen eloszlású innovációkat érdemes használni. Előfordulhat, hogy Lévy eloszlású innovációkkal jobban illeszkedik egy *GARCH* modell, mint t eloszlású innovációkkal, de a maradéktagok stabilitását a teszt elveti. Tesztelhetőség szempontjából a Lévy eloszlások használata „sebezhetőbb”, mint a t eloszlásoké.

A *GARCH* és a stabilitás kérdésének további vizsgálatán túl számos irányban folytatható a dolgozat témájának kutatása. Egyik izgalmas irány a már említett kötésenkénti hozamok modellezése, amelytől a hosszabb időskálákon mért hozamok idősorának finomabb megértése várható.

2. A stabil eloszlások tulajdonságai

Ebben a fejezetben áttekintjük a stabil eloszlások matematikai tulajdonságait, elsősorban azokat hangsúlyozva, amelyek pénzügyi alkalmazásaikat motíválják. A definíciókhoz és állításokhoz ennek megfelelően magyarázatot fűzünk, de bizonyításokat nem közlünk. Az egyváltozós stabil eloszlások elméletét az 1920-as és 30-as években Paul Lévy és Alekszandr Jakovlevics Hincsin dolgozták ki. A részleteket Gnyegyeko és Kolmogorov [1951], Feller [1971], Rényi [1989], valamint Samorodnitsky és Taqqu [1994] könyveiben találhatjuk meg.

Az alábbiakban először a stabil eloszlások négy ekvivalens definícióját adjuk meg. Az első két definíció a stabilitással kapcsolatos: a stabil eloszlások családja zárt a konvolúcióra nézve.

2.1. definíció Az X valószínűségi változó stabil eloszlású, ha bármely A, B pozitív számokhoz létezik egy pozitív C és egy valós D szám, amelyekre

$$AX_1 + BX_2 \stackrel{d}{=} CX + D,$$

ahol X_1, X_2, X függetlenek és azonos eloszlásúak. Az $\stackrel{d}{=}$ jelölés azt jelenti, hogy a két oldalon álló valószínűségi változók eloszlása megegyezik.

A fenti definíció szerint független, azonos (stabil) eloszlású valószínűségi változók pozitív számokkal vett lineáris kombinációjának eloszlása nyújtástól és eltolástól eltekintve megegyezik az eredeti eloszlásukkal. Ez a tulajdonság jól használható portfólió hozamok eloszlásának vizsgálatakor.

2.2. definíció Az X valószínűségi változó stabil eloszlású, ha bármely $n \geq 2$ -re létezik egy C_n pozitív, és egy D_n valós szám, amelyekre

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} C_n X + D_n,$$

ahol X_1, X_2, \dots, X_n és X függetlenek, és azonos eloszlásúak.

A fenti definíciókból azonnal látható, hogy a normális eloszlás stabil. Mint a bevezetőben említettük, a stabil eloszlások gyakorlati alkalmazásait (Adler, Feldman, Taqqu [1998]) a centrális határeloszlás tétele motíválja. A stabil eloszlások családja pontosan azokat az eloszlásokat tartalmazza, amelyek független, azonos eloszlású valószínűségi változók normált összegeinek határeloszlásai. Ezt fogalmazzuk meg a következő definícióban.

2.3. definíció Az X valószínűségi változó stabil eloszlású, ha létezik Y_1, Y_2, \dots független azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, továbbá léteznek d_n pozitív valós és a_n valós számsorozatok, amelyekre

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{d_n} + a_n \xrightarrow{d} X$$

A \xrightarrow{d} jelölés az eloszlásban való konvergenciát jelenti.

Ha az Y_i változók egységnyi szórásúak, és nulla várható értékűek, akkor $d_n = n^{1/2}$ és $a_n = 0$ mellett a centrális határeloszlás tételének szokásos alakja szerint X normális eloszlású. Megjegyezzük, hogy a d_n normálási tényezők szerepe fontos: alkalmas megválasztásukkal például a határeloszlás akkor is lehet normális, ha a szórások nem végesek.

Az utolsó definícióban megadjuk a stabil eloszlások karakterisztikus függvényét.

2.4. definíció Az X valószínűségi változó stabil eloszlású, ha léteznek $\alpha \in (0, 2]$, $\sigma \geq 0$, $\beta \in [-1, 1]$, és μ valós paraméterek, amelyekkel X karakterisztikus függvénye a következő alakban írható:

$$E \exp i\theta X = \begin{cases} \exp \left\{ -\sigma^\alpha |\theta|^\alpha \left(1 - i\beta (\text{sign } \theta) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) + i\mu\theta \right\}, & \text{ha } \alpha \neq 1, \\ \exp \left\{ -\sigma |\theta| \left(1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\text{sign } \theta) \log |\theta| \right) + i\mu\theta \right\}, & \text{ha } \alpha = 1. \end{cases}$$

Könnyű ellenőrizni, hogy a 2.4. definícióból következik (2.2), a fordított irányú következtetés azonban már nem ilyen egyszerű (Gnyegyenko, Kolmogorov

[1951]). Vegyük észre, hogy az $\alpha = 2$ esetben (ez a μ várható értékű, $\sqrt{2}\sigma$ szórási normális eloszlásnak felel meg) a β paraméter szerepe érdektelen (mint látni fogjuk, ez a paraméter az eloszlás aszimmetriáját írja le). Ettől eltekintve a képletben szereplő paraméterek egyértelműen meghatározottak (*sign* a szignum függvényt jelöli). A fenti karakterisztikus függvényű eloszlásokat a továbbiakban $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ -vel jelöljük, $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ pedig azt jelenti, hogy X eloszlása $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$.

A stabil eloszlások numerikusan viszonylag nehezen kezelhetők, mert a sűrűségfüggvényük az $\alpha = 2$ (normális eloszlás), $\alpha = 1$ (Cauchy eloszlás) és $\alpha = 1/2$ (Lévy eloszlás) esetektől eltekintve nem írható zárt alakba. (Megjegyezzük, hogy az $X = \mu$ konstans valószínűségi változó eloszlása $S_\alpha(0, 0, \mu)$ bármely $\alpha \in (0, 2]$ mellett, azonban ezt a triviális esetet az egységes tárgyalásmód kedvéért érdemes kizárni a stabil eloszlások közül.) A szimmetrikus stabil eloszlások (X és $-X$ eloszlása megegyezik, $\beta = 0$ és $\mu = 0$) sűrűségfüggvénye a fenti karakterisztikus függvényből a következő alakban írható:

$$f(t) = 1/\pi \int_0^\infty \exp(-\sigma^\alpha x^\alpha) \cos(tx) dx.$$

A dolgozatban csak szimmetrikus stabil eloszlásokat fogunk használni, de a teljesség kedvéért itt röviden áttekintjük a (2.4)-ben szereplő valamennyi paramétert jelentését.

2.5. állítás Legyen $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, és $a \in \mathbb{R}$. Ekkor $X + a \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu + a)$.

Eszerint μ az eltolási paraméter.

2.6. állítás Legyen $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, és $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Ekkor

$$\begin{aligned} aX &\sim S_\alpha(|a|\sigma, \text{sign}(a)\beta, a\mu), \text{ ha } \alpha \neq 1, \\ aX &\sim S_1(|a|\sigma, \text{sign}(a)\beta, a\mu - \frac{2}{\pi}a(\log|a|)\sigma\beta), \text{ ha } \alpha = 1. \end{aligned}$$

Eszerint σ skálaparaméter (mint említettük, normális eloszlásra $\sqrt{2}\sigma$ a szórással), bár az elnevezés az $\alpha = 1$ (és $\beta \neq 0$) esetben kissé sántít, mert ekkor az eltolási paraméter nem lineárisan függ a konstans szorzótól. A következő két állítás szerint a β paraméter az eloszlás aszimmetriáját méri.

2.7. állítás Ha $\alpha \in (0, 2)$, akkor

$$X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0) \Leftrightarrow -X \sim S_\alpha(\sigma, -\beta, 0)$$

2.8. állítás Legyen $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$. X pontosan akkor szimmetrikus, ha $\beta = 0$ és $\mu = 0$. X pontosan akkor szimmetrikus μ körül, ha $\beta = 0$.

A következő állítás rávilágít az α paraméter kiemelt szerepére, és megmutatja, hogyan változnak az α, σ, β és μ paraméterek az eloszlások konvolúciója során.

2.9. állítás Legyenek $X_1 \sim S_\alpha(\sigma_1, \beta_1, \mu_1)$ és $X_2 \sim S_\alpha(\sigma_2, \beta_2, \mu_2)$ függetlenek. Ekkor $X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ a következő paraméterekkel:

$$\sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{1/\alpha}, \quad \beta = \frac{\beta_1 \sigma_1^\alpha + \beta_2 \sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2.$$

Mint látjuk, azonos α paraméterű eloszlások konvolúciója során α értéke nem változik, ezért α -t a stabilitás indexének hívjuk. Az α paraméter azért is fontos, mert lényegében meghatározza az eloszlás aszimptotikus tulajdonságait.

2.10. állítás Legyen $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, $\alpha \in (0, 2)$. Ekkor

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^\alpha P(X > \lambda) &= C_\alpha \frac{1 + \beta}{2} \sigma^\alpha, \\ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^\alpha P(X < -\lambda) &= C_\alpha \frac{1 - \beta}{2} \sigma^\alpha, \end{aligned}$$

ahol

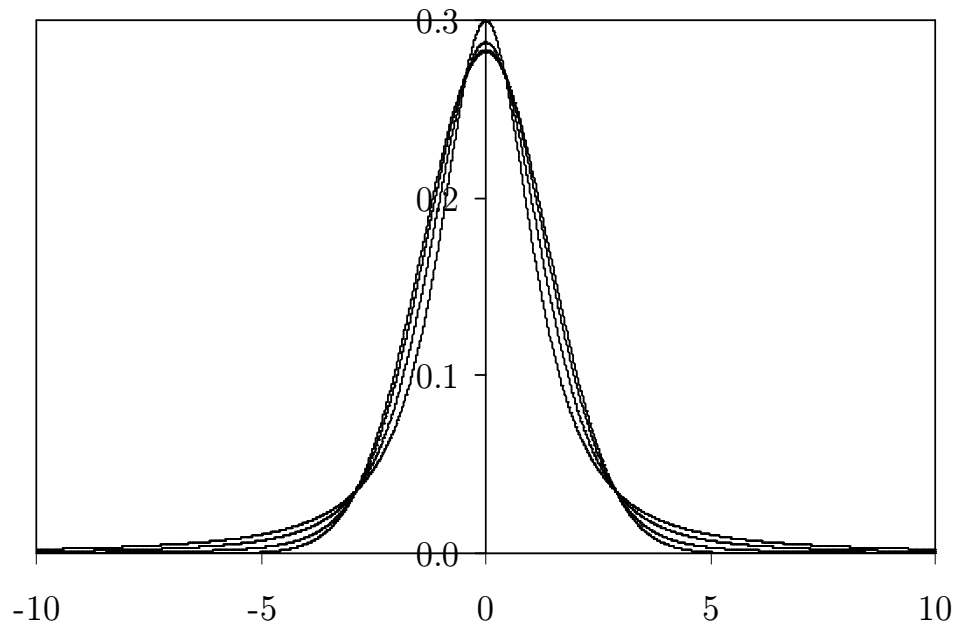
$$C_\alpha = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)\cos(\pi\alpha/2)}, & \text{ha } \alpha \neq 1, \\ 2/\pi, & \text{ha } \alpha = 1. \end{cases}$$

A fenti állítás alapján a nem normális stabil (Lévy) eloszlások farokrészének vastagsága aszimptotikusan hatványkitevő szerint csökken, azaz c_1/λ^α függvénnyel közelíthető, a sűrűségfüggvény pedig, amelynek zárt alakját egyébként általában nem ismerjük, $c_2/\lambda^{\alpha+1}$ szerint tart nullához (c_1 és c_2 konstansok). Ez az alkalmazások szempontjából igen fontos különbség a normálishoz képest, amelynek farokrésze ($P(X > \lambda) = P(X < -\lambda)$) „vékonyabb”, aszimptotikusan az

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma\lambda} \exp\left(\frac{-\lambda^2}{4\sigma^2}\right)$$

függvénnyel közelíthető, tehát sokkal gyorsabban tart nullához. A pénzügyi kockázatok számításakor a szélsőséges piaci események valószínűségére, tehát a hozamok eloszlásának farokrészére vagyunk kíváncsiak. A normális eloszlás farokrésze túl vékony az empirikus eloszlásokéhoz képest (mint látni fogjuk, a Lévy eloszlásoké viszont egy kicsit túl vastag). A Lévy eloszlásoknak a farkuk vastagsága miatt nincs véges szórása. Az $\alpha \leq 1$ esetben a Lévy eloszlásoknak várható értéke sincs, de az empirikus adatokból becsült α értékek kivétel nélkül egynél nagyobbak (ebben az esetben a várható érték a μ paraméter). Amellett, hogy nincs véges szórásuk, a Lévy eloszlások gyakorlati alkalmazhatósága intuitíve azért is megkérdőjelezhető, mert a folytonos idejű Lévy folyamatoknak bármely véges időintervallumban végtelen sok ugrása van. Az utóbbi tulajdonság első látásra természetellenesnek tűnik, de szimulált adatsorokból (stabil eloszlású valószínűségi változó szimulációja elég egyszerű, ld. Chambers, Mallows, Stuck [1976], vagy Samorodnitsky, Taqqu [1994]) megmutatható (McCulloch [1978]), hogy az ugrások kezelhetők, sőt közgazdasági szempontból érdekes értelmezésük is adható.

Az 1-2. ábrákon szimmetrikus stabil eloszlások sűrűségfüggvényeit ábrázoltuk különböző α értékekre ($\sigma = 1$, $\mu = 0$, $\beta = 0$). A két ábra csak abban

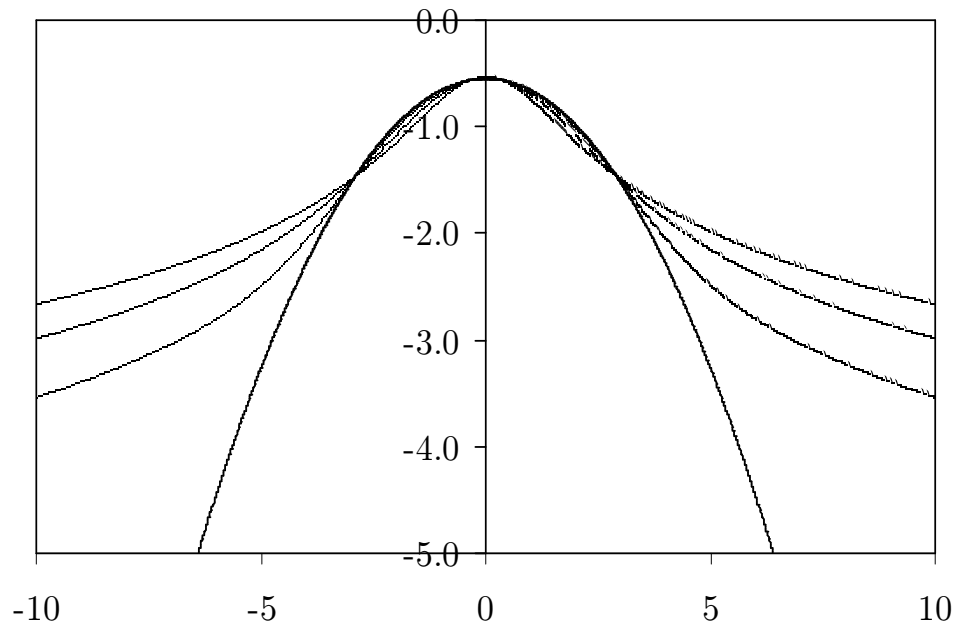


1. ábra. Szimmerikus stabil eloszlások sűrűségfüggvényeinek grafikonjai. A skálaparaméter (σ) értéke 1. A farokrészeken a legalsó görbe a normális, fölötté csökkenő α szerint ($\alpha = 1, 8; 1, 5; 1, 2$) jönnek sorban a Lévy görbék. A metszéspontokban a sorrend megfordul.

különbözik egymástól, hogy az egyikén a függőleges tengelyen logaritmikus skálát használtunk. Ez azért érdekes, mert így sokkal jobban látszanak a farkak, és a normálistól való eltérés is. A normális eloszlás sűrűségfüggvénye logaritmikus skálán lefelé nyíló parabola, a Lévy eloszlásoknak viszont csak a középső része konkáv, a farokrészek konvexek.

Az 1. ábrán látható görbék négy helyen metszik egymást. A farokrészeken a legalsó görbe a normális, fölötté csökkenő α szerint ($\alpha = 1, 8; 1, 5; 1, 2$) jönnek sorban a Lévy görbék.

A görbék sorrendje a metszéspontoknál megfordul: középen például ismét a normális halad legalul. Általában azt mondhatjuk, hogy minnél kisebb α



2. ábra. Szimmerikus stabil eloszlások sűrűségfüggvényeinek grafikonjai. A függőleges tengelyen tízes alapú logaritmus skálát használunk. Az eloszlások skálaparaméterének (σ) értéke 1. A farokrészeken a legalsó görbe a normális (lefelé forduló parabola), fölötte csökkenő α szerint ($\alpha = 1,8; 1,5; 1,2$) jönnek sorban a Lévy görbék.

értéke annál csúcsosabb középen a görbe, és annál vastagabb a farka. A pénzügyi eszközök hozamainak hisztogramjai általában hasonló képet mutatnak: gyakoriak a nulla körüli értékek (középen csúcsos a görbe), és sok a kilógó érték is (a farokrész vastag). A normálistól való eltérés tehát abban nyilvánul meg, hogy nagyobb a valószínűsége a középbe és a farkakba eső értékeknek.

3. Kötésenkénti hozamok vizsgálata a Budapesti Értéktőzsdén

3.1. A vizsgált adatok és változók

Ebben a fejezetben a Budapesti Értéktőzsde (BÉT) néhány vezető részvényének napon belüli áringadozásait tanulmányozzuk. Célunk, hogy a tőzsde statisztikai értelemben vett fejlődését a vizsgált két és fél éves időszakban nyomon kövessük. Negyedéves lépésekkel haladva meghatározzuk az árváltozások szórásának skálázási tulajdonságait, valamint az árváltozások empirikus sűrűségfüggvényét. Az utóbbit stabil eloszlás sűrűségfüggvényével (a továbbiakban: stabil sűrűségfüggvény) közelítjük.

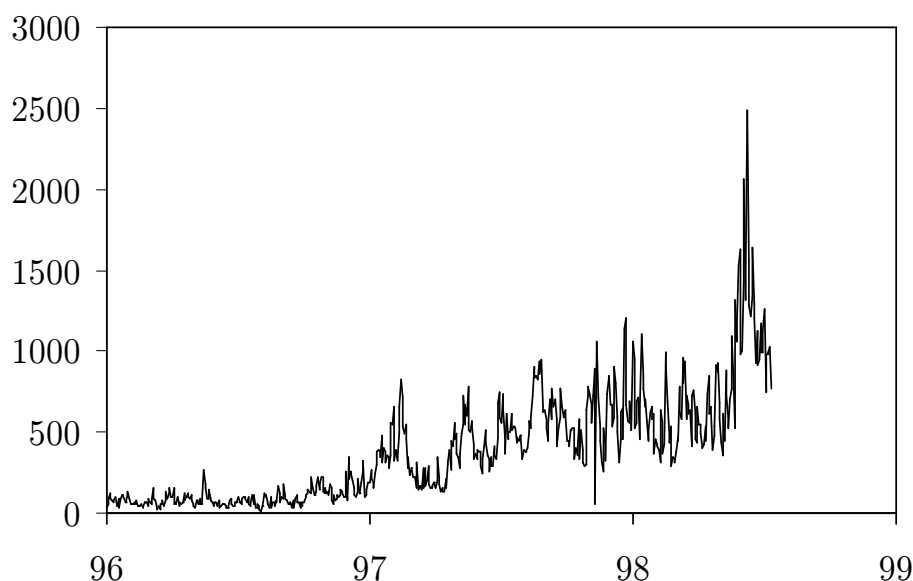
A BÉT viszonylag fiatal tőzsdének számít - bár 1864-ben nyitották meg először, 1948-ban bezárták, majd 1990-ben nyitották meg újra. Az elektronikus kereskedés 1993 márciusában kezdődött. Mivel eleinte a forgalom meglehetősen kicsi volt, a vizsgálatunkat 1996 januárjával kezdjük, ekkor is csak a vezető papírokból volt statisztikailag figyelemre méltó forgalom. Konkrétan a vizsgált részvények a MOL és az OTP (mindkettő 1996. január 4-től), a MATÁV (1997. november 14-től) és a TVK (1996. augusztus 6-tól). Az ebben a fejezetben feldolgozott adatbázisunk tartalmazta a fenti részvényekre vonatkozó összes kötést időrendi sorrendben 1998. június 30-ig. Egy kötés adatai: év, hó, nap, óra, perc, másodperc, részvény neve, ár, kötésmennyiség.

A tőzsde forgalmának növekedését valamelyest illusztrálja a 3. ábra, amelyen a MOL részvény napi kötéseinek számát ábráztuk a napok függvényében 1996. január 4. és 1998. június 30. között (összesen 616 nap). A fenti növekedési tendencia nagyjából az összes vezető papírról elmondható - a MOL esetében a napi kötések száma két- és fél év alatt kb. megtízszereződött.

A továbbiakban a különböző időskálán mért hozamok, pontosabban a

$$r_t(T) = \log P_{t+T} - \log P_t \quad (1)$$

változó tulajdonságait vizsgáljuk. P_t a részvény ára a t időpontban, T pedig



3. ábra. A napi tranzakciók számának idősora (MOL).

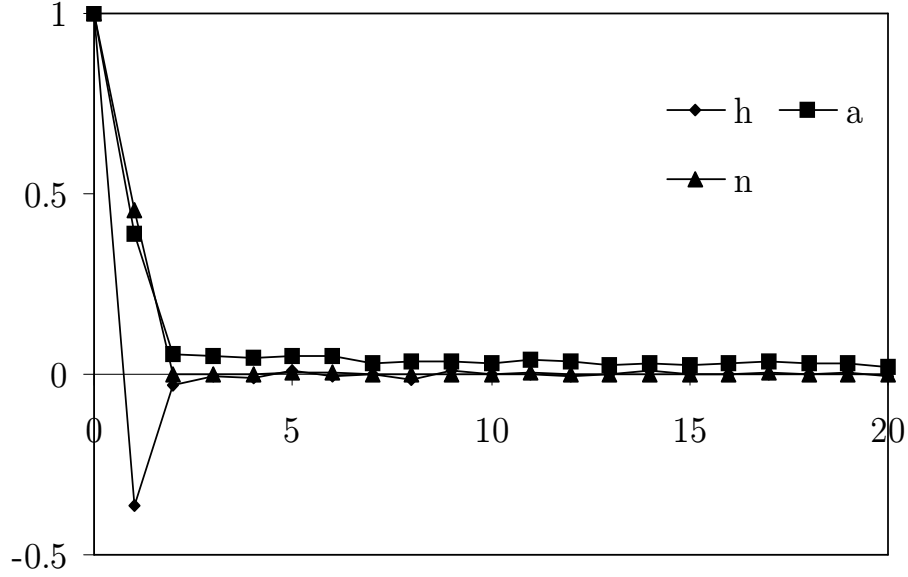
a késleltetési idő. Az idő mérésének „megfelelő” módját a pénzpiacokon nem könnyű megválasztani - valójában nincs is „legjobb” módszer. Itt mi a két legkézenfekvőbb időfogalmat használjuk, az egyik egyszerűen a kötések számával méri az idő múlását (ezt röviden diszkrét időnek fogjuk hívni), a másik a hétköznapi fizikai idő. Az első esetben t a kötések indexeli, a második esetben pedig egy fizikai időpontot jelöl. Az utóbbi választás annyiban okoz nehézséget, hogy egy adott időponttól rögzített fizikai idő lépésközökkel előre haladva az éppen aktuális időpillanatban általában nincs kötés, így nem teljesen világos, hogy ott mi az ár. Ilyenkor az adott pillanatot megelőző utolsó kötés árát vesszük aktuális árnak. (Ehelyett vehetnénk pl. a megelőző T intervallumban lezajlott kötések átlagárát, vagy a kötésmennyiségek szerint súlyozott átlagárát is, stb.) Egy másik lehetőség pl. az idő mérésére az, hogy adott kötésmennyiségként haladunk előre: amikor az adott mennyiségű részvény „megfordul” a

piacon, akkor veszünk mintát az árból (Clark [1973], Karpoff [1987], Gallant, Rossi, Tauchen [1992]). Ebben a fejezetben csak a fenti két lehetőséget használjuk. Van még két probléma az idő mérésével: az egyik az, hogy éjszaka, ill. hétvégeken hogyan múljon az idő, másik pedig az, hogy különböző napszakokban (pl. a kereskedés elején, végén, vagy ebédidőben) változik a kereskedés intenzitása, sőt talán az árváltozások statisztikai tulajdonságai is. Az utóbbi kérdést itt figyelmen kívül hagyjuk - főleg azért, mert amúgy sincs sok adat - az előbbit pedig úgy oldjuk meg, hogy csak kereskedési időn belüli árváltozásokat vizsgálunk.

3.2. Korreláció, memória

Először a kötésenkénti hozamok ($r_t(1)$) valamint ezek abszolút értékének ($|r_t(1)|$) autokorrelációs függvényét számoltuk ki három részvényre (MOL, OTP, TVK). A MOL-ra vonatkozó eredmények a 4. ábrán láthatók (1998. második negyedév). A többi részvényre és időszakra kvalitatíve hasonló eredményeket kaptunk (v.ö. Campbell, Lo, MacKinlay [1997]). Az $r_t(1)$ idősor elsőrendű autokorrelációja viszonylag nagy negatív érték, a magasabb rendű autokorrelációk pedig gyorsan tartanak nullához - néhány tranzakció után gyakorlatilag elhanyagolhatók. A néhány kötés távolságnyra lévő tranzakciók tehát lényegében korrelálatlanok, ez azonban nem jelenti azt, hogy függetlenek. A függetlenséget empirikusan nehéz vizsgálni, mindenesetre erre utaló jel az, ha $r_t(1)$ és $|r_t(1)|$ hatványainak autokorrelációs függvénye gyorsan tart nullához. Itt azonban nem ez a helyzet. Amint az ábrán láthatjuk, az $|r_t(1)|$ idősor autokorrelációs függvénye lényegesen lassabban tart nullához, mint az $r_t(1)$ idősoré. Ezek az eredmények összhangban vannak az irodalommal (pl. Ding, Granger, Engle [1993]).

Az autokorrelációs függvény nullához tartásának gyorsaságával kapcsolatos a hosszútávú memória fogalma (Beran [1994], Adler, Feldman, Taqqu [1998], Willinger, Taqqu, Teverovsky [1999]). Azt szokás mondani, hogy egy folyamatnak hosszútávú memóriája van, ha az autokorrelációk olyan lassan csökkennek,



4. ábra. A kötésenkénti hozamok (h), valamint abszolút értékük (a) és négyzetük (n) autokorrelációs függvénye (MOL, 1998. második negyedév).

hogy az összegük nem konvergál. Az $r_t(1)$ folyamat hosszútávú memóriájának vizsgálatához fizikus terminológiával élve a hozamok szórásának skálázási tulajdonságait tanulmányozzuk, vagyis azt vizsgáljuk, hogy a növekvő időskálán mért hozamok szórása hogyan függ a skála egységének hosszúságától. Ez a hosszútávú memória becslésére statisztikából ismert variancia módszernek felel meg (Beran [1994]). A T hosszúságú időskálán mért hozamok szórása

$$\sigma(T) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\log P_{t_i+T} - \log P_{t_i})^2}{n-1}}, \quad (2)$$

ahol i egymást nem átfedő $(t_i, t_i + T)$ időintervallumokat indexel. Ha az időt a kötések számával mérjük, akkor a fenti intervallumokkal gyakorlatilag a teljes kereskedési időt le tudjuk fedni, hiszen ekkor az adatsorban T kötésenként lépünk előre, és az éppen aktuális árat vesszük ki a hozam számításához. Ha

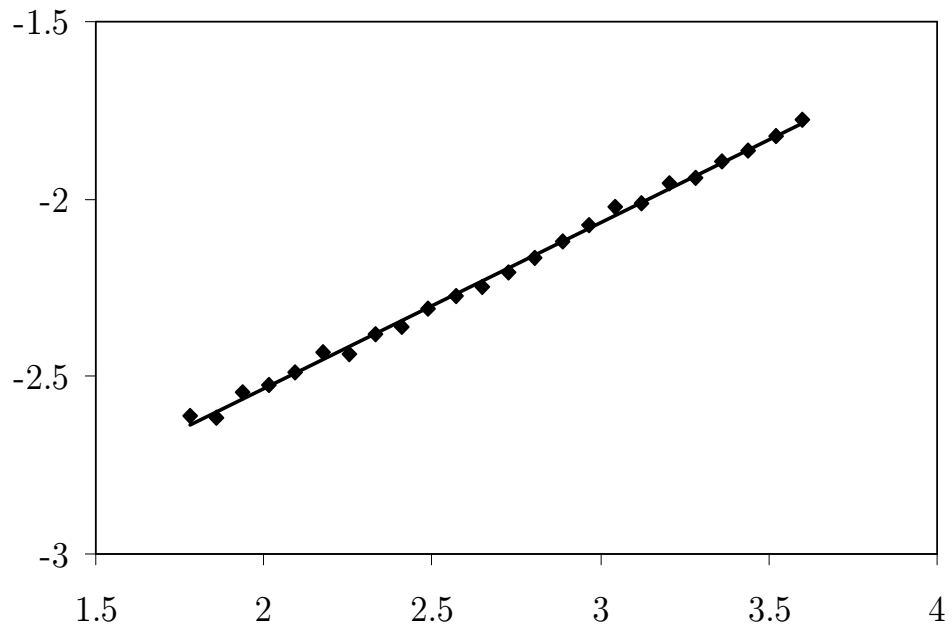
azonban az időt másodpercekben mérjük, akkor egy adott kötéstől pontosan T másodpercet előrelépve általában nem találunk kötést, ezért ekkor ΔT toleranciát megengedve $T \pm \Delta T$ távolságban levő kötések keresünk. A késleltetés hibáját (ΔT) nyilván szeretnénk minél jobban leszorítani, de ha ΔT -t kicsinek választjuk, akkor egyrészt kevés intervallumot találunk a szórás számításához, másrészt előfordulhat, hogy a teljes kereskedési időnek csak töredékét fedik le ezek az intervallumok. Az utóbbi esetben a kapott minta nem reprezentálja az egészet, és bizonytalan eredményeket kapunk. ΔT -t úgy választottuk meg, hogy a teljes kereskedési időnek minimum 70%-át le tudjuk fedni. Emellett ΔT minden esetben kisebb volt, mint $0.1T$. (Hosszabb időskálákon a tényleges ΔT hiba egyre kisebb $0.1T$ -hez képest, hiszen ha T nagy, akkor egyre könnyebb egy adott időpillanathoz viszonyítva $\pm 0.1T$ tartományban kötést találni.)

A T késleltetési idő minimális értéke egy kötés, illetve 60 másodperc volt. Mindkét időmérési módszer mellett úgy találtuk, hogy mindegyik részvényre és minden időszakra jó közelítéssel fennáll a

$$\sigma(T) \sim T^\mu. \quad (3)$$

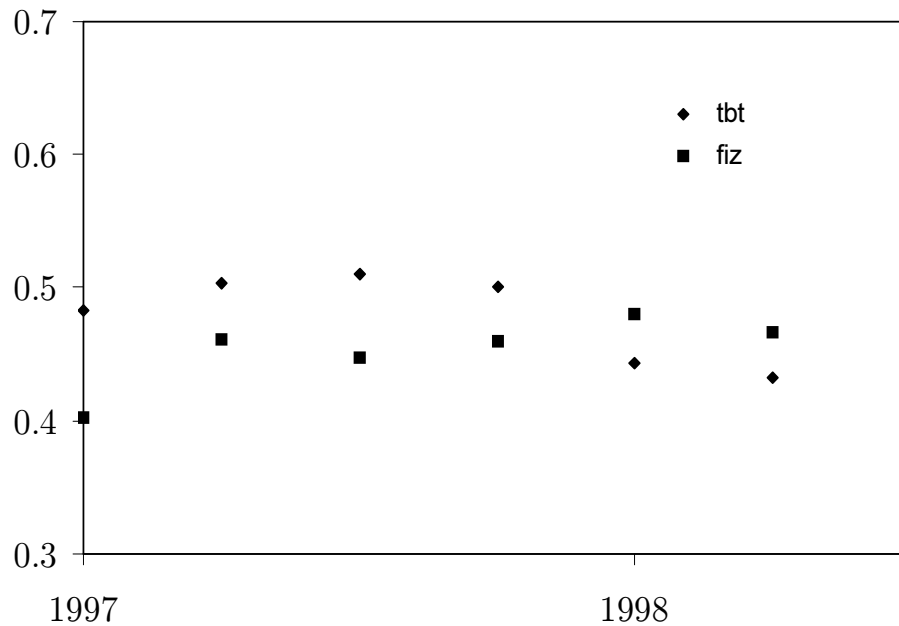
reláció. $\mu > 1/2$ azt jelenti, hogy a folyamatnak hosszútávú memóriája van. Log-log skálán ábrázoltuk $\sigma(T)$ -t T függvényében, és az illesztett egyenes meredekségéből becsültük μ értékét. Az 5-6. ábrákon láthatók az eredmények MOL-ra. A hibák becsléséhez a T skálatartományt (1-800 kötés ill. 1-60 perc) két egyenlő részre osztottuk, és külön-külön illesztettünk egyenest. A két illesztésből arra következtettünk, hogy μ hibája 0.05-nél kisebb. Látható, hogy μ közel van 0.5-hez, ha az időt kötésekben mérjük, és kissé 0.5 alatt van, ha fizikai időközöket használunk (az utóbbi eredményt negatív hosszútávú függésnek is szokták nevezni). Hasonló eredményeket kaptunk a másik két részvényre.

A fenti eredmények inkább első vizsgálódásnak tekinthetők, hiszen figyelmen kívül hagytuk például azt a kérdést, hogy az idősor stacionárius-e. Az alkalmazott variancia módszer is a heurisztikus statisztikai módszerek közé



5. ábra. A μ paraméter becslése a $\sigma(T) \sim T^\mu$ relációból (MOL, 1998. második negyedév). $\sigma(T)$ a T másodpercenként mért hozamok szórása. A függőleges tengelyen $\log_{10} \sigma(T)$, a vízszintes tengelyen pedig $\log_{10} T$ szerepel. μ becsült értéke 0.46.

tartozik. Annyit állíthatunk, hogy szembetűnő hosszútávú összefüggést nem találtunk a napon belüli árváltozások adatsorában.



6. ábra. A függőleges tengelyen a $\sigma(T) \sim T^\mu$ relációból a μ paraméter becsült értékei láthatók negyedévenként. $\sigma(T)$ a T időközönként mért hozamok (MOL) szórása. Az időt kétféleképp mérjük: a kötések számával (tbt), és másodpercekben (fiz). Az első negyedév 1997 januárjával kezdődik.

3.3. A kötésenkénti hozamok sűrűségfüggvénye

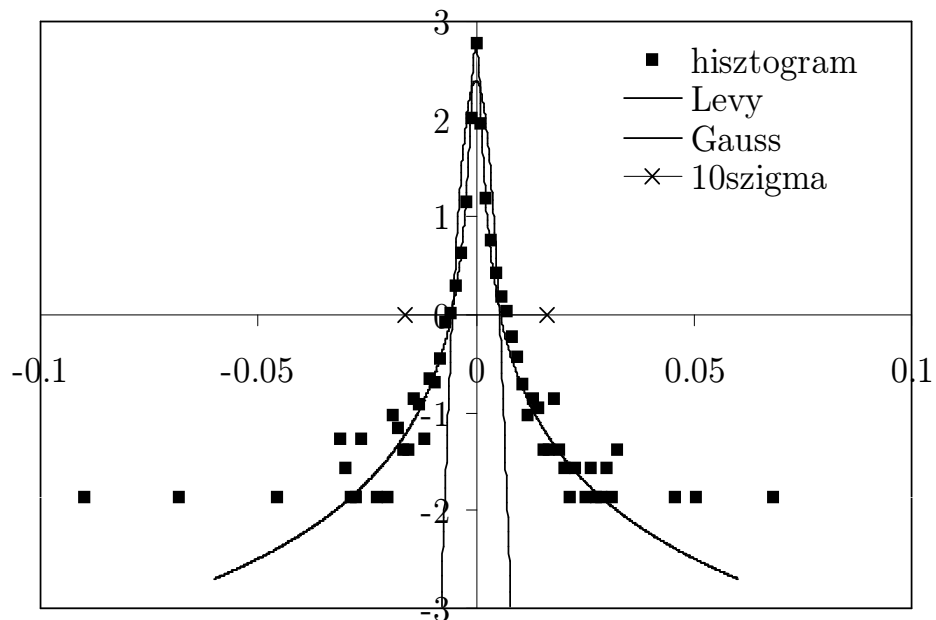
Ebben a szakaszban a kötésenkénti hozamok empirikus sűrűségfüggvényének alakjáról szeretnénk közelítő képet kapni. A hozamokat legegyszerűbben úgy modellezhetjük, ha feltesszük, hogy függetlenek és azonos eloszlásúak. Egyik feltevés sem igaz, de kiindulásnak hasznosak. (Az utóbbi feltevést csak egy adott negyedéven belül alkalmazzuk, majd azt vizsgáljuk, hogyan változik negyedévről negyedévre az eloszlást leíró paraméterek értéke.)

Mint a bevezető fejezetben említettük, számos szerző foglalkozott már a hozamok empirikus sűrűségfüggvényének modellezésével különböző piacokon, és sokan (elsőként Mandelbrot [1963], Mandelbrot, Taylor [1967]) felhívták a

figyelmet a fenti sűrűségfüggvények leptokurtikus jellegére. A leptokurtózis azt jelenti, hogy a hozamok eloszlásának nagy a kurtózisa, ami szemléletesen azzal a következménnyel jár, hogy a sűrűségfüggvény farka vastag, azaz aszimptotikusan lassan tart nullához. A kurtózis fogalma egyébként egyszerű: a standardizált valószínűségi változó (levonjuk belőle a várható értékét, majd osztunk a szórásával) negyedik hatványának várható értéke $E[((X - E[X])/σ)^4]$. A negyedik hatvány kiemeli a nagy (farkrészben levő) értékek súlyát, emiatt a nagy kurtózis azt jelenti, hogy gyakoriak a szélsőséges értékek, azaz vastag a farkok. A normális eloszlás kurtózisa 3. Pénzügyi idősorokban gyakori a 30 feletti érték.

A korábbi tanulmányok (azok is, amelyek nagy frekvenciájú idősorokkal dolgoztak) szinte kizárólag adott fizikai időintervallumokon vett (napi, óránkénti, percnkénti) hozamokat vizsgáltak. Mi ebben a fejezetben csak az adott számú kötésenkénti hozamok eloszlásával foglalkozunk. Konkrétan a MOL, OTP, TVK és a MATÁV részvények esetében minden olyan negyedéves időszakban, amelyben kereskedtek velük. Első lépésként vegyük a kiválasztott részvényre vonatkozó összes kötetést egy adott negyedéven belül időrendi sorrendben, majd képezzük a kötési árak logaritmikus különbségeit ($r_t(1)$) - ezek a kötésenkénti hozamok. Az első szembeötlő tény az, hogy a kapott hozamok között sok a nulla (nincs árváltozás egyik kötetéstől a következőig). A fenti részvényekre tipikusan a kötésenkénti hozamok 2/3-a nulla. Ez az arány persze papíronként és piaconként változik, de nagy forgalmú papírokra 1/2-nél kisebb aránnyal nemigen lehet találkozni. A kötésenkénti hozamok eloszlása tehát inkább tekinthető egy diszkrét (konstans nulla) és egy folytonos eloszlás keverékének. Egy pillanatra azt gondolhatnánk, hogy mivel a legtöbb piacon adott egy minimális lépésköz, amellyel egy papír ára változhat, a kötésenkénti hozamok eloszlása inkább diszkréttel közelíthető, ez azonban nem így van: a hozamok között több különbözőt találunk, mint az árváltozások között, mert egy adott árváltozáshoz különböző hozamok tartozhatnak. A fenti papírokra például minden negyedévben a nullától eltérő kötésenkénti hozamoknak leg-

alább 10%-a különböző (ez minimum néhány ezer különböző érték negyedévente). Hosszabb időskálán - mondjuk 20 kötésenként - előrehaladva a nullák száma csökken, és a hozamok eloszlása is kezd folytonosra hasonlítani. Amint azt rögtön látni fogjuk, mi feltételezzük, hogy a hozamok eloszlása különböző időskálákon - egy skálaparamétertől eltekintve - azonos, ezért a kötésenkénti hozamok eloszlására is folytonos eloszlást használunk, ami - legalábbis grafikusan - még így is jó közelítésnek bizonyul, mert a hozamok hisztogramjában a nullák elkenődnek egy nulla körüli véges intervallumban. A 7. ábrán látható



7. ábra. Kötésenkénti hozamok ($\log P' - \log P$) empirikus sűrűségfüggvénye (hisztogram), valamint az illesztett Lévy és normális (Gauss) eloszlások sűrűségfüggvényei. A függőleges tengelyen tízes alapú logaritmus skálát használtunk. A kiindulási adatsor: MOL összes kötés, 1998. második negyedév. Az origótól jobbra és balra a vízszintes tengelyen megjelöltük a minta szórásának tízszeresére lévő pontokat (10szigma).

hisztogramban a MOL kötésenkénti hozamai ($r_t(1)$) szerepelnek 1998 második negyedévében. A függőleges tengelyen logaritmikus skálát használunk - így jobban látszik a görbe farokrésze. A normális sűrűségfüggvény képe log skálán lefelé nyíló parabola, ami konkáv görbe, az ábrán látható hisztogram farokrésze viszont konvexnek látszik - innen kvalitatíve látható a normálistól való eltérés. Mint említettük, a hisztogramra szimmetrikus stabil (de nem normális) sűrűségfüggvényt is fogunk illeszteni. Ennek oka az, hogy a hozamok stabil eloszlása összegyeztethető azzal a bevezetőben említett feltevessel, hogy a hozamok különböző időskálákon - egy skálaparamétertől eltekintve - azonos eloszlásúak. Korábbi jelölésünket alkalmazva ugyanis a t időponttól a $t + T$ időpontig elért hozam $r_t(T) = \log P_{t+T} - \log P_t$ a fenti intervallumba eső kötésenkénti hozamok ($r_t(1)$) összege, és ha az utóbbiak szimmetrikus stabil eloszlásúak, akkor összegük eloszlása nyújtástól eltekintve az $r_t(1)$ eloszlásával egyező. A szimmetrikus stabil eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f_1(t) = 1/\pi \int_0^\infty \exp(-\gamma x^\alpha) \cos(tx) dx,$$

ahol γ egy skálaparaméter, α pedig a stabilitás indexe. n független azonos (fenti) eloszlású változó összegének sűrűségfüggvénye

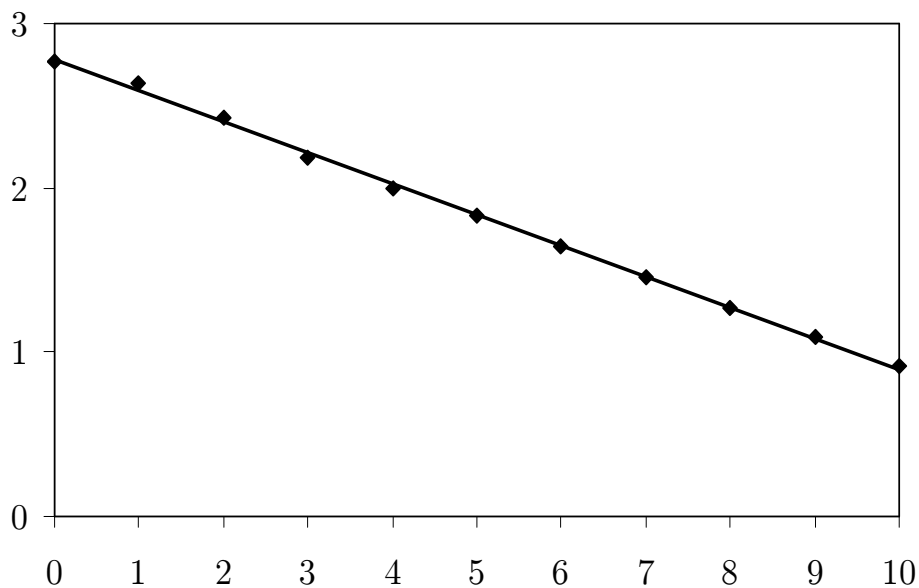
$$f_n(t) = 1/\pi \int_0^\infty \exp(-n\gamma x^\alpha) \cos(tx) dx.$$

Innen könnyen látható, hogy

$$f_n(0) = n^{-1/\alpha} f_1(0).$$

A MOL hozamok 7. ábrán látható hisztogramjára legjobban illeszkedő $f_1(t)$ függvény paramétereit most már a következőképpen határozzuk meg (Mantegna [1991,1995]). Először képezzük a hozamok mintájának n -szeres konvolúcióit - az eredeti minta elemeit n -esével csoportosítjuk, a csoportban szereplő elemeket összeadjuk, majd a kapott összegekből hisztogramot készítünk. Leolvassuk a hisztogram nullában felvett értékét - ez egy becslés $f_n(0)$ -ra. Ha

$f_n(0)$ -t n függvényében log-log skálán ábrázoljuk (8. ábra), akkor a fenti összefüggés szerint egyenest kell kapjunk, amelynek meredeksége $-1/\alpha$, tengelymetszete pedig $\log(f_1(0))$. A meredekségből kiszámítjuk α -t, a tengelymetszetből



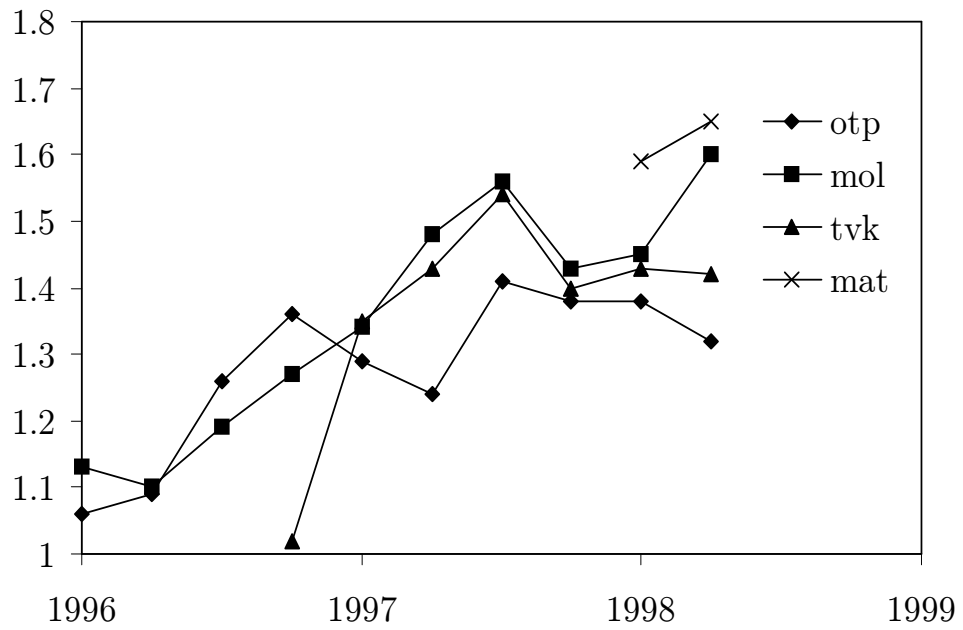
8. ábra. A stabilitás indexének (α) becslése az $f_n(0) = n^{-1/\alpha} f_1(0)$ relációból. A függőleges tengelyen $\log_{10} f_n(0)$, a vízszintes tengelyen $\log_2 n$. (MOL, 1998. második negyedév.)

pedig $f_1(0)$ -t. Az utóbbit ugyan közvetlenül az adatsorból is számolhatnánk, de mint korábban említettük, a kiindulási adatsor inkább kevert eloszlásnak tekinthető és a sok nulla miatt $f_1(0)$ -ra rosszabb becslést kapnánk. Kicsit pontosabban fogalmazva az így becsült paraméterekkel egy olyan eloszlást kapunk, amelyet megfelelően felskálázva (T darabot összeadva belőle) a T kötésenkénti hozamok sűrűségfüggvényének jó becslését kapjuk, és amely ugyanakkor elég jól közelíti az egy kötésenkénti hozamok eloszlását is, bár erről látjuk, hogy nem folytonos. Végül az $f_1(0) = \Gamma(1/\alpha)/\pi\alpha\gamma^{1/\alpha}$ matematikai összefüggésből

kiszámítjuk a γ skálaparamétert.

A 7. ábrán látható a becsült paramétereknek megfelelő stabil sűrűségfüggvény. A stabilitási index $\alpha = 1.60$ (0.02), a skálaparaméter $\gamma = 4.8 \times 10^{-6}$ (5×10^{-7}). (A zárójelben az egyenes illesztés hibáját tüntettük fel.) Látható, hogy a fenti sűrűségfüggvény a minta tízszeres szórásának (10σ) megfelelő tartományon belül jól illeszkedik az adatokra, szemben a normálissal, amely sem a hisztogram csúcosságát, sem a farokrészt nem követi. A $(-10\sigma, +10\sigma)$ intervallumon kívül a normális eloszlás szerint gyakorlatilag nulla valószínűséggel találhatnánk adatokat, az ábrán azonban több ilyen adat is szerepel. Az utóbbi megfigyelés azért is érdekes, mert a pénzügyi kockázatok becslésére gyakran a normális eloszlást használják, amellyel a fenti eredmények szerint alábecsülhetik a kockázatokat.

A stabil sűrűségfüggvények illesztését több részvényre és időszakra elvégeztük, az eredmények a 9. ábrán láthatók. Az ábrán megfigyelhető az index (α) növekedési trendje, valamint az, hogy a kereskedésbe később bekapcsolódó TVK gyorsan felzárkózik a többiekhez, a MATÁV pedig eleve magas α -val kezd. Mivel fejlett piacokon az indexre tipikusan 1.4 és 1.8 közötti értékeket mérnek, a fenti trendet értelmezhetjük úgy, hogy a BÉT ebben az értelemben fejlett piacnak számít.



9. ábra. A stabilitás indexének (α) időfüggése negyedéves lépésközönként az OTP, MOL, TVK és MATÁV részvényekre.

4. Percenkénti és árváltozásonkénti hozamok modellezése

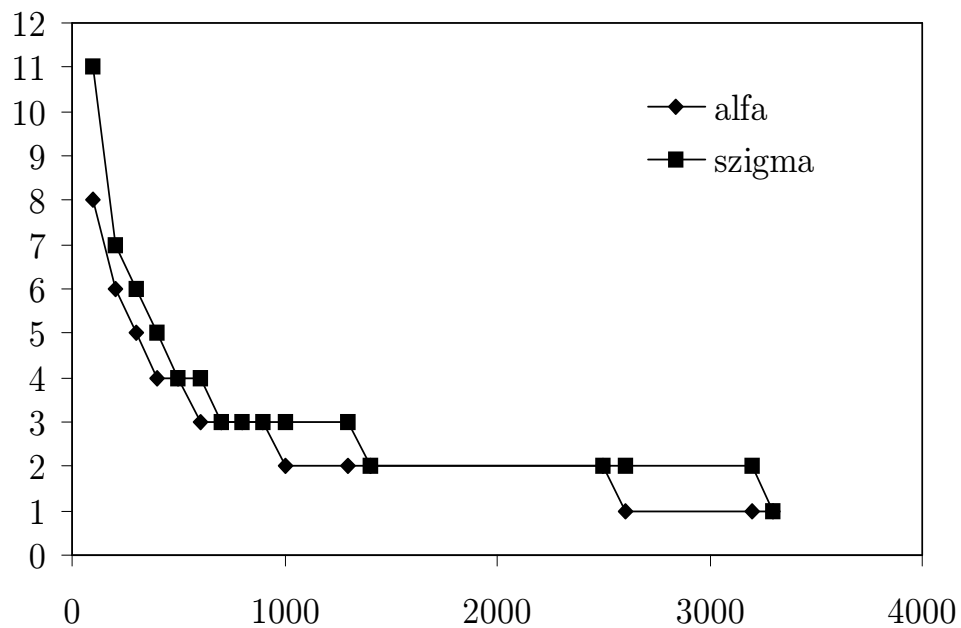
4.1. Adatok, változók, vizsgálati módszerek

Az elemzéshez használt adatbázis a MOL, MATÁV és CISCO részvényekre vonatkozó összes 1998-as kötést tartalmazta a következő tőzsdéken: NASDAQ (CISCO), NYSE (MATÁV), BÉT (MOL és MATÁV). A MATÁV-ra tehát két tőzsdéről is volt adatunk - azt szerettük volna vizsgálni, hogy a MATÁV hozamainak statisztikai tulajdonságai mennyire kötődnek a piachoz, ahol kereskednek vele, és mennyire magához a papírhoz. Sajnos meggyőző következtetésre ebben a kérdésben nem jutottunk, mert New York-ban jóval kevesebb (2798) kötés volt MATÁV-ra, mint Budapesten (62389) - ugyanezek a számok CISCO-ra 1575154, MOL-ra pedig 70840. (Itt csak azokat a kötések számoltuk, amelyekben az előző kötéshez képest változott az ár, ezt később indokoljuk.) Egy kötés adatai: dátum, idő (másodperc pontossággal), ár, mennyiség. Az óránkénti kötések száma így átlagosan 160 (MOL-BÉT), 2 (MATÁV-NYSE), 140 (MATÁV-BÉT), és 964 (CISCO-NASDAQ).

Az előző fejezethez hasonlóan itt is az $r_t(T) = \log P_{t+T} - \log P_t$ változót vizsgáljuk, ami a t időponttól a $t + T$ időpontig realizált hozam. Az idő itt egyrészt a fizikai időt jelenti, másrészt azon kötések számát, amelyeknél az ár megváltozott az előző kötés árához képest (ez röviden az árváltozások száma). Ez utóbbi fontos változás az előző fejezetbeli összes kötések számával történő időméréshez képest - a következő szakasz elején részletesen írunk erről.

Ebben a fejezetben is szimmetrikus stabil eloszlásokkal fogjuk a hozamokat modellezni. Az eloszlás két paraméterét (α, σ) maximum likelihood módszerrel becsüljük, vagyis adott x_1, \dots, x_n minta esetén a $-\sum_i \log f^{\alpha, \sigma}(x_i)$ összeget minimalizáló α, σ párt keressük ($f^{\alpha, \sigma}$ -val jelöltük a stabil eloszlás sűrűségfüggvényét). Az optimumkeresési feladat a célfüggvény bonyolultsága miatt elég nehéz. $f^{\alpha, \sigma}(x_i)$ kiértékelésére McCulloch [1998] módszerét használtuk, ezzel

a sűrűségfüggvény kiszámítása egy pontban egy átlagos PC-n kb. 10^{-5} másodperc, a pontosság pedig kb. 10^{-6} . Az optimumot a Nelder-Mead szimplex módszerrel kerestük meg. A 10. ábrán látható α és σ becslésének hibája a min-



10. ábra. A szimmetrikus stabil eloszlás α és σ paramétereinek becslési hibája (%) a mintaelemek számának függvényében.

taelemek számának (n) függvényében. Az ábra egy pontját úgy kaptuk, hogy adott α és σ értékek mellett generáltunk 100 darab n elemű stabil eloszlású mintát, mindegyik mintából megbecsültük α és σ értékét, majd kiszámoltuk az így becslt értékek szórását az adott eredeti érték százalékában.

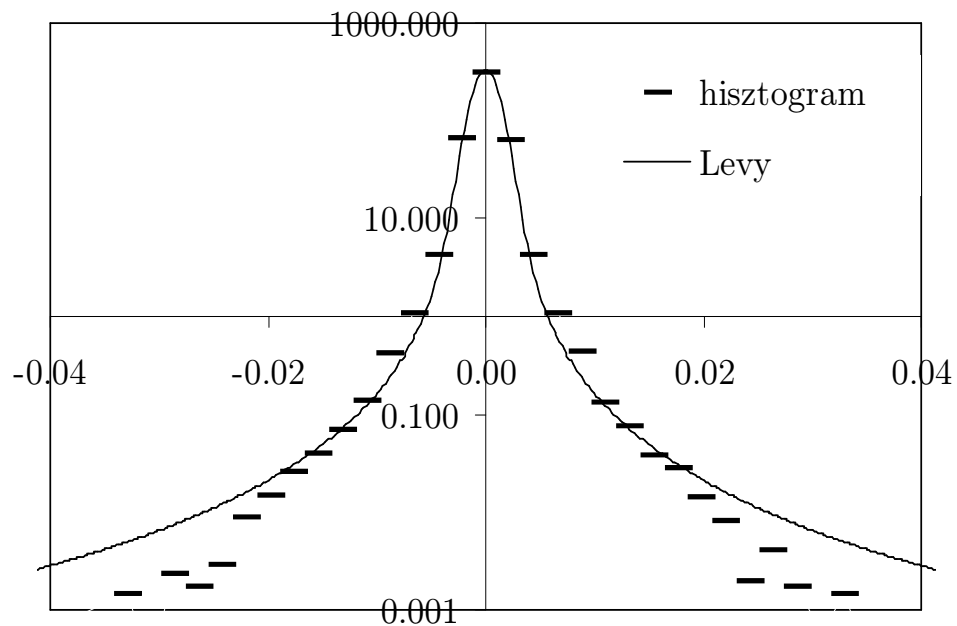
4.2. Az árváltozásonkénti hozamok eloszlása

Mint az előző fejezetben említettük, a kötésenkénti hozamoknak kb. 2/3-a nulla, ezért eloszlásuk nem tekinthető folytonosnak. Feltehetjük viszont, hogy a kötésenkénti hozamok eloszlása egy diszkrét (konstans nulla) és egy folytonos

(szimmetrikus stabil) eloszlás keveréke. Tudjuk, hogy az árváltozások eloszlása a piacokon megadott minimális árváltozás lépésköz miatt diszkrét, így a hozamok eloszlása is diszkrét. Ha az árszint nő, akkor a minimális árlépéshez tartozó hozam csökken, ezért a nem nulla hozamok elvileg tetszőlegesen közel kerülhetnek nullához, a megfigyelt mintában azonban nyilván van legkisebb pozitív hozam - ezt jelöljük r^+ -al. Ekkor a stabil eloszlásból húzott $[0, r^+/2]$ intervallumba eső hozamokat nullának tekinthetjük. Ugyanez vonatkozik a negatív oldalról nullához közel eső hozamokra. A kérdés most már az, hogy a megfigyelt nulla hozamok közül hányat tekintünk a konstans nulla eloszlásból húzottnak, és hányat a stabil eloszlásból húzottnak. Mivel a fenti kérdésre nem tudunk válaszolni, a továbbiakban feltesszük, hogy a megfigyelt nulla hozamok mind a diszkrét eloszlásból származnak. Ugyanakkor szimulált stabil eloszlású adatsorból megvizsgáltuk, hogy a nullához közeli adatok elhagyása milyen mértékben torzítja a paraméterek becslését. Számításaink szerint a torzítás mértéke a becslés hibahatárán belül van, és nem befolyásolja érdemben az alább ismertetendő eredményeket. A nullától különböző hozamokat a továbbiakban árváltozásonkénti hozamoknak nevezzük. A nulla hozamok elhagyására egyébként gondolhatunk úgy is, hogy új időskálát vezetünk be: amikor változik az ár a piacon, akkor lép egyet előre az óra. Másfelől a nullák elhagyásával azt az információt veszítjük el, hogy egy adott ár mellett hány kötés volt. Az utóbbi nyilván kapcsolatban van az adott ár mellett megforduló mennyiséggel, így a nullák meghagyásával a mennyiség „bele van keverve” az idő mérésébe, mivel azonban a mennyiséget nem próbáljuk itt modellezni, ismét logikusnak látszik a nullákat kihagyni. Erre a lépésre gondolhatunk úgy is, hogy az adott áron végbemenő tranzakciókat összevonjuk. Végül még egy szempont: ha rögzített fizikai időközönként vizsgáljuk az árváltozásokat, akkor lényegében a kötésenkénti nemnulla árváltozásokból képezünk véletlen összegeket, tehát a rögzített időközönkénti árváltozások folyamatát a kötésenkénti nemnulla árváltozások „hajtják”. A nulla árváltozások elhagyása mellett azonban érdekes lenne később modellezni azt a várakozási időt, ameddig egy adott

ár „tartja magát” a piacon, vagyis azt az időt ameddig egy árváltozásra várni kell.

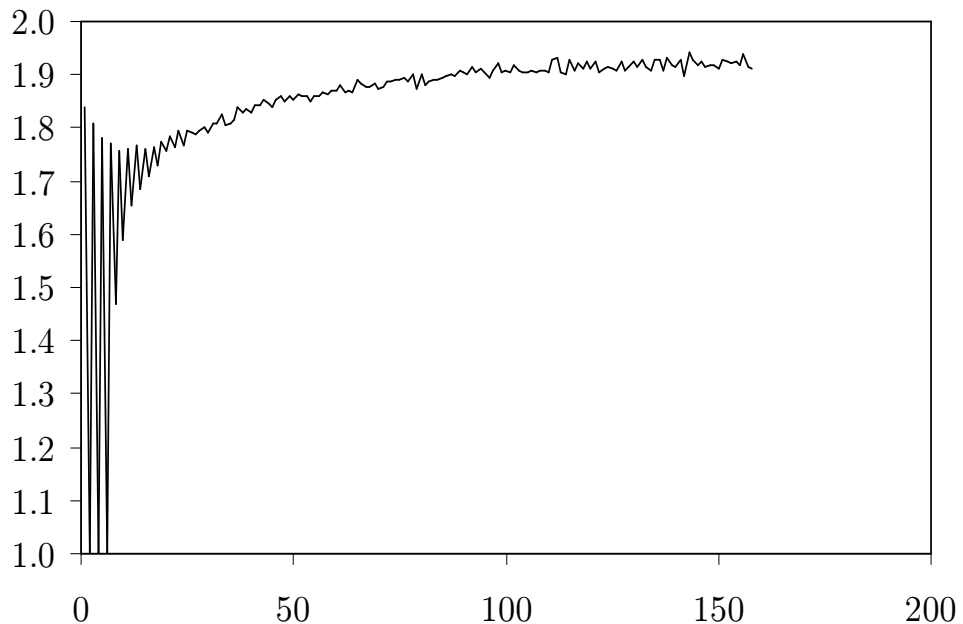
A 11. ábrán a CISCO 1998-as árváltozásonkénti hozamainak hisztogramja és az előző szakasz végén ismertetett módszerrel illesztett stabil (Lévy) sűrűségfüggvény láthatók. A függőleges tengelyen tízes alapú logaritmus skálát



11. ábra. A CISCO részvény nullától különböző kötésekénti hozamainak (1998) hisztogramja, és a maximum likelihood módszerrel illesztett stabil eloszlás (Lévy) sűrűségfüggvénye. A függőleges tengelyen tízes alapú logaritmus skálát használtunk.

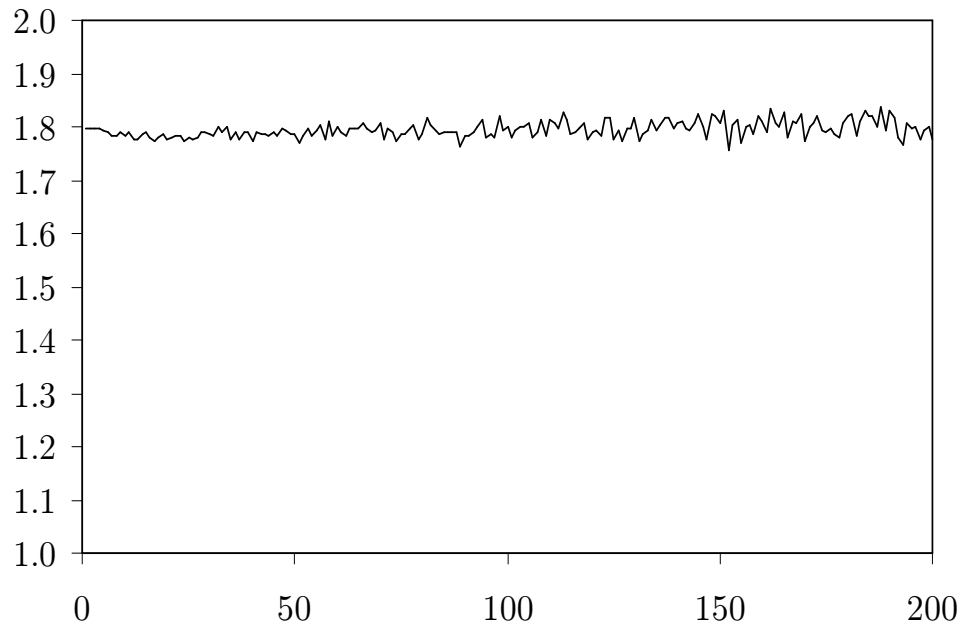
használtunk, így látszik, hogy az illeszkedés négy nagyságrenden keresztül elég jó. A Lévy sűrűségfüggvény farokrésze vastagabb, mint az adatsoré - erre a jelenségre számos utalást (Gopikrishnan, Meyer, Amaral, Stanley [1998], Mantegna, Stanley [1994], Koponen [1995], A. H.-L. Lau, H.-S. Lau, Wingender [1990]) találunk az irodalomban.

Az a kérdés, hogy az x_1, \dots, x_m adatsor stabil-e, vizsgálható úgy, hogy n -esével aggregáljuk az adatokat: $y_1 = x_1 + \dots + x_n$, $y_2 = x_{n+1} + \dots + x_{2n}$, \dots , és az így kapott y_1, \dots mintából újra becsüljük az α és σ paramétereket. Ha az x adatsor stabil volt, akkor az aggregált adatsorokból becsült α -k megegyeznek az x -ből becsülttel, σ_n^α pedig arányos n -el (σ_n az n -ed rendben aggregált adatsorból becsült skálaparaméter). Ha az x -ek a fenti hisztogrambeli hozamokat jelentik, akkor n -ed rendű aggregációjuk az a hozam, amit n árváltozás után el lehet érni a piacon. A 12-13. ábrákon látható α értékének alakulása az



12. ábra. A CISCO részvény n árváltozás után elért hozamaira (1998) illesztett stabil eloszlás α paramétere n függvényében.

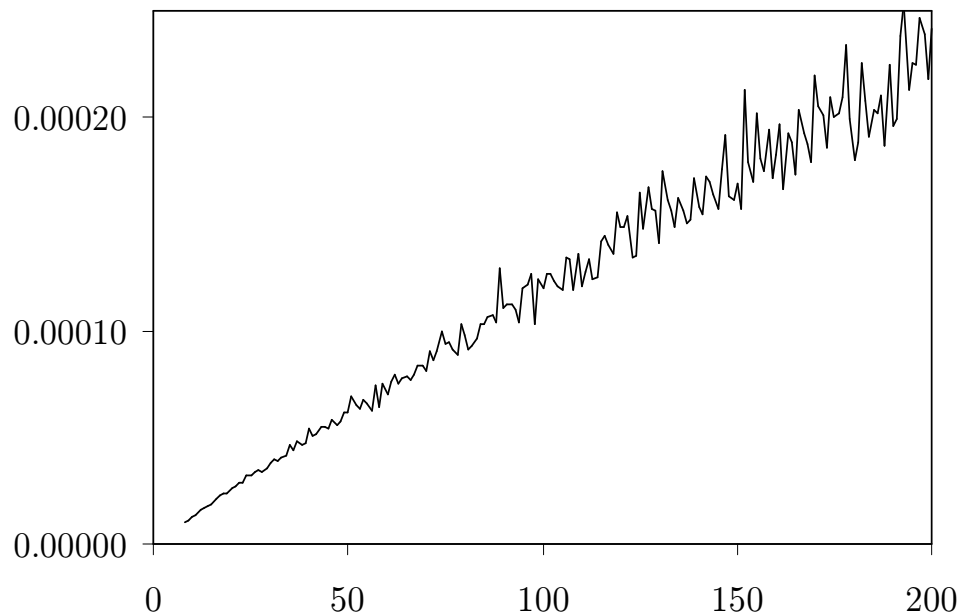
aggregáció függvényében a CISCO fenti árváltozásonkénti hozamaiból és egy $\alpha = 1.8$ indexű szimulált adatsorból kiindulva (a szimulált kiindulási minta mérete 200000 volt). Látható, hogy a szimulált adatsor α -ja jó közelítéssel állandó, míg a CISCO-é gyorsan (150 kötés átlagosan tíz percre esik) tart



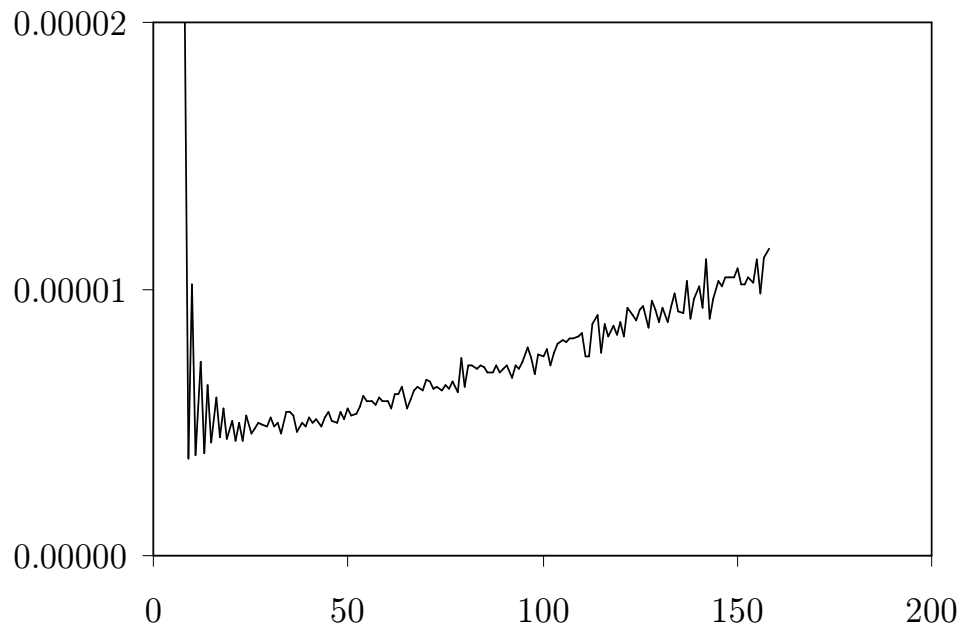
13. ábra. $\alpha = 1.8$ indexű szimulált stabil eloszlású minta (az elemszáma 200000) stabilitásának vizsgálata. A függőleges tengelyen a minta n -szeres konvolúcióiból maximum likelihood módszerrel becsült α paraméter értéke látható n függvényében.

kettőhöz. Az utóbbi megfigyelést úgy értelmezhetjük, hogy ha az árváltozásonkénti hozamok független, azonos eloszlásúak, és véges a szórásuk, akkor összegük - megfelelően skálázva - normális eloszláshoz tart (ennek α indexe 2). Az árváltozásonkénti hozamok egyébként nem függetlenek, rövid távon erősen korrelálnak, ennek tudható be a grafikon elején a becsült α ingadozása. A hozamok elsőrendű autokorrelációja negatív (CISCO-ra kb. $-0,3$) gyakoriak a fel-le típusú mozgások, ezért amikor az aggregáció rendje páros, ezek nagyjából kiejtik egymást, és sok nulla kerül az adatsorba. Ettől csúcsosabb lesz az origóban az eloszlás, ami kisebb α értéket ad. Néhány árváltozás után azonban ez a hatás lényegében eltűnik (ld. később ARMA).

A 14-15. ábrákon a σ paraméter aggregációtól való függését láthatjuk ugyancsak a szimulált adatsorra és CISCO-ra. A függőleges tengelyen σ^α szerepel, ez az aggregációtól lineárisan függ a szimulált adatsor esetén (az egyenes jobb felén tapasztalható vibrálások attól vannak, hogy az aggregációval a minta mérete csökken, és így nagyobb a becslési hiba). A CISCO grafikonja könnyen értelmezhető: az elején a vibrálás a rövid távú autokorreláció hatása, a vége pedig nagyjából egyenes, annak megfelelően, hogy itt α értéke majdnem állandó (kettő).

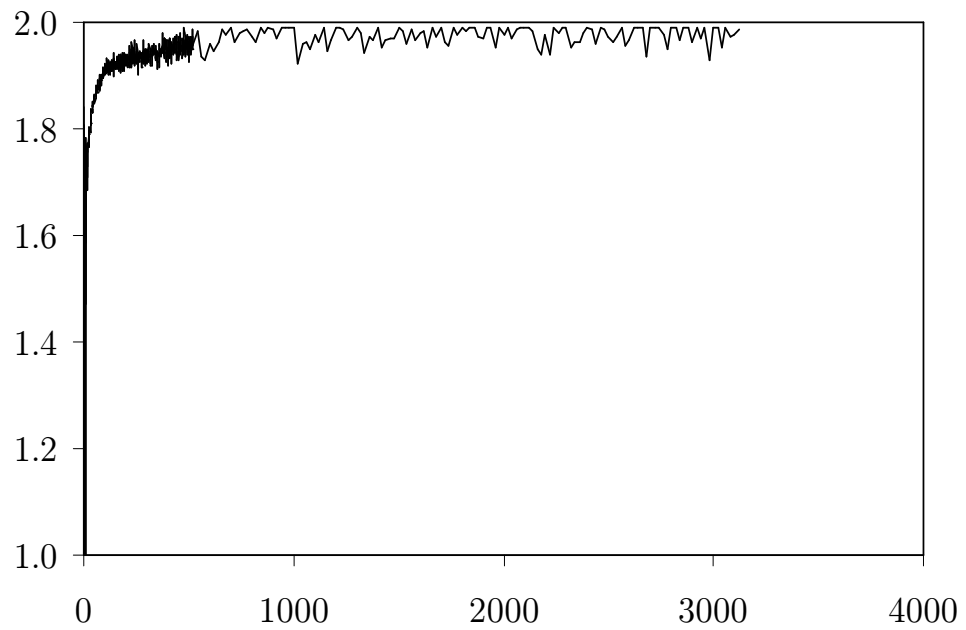


14. ábra. σ_n^α grafikonja n függvényében. Szimulált adatsor.

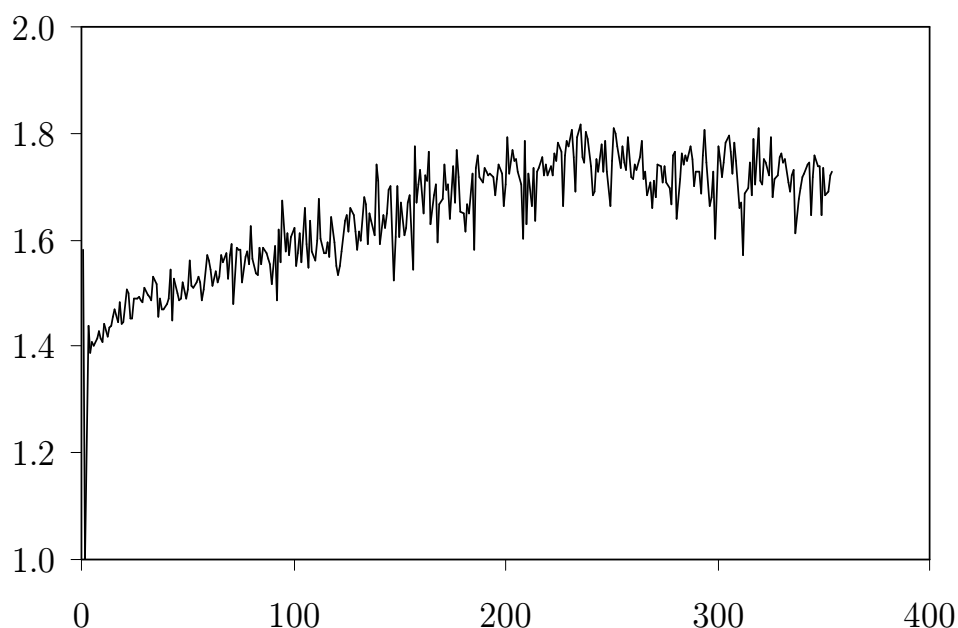


15. ábra. σ_n^α grafikonja n függvényében (CISCO).

A 16. és 17. ábrákon összehasonlítjuk a CISCO-ra kapott eredményeket a MOL-ra kapottakkal. Látható, hogy a MOL grafikonja „zajosabb”, mert kevesebb adat volt, a rövid távú autokorreláció hatása ugyanúgy megvan, mint CISCO-ra, viszont amíg a CISCO α -ja gyorsan tart kettőhöz, addig a MOL α -ja 1,6 és 1,8 között megrekedni látszik - a hosszabb távú hatást sajnos nem látjuk, mert az aggregáció miatt túl kevés adat marad a megbízható becsléshez.



16. ábra. A CISCO részvény n árváltozás után elért hozamaira (1998) illesztett stabil eloszlás α paramétere n függvényében. Fél napra átlagosan 2000 árváltozás jut.



17. ábra. A MOL részvény n árváltozás után elért hozamaira (1998) illesztett stabil eloszlás α paramétere n függvényében. Fél napra átlagosan 160 árváltozás jut.

A fenti becslési eljárások során feltettük, hogy a hozamok eloszlása egymástól független. Láttuk azonban, hogy ez a feltevés nem teljesül, a hozamok erős negatív elsőrendű autokorrelációt, és lényegesen kisebb, de nullától esetleg különböző magasabb rendű autokorrelációt mutatnak. Ezt az autokorrelációt is modellezni kell ahhoz, hogy a hozamok eloszlását meghatározó paraméterek konzisztens becslését kaphassuk. Az autokorreláció leírásához megpróbáltuk a hozamokat ARMA folyamattal modellezni:

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \dots + \phi_p x_{t-p} + z_t + \vartheta_1 z_{t-1} + \dots + \vartheta_q z_{t-q}$$

amelyben x_t jelenti a hozamokat, $\beta = (\phi_1, \dots, \phi_p, \vartheta_1, \dots, \vartheta_q)$ a modell paramétereit, z_t pedig innovációk sorozata, amelyek függetlenek és azonos eloszlásúak. Tegyük fel, hogy az x_1, \dots, x_m értékeket a fenti ARMA modellel generáltuk a

$\beta_0 = (\phi_{01}, \dots, \phi_{0p}, \vartheta_{01}, \dots, \vartheta_{0q})$ paraméter értékek mellett. Ekkor a β_0 paramétervektor egy becslését adja a

$$\sum_{t=1}^m \rho(z_t(\beta))$$

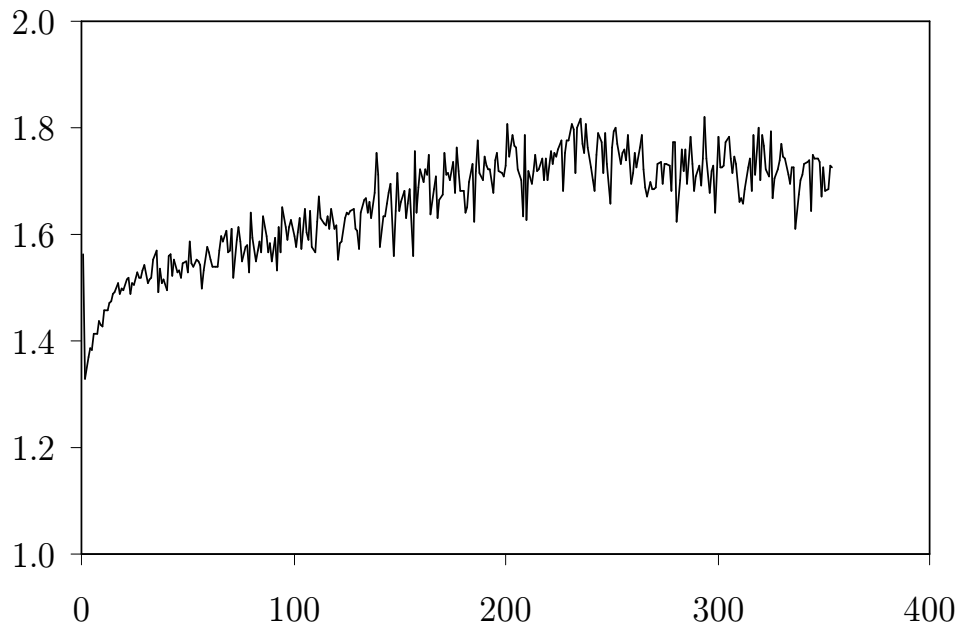
célfüggvény $\hat{\beta}$ minimumhelye. A képletben szereplő ρ egy alkalmasan választott függvény (ld. később), $z_t(\beta)$ pedig az innovációk sorozatának egy becslése. Adott β paramétervektor és x_1, \dots, x_m megfigyelések mellett a $z_1(\beta), \dots, z_m(\beta)$ becsléseket iterációs eljárással kapjuk. Az első lépésben a $t = 1$ időpont előtti p számú megfigyelés (x_0, \dots, x_{-p+1}) és q számú innováció ($z_0(\beta), \dots, z_{-q+1}(\beta)$) értékét nullában rögzítjük, majd a $t = 1$ időponttól indulva növekvő időrendi sorrendben kiszámítjuk a $z_t(\beta)$ értékeket a fenti ARMA egyenlet átrendezéséből:

$$z_t(\beta) = x_t - \phi_1 x_{t-1} - \dots - \phi_p x_{t-p} - \vartheta_1 z_{t-1}(\beta) - \dots - \vartheta_q z_{t-q}(\beta).$$

A ρ függvény különböző megválasztásaival eltérő becslési módszereket kapunk. A $\rho(x) = x^2$ választás a legkisebb négyzetek módszerének (LS) felel meg, $\rho(x) = |x|$ mellett pedig az innovációk abszolút értékeinek összegét minimalizáljuk (LAD módszer). Ha feltesszük, hogy az innovációk szimmetrikus stabil eloszlásúak, akkor a $\rho(x) = -\log f^{\alpha, \sigma}(x)$ választás mellett ($f^{\alpha, \sigma}$ az α és σ paraméterű szimmetrikus stabil sűrűségfüggvény) a maximum likelihood (ML) módszert kapjuk. A célfüggvény minimumhelyét az utóbbi esetben a β, α, σ paramétertérben keressük. A stabil sűrűségfüggvény kiértékeléséhez és a célfüggvény optimalizálásához a már fentebb ismertetett algoritmusokat használtuk. Calder és Davis [1998] szimulált stabil eloszlású adatsorokon összehasonlították a fenti becslési módszerek aszimptotikus tulajdonságait, és úgy találták, hogy a LAD, valamint a ML jobb eredményeket ad, mint a LS módszer. Az utóbbi a vastag farkú eloszlásoknál azért nem előnyös, mert túlságosan érzékeny a kilógó értékekre, és egy leptokurtikus eloszlás esetében ezek gyakorisága lényegesen nagyobb, mint normális eloszlás esetén. Tapasztalataink megerősítik a fenti szerzők megállapításait. A modell identifikációját - p és q legjobb

értékeinek megkeresését - úgy csináltuk, hogy p és q összes lehetséges párosításához (mindkettő minimális értéke 0 maximális értéke 4 volt) mindhárom módszerrel megbecsültük a modellt, és azt a becslést tartottuk meg, amelyre az innovációk autokorrelációinak négyzetösszege (a tizedrendű autokorrelációval bezárva) a legkisebb volt.

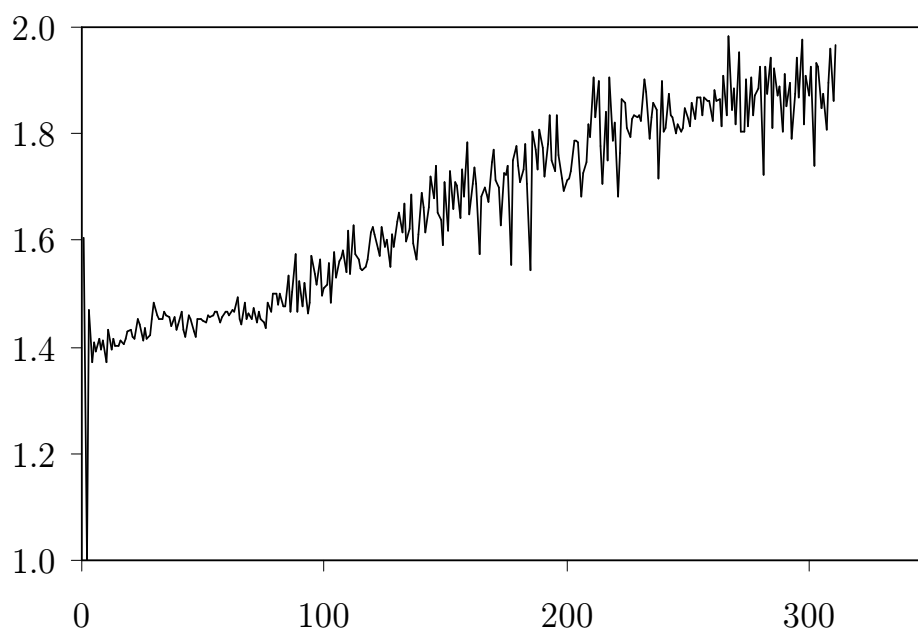
A 18. ábrán a MOL hozamokra illesztett MA(1) modell innovációinak kü-



18. ábra. A MOL részvény nullától különböző kötésenkénti hozamaira illesztett MA(1) modell innovációinak stabilitása.

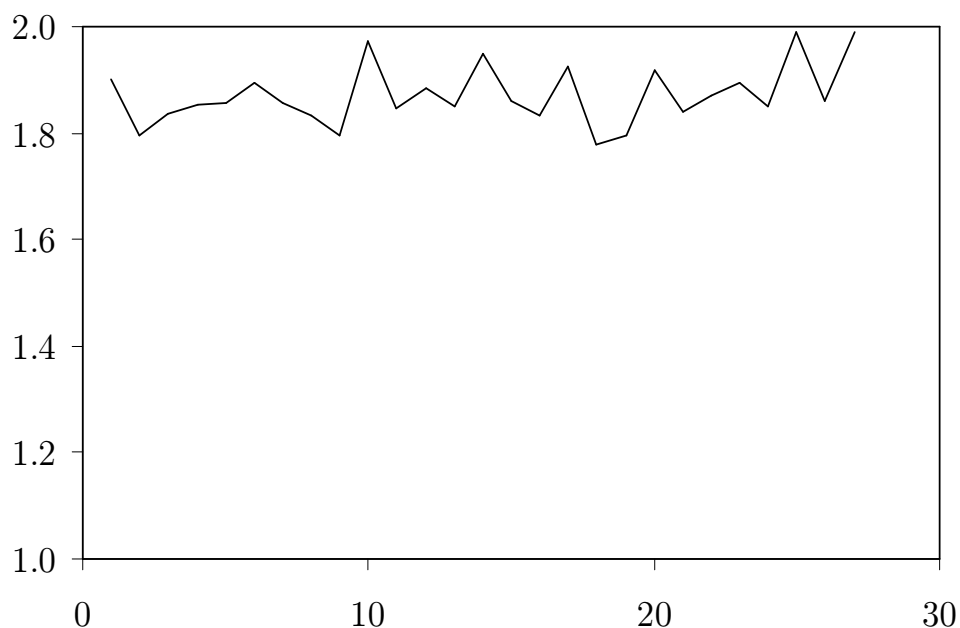
lönböző rendű aggregációiból becsült α értékek láthatók az aggregáció függvényében. Ezzel azt vizsgáljuk, hogy az innovációk stabilak-e. A 17. ábrán szereplő grafikonnal összehasonlítva láthatjuk, hogy az MA(1) szűrés után eltűnik az α vibrálása (kiszűrtük az autokorrelációt), egyébként a két grafikon hasonlít egymásra.

A 19-20. ábrákon a MATÁV aggregált hozamaiból becsült α -k láthatók



19. ábra. A MATÁV részvény (BÉT adatok) n árváltozás után elért hozamaira (1998) illesztett stabil eloszlás α paramétere n függvényében.

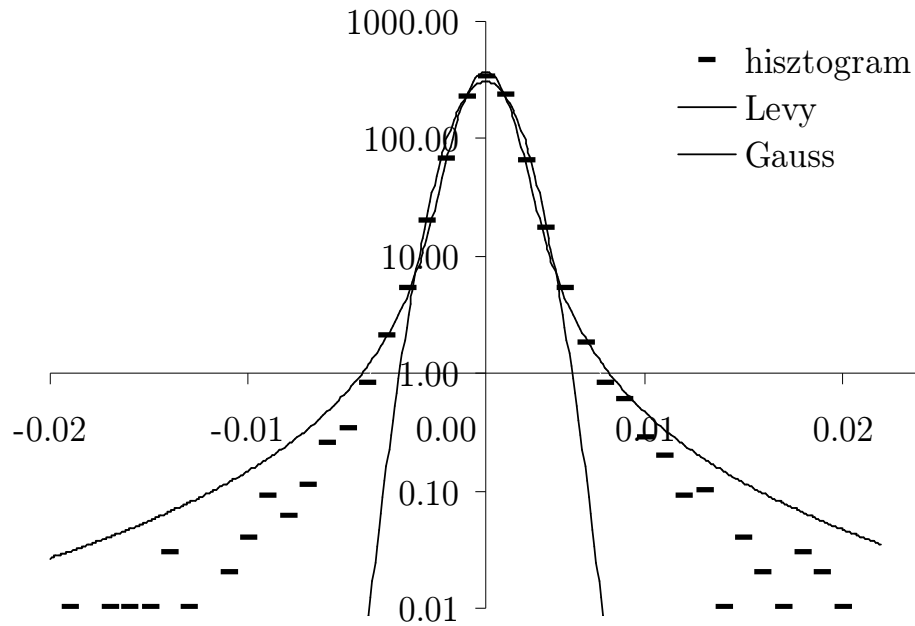
az aggregáció függvényében: a 19. ábrán az itthoni, a 20. ábrán az amerikai adatok. Mint a bevezető részben említettük, a tranzakciók száma a két tőzsdén lényegesen eltér, ezért messzemenő következtetéseket az összehasolításból nem lehet levonni. Mindazonáltal láthatjuk, hogy az α értékek a kinti adatokon közelebb vannak kettőhöz. Az itthoni adatok grafikonján két dolgot érdemes megfigyelni: az egyik az, hogy rövid időtávon (átlag kb. fél órán keresztül) stabilnak látszik az index, a másik pedig az, hogy a MOL-hoz képest jobban megközelíti a kettőt.



20. ábra. A MATÁV részvény (NYSE adatok) n árváltozás után elért hozamaira (1998) illesztett stabil eloszlás α paramétere n függvényében.

4.3. A percenkénti hozamok eloszlása

Mint korábban említettük, a percenkénti hozamokat tekinthetjük az árváltozásonkénti hozamok aggregációjának. Mivel egy adott percre (vagy más rögzített időközre) véletlen sok árváltozás esik, ezért véletlen aggregációról van szó. Láttuk, hogy az árváltozásonkénti hozamok eloszlása viszonylag „barátságos” abban az értelemben, hogy a hozamok összegének eloszlása gyorsan tart a normálishoz. Most azt fogjuk vizsgálni, hogyan változik a helyzet, ha ezeknek a „barátságos” hozamoknak véletlen összegeivel állunk szemben. A 21. ábrán a CISCO percenkénti (1998) hozamainak hisztogramja, valamint az illesztett normális és Lévy eloszlások grafikonjai láthatók. Kvalitatíve hasonló az ábra az árváltozásonkénti változathoz: a Lévy eloszlás a középső tartományon jobban írja le az adatokat, mint a normális (a függőleges tengelyen a

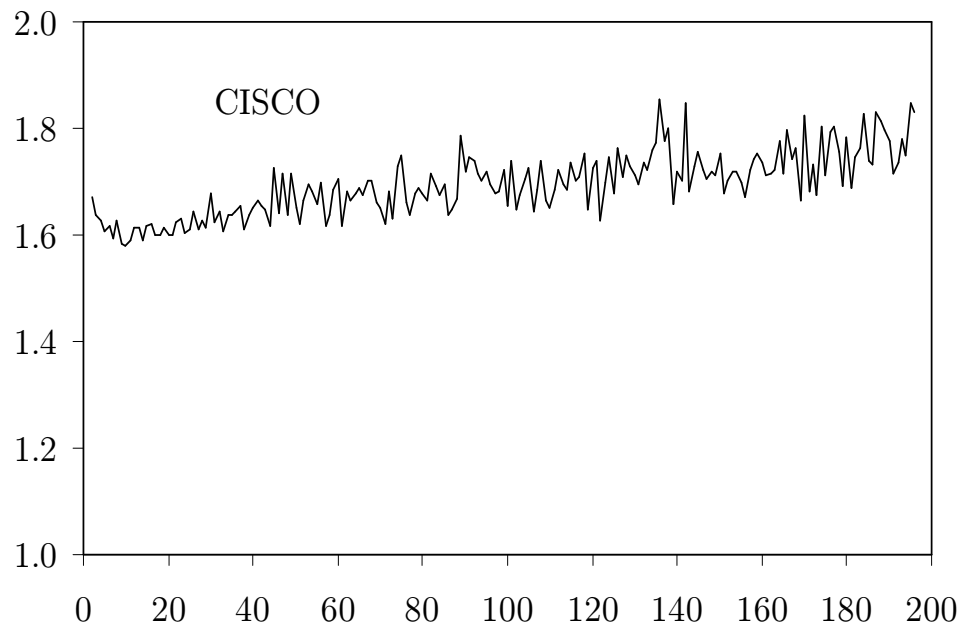


21. ábra. A CISCO részvény percnkénti hozamainak (1998) hisztogramja, a maximum likelihood módszerrel illesztett stabil eloszlás (Lévy) sűrűségfüggvénye, és a mintára illesztett normális eloszlás (Gauss) sűrűségfüggvénye. A függőleges tengelyen tízes alapú logaritmus skálát használtunk.

Lévy görbe kb. egy nagyságrenddel tovább illeszkedik a hisztogram pontjaira, mint a normális), a Lévy eloszlás farokrésze azonban vastagabb, a normálisé pedig vékonyabb, mint az empirikus sűrűségfüggvényé.

Az előző szakaszban leírtakhoz hasonlóan itt is vizsgáljuk az α index időfüggését, tehát az adatsor stabilitását. Az eredményeket a következő három ábrán láthatjuk: CISCO (22. ábra), MOL (23. ábra), MATÁV (24. ábra). MATÁV adatokat ebben az esetben csak a BÉT-ről közlünk, mert az amerikai tőzsdén nem volt elég likvid a papír ahhoz, hogy percnkénti hozamait vizsgáljuk. Mindhárom ábrán a vízszintes tengelyen az idő van percekben, a függőleges tengelyen pedig a stabilitás indexe α . (Így például a 10 perchez

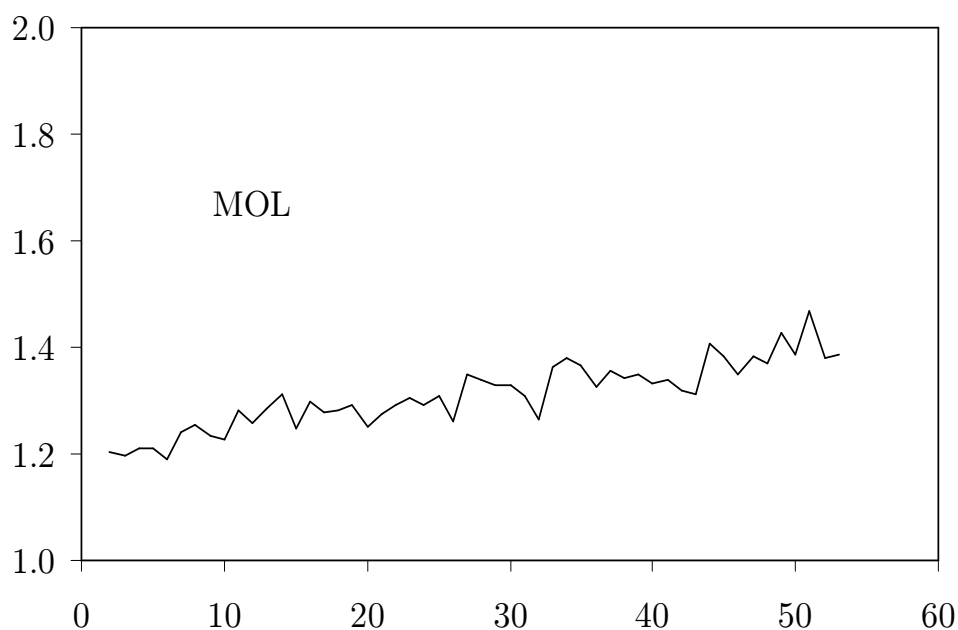
tartozó α érték a 10 percenkénti hozamokra illesztett stabil eloszlás indexe.) Vessük össze az ábrákat az árváltozásonkénti hozamokra kapott hasonló ábrákkal (16,17,19. ábrák). A NASDAQ-on, ahol a CISCO-val kereskednek, egy



22. ábra. A CISCO részvény n perces hozamaiból (1998) maximum likelihood módszerrel becsült stabil eloszlás α indexe n függvényében. 200 perc kb. fél napnak felel meg.

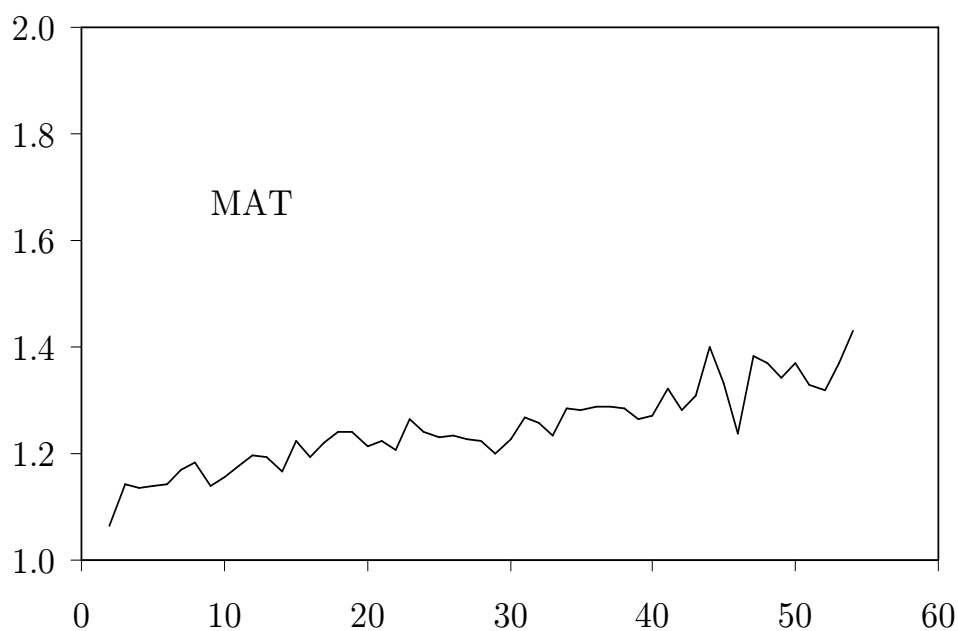
átlagos kereskedési nap a vizsgált időszakban 390 perc volt, így a 22. ábrán az utolsó adatok a félnapos hozamokat jelentik. Ennyi időre átlagosan 2000 árváltozás jut. A 16. ábrán viszont látható, hogy a 2000 árváltozásonkénti hozamok α -ja lényegében kettő (valójában már az 500-ik árváltozásnál majdnem kettő az α - ez kb. fél órának felel meg. A 22. ábrán ezzel szemben α -igen lassú emelkedés mellett- szinte végig 1.8 alatt marad. A jelenség azzal magyarázható, hogy a „barátságos” árváltozásonkénti hozamokat egy „barátságatlan” eloszlás szerint aggregáltuk. Az adott fizikai időintervallumra jutó

árváltozások száma ugyanis szélsőségesen változik a piac aktivitásának megfelelően. Amint a következő szakaszban látni fogjuk, rögzített időközönként nagyobb lesz a kockázatunk, mint az adott időközre átlagosan jutó árváltozásonként. Hasonló jelenséget tapasztalunk a MOL és MATÁV részvények esetén is, bár az eltérés a két időskála között itt nem annyira kirívó. A BÉT-en a



23. ábra. A MOL részvény n perces hozamaiból (1998) maximum likelihood módszerrel becsült stabil eloszlás α indexe n függvényében. 50 perc kb. fél napnak felel meg.

vizsgált időszakban egy átlagos kereskedési nap kb. 108 perc hosszú volt, így a 23-24. ábrák utolsó pontjai itt is a félnapos hozamoknak felelnek meg. Fél napra MOL esetében átlag 160, MATÁV esetében pedig átlag 140 árváltozás jut. A megfelelő α értékek (ld. 17,19. ábrák) mindkét részvényre 1,6 körül vannak, tehát kicsit magasabbak, mint a félnapos hozamokhoz tartozó alfák (ezek értéke kb. 1,4 mindkét papírra).



24. ábra. A MATÁV részvény n perces hozamaiból (BÉT, 1998) maximum likelihood módszerrel becsült stabil eloszlás α indexe n függvényében. 50 perc kb. fél napnak felel meg.

Sajnos ahhoz kevés az adatunk, hogy hosszabb fizikai időskálákon is vizsgáljuk az α index viselkedését, annyit azonban leszűrhetünk a fenti elemzésből, hogy a fizikai időközönként mért hozamok α -ja alacsonyabb, mint az árváltozásonkénti hozamoké, és lassabban konvergál kettőhöz. A két időskála összehasonlításához az adott időtartamra jutó árváltozások számának átlagát használtuk, ez azonban nem igazán jó jellemzője a tényleges árváltozások számának, mert az utóbbi egymást követő időintervallumonként szélsőségesen változik a piac aktivitásának megfelelően. A következőkben e viselkedésnek a kockázatokra való hatását vizsgáljuk.

4.4. Kockázatosított érték számítás napon belüli hozamokból

4.4.1. A kockázatosított érték fogalma

Egy befektetést akkor érzünk kockázatosnak, ha szélsőséges piaci áringadozásoknak van kitéve. A kockázatosított érték (Value at Risk, VaR) fogalma ezt a kockázatot számszerűsíti: adott konfidencia szint (pl. 99%) és befektetési időtartam (pl. 1 nap) mellett a VaR az az összeg, amelynél többet a befektetés időtartama alatt a portfóliónk 99%-os valószínűséggel nem veszít az értékéből. Ezt az összeget szokás a portfólió pillanatnyi piaci értékének százalékában is megadni. Például, ha felteszük, hogy portfóliónk napi hozamai függetlenek és azonos eloszlásúak, akkor a napi kockázatosított értékünk (százalékban) $\max(-x_{1\%}, 0)$, ahol x_q a hozamok eloszlásfüggvényének q -kvantilise. Nulla várható értékű normális eloszlást feltételezve ez a szám kb. 2.33σ , ahol σ a napi hozamok szórása.

Mire használható a VaR fogalma? Egy befektető gondolkodhat például úgy, hogy a pénzének egy részéből egy kockázatos portfóliót hoz létre, a megmaradó pénzből pedig a portfólió „mellé teszi” annak kockázatosított értékét. Ekkor 99% a valószínűsége annak, hogy a befektetés időtartama alatt a „portfólió plusz VaR összegű készpénz” összértéke nem megy a portfólió kiindulási értéke alá. Ha a portfólió mondjuk egy határidős pozícióból áll, akkor 99% a valószínűsége annak, hogy a napi finanszírozáshoz a tartalékba helyezett VaR összegű készpénzen túl már nem kell mélyebben a zsebünkbe nyúlnunk. Első pillantásra a maradék 1% kockázat kicsinek tűnik, de ha belegondolunk, ez átlagban legalább két kereskedési napot jelent évente, amikor a „kellemetlen” esemény bekövetkezhet. A VaR fogalmának nagyobb hiányossága azonban az, hogy nem mond semmit arról, hogy mi történik, amikor bekövetkezik az 1% valószínűségű kellemetlen esemény. Mennyi lesz ilyenkor a várható veszteségünk? A VaR kétszerese, vagy esetleg a tízszerese? A normális eloszlás ilyen szempontból elég barátságos: annak a valószínűsége például, hogy a VaR

kétszeresénél többet veszünk, feltéve, hogy a veszteségünk túllépi a VaR-t, mindössze 0.03%. A tapasztalat szerint azonban az ilyen események lényegesen gyakoribbak.

A továbbiakban azzal foglalkozunk, hogyan lehet kockázatosított értéket számolni rövid távú (akár árváltozásonkénti, vagy percenkénti) hozamokból. Ez a kérdés egyrészt azért lehet fontos, mert a nap végi adatokból számolt VaR pontatlan, ráadásul ha pusztán a nap végi adatokat használjuk, rengeteg információt eldobunk az eredeti idősorból. A BÉT-en például már 1998-ban is napi átlag 600 – 1000 kötés született a likvid papírokra, ugyanez a szám a NASDAQ-on 10000 – 15000, de ennél likvidebb piacok is vannak. Természetesen a nap végi árakra „jobban odafigyel” a piac, mint egy napon belüli kötés árára, így az előbbieknél nagyobb a jelentőségük, de nem annyival, hogy a napon belüli adatokat érdemes legyen „eldobni”. Ahhoz, hogy az árak folyamatát pontosabban modellezzük, érdemes az egész folyamatot vizsgálni, még akkor is, ha csak hosszabb időskálákon érdekelnek minket az eredmények. Egy másik ok, ami miatt a rövid távú hozamokkal érdemes foglalkozni az, hogy napon belüli ún. day-trade ügyletek kötésekor az egy napnál rövidebb időskálán is érdemes kockázatosított értéket számolni. Amint látni fogjuk, rövidebb időtávokon a hozamok normalitásának feltevése még kevésbé állja meg a helyét, mint napi szinten, és a VaR becslésével is óvatosabbnak kell lennünk.

4.4.2. Adott kockázatosított érték eléréséhez szükséges várakozási idők vizsgálata

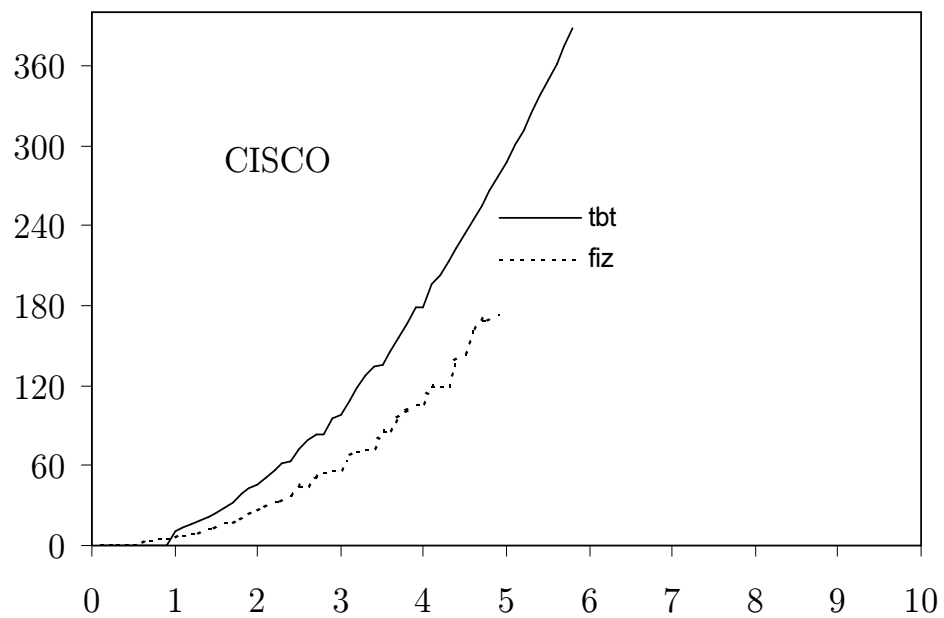
A szokásos VaR számítás úgy történik, hogy megadunk egy konfidenciaszintet és egy időhorizontot, majd az adott időhorizonthoz tartozó eloszlás kvantiliséből kiszámítjuk a VaR-t. Ha az időt fizikai időben (pl. percekben) mérjük, akkor az előző fejezet eredményei alapján a számolás egyszerű: a megfelelő grafikonról leolvassuk az adott időhorizonthoz tartozó α és σ paramétereket, majd kiszámoljuk az így kapott szimmetrikus stabil eloszlás kvantilisét.

Ebben a szakaszban azt fogjuk vizsgálni, hogy adott VaR érték eléréséhez

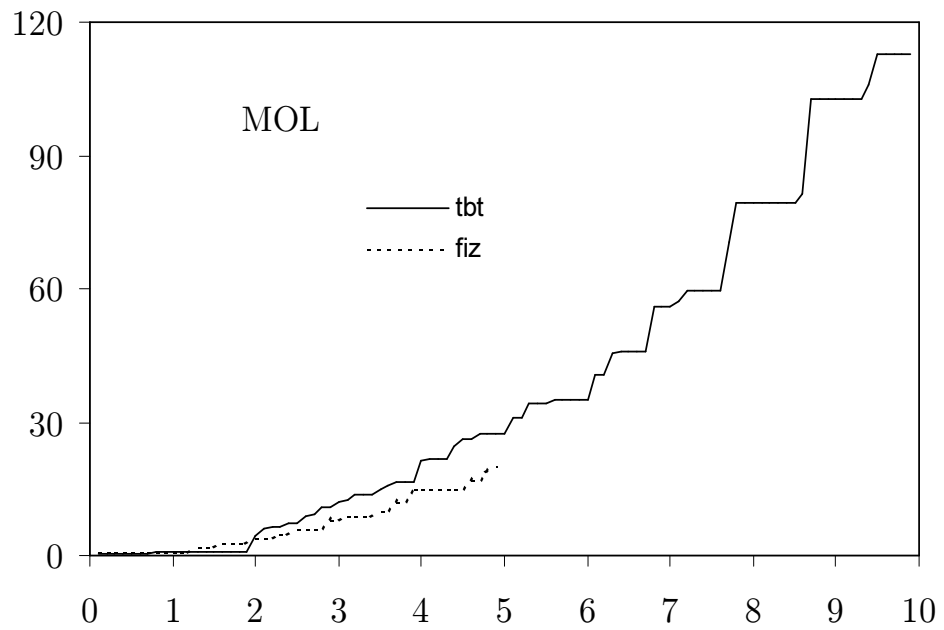
mennyi időre van szükség. Ez a kérdés - mint rögtön látni fogjuk - természetes módon akkor vetődik fel, ha az időt a kötések, ill. az árváltozások számával mérjük. Bizonyos esetekben akkor is van értelme a kérdésnek, ha az időmérésre a fizikai időt használjuk, pl. kíváncsiak lehetünk arra, hogy adott alapletét mellett mennyi ideig tarthatunk nyitva egy pozíciót úgy, hogy a VaR ne haladja meg az alapletét mértékét. Az is érdekes kérdés - ezzel itt nem foglalkozunk - hogy a kapott idő alatt milyen valószínűséggel tudjuk zárni a pozíciónkat.

Azt a kérdést, hogy adott VaR szint eléréséhez mennyi időre van szükség, a következőképpen vizsgáljuk. Rögzítünk egy VaR értéket, majd nulláról indulva növeljük a VaR időhorizont hosszát, és az éppen aktuális időhorizonthoz tartozó α és σ paramétereket leolvassuk e fejezet megfelelő grafikonjairól. Ezután a kapott paraméterekhez tartozó stabil eloszlás kvantiliséből kiszámítjuk az aktuális időhorizonthoz tartozó VaR-t. Mint láttuk, a paraméterek változnak az idő függvényében: α értéke nő, ami adott σ mellett csökkenő VaR-t jelentene, σ értéke viszont szintén nő, mégpedig úgy, hogy összességében növekvő időhorizontokhoz növekvő VaR-t fogunk kapni, amint azt természetesen vártuk. Végül azt az időhorizontot jegyezzük fel, ahol elértük az adott VaR értéket. Ha az időhorizontot percekben mértük, akkor készen vagyunk, ha pedig az árváltozások számával, akkor kiszámítjuk, hogy átlagban hány perc alatt történik meg az adott számú árváltozás.

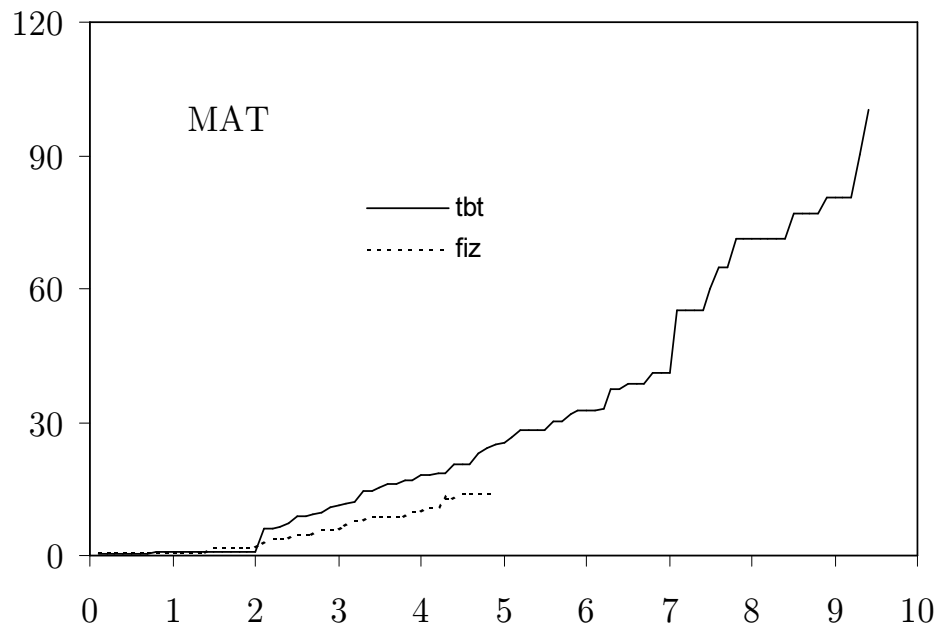
A 25-28. ábrákon különböző VaR (99% konfidencia szint mellett) értékek függvényében ábrázoltuk az elérésükhöz szükséges (fenti módon számított) várakozási időket. A „tbt” jel az árváltozások számából konvertált fizikai időt jelenti, a „fiz” pedig az eleve fizikai időskálán mért VaR-t. Mindegyik ábrán az látszik, hogy egy adott VaR értékhez tartozó időhorizont rövidebb, mint az adott VaR eléréséhez szükséges árváltozások számának megfelelő átlagos várakozási idő. (A „fiz” jelű görbék azért érnek véget előbb, mint a „tbt” jelűek, mert az időhorizontot növelve túl kevés adat marad a becsléshez.) Hozzá kell tennünk azonban, hogy a várakozási idők szórása nagy, ezért adott VaR szintet a piac aktivitásától függően igen gyorsan elérhetünk.



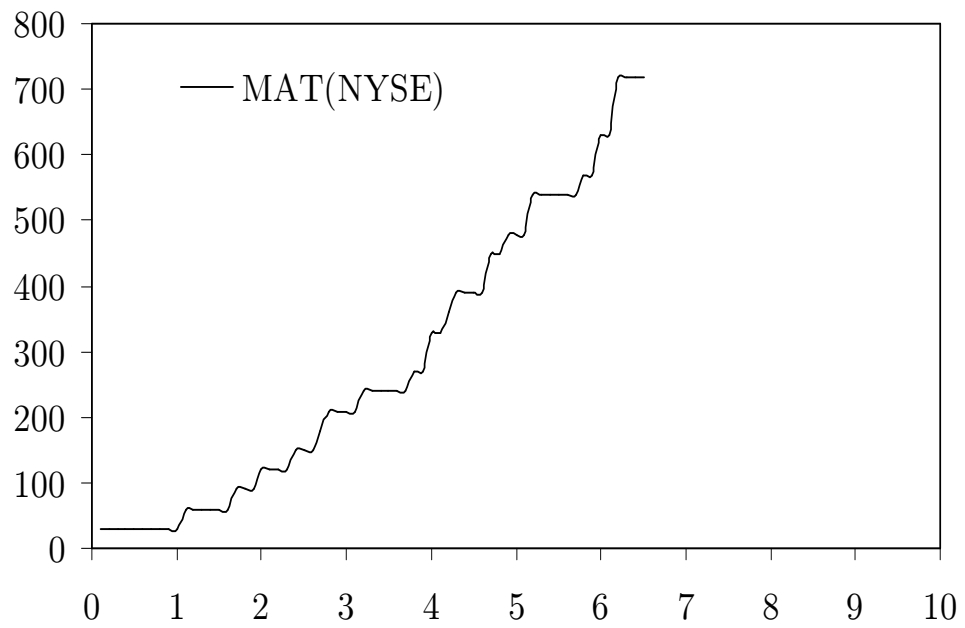
25. ábra. Adott kockázatosított érték (vízszintes tengely, %) eléréséhez szükséges idő (függőleges tengely, perc). A "tbt" jel az árváltozások számából konvertált átlagos fizikai időt jelenti, a "fiz" pedig az eleve fizikai időskálán mért VaR-t.



26. ábra. Adott kockázatos érték (vízszintes tengely, %) eléréséhez szükséges idő (függőleges tengely, perc). A "tbt" jel az árváltozások számából konvertált fizikai időt jelenti, a "fiz" pedig az eleve fizikai időskálán mért VaR-t.



27. ábra. Adott kockázatos érték (vízszintes tengely, %) eléréséhez szükséges idő (függőleges tengely, perc). A "tbt" jel az árváltozások számából konvertált fizikai időt jelenti, a "fiz" pedig az eleve fizikai időskálán mért VaR-t.



28. ábra. Adott kockázatotott érték (vízszintes tengely, %) eléréséhez szükséges, az árváltozások számából konvertált idő (függőleges tengely, perc).

5. A hozamok idősorának leírása stabil GARCH modellekkel

5.1. Előzmények

A korábbi fejezetekben elsősorban a hozamok empirikus eloszlásának vastag farkok tulajdonságát modelleztük. Általában feltettük, hogy a hozamok függetlenek és azonos eloszlásúak, illetve a hozamok autokorrelációjának kiszűrésére stabil eloszlású innovációkkal hajtott ARMA modelleket használtunk. A tapasztalat szerint azonban a hozamok autokorrelációi - a hatékony piacok elméletével összhangban - általában gyorsan nullához tartanak, és figyelmen kívül hagyhatók.

Ebben a fejezetben az eddigiekhez képest annyiban lépünk tovább, hogy modellezzük a hozamok idősorának alábbi két tulajdonságát is:

1. A hozamok abszolút értékei és négyzetei nagy késleltetések mellett is szignifikánsan autokorreláltak.
2. A hasonló (pl. nagy) abszolút értékű hozamok időben közel vannak egymáshoz (csoportosulnak).

A fenti tulajdonságok leírására jól használhatók az ún. sztochasztikus volatilitás modellek (Harvey, Ruiz, Shephard [1994], Kim, Shephard, Chib [1998], Varga [2002]), amelyek általános alakja

$$y_t = \mu_t + \epsilon_t,$$

ahol y_t jelöli a hozamokat, μ_t a hozamok (a t időpontot megelőző információk melletti) feltételes várható értéke, $\epsilon_t = \sigma_t z_t$. A z_t valószínűségi változók függetlenek, azonos eloszlásúak, szimmetrikusak, és szórásuk 1. (A z_t -ket gyakran standard normális eloszlásúnak veszik.) A σ_t valószínűségi változók nemnegatívak, és rögzített t mellett σ_t független z_t -től. (A σ_t -ket a hozamok sztochasztikus volatilitásának hívják.) A fenti 2. tulajdonságot informálisan úgy

magyarázhatjuk, hogy nyugodt (kis volatilitású) és ideges (volatilis) időszakok váltogatják egymást a piacon („volatility clustering”).

A sztochasztikus volatilitás modellek családjába tartoznak a $(G)ARCH$ modellek (Bollerslev, Engle, Nelson [1994], Gouriéroux [1997]), amelyekben definíció szerint

$$\sigma_t^2 = c_0 + \sum_{i=1}^r c_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s d_j \sigma_{t-j}^2.$$

A z_t innovációk független, standard normális eloszlásúak, μ_t általában stationárius $ARMA$ folyamat. A c_0 paraméter pozitív, c_i, d_j nemnegatívak, $r \geq 1$. A folyamat szigorú stacionaritásának elégséges feltétele (Bougerol, Picard [1992]), hogy a perzisztencia

$$V = \sum_{i=1}^r c_i + \sum_{j=1}^s d_j \leq 1.$$

A volatilitás négyzetére vonatkozó (lényegében $ARMA$) egyenlet szolgál a hozamok négyzete autokorrelációinak kiszűrésére.

A fenti modelltől a $V = 1$ megszorítás bevezetésével kapjuk az ún. *integrált GARCH*, azaz *IGARCH* modelleket (Baillie, Bollerslev [1989]). A megszorítás motivációját az adja, hogy a pénzügyi idősorokból becsült V értékek általában közel vannak egyhez.

A $GARCH$ modell számos általánosítása látott napvilágot (Bollerslev, Engle, Nelson [1994]) - a továbbiakban számunkra kettő lesz érdekes. Az egyik kiindulópontja az a megfigyelés (Taylor [1986]), hogy a hozamok abszolút értékének autokorrelációs függvénye lassan csökkenő, és egészen magas rendű autokorrelációk is szignifikánsan pozitívak. Ez a tulajdonság elég általánosnak mondható részvényekre illetve indexekre: Taylor maga 40 idősort vizsgált, és megfigyelését később számos tanulmány erősítette meg. Ding, Granger, Engle [1993] hasonló jelenséget figyeltek meg ($|r_t|^\delta$, $\delta > 0$) autokorrelációira, továbbá azt találták, hogy az autokorrelációk maximuma (minden késleltetésnél) $\delta = 1$ közelében van (Taylor tulajdonság). Ez alapján célszerűnek látszik a fenti

GARCH modellben a σ_t^2 -re vonatkozó egyenletet a következővel helyettesíteni:

$$\sigma_t = c_0 + \sum_{i=1}^r c_i |\epsilon_{t-i}| + \sum_{j=1}^s d_j \sigma_{t-j}.$$

Ezzel a módosítással a Taylor-Schwert modellt kapjuk. Ding, Granger és Engle az S&P 500 index hozamain összehasonlítják a két modellt, és eredményeik szerint a *GARCH* modell likelihood értéke szignifikánsan nagyobb, mint a Taylor-Schwert modellté. Érdekes, és a *GARCH* modell esetében különösen meglepő eredmény, hogy mindkét modellel szimulált idősor rendelkezik a Taylor tulajdonsággal. Ding, Granger és Engle egy új modellt javasolnak, amelynek egyszerűsített változata annyiban általánosítása mindkét fenti modellnek, hogy a feltételes volatilitásra a

$$\sigma_t^\delta = c_0 + \sum_{i=1}^r c_i |\epsilon_{t-i}|^\delta + \sum_{j=1}^s d_j \sigma_{t-j}^\delta$$

egyenletet írjuk fel, és a δ kitevőt is becsüljük. Ez a *Power ARCH*, azaz *PARCH* modell. (Az általános modellbe egy aszimmetriát leíró tagot is belevettek, ez az *Asymmetric PARCH*, *A-PARCH* modell, amelyet itt nem írunk fel, mert később úgyis csak a fenti *PARCH* modellt fogjuk használni.)

A *GARCH* modell másik - és a jelen dolgozat szempontjából érdekesebb - általánosítása a modell innovációinak eloszlásával kapcsolatos. A pénzügyi idősorokra illesztett *GARCH* modellek maradéktagjainak eloszlása gyakran szignifikánsan eltér a normálistól (vastag farkú), ezért a normális eloszlás helyett általánosított exponenciális (Nelson [1991]), Student t (Bollerslev [1987]), és ezek kombinációi (Bollerslev, Engle, Nelson [1994]) is népszerűek. A stabil eloszlású innovációkkal hajtott *GARCH* modellek (McCulloch [1985], Liu, Brorsen [1995], Panorska, Mittnik, Rachev [1995], Mittnik, Paoletta, Rachev [2000]) egyelőre nem terjedtek el széles körben. Ugyanakkor hangsúlyoznunk kell, hogy a stabil eloszlásoknak itt is kiemelt szerepet ad a központi határeloszlás tétele. A modell maradéktagjai ugyanis a modell által le nem írt véletlen hatások eredői, amelyek a tétel szerint stabil eloszlásokkal közelíthetők.

Mint említettük, a *GARCH* modellek (alapértelmezésben normális innovációkkal hajtott modellekre gondolunk) a volatilitás dinamikájának leírására születtek. Ugyanakkor *GARCH* modellekkel az adatok vastag farok tulajdonsága is jól reprodukálható. Pontosabban, ha X -el jelöljük a *GARCH* modell stacionárius megoldását, akkor megfelelő feltételek mellett (Davis, Mikosch [1998], Mikosch, Stărică [2000])

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^\alpha P(X > \lambda) = C_\alpha,$$

azaz a *GARCH* idősor eloszlásának farokrésze aszimptotikusan hatványfüggvény szerint tart nullához (éppúgy mint a Lévy eloszlású idősoré). Konkrétan például *ARCH*(1) (*GARCH*(1, 0)) idősorra α monoton csökkenő függvénye c_1 -nek, $\alpha(1/\sqrt{3}) = 4$ ($c_1 \geq 1/\sqrt{3}$ -ra X kurtózisa végtelen), $\alpha(1) = 2$ ($c_1 \geq 1$ -re X szórása is végtelen). A gyakorlatban sokszor előforduló, közel integrált (a perzisztencia közel van 1-hez) *GARCH*(1, 1) folyamatok kurtózisa végtelen, az integrált *GARCH*(1, 1) folyamatokra pedig $\alpha = 2$, így a szórás is végtelen. Másfelől az ún. Pareto stabil modellek (független azonos eloszlásúnak tekintjük az adatokat, és $\alpha < 2$ indexű stabil eloszlást illesztünk rájuk) is jól leírják a vastag farok tulajdonságot.

A fentiek alapján a köztudatban, illetve az irodalomban a *GARCH* modelleket és a Pareto stabil modelleket gyakran egymás vetélytársainak tekintik (pl. Ghose, Kroner [1995]), és azt vizsgálják, hogy melyik modell illeszkedik jobban az adatsorokra. A vizsgálatok kiindulópontja gyakran a szórás végeségével kapcsolatos, újra és újra felbukkanó kérdés: a vastag farok jelenséget vajon a „volatility clustering” (véges szórású innovációkkal hajtott *GARCH* folyamat) okozza, vagy a nem véges szórású Pareto stabil eloszlások. A két modell összehasonlításának azonban nincs értelme, ugyanis ha az adatsorban valóban van *GARCH* hatás, akkor az egyrészt torzítja a stabilitás indexének becslését (ld. pl. Rachev, Mittnik [2000], vagy ebben a dolgozatban), másrészt az adatsor autokorrelációs struktúráját figyelmen kívül hagyó Pareto stabil modelltől nem várható el, hogy jobban illeszkedjen, mint az autokorrelációt figyelembe vevő *GARCH* (ami ráadásul a vastag farok tulajdonságot is leírja).

A helyzetet tovább bonyolítja, hogy megfelelően paraméterezett *IGARCH* modellekkel (Ghose, Kroner [1995]) szimulált adatsorokat az aggregáción alapuló stabilitási vizsgálatok alapján tévesen stabil eloszlásúnak vélhetünk (a részleteket ld. később). Így mivel a valódi adatsorok gyakran jól leírhatók *IGARCH* modellekkel, előfordulhat, hogy azokat pont ezért fogadjuk el tévesen stabilnak. Összehasonlítást tehát a stabil (Lévy), és az egyéb eloszlásokkal hajtott *GARCH* modellek között érdemes végezni, stabilitási tesztet pedig akkor van értelme csinálni, ha az adatsorból, illetve ennek hatványaiból minél jobban kiszűrtük az autokorrelációt.

A fejezet további részeiben először ismertetjük a stabil hatvány *GARCH* modellt, majd ezt a modellt és két megszorítását, a normális hatvány *GARCH* és a normális *GARCH* modelleket illesztjük a CISCO és a MOL részvények hozamaira. Végül megvizsgáljuk a Lévy hatvány *GARCH* modellek maradéktagjainak stabilitását.

5.2. A stabil hatvány *GARCH* modell

5.2.1. A modell leírása

A stabil hatvány *GARCH*, azaz $S_{\alpha,\beta}^\delta$ *GARCH*(r, s) folyamat (Mittnik, Paolella, Rachev [2000]) az előző szakaszban leírt *Power ARCH* folyamat, amelyben a z_t innovációk stabil eloszlásúak:

$$y_t = \mu_t + \epsilon_t,$$

ahol $\epsilon_t = \sigma_t z_t$, $z_t \sim S_\alpha(1, \beta, 0)$, és

$$\sigma_t^\delta = c_0 + \sum_{i=1}^r c_i |\epsilon_{t-i}|^\delta + \sum_{j=1}^s d_j \sigma_{t-j}^\delta.$$

Emlékeztetőül (részletesen ld. a 2. fejezetben) az $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ eloszlás α indexe a $(0, 2]$ intervallumban van, a β aszimmetria paraméter pedig $[-1, 1]$ -ben. Az eloszlás skálaparamétere σ (a volatilitás elnevezés itt érvényét veszíti, mert a

szórás $\alpha < 2$ mellett nem létezik), eltolási paramétere pedig μ ($\alpha > 1$ esetén ez a várható érték). A továbbiakban mi csak szimmetrikus eloszlásokat használunk ($\beta = 0$), mert a nem szimmetrikus eloszlás sűrűségfüggvényét egyelőre nem tudjuk kiszámolni. Alkalmazásainkban μ_t szigorúan stacionárius *ARMA* folyamat.

Az $S_{\alpha,\beta}^\delta$ *GARCH*(r, s) folyamat szigorúan stacionárius megoldása létezésének elégséges feltételei (Mittnik, Paoletta, Rachev [2002]) $1 < \alpha \leq 2$ és $0 < \delta < \alpha$ mellett $c_0 > 0$, $c_i \geq 0$, $i = 1, \dots, r$, $r \geq 1$, $d_j \geq 0$, $j = 1, \dots, s$, $s \geq 0$, $r \geq s$, és

$$V = E|z_t|^\delta \sum_{i=1}^r c_i + \sum_{j=1}^s d_j \leq 1.$$

Az $1 < \alpha \leq 2$ és $0 < \delta < \alpha$ esetben $E|z_t|^\delta$ a következő zárt alakban írható:

$$E|z_t|^\delta = \lambda_{\alpha,\beta,\delta} = \frac{1}{\psi_\delta} \Gamma\left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) (1 + \tau_{\alpha,\beta}^2)^{\frac{\delta}{2\alpha}} \cos\left(\frac{\delta}{\alpha} \arctan \tau_{\alpha,\beta}\right),$$

ahol $\tau_{\alpha,\beta} := \beta \tan(\alpha\pi/2)$ és

$$\psi_\delta = \begin{cases} \Gamma(1 - \delta) \cos \frac{\pi\delta}{2}, & \text{ha } \delta \neq 1, \\ \pi/2, & \text{ha } \delta = 1. \end{cases}$$

Ha $\alpha < 2$ és $\delta \geq \alpha$, akkor $E|z_t|^\delta = \infty$ (ha $\alpha < 2$ és $\delta \rightarrow \alpha$, akkor $\lambda_{\alpha,\beta,\delta} \rightarrow \infty$). Mittnik, Paoletta és Rachev [2002] a $\delta = \alpha < 2$ esetet Monte Carlo szimulációkkal vizsgálva arra a következtetésre jutottak, hogy ekkor a folyamat nem stacionárius: egy bizonyos mintamérettől (T_0) kezdve minden határon túl nő (legalábbis gyakorlati értelemben). Ez a jelenség annál kisebb T_0 -nál következik be, minél közelebb van V értéke 1-hez. $V < 0.9$ mellett még 5000-es méretű minták is stacionáriusnak tűnnek. Ez azért érdekes, mert Liu és Brorsen [1995] éppen a $\delta = \alpha$ megszorítás mellett becsültek stabil hatvány *GARCH*(1, 1) modelleket különböző valuták napi árfolyamaiból (10 éves adatsort használtak, így a mintáik bőven kisebbek voltak, mint 5000), $\alpha \approx 1.8 - 1.9$ körüli értékeket becsültek, és 5% illetve 1% konfidencia szinten elvetették a stabil hatvány *GARCH* modellt. Ez az eredmény azonban lehet a hibás $\delta = \alpha$ specifikáció következménye.

Mivel a modell becslése során a szigorú stacionaritásra vonatkozó feltételeket folyamatosan alkalmazzuk, fontos tisztázni, hogy mi történik ezekkel az $\alpha \rightarrow 2$, $\delta \rightarrow 2$ határesetben, vagyis amikor az optimális modell a normális *GARCH*. Konkrétan a

$$\lambda_{\alpha,\beta,\delta} \sum_{i=1}^r c_i + \sum_{j=1}^s d_j \leq 1$$

feltétel érdekes, amelyben ekkor $\lambda_{\alpha,\beta,\delta} \rightarrow 2$. Ez annyiban különbözik a normális *GARCH* paramétereire vonatkozó stacionaritási feltételtől, hogy a $\sum c_i$ előtt van egy kettes szorzó. Ez az eltérés abból adódik, hogy a stabil eloszlások általunk használt paraméterezése mellett az $\alpha = 2$ esetben z_t szórása $\sqrt{2}$. Az $S_{\alpha,\beta}^\delta$ *GARCH*(r, s) modell egyenleteit (az $\alpha = \delta = 2$ esetet nézzük) könnyen át lehet írni egységnyi szórású innovációkra a $z'_t = z_t/\sqrt{2}$, $\sigma'_t = \sqrt{2}\sigma_t$ transzformációkkal. Ekkor $y_t = \mu_t + \sigma_t z_t = \mu_t + \sigma'_t z'_t$ (μ_t *ARMA* struktúráját változatlanul hagytuk), így az y_t idősor változatlan, a volatilitásra vonatkozó egyenletet pedig kettővel szorozzuk:

$$(\sigma'_t)^2 = 2c_0 + 2 \sum_{i=1}^r c_i |\epsilon_{t-i}|^2 + \sum_{j=1}^s d_j (\sigma'_{t-j})^2.$$

Innen a normális *GARCH* stacionaritási feltétele szerint

$$V = 2 \sum_{i=1}^r c_i + \sum_{j=1}^s d_j \leq 1,$$

amely megegyezik a stabil hatvány *GARCH* stacionaritási feltételével az $\alpha \rightarrow 2$, $\delta \rightarrow 2$ átmenet mellett.

5.2.2. A függetlenség vizsgálata, identifikáció

A modell becslése előtt megvizsgáljuk, hogy az adatsor, illetve négyzete szignifikánsan autokorrelált-e. Lévy eloszlásokkal szeretnénk modellezni az adatokat, így a nullhipotézisünk lehet az, hogy az adatok független, azonos, szimmetrikus, $1 < \alpha < 2$ indexű Lévy eloszlásúak. Az $\alpha > 1$ feltétel pénzügyi

idősorokból becsült α indexekre mindig teljesül, ezért gyakorlatilag nem jelent megszorítást, viszont biztosítja a várható érték létezését. Mivel Lévy eloszlású valószínűségi változóknak nincs szórásuk, ezért korrelációjuk sincs, így felmerül a kérdés, hogy a mintaátlaggal (\bar{X}) korrigált autokorrelációs függvény

$$\hat{\rho}_{n,X}(h) = \frac{\sum_{t=1}^{n-h} (X_t - \bar{X})(X_{t+h} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}$$

becsül-e valamit? A választ a következő állításból (Adler, Feldman, Taqqu [1998], 142. o.) kapjuk meg: a nullhipotézis mellett

$$(n/\ln n)^{1/\alpha} \hat{\rho}_{n,X}(h) \xrightarrow{d} U/V,$$

ahol $U \sim S_\alpha(C_\alpha^{-1/\alpha}, 0, 0)$ és $V \sim S_{\alpha/2}(C_{\alpha/2}^{-2/\alpha}, 1, 0)$ független stabil eloszlású valószínűségi változók, és

$$C_\alpha = \frac{1 - \alpha}{\Gamma(2 - \alpha) \cos(\pi\alpha/2)}$$

A 2. fejezet jelöléseit használjuk, V ún. pozitív stabil eloszlás. Az elnevezés onnan származik, hogy $\alpha < 1$, $\beta = 1$ és $\mu = 0$ mellett az $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ eloszlás sűrűségfüggvényének tartója \mathbf{R}^+ . A hivatkozott tétel (ld. még Embrechts, Klüppelberg, Mikosch [1997], 372.o.) szigorúan stacionárius lineáris Lévy folyamatok minta autokorrelációs függvényének konvergenciájára vonatkozik, nekünk itt csak a fenti speciális esetre van szükségünk.

A fenti állítás szerint $\hat{\rho}_{n,X}(h)$ nullához tart, és a konvergencia sebessége $(n/\ln n)^{-1/\alpha}$, ami lényegesen gyorsabb, mint a normális eloszlású adatoknál $(n^{-1/2})$. $\hat{\rho}_{n,X}(h)$ kritikus értékeinek meghatározásához ki kellene számolnunk U/V kvantiliseit. Ez csak Monte Carlo szimulációval (Adler, Feldman, Taqqu [1998], 143. o.), vagy numerikus integrálással (Brockwell, Davis [1991], 539. o.) végezhető el.

Mielőtt tovább lépnénk megjegyezzük, hogy a nullhipotézisünknek megfelelő adatok négyzeteinek autokorrelációs függvényének konvergenciájára vonatkozó, a fentihez hasonló elméleti eredmények tudomásunk szerint nincsenek, ezért előfordulhat, hogy a $\hat{\rho}_{n,X^2}(h)$ statisztika nem becsül semmit.

Autokorrelációk helyett Ljung-Box statisztikákat számoltunk az adatokból (ill. ezek négyzeteiből), a kritikus értékeket pedig Monte Carlo szimulációval határoztuk meg (4. táblázat). Ennek során 1000, az adatsoréval megegyező méretű, független, és az adatsorból becsült α indexű stabil eloszlású mintát generáltunk, az egyes mintákból (ill. ezek négyzeteiből) kiszámoltuk a statisztikákat, majd meghatároztuk a statisztikák 99%-os kvantilisét. Az így kapott kritikus értékek - a táblázat c (Lévy) sorai - annyiban tájékoztató jellegűek, hogy függenek α -tól, amelynek becslése viszont torzított lehet, ha az adatsorban van autokorreláció. Konkrétan például tegyük fel, hogy egy α indexű stabil eloszlással hajtott GARCH mintából visszabecsült α értéke 0.2-vel kisebb, mint a generáló folyamat α -ja. Ez az eltérés (ami elég tipikus) az elsőrendű Ljung-Box statisztikákhoz tartozó kritikus értéket kb. 2-vel (a négyzetekhez tartozót 0.5-el) növeli, így nagyobb eséllyel fogadjuk el az adatsort függetlennek. Ehhez a bizonytalansághoz képest azonban az adatsorból számolt statisztikák többsége bőven a kritikus értékek alatt, az adatok négyzeteiből számolt statisztikák többsége pedig bőven a kritikus értékek felett van. Kivételek a 30 perces adatsorból számolt harmad- és negyedrendű statisztikák, amelyek nagyobbak a kritikus értékeknél, és a 60 perces adatok négyzeteiből számolt harmad- és negyedrendű statisztikák, amelyek kisebbek, mint a kritikus értékek. Az utóbbi nem érdekes, az előbbiből esetleg következtethetnénk egy magasabb rendű *ARMA* folyamatra, de az illeszkedések vizsgálata ezt nem igazolta: a 30 perces adatokra legjobban illeszkedő *ARMA*(0, 0) *GARCH*(1, 1) modell maradéktagjaiból számolt ugyanezen statisztikák már kisebbek, mint a megfelelő kritikus értékek (ezeket az adatokat nem közöltük). A táblázat - c (normális) - soraiban az $\alpha = 2$ indexhez (normális eloszlás) tartozó kritikus értékek szerepelnek, amelyek a megfelelő szabadsági fokú χ^2 eloszlások percentiliseihez (6.63 - 9.21 - 11.34 - 13.28) közeli értékek. A Lévy kritikus értékek egyrészt tipikusan nagyobbak, mint a normálishoz tartozók, másrészt az eltérés a négyzetekből számolt kritikus értékeknél jelentősebb.

A fenti eredmények alapján a CISCO részvényre vonatkozó stabil hatvány

GARCH modellekből elhagytuk az *ARMA* részt ($\mu_t = \text{konstans}$). A *GARCH* rész identifikációjával nem próbálkoztunk, mert nem ismerjük $\hat{\rho}_{n,|X|^\delta}(h)$ eloszlását - erre tudomásunk szerint még nincsenek elméleti eredmények. Mikosch és Stărică [2000] közöltek $\hat{\rho}_{n,X^2}(h)$ eloszlására vonatkozó eredményeket abban az esetben, ha X véges szórású innovációkkal hajtott *GARCH*(1, 1) folyamat. Ezek szerint pl. közel integrált *GARCH*(1, 1) folyamatra $\hat{\rho}_{n,X^2}(h)$ nem konstanshoz tart, így ez a statisztika nem becsül semmit.

5.2.3. Becslés, eredmények

A stabil hatvány *GARCH* modell becslését maximum likelihood módszerrel végeztük. A becslés során numerikus nehézséget a stabil sűrűségfüggvény kiszámítása (McCulloch [1998]), és a feltételes optimum megkeresése jelentettek (ezek mellett számos apró idegborzoló numerikus probléma adódott, amelyeket itt nem részletezünk). Az optimum kereséséhez a Nelder-Mead féle algoritmust használtuk. A keresést a paraméterek terének olyan tartományán végeztük, ahol a modell stacionaritási feltételei teljesülnek. Ezek közül a perzisztenciára vonatkozó

$$V = E|z_t|^\delta \sum_{i=1}^r c_i + \sum_{j=1}^s d_j \leq 1$$

okozta a legtöbb nehézséget, mert az optimális pont gyakran a $V = 1$ határon volt. Mivel V elég bonyolult függvénye α -nak és δ -nak, az optimumkereső eljárás gyakran leállt a határfelület olyan pontjában, amely még nem volt optimális. Ezért egyrészt több véletlen pontból újraindítottuk a keresést, másrészt egy optimálisnak vélt pontot csak akkor fogadtunk el optimumnak, ha onnan kicsit kilökve ugyanoda konvergált vissza az eljárás. A fenti újraindítások mellett egy *ARMA*(p, q)-*GARCH*(r, s) -röviden *pqr*s- modell becslését minden olyan $p'q'r's'$ modell becsléséből elindítottuk, amelyre a $p' \leq p$, $q' \leq q$, $r' \leq r$, $s' \leq s$ feltételek teljesültek. A bonyolultabb modell plusz paramétereinek kezdőértékét nullának vettük.

Az előző szakaszban említettük, hogy a modellek *GARCH* részének identi-

fikációjával nem foglalkoztunk, ezért több különböző $pqr s$ konfiguráció mellett becsültünk modelleket, majd kiválasztottuk a legjobban illeszkedőt. 0000-tól 2222-ig minden $pqr s$ konfigurációt kipróbáltunk ($r \geq s$), kivéve azokat amelyek nyilvánvalóan túlspecifikáltak voltak. Az esetek többségében az autokorrelációs függvény előzetes vizsgálata alapján elég lett volna a $p = q = 0$ konfigurációkkal foglalkozni, de kíváncsiságból megnéztük a többit is. A modellválasztás elsősorban az AICC kritérium szerint történt, ami a nagy mintaméretetek miatt ugyanazt a választást adja, mint a legnagyobb likelihood érték. Ha ez a választás egy olyan modellre esett, ami túlspecifikált volt, akkor az egyszerűbb modellt választottuk.

A becslésekhez a CISCO és a MOL részvények 15, 30 és 60 perces hozamait használtuk a teljes 1998. évből. A stabil (Lévy) hatvány *GARCH* modell mellett a paraméterekre tett megszorításokkal előálló normális hatvány *GARCH* ($\alpha = 2$ megszorítás), és normális *GARCH* ($\alpha = \delta = 2$ megszorítás) modelleket is becsültük. Valamennyi adatsorra az *ARMA*(0,0) *GARCH*(1,1) modellek illeszkedtek a legjobban - a magasabb rendű folyamatok ezektől nem különböztek szignifikánsan.

Az 1-3. táblázatokban (CISCO) és az 5. táblázatban (MOL) található a modellek becsült paraméterei, a standard hibák, a paraméterek 99%-os konfidencia intervallumainak alsó és felső határai, a perzisztencia (V) és a log likelihood függvény értéke (*loglik*). A MOL részvényre a kis mintaméret miatt csak 15 perces hozamokból végeztünk becsléseket. A standard hibákat és a konfidencia intervallumokat a modellek Monte Carlo szimulációiból számoltuk. A szimulációk száma 1000 volt, a szimulált minták mérete pedig megegyezett annak az adatsornak a méretével, amelyből a modellt becsültük. A fenti eljárás sok gépidőt igényel: 450-800Mhz-es PIII-as PC-ken elsősorban a mintamérettől és a paraméterek számától függően néhány percre fut egy becslés, így ezer becslés 1-3 napig fut egy gépen. A táblázatokban található eredményekhez kapcsolódó Monte Carlo szimulációk több fenti típusú PC-n kb.egy hétig futottak úgy, hogy a nagyobb mintaméretű szimulációk két-három gépre elosztva

futottak.

Az eredményeket áttekintve megállapíthatjuk, hogy növekvő időskálákon a CISCO hozamokból becsült α indexek értéke a *GARCH* hatás figyelembe vétele mellett is nő, így kérdéses, hogy a maradéktagok valóban stabil eloszlásúak-e (erről bővebben később). Ugyanakkor a Lévy *GARCH* modell minden adatsorra jobban illeszkedik, mint a normális *GARCH* - a likelihood értékek különbsége a MOL adatokon a legjelentősebb. Az utóbbiakból becsült α index lényegesen kisebb, mint a CISCO adataiból becsült, ami arra utal, hogy a magyar papír hozamai között gyakoribbak a kilógó értékek. Ennek lehetséges okai közül mindenekelőtt a vizsgált időszakra eső orosz válságot említenénk. Másik lehetséges ok a piac mérete: kisebb piac könnyebben reagál külső hatásokra.

A CISCO adatokból úgy tűnik, hogy a δ paraméter értéke szintén nő az aggregációval, de mindenütt szignifikánsan kisebb, mint α becsült értéke. δ becsülésének eloszlása ferde. Még egy érdekesség, hogy a CISCO 30 és 60 perces hozamaira illesztett normális hatvány *GARCH* modellben δ értéke kettőhöz konvergált, így ez a modell egybeesik a normális *GARCH*-al.

A perzisztencia értéke a Lévy hatvány *GARCH* modellekben 1, a többi modellben is közel van egyhez, de kicsit kisebb. A magas perzisztencia érték azt jelenti, hogy a piacot érő sokkok hatása lassan múlik el.

1. táblázat. Lévy hatvány GARCH paraméterek becslése, CISCO

időskála	mintaméret	μ	α	δ	c_0	c_1	d_1	V	$loglik$
15 perc	6548	0.000069	1.75	1.50	0.000014	0.107	0.721	1.000	26719.1
		0.000045	0.02	0.06	0.000010	0.008	0.016		
		0.000182	1.80	1.58	0.000072	0.130	0.760		
		-0.000058	1.71	1.22	0.000009	0.088	0.681		
30 perc	3274	0.000091	1.77	1.54	0.000006	0.036	0.905	1.000	12137.9
		0.000099	0.02	0.07	0.000004	0.005	0.009		
		0.000347	1.84	1.68	0.000029	0.049	0.926		
		-0.000152	1.72	1.27	0.000003	0.024	0.874		
60 perc	1637	0.000141	1.83	1.66	0.000008	0.034	0.899	1.000	5448.2
		0.000198	0.03	0.12	0.000051	0.008	0.018		
		0.000670	1.91	1.82	0.000143	0.063	0.937		
		-0.000343	1.75	1.15	0.000003	0.018	0.841		

Egy adott időskála sorában a paraméterek becsült értékei találhatóak. A becslések alatt a standard hibákat, és a 99%-os konfidencia intervallum felső és alsó határait tüntettük fel.

2. táblázat. Normális hatvány GARCH paraméterek becslése, CISCO

időskála	mintaméret	μ	δ	c_0	c_1	d_1	V	$loglik$
15 perc	6548	0.000060	1.69	0.000007	0.129	0.685	0.894	26496.4
		0.000050	0.16	0.000013	0.011	0.020		
		0.000174	2.00	0.000076	0.155	0.731		
		-0.000069	1.28	0.000001	0.103	0.632		
30 perc	3274	0.000070	2.00	0.000001	0.035	0.901	0.971	12026.0
		0.000109	0.09	0.000001	0.005	0.014		
		0.000343	2.00	0.000010	0.052	0.932		
		-0.000213	1.47	0.000000	0.024	0.861		
60 perc	1637	0.000072	2.00	0.000002	0.044	0.873	0.960	5409.1
		0.000218	0.15	0.000010	0.010	0.028		
		0.000588	2.00	0.000070	0.076	0.920		
		-0.000453	1.32	0.000001	0.025	0.780		

Egy adott időskála sorában a paraméterek becsült értékei találhatóak. A becslések alatt a standard hibákat, és a 99%-os konfidencia intervallum felső és alsó határait tüntettük fel.

3. táblázat. Normális GARCH paraméterek becslése, CISCO

időskála	mintaméret	μ	c_0	c_1	d_1	V	$loglik$
15 perc	6548	0.000061	0.000001	0.113	0.671	0.898	26494.0
		0.000049	0.000000	0.007	0.020		
		0.000173	0.000002	0.133	0.718		
		-0.000065	0.000001	0.094	0.617		
30 perc	3274	0.000070	0.000001	0.035	0.901	0.971	12026.0
		0.000109	0.000000	0.005	0.013		
		0.000331	0.000001	0.047	0.930		
		-0.000229	0.000000	0.022	0.862		
60 perc	1637	0.000071	0.000002	0.044	0.873	0.960	5409.1
		0.000216	0.000001	0.008	0.022		
		0.000627	0.000004	0.065	0.923		
		-0.000483	0.000001	0.024	0.800		

Egy adott időskála sorában a paraméterek becsült értékei találhatóak. A becslések alatt a standard hibákat, és a 99%-os konfidencia intervallum felső és alsó határait tüntettük fel.

4. táblázat. Ljung-Box teszt statisztikák és kritikus értékek, CISCO

	15 perc				30 perc				60 perc			
n	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
y_t	0.16	0.85	0.93	0.93	0.44	3.20	15.3	21.5	0.04	0.49	0.55	1.25
c (Lévy)	6.60	10.1	14.6	18.2	7.78	10.6	13.7	16.5	6.57	11.4	14.8	16.7
c (normális)	6.53	8.94	10.8	13.0	6.64	8.84	11.7	12.6	7.56	9.47	11.5	12.6
y_t^2	501	781	994	1208	59.3	92.6	419	426	12.8	25.4	27.0	32.6
c (Lévy)	2.65	17.2	20.6	47.7	2.35	14.0	19.0	34.0	6.16	23.3	33.2	39.5
c (normális)	6.87	8.77	11.1	13.0	6.28	9.08	11.3	12.5	6.85	8.32	11.0	12.6
Lévy hatvány GARCH maradéktagok												
$ z_t ^\delta$	0.24	0.29	0.41	0.51	6.09	29.0	35.5	42.0	7.78	8.73	14.4	14.4
c	5.56	18.6	29.3	47.5	4.74	15.8	21.6	37.4	7.35	23.1	30.8	37.8
z_t^2	0.43	0.43	1.01	1.18	2.88	46.2	52.4	55.6	8.25	8.83	11.7	11.8
c	2.65	17.2	20.6	47.7	2.35	14.0	19.0	34.0	6.16	23.3	33.2	39.5
Normális hatvány GARCH maradéktagok												
$ z_t ^\delta$	0.05	0.16	0.19	0.20	1.41	9.60	17.3	22.5	1.42	2.97	10.2	10.6
c	7.21	9.05	11.2	13.3	6.28	9.08	11.3	12.5	6.85	8.32	11.0	12.6
z_t^2	0.07	0.10	0.29	0.34	1.41	9.60	17.3	22.5	1.42	2.97	10.2	10.6
c	6.87	8.77	11.1	13.0	6.28	9.08	11.3	12.5	6.85	8.32	11.0	12.6
Normális GARCH maradéktagok												
z_t^2	0.50	0.51	0.72	0.87	1.41	9.59	17.3	22.5	1.42	2.97	10.2	10.6
c	6.87	8.77	11.1	13.0	6.28	9.08	11.3	12.5	6.85	8.32	11.0	12.6

n a statisztika rendje. $y_t, y_t^2, |z_t|^\delta, z_t^2$ sorában az adatsor (y_t) és a maradéktagok (z_t) megfelelő hatványaiból számolt statisztikákat, ezek alatt pedig a 99%-os valószínűségi szinthez tartozó kritikus értékeket (c) tüntettük fel (ld. szöveg).

5. táblázat. A MOL részvény 15 perces hozamaiból becsült Lévy hatvány GARCH és normális GARCH modellek paraméterei, valamint a modellek maradéktagjaiból számított Ljung-Box teszt statisztikák és kritikus értékek.

A Lévy ill. normális sorokban a modellek paramétereinek becsült értékei, a becslések alatt a standard hibák, és a 99%-os konfidencia intervallum felső és alsó határai találhatóak. Az $|z_t|^\delta$ és z_t^2 sorokban a modellek maradéktagja-
inak (z_t) megfelelő hatványaiból számolt Ljung-Box statisztikák szerepelnek
negyedrendig bezárólag, zárójelekben a 99%-os valószínűségi szinthez tartozó
kritikus értékeket tüntettük fel. A minta mérete 1798.

	μ	α	δ	c_0	c_1	d_1	V	$loglik$
Lévy	0.000129	1.38	0.85	0.000125	0.054	0.911	0.998	6426.3
	0.000061	0.03	0.07	0.000087	0.008	0.009		
	0.000297	1.47	1.03	0.000583	0.077	0.936		
	-0.00003	1.31	0.64	0.000045	0.034	0.885		
z_t	0.00 (9.41)		0.03 (32.7)	0.05 (35.9)	0.07 (36.8)			
$ z_t ^\delta$	0.02 (11.5)		0.03 (29.7)	0.03 (33.6)	0.03 (38.1)			
z_t^2	0.00 (3.69)		0.00 (19.7)	0.00 (21.0)	0.00 (21.7)			
normális	0.001574			0.000005	0.039	0.805	0.883	5947.0
	0.000214			0.000002	0.010	0.063		
	0.002109			0.000014	0.065	0.911		
	0.001028			0.000002	0.014	0.559		
z_t	2.80 (6.18)		2.81 (8.43)	2.95 (11.1)	3.08 (12.2)			
z_t^2	0.79 (6.35)		2.01 (8.46)	2.80 (10.4)	2.97 (12.6)			

5.2.4. Illeszkedés vizsgálat

Az előző szakaszban becsült *GARCH* modellek illeszkedésének vizsgálata során két kérdéssel foglalkozunk: egyik az, hogy a modellek maradéktagjainak (z_t) hatványai szignifikánsan autokorreláltak-e, a másik pedig az, hogy a Lévy hatvány *GARCH* modellek maradéktagjai stabil eloszlásúak-e.

Az első kérdés megválaszolásához Ljung-Box teszt statisztikákat számoltunk a z_t , $|z_t|^\delta$ és z_t^2 adatsorokból. A δ kitevő értéke a modell δ paraméterének becsült értéke volt. Az eredményeket a 4-5. táblázatokban láthatjuk. A kritikus értékeket - a táblázatok c sorai - Monte Carlo szimulációval határoztuk meg. Ennek során 1000 olyan független, szimmetrikus stabil eloszlású x_t mintát szimuláltunk, amelyek α indexe megegyezett a modell becsült indexével (illetve normális eloszlás esetén kettővel), mérete pedig ugyanakkora volt, mint az adatsoré, amiből a modellt becsültük. Ezután az x_t , $|x_t|^\delta$ és x_t^2 mintákból Ljung-Box statisztikákat számoltunk, végül meghatároztuk a statisztikák empirikus eloszlásának 99%-os kvantiliseit.

A CISCO részvény (4. táblázat) 15 perces adataiból számolt statisztikák bőven a kritikus értékek alatt vannak - ilyen szempontból ezekre az adatokra illeszkednek legjobban a modellek. A 60 perces adatoknál a Lévy hatvány *GARCH* maradéktagokból számolt elsőrendű statisztikák egy kicsit nagyobbak, mint a megfelelő kritikus értékek. Érdekes módon a normális *GARCH* modelleknél már nem ez a helyzet. A CISCO 30 perces adataira a Ljung-Box statisztikák alapján egyik modell illeszkedése sem mondható jónak. CISCO-ra csak a maradéktagok hatványainak statisztikáit közöltük, a maradéktagok statisztikái minden modell és időskála esetén messze a kritikus értékek alatt voltak. A MOL részvény esetén (5. táblázat, 15 perces adatok) valamennyi statisztika jóval a kritikus értékek alatt van. Úgy tűnik, a Lévy modell egy kicsit jobban teljesít, mint a normális.

A fenti *GARCH* modellek illeszkedésének vizsgálatakor fontos meggyőződni arról, hogy egy illesztett *GARCH* modell maradéktagjai stabil (normális ill. Lévy) eloszlásúak-e. Egy adatsor stabilitását ellenőrizhetjük úgy, hogy az

adatokat n -esével összeadjuk, és az így kapott mintából újra becsüljük az α indexet (ezt tettük több alkalommal az előző fejezetben). Az adatsort SuS (stability under summation) tulajdonságúnak mondjuk, ha a fenti becslés ($\hat{\alpha}(n)$) nem függ n -től. Szimulált stabil eloszlású mintákban ez jó közelítéssel teljesül (13. ábra), valódi adatsorokon $\hat{\alpha}(n)$ különböző ütemben tart kettőhöz (16. ill. 22. ábra). Az SuS tulajdonság formálisan is tesztelhető (Fama, Roll [1971], Hsu, Miller, Wichern [1974], Paoletta [2001]). A Fama és Roll által javasolt teszt az $\hat{\alpha}(n) - \hat{\alpha}(1)$ különbségen alapszik, míg Paoletta egyenest illeszt az $\hat{\alpha}(n)$ görbére (ebben az esetben $\hat{\alpha}$ az index Hill [1975] féle becslését jelenti), és a meredekség nullától való eltérését vizsgálja.

Az alábbiakban néhány példát mutatunk az irodalomból olyan adatsorokra, amelyeken a fenti SuS tesztek hamis következtetésre vezethetnek. Hsu, Miller és Wichern olyan mintákat szimulálnak, amelyek két különböző szórású, nulla várható értékű, normális eloszlású részmintából állnak (a részminták egymás után vannak fűzve, így a különböző szórású részek nem keverednek), majd megmutatják, hogy a fenti mintákat Roll tesztje stabilnak fogadja el (a becsült α -k átlaga 1.5 volt). Ezután a fenti mintákat permutálják (a részmintákat összekeverik), és az így kapott minták stabilitását a Roll teszt alapján elvetik. A piaci adatokon hasonló jelenséget tapasztalnak: a permutálatlan piaci adatsort a teszt stabilnak fogadja el, a permutáltat viszont nem. A fenti vizsgálat azért tanulságos, mert rámutat arra, hogy az SuS tesztek alkalmazásakor ügyelni kell arra, hogy a mintánk azonos eloszlású elemekből álljon. A fentiek szerint ugyanis, ha a mintánk például különböző stabil eloszlású részminták összefűzéséből áll, akkor ezt a teszt alapján tévesen stabilnak vélhetjük, mert az aggregáció lényegében a részmintákon belül marad, amelyek stabilak. Ez a példa talán mesterkéltnek tűnik első pillantásra, de ha egy valódi piacon kisebb és nagyobb volatilitású időszakok váltogatják egymást úgy, hogy egy időszakon belül a volatilitás kb. állandó, akkor a piaci adatok pontosan a fenti mesterséges mintákra fognak hasonlítani.

Az SuS teszt alkalmazhatóságának másik fontos feltétele az adatok füg-

getlensége. Számos tanulmány (pl. Akgiray, Booth [1988]) arra hivatkozva utasítja el a Pareto stabil modellt, hogy a napi, heti, havi hozamokból becsült α -k nőnek. Ez a jelenség azonban az összefüggőség következménye is lehet, így a fenti tanulmányok következtetése megkérdőjelezhető. Amint a következő példában látni fogjuk, előfordul az is, hogy egy összefüggő adatsor (*IGARCH* modellel szimulált adatok) stabilnak látszik. Ghose és Kroner [1995] normális és t_5 (öt szabadságfokú t) eloszlású innovációkkal hajtott *GARCH*(1,1) és *IGARCH*(1,1) modelleket szimulálnak, majd azt vizsgálják, hogy rögzített n mellett a minták hány százalékánál éri el $\hat{\alpha}(n)$ kettőt. Az eredmények szerint $\hat{\alpha}(n)$ konvergenciája lassabb a t_5 eloszlású innovációk mellett, mint normális innovációkkal, továbbá a konvergencia adott eloszlású innovációk mellett annál lassabb, minnél nagyobb a perzisztencia ($V = c_1 + d_1$, ld. fent). A $V = 1$ esetben (*IGARCH*) azokban a modellekben lassúbb a konvergencia, ahol c_1 nagyobb. Az *IGARCH* modelleket részletesen megvizsgálva Ghose és Kroner arra a következtetésre jutnak, hogy ezekben a modellekben $\hat{\alpha}(n)$ egyáltalán nem konvergál kettőhöz, hanem közelítőleg konstans! Ez az eredmény különösen érdekes azért, mert az *IGARCH* modellek a pénzügyi idősorok többségénél jól használhatók (Baillie, Bollerslev [1989], Hsieh [1989], Lumsdaine [1995]), és pontosan ezeknél a modelleknél vélhetjük tévesen az SuS tesztek alapján az adatsort Pareto stabilnak. Így megkérdőjelezhetők azoknak a tanulmányoknak az eredményei, amelyek az adatsorban esetleg meglévő *GARCH* hatás figyelmen kívül hagyásával, SuS tesztek alapján nem vetették el a Pareto stabil hipotézist.

Ezzel elérkeztünk a fejezet, és egyben a dolgozat egyik legérdekesebb kérdéséhez: a CISCO és MOL adatokra illesztett Lévy hatvány *GARCH* modellek maradéktagjai stabil eloszlásúak-e? A kérdést mindkét részvény esetében a 15 perces hozamokon fogjuk vizsgálni, mert ezekből van a legtöbb, és mert ezek maradéktagjai különböző hatványaiból számított Ljung-Box statisztikák jóval a kritikus értékek alatt voltak, így függetlennek tekinthetjük őket. Először a maradéktagokat n -esével aggregáljuk, és az α indexet újrabecsüljük az

6. táblázat. A Lévy hatvány *GARCH* modell maradéktagjainak stabilitása

n	1	2	3	4	5	6
CISCO	1.75	1.89	1.94	1.96	1.98	2.00
	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75
	1.79	1.81	1.82	1.84	1.85	1.87
	1.70	1.68	1.66	1.65	1.65	1.64
MOL	1.39	1.43	1.58	1.75	1.91	1.95
	1.39	1.39	1.39	1.39	1.39	1.40
	1.49	1.51	1.55	1.58	1.61	1.63
	1.29	1.26	1.24	1.21	1.20	1.18

n az aggregáció rendje, a CISCO és MOL sorokban a maradéktagokból illetve aggregátumaikból becsült α indexek, alattuk a szimulált mintákból illetve aggregátumaikból becsült α indexek átlaga, majd a konfidencia intervallumok felső és alsó határai szerepelnek.

aggregátumokból. Ezután ugyanezt elvégezzük olyan független, szimmetrikus stabil eloszlású szimulált mintákból kiindulva, amelyek α indexe megegyezik a maradéktagokból becsült α értékével, mérete pedig a maradéktagok mintájának méretével. 1000 kiindulási mintából minden aggregációs szinten kiszámítjuk az aggregátumokból becsült α indexek átlagát, valamint a 99%-os konfidencia intervallumok felső és alsó határait. Az eredményeket a 6. táblázat tartalmazza. Itt n az aggregáció rendje, a CISCO és MOL sorokban a maradéktagokból illetve aggregátumaikból becsült α indexek, alattuk a szimulált mintákból illetve aggregátumaikból becsült α indexek átlaga, majd a konfidencia intervallumok felső és alsó határai szerepelnek. Látható, hogy a maradéktagok aggregátumainak indexei gyorsan tartanak kettőhöz, és mind a konfidencia intervallumokon kívül esnek (kivétel: MOL, $n = 2$). Ezzel szemben a szimulált minták aggregátumaiból becsült indexek átlaga lényegében állandó. A konfidencia intervallumok az aggregációval szélesednek, ami a mintaméret csökkenésének tulajdonítható. Végeredményben tehát a fenti modellek maradéktagjainak stabilitását elvethetjük.

Érdemes lenne sok időszorra elvégezni a fentiekhez hasonló vizsgálatokat, hiszen az irodalomban találunk olyan példát is (Mittnik, Paoletta, Rachev [2000]), amelyben a Lévy hatvány *GARCH* modell maradéktagjainak stabilitása nem vethető el. Hangsúlyoznunk kell továbbá, hogy a Lévy hatvány *GARCH* modell mindkét időszorra jobban illeszkedik, mint a normális hatvány *GARCH*. Nyitott kérdés marad azonban, hogy a *GARCH* modellekben milyen eloszlású innovációkat érdemes használni. Előfordulhat, hogy Lévy eloszlású innovációkkal jobban illeszkedik egy *GARCH* modell, mint például t eloszlású innovációkkal, de a maradéktagok stabilitását a teszt elveti. Tesztelhetőség szempontjából a Lévy eloszlások használata „sebezhetőbb”, mint a t eloszlásoké.

6. Összefoglalás

A dolgozatban a stabil eloszlások alkalmazhatóságát vizsgáltuk pénzügyi idősorokat leíró modellekben. A stabil eloszlások a normális eloszlás általánosításának tekinthetők abban az értelemben, hogy ezek az eloszlások definíció szerint független, azonos eloszlású valószínűségi változók normált összegeinek határeloszlásai. A normális eloszlás (amely a stabil eloszlások családjának tagja) éppen e tulajdonsága révén játszik kiemelt szerepet idősorok modellezésében, pénzügyi elméletekben, és az ezek érvényességének vizsgálatára alkalmazott statisztikai tesztekben. Valahányszor ugyanis olyan változókat kell modelleznünk, amelyek értékét sok egymástól független véletlen körülmény befolyásolja, a centrális határeloszlás tétele alapján a normális eloszlás merül fel első jelöltként. A nem normális stabil eloszlások (Lévy eloszlások) azonban a fenti tétel szerint ugyanúgy alkalmazhatók, mint a normális.

A Lévy eloszlások használatának elterjedését a közgazdasági gyakorlatban több körülmény akadályozta: nem létezik szórásuk, a sűrűségfüggvényüknek egy-két speciális esettől eltekintve nincs explicit alakja, numerikusan viszonylag nehezen kezelhetők, használatuk során a szokásos statisztikai tesztek egy része nem alkalmazható, alkalmazásukhoz a pénzügyi elméletek egy részét újra kell gondolni. E helyen is szeretnénk hangsúlyozni, hogy a fenti problémák többsége már megoldott, illetve aktív kutatások tárgya. Ezzel a dolgozattal szeretnénk e kutatási folyamathoz hozzájárulni, és a Lévy eloszlások közgazdasági alkalmazásainak hazai elterjedését inspirálni. Sok közgazdász eleve idegenkedik attól a gondolattól, hogy egy közgazdasági változó szórása nem véges. „A priori” azonban a normális eloszlást is elvethetnénk, hiszen annak ugyan van szórása, de a sűrűségfüggvényének tartója nem véges. A Lévy eloszlások numerikus kezelhetőségének kérdése lényegében megoldott: számos algoritmus, és (akár az internetről ingyenesen letölthető) szoftver áll rendelkezésre, amelyekkel a Lévy sűrűségfüggvény pontjai gyorsan kiszámíthatók, a görbék kirajzolhatók, és paramétereik gyorsan becsülhetők.

A dolgozatban olyan részvények hozamainak idősorát modelleztük, amelyekkel a magyar (BÉT), és az amerikai piacokon (NYSE, NASDAQ) kereskednek. Megvizsgáltuk, hogy a fejlett piacokon már alkalmazott, stabil eloszlásokra épülő modellek mennyire használhatók a magyar piacon. A kiválasztott részvények hozamainak statisztikai tulajdonságai alapján összehasonlítottuk a magyar és a külföldi piacokat, továbbá vizsgáltuk a magyar piac időbeni fejlődését. A hozamokat különböző időskálákon (kötésenként, árváltozásonként, és percenként) modelleztük, és összehasonlítottuk a különböző modellek teljesítményét. Eredményeinkkel új megvilágításba helyeztük a pénzügyi piacokon tapasztalható „vastag farok” jelenséget.

A pénzügyi idősorok elemzésének fontos alkalmazási területe a piaci kockázatok kezelése. A piaci kockázatot mérő VaR (Value at Risk) számításának szokásos minimális időhorizontja egy nap. A dolgozatban azt vizsgáltuk, hogy napon belüli hozamokból hogyan lehet egy napnál rövidebb időhorizontra kockázatot értékelni. Erre vonatkozó eredményeink a gyakorlatban az ún. „day trade” pozíciókhoz szükséges alapletétek megállapításakor használhatók. A napon belüli hozamok modellezésének eredményei az egy napnál hosszabb időhorizontú VaR számítások során is alkalmazhatók.

Az eredményeket áttekintve úgy gondoljuk, hogy érdemes tovább vizsgálni a stabil eloszlások használhatóságát pénzügyi idősorokat leíró modellek „építőköveiként”. A stabil eloszlások használatának szép elméleti háttérrel ad a centrális határeloszlás tétele, és alkalmazásuk a pénzügyi ökonometriában várhatóan érdekes új kutatási területekre vezet majd.

Hivatkozások

- [1] R. J. ADLER, R. E. FELDMAN, M. S. TAQQU, SZERK. [1998]: *A Practical Guide to Heavy Tails*, Birkhäuser, Boston.
- [2] V. AKGIRAY, G. G. BOOTH [1988]: *The stable-law model of stock returns*, Journal of the American Statistical Association **6**, 51–57.
- [3] Y. AMIHUD, H. MENDELSON [1987]: *Trading mechanisms and stock returns: An empirical investigation*, The Journal of Finance **XLII**, 533–555.
- [4] R. T. BAILLIE, T. BOLLERSLEV [1989]: *The message in daily exchange rates: a conditional-variance tale*, Journal of Business and Economic Statistics **7**, 297–305.
- [5] J. BERAN [1994]: *Statistics for Long-Memory Processes*, Chapman & Hall, New York.
- [6] T. BOLLERSLEV [1987]: *A Conditional Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return*, Review of Economics and Statistics **69**, 542–547.
- [7] T. BOLLERSLEV, R. F. ENGLE, D. B. NELSON [1994]: *ARCH models*, Handbook of Econometrics **4**, 2959–3038.
- [8] P. BOUGEROL, N. PICARD [1992]: *Stationarity of GARCH Processes and of Some Non-Negative Time Series*, Journal of Econometrics **52**, 115–127.
- [9] R. C. BRITTBERG, N. J. GORLES [1974]: *A comparison of the stable and Student distributions as statistical models for stock prices*, Journal of Business, 244–280.
- [10] P. J. BROCKWELL, R. A. DAVIS [1991]: *Time Series: Theory and Methods*, Springer, New York.

- [11] M. CALDER, R. A. DAVIS [1998]: *Inference for linear processes with stable noise*, R. J. ADLER, R. E. FELDMAN, M. S. TAQQU, SZERK.: A Practical Guide to Heavy Tails, 159–176. Birkhäuser, Boston.
- [12] J. Y. CAMPBELL, A. W. LO, A. C. MACKINLAY [1997]: *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University, New Jersey, 2. kiad.
- [13] J. M. CHAMBERS, C. L. MALLOWS, B. W. STUCK [1976]: *A method for simulating stable random variables*, Journal of the American Statistical Association **71**, 340–344.
- [14] P. K. CLARK [1973]: *A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices*, Econometrica **41**, 135–159.
- [15] R. A. DAVIS, T. MIKOSCH [1998]: *The Sample Autocorrelations of Heavy-Tailed Processes with Applications to ARCH*, The Annals of Statistics **26**(5), 2049–2080.
- [16] Z. DING, C. W. J. GRANGER, R. F. ENGLE [1993]: *A long memory property of stock market returns and a new model*, Journal of Empirical Finance **1**, 83–106.
- [17] P. EMBRECHTS, C. KLÜPPELBERG, T. MIKOSCH [1997]: *Modelling Extremal Events*, Springer, Berlin.
- [18] R. F. ENGLE, J. R. RUSSELL [1994]: *Forecasting transaction rates: the autoregressive conditional duration model*, NBER Working Paper.
- [19] R. F. ENGLE, J. R. RUSSELL [1998]: *Autoregressive conditional duration: a new model for irregularly spaced transaction data*, Econometrica **66**, 1127–1162.
- [20] R. F. ENGLE [2000]: *The econometrics of ultra-high-frequency data*, Econometrica **68**, 1–22.

- [21] E. F. FAMA [1965]: *The behavior of stock market prices*, The Journal of Business **38**, 34–105.
- [22] E. F. FAMA, R. ROLL [1968]: *Some properties of symmetric stable distribution*, Journal of the American Statistical Association **63**, 817–836.
- [23] E. F. FAMA, R. ROLL [1971]: *Parameter estimates for symmetric stable distributions*, Journal of the American Statistical Association **66**, 331–338.
- [24] W. FELLER [1971]: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, Wiley, New York, Chichester, 2. kiad.
- [25] K. R. FRENCH, R. ROLL [1986]: *Stock return variances: the arrival of information and the reaction of traders*, Journal of Financial Economics **17**, 5–26.
- [26] A. R. GALLANT, P. E. ROSSI, G. TAUCHEN [1992]: *Stock prices and volume*, The Review of Financial Studies **5**, 199–242.
- [27] D. GHOSE, K. F. KRONER [1995]: *The relationship between GARCH and symmetric stable processes: finding the source of fat tails in financial data*, Journal of Empirical Finance **2**, 225–251.
- [28] B. V. GNYEGYENKO, A. N. KOLMOGOROV [1951]: *Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai*, Akadémiai Kiadó, Szeged.
- [29] C. A. E. GOODHART, M. O'HARA [1997]: *High frequency data in financial markets: issues and applications*, Journal of Empirical Finance **4**, 73–114.
- [30] P. GOPIKRISHNAN, M. MEYER, L. AMARAL, H. E. STANLEY [1998]: *Inverse cubic law for the distribution of stock price variations*, The European Physical Journal B **3**, 139–140.

- [31] C. GOURIEROUX [1997]: *ARCH Models and Financial Applications*, Springer-Verlag, New York.
- [32] A. C. HARVEY, E. RUIZ, N. SHEPHARD [1994]: *Multivariate Stochastic Variance Models*, *Reviews of Economic Studies* **61**, 247–264.
- [33] B. M. HILL [1975]: *A Simple General Approach to Inference About the Tail of a Distribution*, *Annals of Statistics* **3**, 1163–1174.
- [34] D. A. HSIEH [1989]: *Modeling Heteroscedasticity in Daily Foreign-Exchange Rates*, *Journal of Business and Economic Statistics* **7**, 307–317.
- [35] D.-A. HSU, R. B. MILLER, D. W. WICHERN [1974]: *On the stable paretian behavior of stock-market prices*, *Journal of the American Statistical Association* **69**, 108–113.
- [36] J. M. KARPOFF [1987]: *The relation between price changes and trading volume: a survey*, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **22**, 109–127.
- [37] S. KIM, N. SHEPHARD, S. CHIB [1998]: *Stochastic Volatility: Likelihood Inference and Comparison with ARCH models*, *Reviews of Economic Studies* **65**.
- [38] I. KOPONEN [1995]: *Analytic approach to the problem of convergence of truncated Lévy flights towards the Gaussian stochastic process*, *Journal of the American Physical Society* **52**, 1197–1199.
- [39] A. H.-L. LAU, H.-S. LAU, J. R. WINGENDER [1990]: *The distribution of stock returns: new evidence against the stable model*, *Journal of Business and Economics* **8**, 217–223.
- [40] S. LIU, B. W. BRORSEN [1995]: *Maximum Likelihood Estimation of a GARCH-stable Model*, *Journal of Applied Econometrics* **10**, 273–285.

- [41] R. L. LUMSDAINE [1995]: *Finite-sample properties of the maximum likelihood estimator in GARCH(1,1) and IGARCH(1,1) models: a Monte Carlo investigation*, Journal of Business and Economic Statistics **13**, 1–10.
- [42] T. LUX, VARGA J. [1996]: *A pareto hipotézis vizsgálata - értékpapír-piaci hozamok és az extrémális hozamok eloszlása*, Szigma **XXVII**, 157–179.
- [43] B. MANDELBROT [1963]: *The variation of certain speculative prices*, The Journal of Business **36**, 394–419.
- [44] B. MANDELBROT, H. M. TAYLOR [1967]: *On the distribution of stock price differences*, Operations Research **15**, 1057–1063.
- [45] R. N. MANTEGNA [1991]: *Lévy walks and enhanced diffusion in Milan stock exchange*, Physica A **179**, 232–242.
- [46] R. N. MANTEGNA [1994]: *Fast, accurate algorithm for numerical simulation of Lévy stable stochastic processes*, Journal of the American Physical Society **49**, 4677–4683.
- [47] R. N. MANTEGNA, H. E. STANLEY [1994]: *Stochastic process with ultraslow convergence to a Gaussian: The truncated Lévy flight*, Physical Review Letters **73**, 2946–2949.
- [48] R. N. MANTEGNA [1995]: *Scaling behaviour in the dynamics of an economic index*, Letters to Nature **376**, 46–49.
- [49] R. N. MANTEGNA [1998]: *Modeling of financial data: Comparison of the truncated Lévy flight and the ARCH(1) and GARCH(1,1) processes*, Physica A **254**, 77–84.
- [50] **R. N. Mantegna, Palágyi Z., H. E. Stanley** [1999]: *Applications of statistical mechanics to finance*, Physica A **274**, 216–221.
- [51] J. H. MCCULLOCH [1978]: *Continuous time processes with stable increments*, Journal of Business **51**, 601–619.

- [52] J. H. McCULLOCH [1985]: *Interest-Risk Sensitive Deposit Insurance Premiums: Stable ACH Estimates*, Journal of Banking and Finance **9**, 137–156.
- [53] J. H. McCULLOCH [1998]: *Numerical approximation of the symmetric stable distribution and density*, R. J. ADLER, R. E. FELDMAN, M. S. TAQQU, SZERK. A Practical Guide to Heavy Tails, 489–499. Birkhäuser, Boston.
- [54] T. MIKOSCH, C. STĀRICĀ [2000]: *Limit Theory for the Sample Autocorrelations and Extremes of a GARCH(1,1) Process*, The Annals of Statistics **28**(5), 1427–1451.
- [55] S. MITTNIK, M. S. PAOLELLA, S. T. RACHEV [2000]: *Diagnosing and Treating the Fat Tails in Financial Returns Data*, Journal of Empirical Finance **7**, 389–416.
- [56] S. MITTNIK, M. S. PAOLELLA, S. T. RACHEV [2002]: *Stationarity of Stable Power-GARCH Processes*, Journal of Econometrics **106**, 97–107.
- [57] D. NELSON [1991]: *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach*, Econometrica **59**, 347–370.
- [58] J. P. NOLAN [1998]: *Parameterizations and modes of stable distributions*, Statistics & Probability Letters **38**, 187–195.
- [59] R. R. OFFICER [1972]: *The distribution of stock returns*, Journal of the American Statistical Association **67**, 807–815.
- [60] A. PAGAN [1996]: *The econometrics of financial markets*, Journal of Empirical Finance **3**, 15–102.
- [61] **Palágyi Z.** [1999]: *Árfolyamingadozások és kockázatbecslés a Budapesti Értéktőzsdén*, Szigma **XXX**, 27–32.
- [62] **Palágyi Z., R. N. Mantegna** [1999]: *Empirical investigation of stock price dynamics in an emerging market*, Physica A **269**, 132–139.

- [63] **Palágyi Z., Kőrösi G., R. N. Mantegna** [2002]: *High Frequency Data Analysis in an Emerging and a Developed Market*, Empirical Science of Financial Fluctuations, H. TAKAYASU SZERK., Springer-Verlag Tokyo.
- [64] A. K. PANORSKA, S. MITTNIK, S. T. RACHEV [1995]: *Stable GARCH Models for Financial Time Series*, Applied Mathematics Letters **8**(5), 33–37.
- [65] M. S. PAOLELLA [2001]: *Testing the Stable Paretian Assumption*, Mathematical and Computer Modelling **34**, 1095–1112.
- [66] P. D. PRAETZ [1972]: *The distribution of share price changes*, Journal of Business **45**, 49–55.
- [67] S. RACHEV, S. MITTNIK [2000]: *Stable Paretian Models in Finance*, Wiley Series in Financial Economics and Quantitative Analysis, John Wiley & Sons, New York, Chichester.
- [68] RÉNYI A. [1989]: *Valószínűségszámítás*, Tankönyvkiadó, Budapest.
- [69] G. SAMORODNITSKY, M. S. TAQQU [1994]: *Stable non-Gaussian random processes*, Chapman & Hall, New York, London.
- [70] S. TAYLOR [1986]: *Modelling Financial Time Series*, John Wiley & Sons, New York.
- [71] A. L. TUCKER [1992]: *A reexamination of finite- and infinite-variance distributions as models of daily stock returns*, Journal of Business & Economic Statistics **10**, 73–81.
- [72] VARGA J. [1999]: *Stock return distributions: a survey of empirical investigations*, Statisztikai Szemle **77**, különszám, 23–34.
- [73] VARGA J. [2002]: *Pénz- és tőkepiaci idősorok sztochasztikus volatilitás modelljei*, Szigma, megjelenés alatt.

- [74] W. WILLINGER, M. S. TAQQU, V. TEVEROVSKY [1999]: *Stock market prices and long-range dependence*, Finance and Stochastics **3**, 1–13.