Badics Judit

INFORMÁCIÓ ÉS EGYENSÚLY

MATEMATIKAI KÖZGZDASÁGTAN ÉS GAZDASÁGELEMZÉS TANSZÉK

TÉMAVEZETŐ: GÖMÖRI ANDRÁS

BUDAPESTI KÖZGAZDASÁGTUDOMÁNYI ÉS
ÁLLAMIGAZGATÁSI EGYETEM

KÖZGAZDASÁGTANI Ph. D. PROGRAM

INFORMÁCIÓ ÉS EGYENSÚLY

Ph.D. értekezés

Badics Judit

Budapest, 2003.

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS **6**

Partícionális és nempartícionális információs struktúra **6**

Információs struktúra és tudás **10**

Tudás és egyensúly **13**

Irodalmi előzmények és elhatárolások **14**

A disszertáció felépítése és új eredményei **18**

I. RÉSZ. INFORMÁCIÓ ÉS TUDÁS **20**

1. FEJEZET. A PARTÍCIONÁLIS INFORMÁCIÓS STRUKTÚRA **21**

A tudás **24**

A tudás függvény **25**

A döntéshozó vélekedése **28**

A köztudott tudás **30**

A köztudott tudás egy ekvivalens meghatározása **31**

Partíciók durvítása, legfinomabb közös durvítása és a metszet függvény 32

Az aumanni köztudott tudás definíció 38

A Milgrom-féle köztudott tudás definíció **41**

2. FEJEZET. A NEMPARTÍCIONÁLIS INFORMÁCIÓS STRUKTÚRA **47**

A feltételes és a feltétlen tudás **50**

A feltételes tudás függvény és a feltétlen tudás függvény **54**

A feltételes tudás függvény 55
A feltétlen tudás függvény 60
A döntéshozó vélekedése 67
A feltételes és a feltétlen köztudott tudás 68
A köztudott tudás ekvivalens meghatározása 71

II. RÉSZ. DÖNTÉS INFORMÁCIÓS PROBLÉMA MELLETT 78

1. FEJEZET. DÖNTÉS PARTÍCIONÁLIS INFORMÁCIÓS STRUKTÚRÁVAL JELLEMEZHETŐ INFORMÁCIÓS PROBLÉMA ESETÉN 79

2. FEJEZET. DÖNTÉS NEMPARTÍCIONÁLIS INFORMÁCIÓS STRUKTÚRÁVAL JELLEMEZHETŐ INFORMÁCIÓS PROBLÉMA ESETÉN 87

III. RÉSZ. JÁTÉK 94

1. FEJEZET. A SZIGNÁL-JÁTÉK 96

2. FEJEZET. A TÖKÉLETES BAYESI EGYENSÚLY 99
Egyensúlytípusok 101

ÖSSZEFOGLALÁS ÉS TOVÁBBI KUTATÁSI LEHETŐSÉGEK 108

IRODALOMJEGYZÉK 111

SZAKSZAVAK JEGYZÉKE 116

A SZERZŐNEK A TÉMÁBAN MEGJELENT PUBLIKÁCIÓI 117

BEVEZETÉS

A disszertáció az aszimmetrikus információs játékok egyensúlyában a rosszul informált fél tudásáról, e tudás leírásához megkonstruált fogalmi apparátusról szól. Annak bemutatásához, hogy erre a fogalmi apparátusra miért van szükség, illetve mire használható, egy kissé vissza kell lépni az előzményekig.

Partícionális és nempartícionális információs struktúra

Azokban a modellekben, melyekben döntéshozók viselkedése révén írnak le gazdasági helyzeteket, jelenségeket, a modell megoldása, eredménye szempontjából fontos, hogy a döntéshozók mit tudnak a helyzetről, egymásról, egymás tudásáról, egymás tudására vonatkozó tudásáról, stb. Ez valójában az olyan helyzetekben is így van, amelyekben felteszik, hogy minden döntéshozó birtokában van a döntéséhez szükséges összes információnak – azaz a helyzet teljes információs – de ezekben a helyzetekben a döntéshozók tudásának mibenléte a dolog természetéből adódóan nem jelent problémát. Néhány előzménytől eltekintve (Blackwell [1951]) a döntéshozók tudásának jelentőségét a nem teljes információs játékok megoldásfogalmának megalkotása (Harsanyi [1967-68]) tette világossá.

E megoldásfogalom mögött – többé vagy kevésbé tudatosan – a döntéshozók tudásának szerkezetére vonatkozó különböző leegyszerűsítések húzódnak meg. Ilyen leegyszerűsítő feltevések *például* a következők.

- A játékosok kezdeti vélekedése azonos, és a játékosok között köztudott tudás. Ez azt jelenti, hogy a játék megkezdése előtt a játékosok információi azonosak, és ez a tény a játékosok között köztudott tudás.

- A játékosok kezdeti vélekedésük és az általuk tett megfigyelés alapján, azonos módon alakítják ki korrigált vélekedésüket, és ez a tény a játékosok között köztudott tudás. Ennek a feltevésnek más feltevésekkel együtt az a következménye, hogy a játékosok korrigált vélekedései nem lehetnek bármilyenek, közöttük bizonyos kapcsolatoknak kell lenniük.

- A játékosok információs halmazrendszere partíció. Ez – nagyon röviden – a következőt jelenti. Egy játékosnak nincs teljes információja a lehetséges világállapotok közül valóban fennálló állapotról. Azonban bármely állapotban – amikor az fennáll – információi alapján el tudja különíteni a lehetséges és a nem lehetséges állapotok halmazát. Így megadható az egyes állapotokban lehetségesnek tartott állapotok halmazainak rendszere. Azt teszik fel, hogy ez a halmazrendszer az összes állapotok halmazának egy partíciója. Ez a lehetséges következtetések levonásának egy igen egyszerű módját jelenti.

A partícionális információs struktúra feltételezése igen ésszerűnek tűnik és olyan természetes, hogy a közgazdasági alkalmazásokban általában említés nélkül használják. Ez a feltevés ugyanis biztosítja, hogy amikor a döntéshozó következtetéseket von le információiból, gondolkodása ellentmondásmentes legyen, eleget tegyen bizonyos minimális konzisztencia-követelményeknek. Tudniillik – partícionális információs struktúra esetén – ha egy A állapot fennállásakor a döntéshozó az állapotok egy $I(A)$ halmazát tartja lehetségesnek, akkor egy másik B állapotra nézve két eset lehetséges. Ha $B \in I(A)$, akkor a B állapot fennállása esetén a döntéshozó ugyanazokat az állapotokat tartja lehetségesnek, mint A esetén, azaz $I(A) = I(B)$. Ha viszont $B \notin I(A)$, akkor a két halmaz diszjunkt. Ha ugyanis létezne egy $C \in I(A) \cap I(B)$ állapot, akkor erről a C állapotról a döntéshozónak akár az A, akár a B állapot fennállása esetén egyidejűleg kellene azt gondolnia, hogy lehetséges és hogy nem lehetséges.

Ugyanakkor az irodalomban a nempartícionális információs struktúra tudatos használata igen ritka. Ha azonban mégis előfordul, akkor a nemracionális döntéshozói viselkedés leírására alkalmas eszközként tekintik. Nemracionálisnak tekintve itt azt a döntéshozót, aki nem használja fel maradéktalanul a rendelkezésre álló információkat, ebben az értelemben nem optimalizál. Ennek illusztrálására álljon itt egy példa. (Geanakoplos [1992] pp. 79-80)

Egy orvosnak műtétet kell végrehajtania betegén. A műtét azonban csak akkor lehet sikeres, ha a beteg vérében az 1 és 2 jelű két antitest mindegyike jelen van. I-vel jelölve egy antitest jelenlétét, N-nel a hiányát, a lehetséges állapotok halmaza

$$\Omega = \{II, IN, NI, NN\},$$

ahol minden állapotban az első szimbólum az 1, a második a 2 antitest jelenlétére vagy hiányára utal.

Az orvos vizsgálat céljából a laborba küldi a beteg vérmintáját. A labor minden kétséget kizáróan képes megállapítani egy antitest jelenlétét, hiányát illetően azonban nem képes erre, azaz, ha nincs jelen, nem tud mondani róla semmit. Ha az orvos racionális következtetéseket von le a labor jelentéséből, akkor információs halmazrendszere a

$$P = \{\{II\}, \{IN\}, \{NI\}, \{NN\}\}$$

partíció. Vagyis bármelyik állapotot azonosítani tudja. Ha ugyanis a labor pl. azt jelenti, hogy 1 jelen van, 2-ről pedig nem tud semmit, akkor az orvos tudja, hogy az *IN* állapot áll fenn. *NI* és *NN* nem állhat fenn, hiszen az 1 antitest jelen van. Ugyanakkor *II* sem állhat fenn, hiszen ekkor a labor jelentené a 2 antitest jelenlétét.

Ha azonban az orvos nem racionális, azaz nem használja fel maradéktalanul a rendelkezésére álló információkat (vagy nem ismeri a labor képességeit, csak jelentéseit „szó szerint” értelmezi), akkor információs halmazrendszere

$$P = \{\{II\}, \{II, IN\}, \{II, NI\}, \{II, IN, NI, NN\}\},$$

vagyis nem partíció.

Részletesen foglalkozik a nempartícionális információs struktúrával, mint az irracionális viselkedés leírásának eszközével Geanakoplos. (Geanakoplos [1989]) A pontosság kedvéért meg kell jegyezni, hogy az említett szerző és mások nem azt állítják, hogy amennyiben a döntéshozó információs struktúrája nempartícionális, akkor viselkedése – az előbbi értelemben – mindenképpen irracionális. Csupán azt tapasztalhatjuk, hogy míg a szokásos modellekben a partícionális információs struktúra feltevésével élnek, a nempartícionális információs struktúrát az információit rosszul használó döntéshozó viselkedésének leírásával kapcsolják össze.

Ugyanakkor – és ez a disszertáció tárgya szempontjából igen fontos állítás – nyilvánvaló, hogy egy döntéshozó információs struktúrája akkor is lehet nempartícionális, ha információit tökéletesen kihasználja és minden egyéb szempontból is tökéletesen racionális (optimalizáló) módon viselkedik. Ennek illusztrálására is említünk egy igen egyszerű, de mondanivalónk szempontjából fontos példát.

Két játékos, A és B egy szekvenciális, aszimmetrikus információs játékot játszik. Először A – a jól informált játékos – választ egy akciót, ezt B – a rosszul informált játékos – megfigyeli, majd B választ egy akciót és a játéknak vége. Tegyük fel, hogy A kétféle típusú lehet – *a* illetve *b* – valamint hogy A akciója is kétféle lehet, ezek: *L* és *P*.

Tegyük fel, hogy a játék valamely egyensúlyában az A játékos, amennyiben típusa *a*, akkor az *L* akciót választja, és amennyiben típusa *b*, keveri az *L* és a *P* akciót. Ez meghatározza a B játékos információit az egyensúlyban. Számára két állapot lehetséges. Az egyik az, hogy A típusa *a*, a másik, hogy A típusa *b*. Ugyanakkor tesz egy megfigyelést, amely számára a fennálló állapotról információt hordoz. E megfigyelés nem más, mint A egy akciója. A leírt egyensúlyban információi - A viselkedése nyomán - a különböző állapotokhoz a következőképpen rendelnek megfigyeléseket:

$$a \mapsto \{L\}, \qquad b \mapsto \{L,P\}.$$

Így információs halmazrendszere az egyensúlyban

$$P = \{\{b\},\{a,b\}\}$$

nem partíció.

A példa azt igyekszik illusztrálni, hogy egy döntéshozó információs halmazrendszere vagy struktúrája akkor is lehet nempartícionális, ha viselkedése racionális. A példa tanulsága tehát mondanivalónk szempontjából a következő. A döntéshozó információs halmazrendszere nem viselkedését, hanem helyzetének információs jellemzőit leíró eszköz. Az információs halmazrendszert gondolatmenetünk során mindvégig így tekintjük.

Információs struktúra és tudás

A hagyományos tudásfogalom (ld. pl. Osborne – Rubinstein [1994] pp. 67-85) értelmében egy döntéshozó egy adott állapotban – a legegyszerűbben fogalmazva – akkor tudja, hogy egy *E* esemény bekövetkezett – vagy röviden: tudja, hogy *E* – ha az adott állapotban megfigyelt jelzéséhez tartozó információs halmaz részhalmaza *E*-nek. E tudásfogalom mellett a döntéshozó információs halmazrendszerének ismeretében bármely állapotban eldönthető, hogy egy adott eseményt tud-e vagy nem, csak meg kell vizsgálnunk minden állapotot a hozzátartozó jelzéssel. Azaz, ez a tudásfogalom azt feltételezi, hogy minden állapotban pontosan egy jelzés figyelhető meg, vagyis az információs halmazrendszer partíció. A szóbanforgó tudásfogalom tehát csak partícionális információs struktúra esetén érvényes. Hasonló mondható az említett tudásfogalomra épülő – először Aumann által definiált – köztudott tudás fogalmáról is.

Korábban azonban rámutattunk, hogy semmi akadálya annak, hogy egy döntéshozó információs struktúrája – mondjuk egy modell egyensúlyában – nempartícionális legyen. Ugyanakkor azt tapasztaljuk, hogy az irodalomban – különösen a közgazdasági alkalmazásokban – az ilyen helyzetekben igen elterjedten a hagyományos tudás- illetve köztudott tudás fogalmat használják, amely – mint erre rámutattunk – csak partícionális információs struktúra esetére definiált, így valójában nem használható. Állításunk illusztrálására – a szempontunkból lényegtelen részletek mellőzésével – felidézünk egy példát.

Egy a valutaválságról szóló cikkben (Morris – Shin [1998]) a szerzők egy egyszerű játékot tárgyalnak. A játék szereplői: egyfelől a központi jegybank, amely vagy védi a valutát, vagy nem, másfelől a potenciális spekulálók, akik vagy támadják a valutát, vagy nem. A szerzők megmutatják, hogy amennyiben a játék teljes információs, két tiszta egyensúlya van: az egyikben a központi jegybank védi a valutát, a spekulálók pedig nem támadják, a másikban a központi jegybank nem védi a valutát, a spekulálók pedig támadják. Így a modellnek semmilyen prediktív ereje nincs abban a tekintetben, hogy lesz-e válság, vagy nem. Ha azonban – mint azt a szerzők megmutatják – a játékot nem teljes információssá tesszük (a spekulálóknak a fundamentumok értékére vonatkozó ismereteit tekintve), az egyensúly egyértelművé válik. Az eredmény mögött az húzódik meg, hogy ebben az esetben a fundamentumoknak nincs olyan értéke, amely mellett a fundamentumok egy intervalluma (egy esemény) a spekulálók között köztudott tudás. Ez az a mozzanat, amely – eltekintve itt a cikk fő mondanivalójától – szempontunkból érdekes, ezért érdemes erre részletesebben kitérni.

A szerzők a spekulálók hiányos informáltságát a következőképpen írják le. Legyen a fundamentumok értéke θ valamennyi spekuláló számára egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0,1]$ intervallumon. Amennyiben a fundamentumok valódi értéke θ, minden spekuláló megfigyel egy x jelzést úgy, hogy x egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon]$ intervallumon, ahol ε valamely kicsiny pozitív szám és az egyes spekulálók által megfigyelt jelzések egymástól függetlenek. Ezek után a szerzők megmutatják, hogy ilyen feltételek mellett a fundamentumoknak nincs olyan értéke, amely mellett a fundamentumok egy adott intervalluma a spekulálók között köztudott tudás. Ismét eltekintve a számunkra lényegtelen részletektől, a gondolatmenet azon alapul, hogy egy esemény a szereplők között akkor köztudott tudás, ha n-ed rendű tudás bármely n-re. A szerzők azt mutatják meg, hogy ez nem teljesül. A gondolatmenet tehát a tudás és köztudott tudás hagyományos fogalmával operál, amelyek partícionális információs struktúra esetén értelmezhetők.

Könnyű azonban belátni, hogy ha spekulálók információit a fenti módon adjuk meg, akkor információs halmazrendszerük nem partíció. Ha egy spekuláló az x jelzést figyeli meg, akkor információs halmaza az $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ intervallum. Csakhogy minden állapotban végtelen sok jelzést figyelhet meg, a különböző állapotokhoz tartozó információs halmazai pedig nem feltétlenül diszjunktak vagy azonosak. Információs halmazrendszere tehát nem partíció. A tanulmány tehát olyan esetre használja a hagyományos tudás illetve köztudott tudás fogalmakat, amelyre azok nem érvényesek, ráadásul egy olyan helyzetben, amelyben az eredmény magyarázata szempontjából e fogalmaknak kulcsszerepük van.

A disszertáció az ilyen típusú problémákra ad megoldást. Bevezetjük a tudás olyan fogalmát, amely a hagyományos tudásfogalom általánosítása és érvényes partícionális és nempartícionális információs halmazrendszer esetén is.

Ha azonban csak az lenne a probléma, hogy a hagyományos tudásfogalom és a nempartícionális információs struktúra nem egyeztethető össze, erre lenne megoldás. A megoldás – amely Aumanntól származik – alapja az állapothalmaz átértelmezése. Legyen ugyanis Ω az állapotok halmaza, Y pedig az összes megfigyelhető jelzések halmaza. Ekkor tekintsük állapotnak az $\Omega \times Y$ Descartes-szorzat elemeit. Az így értelmezett állapothalmazon a döntéshozó információs struktúrája mindig partíció. Vagyis egy nempartícionális információs struktúrát mindig partícionálissá alakíthatunk. Túl azon, hogy a közgazdasági alkalmazásokban ezzel a megoldással nem élnek, az I. rész 2. fejezetében egy példa segítségével megmutatjuk, hogy a döntéshozó tudása az átalakított állapothalmaz esetén sem írható le, csak az itt bevezetett általánosabb tudásfogalom segítségével. A disszertáció a tudás új fogalmát a nempartícionális információs struktúra kapcsán vezeti be, mivel ez így a legegyszerűbb, középpontjában azonban – a mondottak alapján – nem az áll, hogy az információs struktúra partícionális, vagy nem.

Tudás és egyensúly

A szekvenciális, aszimmetrikus információs játékok egyensúlyfogalma a tökéletes bayesi egyensúly. Ármost az irodalomban az említett egyensúly változatainak (elvegyítő, szeparáló és részben-szeparáló egyensúly) definícióival gyakorlatilag nem találkozunk. (Ez alól bizonyos mértékig kivétel Kreps és Sobel cikke, erre a megfelelő helyen visszatérünk. (Kreps – Sobel [1994])) Az olyan – a közgazdasági alkalmazások tekintetében alapvető jelentőségű – kézikönyv, mint például Fudenberg – Tirole könyve, a szóban forgó egyensúly-fogalmakat vagy példákkal illusztrálja, vagy körülírja. (Fudenberg – Tirole [1991a] pp. 327) E körülírások általában – teljesen érthető módon – arra épülnek, hogy a játékosok milyen stratégiát játszanak az egyensúlyban. Ugyanakkor e leírások következményként és az egyensúly jellemzéseként megemlítik, hogy a játékosok mit tudnak az egyensúlyban. (Fudenberg – Tirole [1991a] pp. 328) Csakhogy e tudás-leírás ismét a hagyományos tudásfogalmat használja, amely, mint rámutattunk, bizonyos esetekben érvénytelen. (Például egy részben szeparáló egyensúlyban, a rosszul informált szereplő információs halmazrendszere nem partíció.) A bevezetett általánosabb tudásfogalommal ez a probléma is megoldható, ennél azonban többre is alkalmas.

Felmerül ugyanis a kérdés: ha az egyensúly előbb említett változatai különböznek a játékosok tudásában, információs struktúrájában, nem lehetséges-e az egyensúlyok – gyakorta megkerült – definícióit éppen e különbségekre építve megadni? Ha azonban az egyensúly-definíciókat a játékosok egyensúlyi tudására építjük, pontosan meg kell tudnunk mondani, mit jelent a tudás, mit értünk azon, hogy egy játékos, vagy döntéshozó tud valamit. Ráadásul – mint láttuk – ezt olyan helyzetekben is meg kell tudnunk adni, amelyekben a játékosok információs struktúrája nempartícionális. Ez azonban az irodalomban – részben az említett okokból – teljesen ismeretlen, kimunkálatlan. Ezek a kérdések állnak a disszertáció utolsó részének középpontjában.

Irodalmi előzmények és elhatárolások

Kiterjedt irodalom foglalkozik – elsősorban az aszimmetrikus információs játékokkal összefüggésben – a döntéshozók információs struktúrájával, tudásának mibenlétével, stb. kapcsolatos kérdésekkel. Ezen eredmények egy részére támaszkodunk, más tárgyalt kérdésekkel nem foglalkozunk, illetve bizonyos fogalmakat egyes szerzőktől eltérő módon használunk. Ezért érdemes a leglényegesebb irodalmi előzményeket áttekinteni.

Az első, megkerülhetetlen publikáció Harsányi cikke, amelyben először ad megoldást nem teljes információs játékra. (Harsanyi [1967-68]) E cikkben szerepelnek először – részben nem teljesen explicit módon – a Bevezetés elején említett feltevések.

Az első, e feltevéseket érintő reakció Harsányi modelljére Aumann cikke.

(Aumann [1974]) Aumann ebben a cikkben az azonos kezdeti vélekedés feltevését interpretálja. (Aumann [1974] pp. 92-94) Aumann szerint Harsányi azt az álláspontot képviseli, hogy ha két döntéshozó különböző valószínűséget tulajdonít ugyanannak az eseménynek, akkor az csak a rendelkezésükre álló információk különbségéből adódik, vagyis abból, hogy korábban különböző szignálokat figyeltek meg, és a kezdeti vélekedéseket ennek megfelelően kell kezelni. Ezt a felfogást nevezi Aumann „Harsányi-doktríná"-nak.

A Harsányi-doktrínára az irodalom jó része reflektál, számos tankönyv és kézikönyv megemlíti, azonban ezek álláspontja sokszor meglehetősen eltérő. Kreps például úgy véli, hogy az a valószínűség, amelyet egy döntéshozó egy eseménynek tulajdonít, a preferenciarendezésének része. (Kreps [1990] pp. 110-111) Ezért azt feltételezni, hogy az említett valószínűség minden döntéshozó esetén azonos, annak feltételezését jelenti, hogy a döntéshozók preferenciái azonosak, ami szokatlan feltevés a sztenderd elméletben, ahol a preferenciarendezést egyéni adottságnak szokás tekinteni. Ugyanakkor Binmore (aki szerint a Harsányi doktrína kifejezetten azt jelenti, hogy racionális döntéshozók kezdeti vélekedései csak azonosak lehetnek) a Harsányi doktrínát munkaképes hipotézisnek tekinti, és állítása mellett egyes következményeivel érvel. (Binmore [1992] pp. 476-477)

A tárgy szempontjából további alapvető jelentőségű publikáció Aumann 1976-ban megjelent cikke, amelynek két fontos teljesítménye említendő. (Aumann [1976]) Egyrészt ebben a cikkben adja meg Aumann a köztudott tudás fogalmának első formális definícióját. Ez a definíció – és ez tárgyunk szempontjából alapvető jelentőségű – feltételezi, hogy a döntéshozók információs halmazrendszere partíció. Így az aumanni köztudott tudás fogalom, amely az irodalomban széles körben elfogadottá vált, csak partícionális információs halmazrendszerek esetén érvényes.

A cikk másik teljesítménye egy tétel kimondása és bizonyítása. A tétel a döntéshozók információi közötti kapcsolatra vonatkozik és röviden a következőképpen fogalmazható: ha két döntéshozó kezdeti vélekedése azonos és egy adott eseményre vonatkozó korrigált vélekedésük köztudott tudás, akkor korrigált vélekedésük azonos. Mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy a tétel is csak arra az esetre vonatkozik, ha a döntéshozók információs halmazrendszere partíció.

Aumann cikkének hatását igen kiterjedt irodalom bizonyítja.

Ezen irodalom egy része a tudás illetve a köztudott tudás szerkezetének további vizsgálatát célozza. (Bacharach [1985], Hart – Heifetz – Samet [1996], Matsuhisa – Kamiyama [1997], Milgrom [1981], Shin [1993]) Egy másik része az Aumann-tételt általánosítja (Rubinstein – Wolinsky [1990]), illetve speciális esetekben tárgyalja (Cave [1983], Geanakoplos – Polemarchakis [1982], Nielsen [1984], Samet [1990]). Az irodalom további része pedig az Aumann-tétel következményeinek tekinthető további tételeket mond ki. Ezek egyike a spekulációmentességi (vagy „no-trade") tétel, amely a kockázatos aktívák árazásának elméletében is fontos szerepet játszik. A tétel első megfogalmazása Milgrom és Stokey cikkében olvasható. (Milgrom – Stokey [1982]) A tétel állítása nagyjából a következő. Tegyük fel, hogy két döntéshozó kezdeti vélekedése azonos és köztudott tudás. Ha ekkor olyan csereszerződést kötnek valamely kockázatos aktívára nézve, amely Pareto-optimális eredményre vezet, akkor valamely szignál megfigyelése után sem kívánják a csereszerződést újratárgyalni. A tétel érvényességét vizsgálták eltérő kezdeti vélekedések esetén is. (Morris [1994])

Két szempontból érdekes számunkra Aumann és Brandenburger cikke. (Aumann – Brandenburger [1995]) A szerzők az állapotok halmazának nem a játékosok típusának halmazát tekintik. Felfogásuk szerint egy játékos típusába beletartozik akciója illetve tudása is. Ennek jelentős következményei vannak a játékosok információs halmazrendszerére nézve.

E következmények tisztázásához Aumann 1987-es cikkéig kell visszanyúlnunk, amelyben a korrelált egyensúly általa korábban bevezetett fogalmát interpretálja. (Aumann [1987]) Aumann álláspontja az, hogy a

„játékelméleti” felfogás szerint valószínűséget csak a játékosok akcióitól független állapotokhoz lehet rendelni, míg a „bayesi” felfogás szerint bármihez. A szerző cikkében e két felfogást kívánja összhangba hozni. Ezt úgy teszi, hogy a kevert stratégia fogalmának a szokásostól eltérő interpretációját adja. A kevert stratégia továbbra is egy valószínűség-eloszlás a tiszta stratégiák halmazán, azonban nem azt írja le, ahogyan egy játékos megválasztja tiszta stratégiáját, hanem azt, amit erről egy másik játékos gondol. Másképpen: egy játékos mindig tiszta stratégiát játszik, de egy másik nem tudja, hogy melyiket. Így a másik játékos az első minden tiszta stratégiájához (akciójához) egy valószínűséget rendel. Az így kapott valószínűség-eloszlás a második játékos vélekedése, formálisan ugyanaz, mint az első egy kevert stratégiája. Így az első játékos két különböző típusának tekinthetjük, amennyiben két különböző akciót választ, ekkor a második játékos vélekedése az első típushalmazán van értelmezve. Ha most az ilyen értelemben vett típushalmazt tekintjük a világállapotok halmazának, akkor a játékosok információs halmazrendszere az állapotok halmazának partíciója. Mi az állapothalmazt nem ebben az értelemben tekintjük. A játékelmélet közgazdasági alkalmazásainak megfelelően feltesszük, hogy egy játékosnak van valamely tulajdonsága, amelyet egy változó ír le. A változó lehetséges értékeinek halmaza egy másik játékos számára (aki nem ismeri a változó aktuális értékét) a világállapotok halmaza. Ekkor az utóbbi információs halmazrendszere lehet nem partíció.

Aumann és Brandenburger cikkének másik eredménye, hogy megmutatják, hogy egy kétszereplős játékban a Nash-egyensúly létezéséhez nincs szükség a köztudott tudás feltevésre a játékosok semmilyen információjára vonatkozóan. Ha pedig a játékosok száma több mint kettő, akkor a köztudott tudás feltevésre csak a játékosok vélekedéseire vonatkozóan van szükség.

Végül ki kell térni arra, hogy az információval kapcsolatos irodalomnak egy nem csekély része a tudás mibenlétével kapcsolatos általános episztemológiai problémákat, illetve a tudás leírásának módszereivel kapcsolatos logikai, metalogikai, stb. kérdéseket tárgyal. (Nagyrész ilyen kérdésekkel foglalkoznak az

International Journal of Game Theory 1999. évi 28. – Aumann előtt tisztelgő – számának cikkei is.) (Aumann [1999a], Aumann [1999b], Bonanno – Nehring [1999], Fagin et al [1999], Heifetz [1999], Morris [1999], Simon [1999]) Hangsúlyozni kell, hogy a disszertáció ezekkel a kérdésekkel nem kíván foglalkozni.

A disszertáció felépítése és új eredményei

A disszertáció felépítése nem az új eredményekre összpontosít, hanem tárgyát szisztematikusan felépítve mutatja be, az új eredményeket ebbe szervesen beépítve. Ezért célszerűnek látszik röviden felvázolni a disszertáció szerkezetét és külön rámutatni az új eredményekre.

A disszertáció három fő részből áll. Az első rész a döntéshozó információinak leírásával foglalkozik, a második a döntési probléma leírását adja, a harmadik tárgya a legegyszerűbb aszimmetrikus információs játék.

Az első fejezetben a hagyományos partícionális információs struktúra tárgyalásához szükséges, ismert alapfogalmakat mutatjuk be, rámutatunk ezek néhány tulajdonságára és a velük kapcsolatos egyes összefüggésekre. A második fejezet tárgya a nempartícionális információs struktúra. Ennek tárgyalásában az előző fejezet logikáját követjük.

A második részben a döntéshozó döntési problémáját adjuk meg, az első fejezetben partícionális, a másodikban nempartícionális információs struktúra esetére, mivel az itt kimunkált eszközökre a továbbiakban szükség lesz.

A harmadik részben a legegyszerűbb aszimmetrikus információs játék egyensúly-fogalmait tárgyaljuk a bevezetett új fogalmak segítségével.

A disszertáció legalapvetőbb eredménye az ismert tudásfogalom általánosításaként a feltételes és feltétlen tudás fogalmainak bevezetése. Ennek nyomán bevezetjük a feltételes tudás függvény és feltétlen tudás függvény új fogalmait, megadjuk ezek tulajdonságait és viszonyát. A kezdeti és korrigált vélekedés partícionális információs struktúra esetén jól ismert fogalmait megadjuk nempartícionális információs struktúra esetére is.

Bevezetjük a feltételes és feltétlen köztudott tudás fogalmát. Kimondunk és bizonyítunk egy tételt, amely szerint – noha a feltételes és feltétlen tudás fogalmak különbözőek – a feltételes és feltétlen köztudott tudás fogalmak ekvivalensek. A hagyományos köztudott tudás fogalmának két különböző – a tudásfüggvényen és a legfinomabb közös durvítás fogalmán alapuló – definíciójának ekvivalenciájának új, céljainknak jobban megfelelő bizonyítását adjuk. Végül a köztudott tudás fogalmának olyan általánosítását adjuk meg, amely speciális esetként tartalmazza az Aumann által partícionális információs struktúrák esetére definiált köztudott tudás fogalmat; továbbá megfogalmazunk egy állítást több döntéshozó "köztudott tudás szerkezetére" vonatkozóan, amennyiben információs struktúrájuk partícionális illetve nempartícionális.

A harmadik részben a legegyszerűbb aszimmetrikus információs játék esetén megmutatjuk, hogy a kimunkált új fogalmak hogyan használhatók fel az egyensúlytípusok újfajta definíciójához, illetve hogy a definíció milyen viszonyban van más definíciókkal.

I. RÉSZ

INFORMÁCIÓ ÉS TUDÁS

Ebben a részben az információs problémával jellemezhető szituációban szereplő döntéshozó információjának és tudásának, illetve a több döntéshozó tudása közötti kapcsolatnak a leírására szolgáló fogalmakat és azok tulajdonságait adjuk meg. Olyan szituációkat vizsgálunk, melyekben a döntéshozó nem ismeri valamely paraméter pontos értékét, és megfigyel egy jelzést, amely e paraméter értékétől nem teljesen független. Megvizsgáljuk azon fogalmak tartalmát, melyekkel formálisan megadható a jelzés információtartalma és a jelzés megfigyelését követően a döntéshozó tudása. Definiáljuk a döntéshozó kezdeti és korrigált vélekedését, végül a köztudott tudás ekvivalens meghatározásait és tulajdonságait tekintjük át.

A rész két fejezetében külön foglalkozunk a partícionális információs struktúrával és külön a nempartícionális információs struktúrával rendelkező döntéshozó esetével.

1. FEJEZET

A PARTÍCIONÁLIS INFORMÁCIÓS STRUKTÚRA

Először azt a helyzetet írjuk le, amelyben a döntéshozó – mielőtt döntését meghozná – valamilyen megfigyelés révén információhoz jut. Ennek során először nem foglalkozunk azzal, hogy a megfigyelés előtt milyen információk vannak birtokában, csupán azt tesszük fel, hogy az Ω állapothalmaz minden eleméről elképzelhetőnek tartja, hogy bekövetkezett. Feltesszük, hogy minden állapot egyértelműen meghatározza a döntéshozó által megfigyelt jelzést. A megfigyelt jelzés információt hordoz a döntéshozó számára, ha feltesszük, hogy ismeri *jelzőfüggvény*ét, amely minden világállapothoz azt a jelzést rendeli, amelyet a döntéshozó az adott állapotban megfigyel.

Feltesszük, hogy a jelzések halmaza megszámlálható. Feltesszük azt is, hogy adott egy $\mathcal{A} \subseteq P(\Omega)$ σ-algebra, melynek elemei az események, és hogy bármely jelzés megfigyelése esemény, azaz bármely jelzésre $\mathcal{A}$-mérhető azon állapotok halmaza, melyben az adott jelzés megfigyelhető.

1.1.1. DEFINÍCIÓ: A jelzőfüggvény egy $\varphi : \Omega \to Y$ függvény, melyre Y megszámlálható halmaz, és

$$\forall y \in Y \qquad \{\omega \in \Omega \mid \varphi(\omega) = y\} \in \mathcal{A}.$$

A döntéshozó tehát az $\omega \in \Omega$ állapot bekövetkezésekor megfigyeli a $\varphi(\omega)$

jelzést, majd jelzőfüggvényének ismeretében meghatározza, hogy melyek azok az állapotok, amelyekben az aktuálisan megfigyelt jelzés számára megfigyelhető. Ezen állapotok halmaza a megfigyelt jelzéshez tartozó *információs halmaz*, az összes információs halmazból álló halmazrendszer pedig a döntéshozó *információs struktúrá*ja.

1.1.2. DEFINÍCIÓ: $I \in P(\Omega)$ a döntéshozó információs halmaza, ha van olyan $y \in Y$, hogy

$$I = \varphi^{-1}(y).$$

1.1.3. DEFINÍCIÓ: A döntéshozó információs struktúrája a következő halmazrendszer:

$$\mathcal{I} = \{\varphi^{-1}(y) \mid y \in Y\}.$$

Abból, hogy bármely jelzés megfigyelése esemény, az következik, hogy az $\mathcal{I}$ halmazrendszer minden eleme az Ω állapothalmaz egy $\mathcal{A}$-mérhető részhalmaza.

1.1.1. ÁLLÍTÁS: A döntéshozó $\mathcal{I}$ információs struktúrája partíció Ω-n.

BIZONYÍTÁS: A φ függvény értelmezési tartománya Ω, ezért

$$\forall \omega \in \Omega \quad \exists y \in Y : \varphi(\omega) = y.$$

Másrészt bármely $y \in Y$ és $\omega \in \Omega$ esetén

$$\varphi(\omega) = y \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega \in \varphi^{-1}(y).$$

Így

$$\forall \omega \in \Omega \quad \exists y \in Y : \omega \in \varphi^{-1}(y),$$

tehát az $\mathcal{I}$ halmazrendszer elemei lefedik Ω-t.

Be kell még látni, hogy $\mathcal{I}$ elemei páronként diszjunktak. Tegyük fel, hogy van olyan $y_1, y_2 \in Y$, melyekre

$$\varphi^{-1}(y_1) \cap \varphi^{-1}(y_2) \neq \emptyset.$$

Ekkor

$$\exists \omega \in \Omega : \omega \in \varphi^{-1}(y_1) \cap \varphi^{-1}(y_2),$$

azaz

$$\exists \omega \in \Omega : \omega \in \varphi^{-1}(y_1) \text{ és } \omega \in \varphi^{-1}(y_2),$$

amiből

$$\exists \omega \in \Omega : \varphi(\omega) = y_1 \text{ és } \varphi(\omega) = y_2$$

következik, így $y_1 = y_2$ teljesül, tehát $\mathcal{I}$ bármely két különböző eleme diszjunkt. □

Ha a döntéshozó információs struktúrája partíció Ω-n, akkor gyakran *partícionális információs struktúrá*ról, illetve *információs partíció*ról beszélünk.

1.1.4. DEFINÍCIÓ: A döntéshozó információs struktúrája partícionális, ha $\mathcal{I}$ partíció Ω-n.

Ha a döntéshozó információs struktúrája partícionális, akkor minden állapothoz pontosan egy olyan információs halmaz van, melynek az adott állapot eleme. Az információs függvény minden állapothoz az egyetlen ilyen tulajdonságú információs halmazt rendeli.

1.1.5. DEFINÍCIÓ: A döntéshozó információs függvénye a következő:

$$I : \Omega \to \mathcal{I} \qquad \omega \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(\omega)).$$

A döntéshozó információs helyzetét időnként nem jelzőfüggvényének megadásával, hanem partícionális információs struktúrájával, vagy információs függvényével célszerű megadni.

A tudás

Következő lépésként a döntéshozó tudását definiáljuk.

Ha a döntéshozó az $\omega \in \Omega$ állapot bekövetkezésekor megfigyeli az $y = \varphi(\omega)$ jelzést, akkor tudja, hogy a $\varphi^{-1}(y)$ esemény bekövetkezett.

Legyen $E \in \mathcal{A}$ tetszőleges esemény. Az, hogy a döntéshozó tudja-e, hogy az E esemény bekövetkezett, attól függ, hogy milyen jelzést figyel meg.

1.1.6. DEFINÍCIÓ: A döntéshozó az $y \in Y$ jelzés megfigyelése esetén tudja, hogy E bekövetkezett, ha $\varphi^{-1}(y) \subseteq E$.

A döntéshozó által megfigyelt jelzés birtokában, illetve a bekövetkező állapot ismeretében meg lehet mondani, hogy a döntéshozó tudja-e, hogy az adott esemény bekövetkezett. Ha a döntéshozó tudja, hogy az E esemény bekövetkezett, akkor az ω állapotban megfigyelhető jelzése olyan, hogy $\varphi^{-1}(y) \subseteq E$. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a döntéshozó *tudja*, hogy az E esemény bekövetkezett, vagy röviden: tudja, hogy E.

1.1.7. DEFINÍCIÓ: Az $\omega \in \Omega$ állapotban a döntéshozó tudja, hogy az $E \in \mathcal{A}$ esemény bekövetkezett, ha $I(\omega) \subseteq E$.

A tudás függvény

Partícionális információs struktúrák esetén szokás a tudás függvényt úgy értelmezni, hogy minden eseményhez azon állapotok halmazát rendeli, melyekben a döntéshozó tudja, hogy a szóban forgó esemény bekövetkezett. Ebben a fejezetben először definiáljuk a tudás függvényt, majd felsoroljuk a tudás függvény néhány fontos tulajdonságát.

A tudás függvényt a következő módon értelmezzük.

A tudás függvény minden $E \in \mathcal{A}$ eseményhez azon állapotok halmazát rendeli, melyekben a döntéshozó tudja, hogy az E esemény bekövetkezett. A tudás definícióját felhasználva ez azt jelenti, hogy a tudás függvény az $E \in \mathcal{A}$ eseményhez az

$$\{\omega \in \Omega \mid I(\omega) \subseteq E\}$$

halmazt rendeli.

1.1.8. DEFINÍCIÓ: A tudás függvény a következő:

$$K : \mathcal{A} \to P(\Omega) \quad E \mapsto \{\omega \in \Omega \mid I(\omega) \subseteq E\}.$$

Először belátjuk, hogy bármely $E \in \mathcal{A}$ eseményre $K(E)$ is esemény, tehát a K

függvény értékei az $\mathcal{A}$ σ-algebrából valók.

1.1.2. ÁLLÍTÁS: Bármely $E \in \mathcal{A}$ eseményre $K(E) \in \mathcal{A}$.

BIZONYÍTÁS: Legyen $E \in \mathcal{A}$ tetszőleges esemény. A K tudás függvény és az I információs függvény definíciójából (1.1.8. és 1.1.5. definíció)

$$\forall \omega \in K(E) \text{ és } \forall \omega' \in I(\omega) \text{ esetén } \omega' \in K(E),$$

azaz

$$\forall \omega \in K(E)\text{-re } I(\omega) \subseteq K(E).$$

Ezért

$$K(E) = \bigcup_{\omega \in K(E)} I(\omega) = \bigcup_{I(\omega) \subseteq K(E)} I(\omega) = \bigcup_{I \in \mathcal{I}, I \subseteq E} I.$$

Mivel Y megszámlálható, azért $\mathcal{I}$ is megszámlálható, amiből $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$ miatt az következik, hogy

$$K(E) = \bigcup_{I \in \mathcal{I}, I \subseteq E} I \in \mathcal{A}.$$

Tehát $K(E)$ esemény. □

A következő állítás a tudás függvény további tulajdonságairól szól.

1.1.3. ÁLLÍTÁS: Bármely $A, B \in \mathcal{A}$ események esetén teljesülnek a következők.

(K1) $K(\Omega) = \Omega$.

(K2) $K(A \cap B) = K(A) \cap K(B)$.

(K3) $K(A) \subseteq A$.

(K4) $K(K(A)) = K(A)$.

(K5) $\qquad K(\Omega \setminus K(A)) = \Omega \setminus K(A).$

BIZONYÍTÁS: Nyilvánvalóan teljesül, hogy

$$\forall \omega \in \Omega : I(\omega) \subseteq \Omega,$$

ezért a K tudásfüggvény definíciója (1.1.8. definíció) szerint

$$\forall \omega \in \Omega : \omega \in K(\Omega),$$

amiből – felhasználva a nyilvánvaló $K(\Omega) \subseteq \Omega$ relációt – (K1) következik.

A K függvény definíciójából (1.1.8. definíció) következik, hogy

$$K(A \cap B) = \{\omega \in \Omega \mid I(\omega) \subseteq A \cap B\} = \left\{\omega \in \Omega \mid I(\omega) \subseteq A \text{ és } I(\omega) \subseteq B\right\} =$$
$$= \{\omega \in \Omega \mid I(\omega) \subseteq A\} \cap \{\omega \in \Omega \mid I(\omega) \subseteq B\} = K(A) \cap K(B),$$

tehát igaz (K2).

(K3) igazolásához gondoljuk meg, hogy egyrészt

$$\omega \in K(A) \quad \Leftrightarrow \quad I(\omega) \subseteq A$$

másrészt

$$\forall \omega \in \Omega : \omega \in I(\omega),$$

így

$$\omega \in K(A) \quad \Rightarrow \quad \omega \in A.$$

Ezzel beláttuk (K3)-at.

Az előző állítás bizonyítása során beláttuk, hogy

$$K(A) = \bigcup_{I \in \mathcal{I}, I \subseteq A} I.$$

Ebből az következik, hogy bármely $I \in \mathcal{I}$ esetén

$$I \subseteq A \quad \Leftrightarrow \quad I \subseteq K(A),$$

ezért

$$K(K(A)) = \bigcup_{I \in \mathcal{I}, I \subseteq K(A)} I = \bigcup_{I \in \mathcal{I}, I \subseteq A} I = K(A),$$

tehát teljesül (K4).

(K5) igazolásához ismét a

$$K(A) = \bigcup_{I\in\mathcal{I}, I\subseteq A} I$$

összefüggést használjuk fel. Mivel $\mathcal{I}$ partíció Ω-n, azért az imént említett egyenlőségből egyrészt

$$\Omega \setminus K(A) = \bigcup_{I\in\mathcal{I}} I \setminus \bigcup_{I\in\mathcal{I}, I\subseteq A} I = \bigcup_{I\in\mathcal{I}, I\setminus A\neq\emptyset} I$$

következik, ami azt jelenti, hogy $\Omega \setminus K(A)$ előáll információs halmazok egyesítéseként. Másrészt ugyanazt az egyenlőséget A helyett $\Omega \setminus K(A)$-ra alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$K(\Omega \setminus K(A)) = \bigcup_{I\in\mathcal{I}, I\subseteq\Omega\setminus K(A)} I = \Omega \setminus K(A).$$

Az utolsó egyenlőségnél használtuk ki, hogy $\Omega \setminus K(A)$ előáll információs halmazok egyesítéseként. Látható, hogy teljesül (K5). □

Az állításban szereplő (K1) tulajdonság szerint a döntéshozó bármely állapotban tudja, hogy valamely állapot bekövetkezett.

A (K2) tulajdonság azt jelenti, hogy a döntéshozó pontosan akkor tudja, hogy az A és B események mindegyike bekövetkezett, ha mind az A eseményről, mind a B eseményről tudja, hogy bekövetkezett.

A (K3) jelentése az, hogy ha a döntéshozó valamely eseményről tudja, hogy bekövetkezett, akkor az említett esemény valóban bekövetkezett, tehát a döntéshozó tudása soha nem téves.

A tudás függvény (K4) tulajdonsága szerint a döntéshozó akkor és csakis akkor tudja, hogy egy esemény bekövetkezett, ha azt is tudja, hogy tudja, hogy a szóban forgó esemény bekövetkezett.

(K5) a tudás függvény azon tulajdonságáról szól, hogy a döntéshozó akkor és csakis akkor tudja, hogy nem igaz, hogy tudja egy bizonyos esemény bekövetkezését, ha nem igaz, hogy tudja, hogy az említett esemény bekövetkezett. Tehát, ha valamely állapotban jelzése megfigyelése esetén tudja azt, hogy nem olyan jelzést figyelt meg, amelynek megfigyelésekor tudná, hogy egy A esemény bekövetkezett, akkor ez a tudása nem volna téves.

A döntéshozó vélekedése

Az információs problémák vizsgálata során szokásos feltevés, hogy a döntéshozó jelzésének megfigyelése előtt, illetve döntésének meghozatalakor ugyan nem feltétlenül tudja, hogy mely állapot valósult meg, de ismer egy valószínűségi mértéket az eseményeken. Ez a valószínűségi mérték – pontosabban a mögötte meghúzódó valószínűségi mező – a döntéshozó vélekedése.

Amennyiben a döntéshozó ismeri jelzőfüggvényét, jelzésének megfigyelése az aktuális állapot jellegére vonatkozó információt hordoz számára: azokat az állapotokat, melyekben a megfigyelt jelzést nem figyelhette volna meg, a továbbiakban nem tartja lehetségesnek. Ezt a fajta tudást írja le a döntéshozó információs struktúrája. Mivel a lehetségesnek tartott állapotok halmaza – vélekedésének tartója – a jelzés megfigyelését követően más, mint előtte volt, nyilvánvaló, hogy a döntéshozó vélekedése is megváltozik a jelzés megfigyelésének következtében. Jelzésének megfigyelése előtti vélekedését szokás a döntéshozó *kezdeti vélekedés*ének nevezni.

1.1.9. DEFINÍCIÓ: A döntéshozó kezdeti vélekedése egy $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező.

A döntéshozónak az esélyeket jól leíró valószínűségi mértékkel kapcsolatos véleménye jelzésének megfigyelését követően a megfigyelt jelzéstől függ: ha az $y \in Y$ jelzést figyelte meg, akkor ez a $p(\cdot \mid \varphi^{-1}(y))$ mérték. Ezért a döntéshozó korrigált vélekedése egy feltételes valószínűségi mező. (Rényi [1968], pp. 70-74)

1.1.10. DEFINÍCIÓ: A döntéshozó korrigált vélekedése az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{I}, p(A \mid I))$ feltételes valószínűségi mező, ahol $\mathcal{I}$ a döntéshozó információs struktúrája.

A továbbiakban, ha ez nem okoz félreértést, időnként az $(\Omega, \mathcal{A}, p(\cdot \mid I))$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőt is korrigált vélekedésnek fogom nevezni.

A köztudott tudás

Ha egy szituációnak több döntéshozó a szereplője, akkor döntésük nem csak attól függ, hogy mit tudnak, hanem attól is, hogy egymás tudásáról mit tudnak. Vagyis döntéshozatali viselkedésük nem csak az információs struktúrájuktól, hanem az azok közötti viszonytól is függ. E viszony egyik legfontosabb mozzanatát írja le a köztudott tudás fogalma.

Azt mondjuk, hogy az $\omega \in \Omega$ állapotban az $E \in \mathcal{A}$ esemény az $1,2,\ldots,n$ döntéshozók között *köztudott tudás*, ha

i tudja, hogy E minden $i \in \{1,2,\ldots,n\}$-re, és

i tudja, hogy j tudja, hogy E minden $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$-re, és

i tudja, hogy j tudja, hogy l tudja, hogy E minden $i,j,l \in \{1,2,\ldots,n\}$-re, stb.

Tehát valamely E esemény köztudott tudás az ω állapotban, ha az ω-ban megfigyelhető jelzésekből álló $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ profilra teljesül, hogy ha bármely $i \in \{1,2,\ldots,n\}$-re az i-edik döntéshozó az y_i jelzést figyeli meg, akkor

i tudja, hogy E minden $i \in \{1,2,\ldots,n\}$-re, és

i tudja, hogy j tudja, hogy E minden $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$-re, és

i tudja, hogy j tudja, hogy l tudja, hogy E minden $i,j,l \in \{1,2,\ldots,n\}$-re, stb.

1.1.11. DEFINÍCIÓ: Az $E \in \mathcal{A}$ esemény az $\omega \in \Omega$ állapotban köztudott tudás az $1,2,\ldots,n$ döntéshozók között, ha bármely $k \in \mathbb{N}^+$ pozitív egész szám és $i : \{1,2,\ldots,k\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ függvény esetén

$$\omega \in K_{i(1)}(K_{i(2)}\ldots(K_{i(k)}(E))\ldots).$$

A köztudott tudás fogalmát partícionális információs struktúra esetén szokás több, egymással ekvivalens módon definiálni. Mi a tudás függvényből kiinduló meghatározását adtuk meg. Következő lépésként kimondunk egy állítást, amely az Aumann-féle köztudott tudás definíció, és a tudás függvényből kiinduló definíció egyenértékűségéről szól.

A köztudott tudás egy ekvivalens meghatározása

A következőkben a partícionális információs struktúrák esetére a tudás függvény segítségével értelmezett köztudott tudás és az Aumann által adott köztudott tudás fogalom viszonyát vizsgáljuk. (Aumann [1976]) Ehhez szükségünk lesz néhány fogalom bevezetésére.

Partíciók durvítása, legfinomabb közös durvítása és a metszet függvény

Aumann köztudott tudás definíciója használja a partíciók legfinomabb közös durvításának fogalmát. Két partíció egyike durvább a másiknál, ha minden eleme előáll a finomabb partíció bizonyos elemeinek egyesítéseként.

1.1.12. DEFINÍCIÓ: Legyenek $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq P(\Omega)$ partíciók. Az $\mathcal{I}_2$ partíció az $\mathcal{I}_1$ partíció (gyenge) durvítása (vagy $\mathcal{I}_2$ durvább, mint $\mathcal{I}_1$), ha

$$\forall I_2 \in \mathcal{I}_2 \qquad \exists \tilde{\mathcal{I}}_1 \subseteq \mathcal{I}_1, \text{hogy } I_2 = \bigcup_{I_1 \in \tilde{\mathcal{I}}_1} I_1.$$

Ha $\mathcal{I}_2$ az $\mathcal{I}_1$ (gyenge) durvítása, akkor időnként azt mondjuk, hogy $\mathcal{I}_1$ az $\mathcal{I}_2$ (gyenge) finomítása (vagy $\mathcal{I}_1$ finomabb, mint $\mathcal{I}_2$).

Jelölés: $\mathcal{I}_1 \geq \mathcal{I}_2$, ha $\mathcal{I}_2$ az $\mathcal{I}_1$ (gyenge) durvítása.

Ha a döntéshozó információs struktúrája két helyzet közül az elsőben $\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{A}$, míg a második helyzetben $\mathcal{I}_2 \subseteq \mathcal{A}$,és $\mathcal{I}_1 \geq \mathcal{I}_2$, akkor az első helyzetben a jelzés megfigyelése több információt hordoz a döntéshozó számára. Ezen azt értjük, hogy bármely $\omega \in \Omega$ állapot következett be, ha az ω állapotban a döntéshozó az első helyzetben jelzésének megfigyelését követően az $I_1(\omega) \in \mathcal{I}_1$ információs halmaz elemeit lehetségesnek tartja, és ugyanebben az állapotban a második helyzetben információs halmaza $I_2(\omega) \in \mathcal{I}_2$, akkor $I_1(\omega) \subseteq I_2(\omega)$, tehát az első helyzetben minden olyan állapotot ki tud zárni, amelyet a másodikban nem tart lehetségesnek. A következő állítás a döntéshozó tudását – pontosabban tudás függvényét – hasonlítja össze két olyan helyzetben, melyek közül az egyikben információs struktúrája finomabb, mint a másikban.

1.1.4. ÁLLÍTÁS: Legyenek $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq P(\Omega)$ olyan partíciók az Ω állapothalmazon, hogy $\mathcal{I}_1 \geq \mathcal{I}_2$. Legyen a döntéshozó információs struktúrája két helyzet közül az elsőben $\mathcal{I}_1$, a másodikban $\mathcal{I}_2$. Jelölje a döntéshozó tudás függvényét K_1 az első helyzetben, K_2 a második helyzetben. Ekkor

$$\forall E \in \mathcal{A} : K_2(E) \subseteq K_1(E).$$

BIZONYÍTÁS: Legyen $\omega \in \Omega$ tetszőleges, a továbbiakban rögzített állapot. Mivel $\mathcal{I}_2 \leq \mathcal{I}_1$, azért

$$\forall I_2 \in \mathcal{I}_2 \qquad \exists \tilde{\mathcal{I}}_1 \subseteq \mathcal{I}_1 : \qquad I_2 = \bigcup_{I_1 \in \tilde{\mathcal{I}}_1} I_1,$$

így

$$I_1(\omega) \subseteq I_2(\omega).$$

A tudás függvény definíciójából (1.1.8. definíció) következik, hogy

ha $\omega \in K_2(E)$, akkor $I_2(\omega) \subseteq E$,

amit korábbi eredményünkkel összevetve az adódik, hogy

$$\text{ha } \omega \in K_2(E), \text{ akkor } I_1(\omega) \subseteq E,$$

azaz

$$\text{ha } \omega \in K_2(E), \text{ akkor } \omega \in K_1(E),$$

amivel állításunkat bizonyítottuk. □

Tehát ha a döntéshozó egy $\omega \in \Omega$ állapotban egy $E \in \mathcal{A}$ eseményről az egyik helyzetben tudja, hogy bekövetkezett, és egy másik helyzetben információs struktúrája legalább olyan finom, mint a korábban említett helyzetben, akkor ugyanabban az ω állapotban ugyanazt az E eseményt ebben a másik helyzetben is tudja. Ebben az értelemben a döntéshozó legalább annyit tud egy olyan helyzetben, melyben információs struktúrája finomabb, mint egy másikban.

Egyszerűen belátható, hogy akárhány, Ω-n adott partícióhoz található olyan partíció Ω-n, amely az adott partíciók mindegyikének durvítása.

1.1.5. ÁLLÍTÁS: Bármely $n \in \mathbb{N}^+$-re és $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n \subseteq P(\Omega)$ partícióhoz található olyan $\mathcal{I} \subseteq P(\Omega)$ partíció, hogy

$$\mathcal{I} \leq \mathcal{I}_i \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

BIZONYÍTÁS: Az $\mathcal{I} = \{\Omega\}$ egy elemű partíció rendelkezik az állításban megfogalmazott tulajdonsággal. □

1.1.13. DEFINÍCIÓ: Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges, és $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n, \mathcal{I} \subseteq P(\Omega)$ partíciók. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{I}$ az $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n$ partíciók közös durvítása, ha

$$\mathcal{I} \leq \mathcal{I}_i \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Meg fogjuk mutatni, hogy véges sok partíció közös durvításai között mindig pontosan egy legfinomabb van. Ehhez szükségünk lesz az elérhetőségi reláció fogalmára, melyet elsőként Aumann használt. (Aumann [1976])

1.1.14. DEFINÍCIÓ: Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges, és $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n \subseteq P(\Omega)$ partíciók. Az $\Re \subseteq \Omega \times \Omega$ elérhetőségi reláció a következő:

$$\Re = \Big\{ (\omega_1, \omega_2) \in \Omega \times \Omega \mid \exists k \in \mathbb{N}^+, \exists I_1, I_2, \ldots, I_k \in \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{I}_i : \omega_1 \in I_1, \omega_2 \in I_k, \\ I_j \cap I_{j+1} \neq \varnothing \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, k-1\} \Big\}$$

Az elérhetőségi reláció fontos tulajdonsága, hogy ekvivalencia reláció.

1.1.6. ÁLLÍTÁS: Bármely $n \in \mathbb{N}^+$ és $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n \subseteq P(\Omega)$ partíció esetén $\Re$ ekvivalencia reláció.

BIZONYÍTÁS: Mivel $\mathcal{I}_1$ partíció, azért bármely $\omega \in \Omega$-hoz van olyan $I_1 \in \mathcal{I}_1$, melyre $\omega \in I_1$. Ebből következik, hogy $\Re$ reflexív.

Ha $(\omega_1, \omega_2) \in \Re$, akkor definíció szerint (1.1.14. definíció)

$$\exists k \in \mathbb{N}^+, \exists I_1, I_2, \ldots, I_k \in \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{I}_i : \omega_1 \in I_1, \omega_2 \in I_k, I_j \cap I_{j+1} \neq \varnothing \; \forall j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$$

Legyen $I_1', I_2', \ldots, I_k'$ a következő:

$$I_j' = I_{k-j+1} \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Ekkor teljesül, hogy

$$I_1', I_2', \ldots, I_k' \in \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{I}_i, \omega_2 \in I_1', \omega_1 \in I_k', I_j' \cap I_{j+1}' \neq \varnothing \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, k-1\},$$

Tehát ω_2-ből ω_1 elérhető. Így az elérhetőségi reláció szimmetrikus.

Ha $(\omega_1, \omega_2) \in \Re$ és $(\omega_2, \omega_3) \in \Re$, akkor

$$\exists k \in \mathbb{N}^+, \exists I_1, I_2, \ldots, I_k \in \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{I}_i : \omega_1 \in I_1, \omega_2 \in I_k, I_j \cap I_{j+1} \neq \emptyset$$
$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$$

és

$$\exists l \in \mathbb{N}^+, \exists I_{k+1}, I_{k+2}, \ldots, I_{k+l} \in \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{I}_i : \omega_2 \in I_{k+1}, \omega_3 \in I_{k+l}, I_j \cap I_{j+1} \neq \emptyset$$
$$\forall j \in \{k+1, k+2, \ldots, k+l-1\},$$

amelyekből az következik, hogy

$$I_1, \ldots, I_k, I_{k+1}, \ldots, I_{k+l} \in \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{I}_i, \omega_1 \in I_1, \omega_3 \in I_{k+l}, I_j \cap I_{j+1} \neq \emptyset$$
$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, k+l-1\},$$

tehát $(\omega_1, \omega_3) \in \Re$. Ezzel beláttuk, hogy $\Re$ tranzitív. □

Adott $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n$ partíciók esetén az $\Re$ reláció ekvivalencia osztályai olyan $\mathcal{I}$ partíciót alkotnak Ω-n, amely az $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n$ partíciók közös durvítása, és ráadásul a közös durvítások között nincs $\mathcal{I}$-nél finomabb.

1.1.7. ÁLLÍTÁS: Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges, $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n \subseteq P(\Omega)$ partíciók Ω-n, $\Re \subseteq \Omega \times \Omega$ az elérhetőségi reláció. Jelölje $\mathcal{I} \subseteq P(\Omega)$ az $\Re$ ekvivalencia osztályaiból álló halmazrendszert. Ekkor $\mathcal{I}$-re teljesülnek a következők:

(1) $\mathcal{I}$ az $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n$ partíciók közös durvítása,

(2) ha $\mathcal{I}'$ az $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n$ partíciók közös durvítása, akkor $\mathcal{I}' \leq \mathcal{I}$.

BIZONYÍTÁS: Az $\Re$ ekvivalencia reláció definíciójából (1.1.14. definíció) következik, hogy

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \forall I \in \mathcal{I}_i, \forall \omega, \omega' \in I: (\omega, \omega') \in \Re,$$

ezért teljesül (1).

(2) bizonyításához elegendő megmutatni, hogy ha $\mathcal{J}$ az $\mathcal{I}$-től különböző partíció Ω-n és $\mathcal{J} \geq \mathcal{I}$, akkor $\mathcal{J}$ az $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n$ partícióknak nem közös durvítása. Ha $\mathcal{J} \geq \mathcal{I}$, akkor

$$\exists I \in \mathcal{I} \text{ és } \exists \tilde{\mathfrak{J}} \subseteq \mathcal{J}, \left|\tilde{\mathfrak{J}}\right| \geq 2 \colon I = \bigcup_{J \in \tilde{\mathfrak{J}}} J.$$

Ezért

$$\exists \omega_1, \omega_2 \in I, \exists J_1, J_2 \in \tilde{\mathfrak{J}} \colon \omega_1 \in J_1, \omega_2 \in J_2, J_1 \neq J_2.$$

Ekkor mivel $\mathcal{I}$ elemei az $\mathfrak{R}$ ekvivalencia osztályai, azért

$$\omega_1, \omega_2 \in I \Rightarrow (\omega_1, \omega_2) \in \mathfrak{R},$$

tehát

$$\exists k \in \mathbb{N}^+, \exists I_1, I_2, \ldots, I_k \in \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{I}_i \colon \omega_1 \in I_1, \omega_2 \in I_k, I_j \cap I_{j+1} \neq \emptyset$$
$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}.$$

Mivel

$$\omega_1 \in J_1, \omega_2 \in J_2, J_1 \neq J_2$$

és

$$\omega_1 \in I_1, \omega_2 \in I_k,$$

azért

$$I_k \nsubseteq J_1,$$

így a következő két eset egyike teljesül:

(*i*) $\exists l \in \{1, 2, \ldots, k-1\} \colon \forall j \in \{1, 2, \ldots, l\}$-re $I_j \subseteq J_1$ és $I_{l+1} \nsubseteq J_1$.

(*ii*) $I_1 \nsubseteq J_1$ (ekkor legyen $l = 0$).

Könnyen látható, hogy $I_{l+1} \cap J_1 \neq \emptyset$, hiszen

ha $l \geq 1$, akkor $\emptyset \neq I_{l+1} \cap I_l \subseteq J_1$, mert $I_l \subseteq J_1$,

ha pedig $l = 0$, akkor $\omega_1 \in I_{l+1} \cap J_1$.

Tehát I_{l+1} olyan, hogy

$$I_{l+1} \in \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{I}_i \text{ és } I_{l+1} \cap J_1 \neq \emptyset, I_{l+1} \nsubseteq J_1.$$

Ekkor $\mathcal{J}$ nem durvítása annak a partíciónak, amelynek I_{l+1} eleme, tehát $\mathcal{J}$ nem lehet az $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n$ partíciók közös durvítása. □

Az imént bizonyított állításból következik, hogy véges sok partícióhoz mindig található olyan közös durvítás, amely minden más közös durvításnál finomabb. Ezt nevezzük a *legfinomabb közös durvítás*nak.

1.1.15. DEFINÍCIÓ: Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges. Az $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n \subseteq P(\Omega)$ partíciók legfinomabb közös durvítása vagy metszete az $\mathcal{I} \subseteq P(\Omega)$ partíció, ha

(1) $\mathcal{I}$ az $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n$ partíciók közös durvítása,

(2) az $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n$ partíciók minden $\mathcal{I}'$ közös durvítására $\mathcal{I}' \leq \mathcal{I}$.

Jelölés: $\bigwedge_{i=1}^{n} \mathcal{I}_i$ az $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n$ partíciók legfinomabb közös durvítása.

Mivel véges sok partíció legfinomabb közös durvítása is partíció, azért bármely $\omega \in \Omega$ elemhez egyértelműen található a partíciók metszetének olyan eleme, amely elemként tartalmazza ω-t.

1.1.16. DEFINÍCIÓ: Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges. Ha az $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n \subseteq P(\Omega)$ partíciók legfinomabb közös durvítása vagy metszete az $\mathcal{I} \subseteq P(\Omega)$ partíció, akkor az I metszet függvény egy $I : \Omega \to \mathcal{I}$ függvény, melyre teljesül, hogy

$$\forall \omega \in \Omega : \omega \in I(\omega).$$

Az aumanni köztudott tudás definíció

A köztudott tudás első formális definícióját Aumann adta meg. (Aumann [1976]) Aumann definíciója szerint, ha az $1, 2, \ldots, n$ döntéshozók információs struktúrái rendre $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n$, és I a metszet függvény, akkor valamely $\omega \in \Omega$ állapotban az $E \in \mathcal{A}$ köztudott tudás, ha $I(\omega) \subseteq E$.

Az alábbi állítást, amely az Aumann-féle köztudott tudás fogalom és az általunk adott köztudott tudás definíció ekvivalenciájáról szól, Bacharach mondta ki (Bacharach [1985]), melyre az övétől eltérő bizonyítást adunk.

1.1.8. ÁLLÍTÁS: (Bacharach [1985]) Legyenek az $1, 2, \ldots, n$ döntéshozók információs struktúrái rendre $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n$ és I a metszet függvény. Legyen $\omega \in \Omega$ és $E \in \mathcal{A}$ tetszőleges. Az E esemény az ω állapotban pontosan akkor köztudott tudás az $1, 2, \ldots, n$ döntéshozók között, ha

$$I(\omega) \subseteq E.$$

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel először, hogy az ω állapotban az E esemény köztudott tudás. Elegendő megmutatni, hogy ekkor

$$\forall \omega' \in I(\omega) \text{ esetén } \omega' \in E.$$

Legyen $\omega' \in I(\omega)$ tetszőleges. Mivel $I(\omega)$ az $\Re$ elérhetőségi reláció egy ekvivalencia osztálya, azért

$$(\omega, \omega') \in \Re$$

teljesül. Ez definíció szerint (1.1.14. definíció) azt jelenti, hogy

$$\exists k \in \mathbb{N}^+, \exists I_1, I_2, \ldots, I_k \in \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{I}_i \, : \, \omega \in I_1, \omega' \in I_k, I_j \cap I_{j+1} \neq \emptyset$$

$$\forall j \in \{1,2,\ldots,k-1\}.$$

Az ilyen tulajdonságú $I_1, I_2, \ldots, I_k$ információs halmazokhoz léteznek olyan

$$i : \{1,2,\ldots,k\} \to \{1,2,\ldots,n\}$$

és

$$\zeta : \{1,2,\ldots,k-1\} \to \Omega$$

függvények, hogy

$$\forall j \in \{1,2,\ldots,k\} \text{ esetén } I_j \in \mathcal{I}_{i(j)},$$

$$\zeta(j) \in I_j \cap I_{j+1} \ \forall j \in \{1,2,\ldots,k-1\}.$$

Mivel az ω állapotban E köztudott tudás, azért teljesül az

$$\omega \in K_{i(1)}(K_{i(2)}\ldots(K_{i(k)}(E))\ldots)$$

reláció. Ebből a tudás függvény definíciója (1.1.8. definíció) szerint

$$I_1 = I_{i(1)}(\omega) \subseteq K_{i(2)}(K_{i(3)}\ldots(K_{i(k)}(E))\ldots)$$

következik. Így $\zeta(1) \in I_1 \cap I_2$ miatt

$$\zeta(1) \in K_{i(2)}(K_{i(3)}\ldots(K_{i(k)}(E))\ldots)$$

teljesül.

Bármely $j \in \{1,2,\ldots,k-2\}$ esetén a fentiekhez hasonlóan a

$$\zeta(j) \in K_{i(j+1)}(K_{i(j+2)}\ldots(K_{i(k)}(E))\ldots)$$

teljesüléséből

$$I_{j+1} = I_{i(j+1)}(\zeta(j)) \subseteq K_{i(j+2)}(K_{i(j+3)}\ldots(K_{i(k)}(E))\ldots)$$

és $\zeta(j+1) \in I_{j+1} \cap I_{j+2}$ miatt

$$\zeta(j+1) \in K_{i(j+2)}(K_{i(j+3)}\ldots(K_{i(k)}(E))\ldots)$$

következik. Így

$$\zeta(k-1) \in K_{i(k)}(E)$$

is teljesül, amiből a tudás függvény definíciója (1.1.8. definíció) szerint

$$I_{i(k)}(\zeta(k-1)) \subseteq E,$$

és így

$$\omega' \in I_k = I_{i(k)}(\zeta(k-1))$$

miatt $\omega' \in E$ következik.

Az ellentétes irány bizonyításához legyen $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ és $I \in \mathcal{I}$ tetszőleges. $\mathcal{I}_i \geq \mathcal{I}$, mert $\mathcal{I}$ az $\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2,\ldots,\mathcal{I}_n$ partíciók közös durvítása. Ezért I előáll $\mathcal{I}_i$ elemeinek egyesítéseként:

$$\exists \tilde{\mathcal{I}}_i \subseteq \mathcal{I}_i \colon I = \bigcup_{I_i \in \tilde{\mathcal{I}}_i} I_i,$$

így

$$\forall \omega \in I \colon I_i(\omega) \subseteq I,$$

azaz

$$I \subseteq K_i(I),$$

amiből (K3) felhasználásával

$$I = K_i(I)$$

következik. Abból, hogy ez az összefüggés bármely $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ és $I \in \mathcal{I}$ esetén fennáll, teljes indukcióval az következik, hogy

$$\forall k \in \mathbb{N}^+,\ \forall i : \{1,2,\ldots,k\} \to \{1,2,\ldots,n\} \text{ esetén } I = K_{i(1)}(K_{i(2)}\ldots(K_{i(k)}(I))).$$

Tehát

$$\forall I \in \mathcal{I},\ \forall \omega \in I \colon I \text{ köztudott tudás az } 1,2,\ldots,n \text{ döntéshozók között } \omega\text{-ban.}$$

Legyen $\omega \in \Omega$ tetszőleges. Tegyük fel, hogy $E \in \mathcal{A}$ olyan, hogy $I(\omega) \subseteq E$ teljesül. Ekkor $I(\omega) \cap E = I(\omega)$ miatt (K2)-ből (1.1.3. állítás) $K_i(I(\omega)) \subseteq K_i(E)$ következik minden $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ esetén. Így

$$\forall k \in \mathbb{N}^+,\ \forall i : \{1,2,\ldots,k\} \to \{1,2,\ldots,n\} \text{ esetén}$$
$$I(\omega) = K_{i(1)}(K_{i(2)}\ldots(K_{i(k)}(I(\omega)))) \subseteq K_{i(1)}(K_{i(2)}\ldots(K_{i(k)}(E))),$$

ezért $\omega \in I(\omega)$ miatt az következik, hogy az E esemény ω-ban köztudott tudás a döntéshozók között. □

A következő fejezetben a köztudott tudás fogalom harmadik jellemzését ismertetjük.

A Milgrom-féle köztudott tudás definíció

Paul Milgrom az előzőekben bemutatottaktól eltérő módon határozta meg a köztudott tudás fogalmát. (Milgrom [1981]) A tudás függvény mintájára értelmezte a köztudott tudás függvényt, amely minden E eseményhez azt az eseményt rendeli, hogy az E esemény köztudott tudás. A Milgrom által kimondott tétel a köztudott tudás függvényt négy olyan tulajdonságával jellemzi, amelyek mindegyikével egyetlen más, az események halmazán értelmezett esemény értékű függvény sem rendelkezik. Ezek a tulajdonságok a következők:

1. Ha egy állapotban az A esemény köztudott tudás, akkor az A esemény bekövetkezett.
2. Ha egy állapotban az A esemény köztudott tudás, akkor minden döntéshozó tudja, hogy A köztudott tudás.
3. Ha a B esemény köztudott tudás, akkor minden olyan A esemény is köztudott tudás, amely mindannyiszor bekövetkezik, valahányszor B bekövetkezik.
4. Ha A olyan esemény, hogy valahányszor A bekövetkezik, minden döntéshozó tudja, hogy A bekövetkezett, akkor ha A bekövetkezik, akkor A köztudott tudás.

A köztudott tudás függvény definiálása és az említett tétel kimondása előtt megmutatjuk, hogy bármely E eseményre azon állapotok halmaza is esemény, melyben E köztudott tudás.

1.1.9. ÁLLÍTÁS: Legyenek az $1, 2, \ldots, n$ döntéshozók információs struktúrái rendre $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n$. Jelölje a metszet függvényt I. Legyen $E \in \mathcal{A}$ tetszőleges. Ekkor

$$\{\omega \in \Omega \mid I(\omega) \subseteq E\} \in \mathcal{A}.$$

BIZONYÍTÁS: Feltevésünk szerint az 1. döntéshozó jelzéseinek halmaza megszámlálható, így $\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{A}$ is megszámlálható. Mivel $\mathcal{I} = \bigwedge_{i=1}^{n} \mathcal{I}_i$ durvább $\mathcal{I}_1$-nél, ezért $\mathcal{I}$ minden eleme előáll $\mathcal{I}_1$ elemeinek egyesítéseként. Ebből $\mathcal{I}_1$ megszámlálhatósága miatt $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$, valamint az következik, hogy $\mathcal{I}$ is megszámlálható. Így abból, hogy

$$\{\omega \in \Omega \mid I(\omega) \subseteq E\} = \bigcup_{I \in \mathcal{I}, I \subseteq E} I,$$

következik az állítás. □

A köztudott tudás függvényre Milgrom a következő definíciót adta. (Milgrom [1981])

1.1.17. DEFINÍCIÓ: Legyenek az $1, 2, \ldots, n$ döntéshozók információs struktúrái rendre $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n$, a metszet függvény I. A köztudott tudás függvény a következő:

$$C : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \qquad E \mapsto \{\omega \in \Omega \mid I(\omega) \subseteq E\}.$$

Az alábbi állítás a köztudott tudás függvény említett tulajdonságairól szól.

1.1.10. ÁLLÍTÁS: (Milgrom [1981]) Legyenek az $1,2,\ldots,n$ döntéshozók információs struktúrái rendre $\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2,\ldots,\mathcal{I}_n$. Pontosan egy olyan $\widetilde{C}:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ függvény létezik, amely bármely $A,B\in\mathcal{A}$ eseményekre kielégíti a következő feltételeket:

(CK1) $\widetilde{C}(A)\subseteq A$,

(CK2) $\forall\omega\in\widetilde{C}(A),\forall i\in\{1,2,\ldots,n\}:I_i(\omega)\subseteq\widetilde{C}(A)$,

(CK3) $B\subseteq A\Rightarrow\widetilde{C}(B)\subseteq\widetilde{C}(A)$,

(CK4) $[\forall i\in\{1,2,\ldots,n\},\forall\omega\in A:I_i(\omega)\subseteq A]\Rightarrow A=\widetilde{C}(A)$.

A (CK1)-(CK4) feltételeket kielégítő egyetlen $\widetilde{C}$ függvény éppen a C köztudott tudás függvény.

BIZONYÍTÁS: Először megmutatjuk, hogy a C köztudott tudás függvényre teljesülnek a (CK1)-(CK4) tulajdonságok. Jelölje I a metszetfüggvényt.

Tegyük fel, hogy $\omega\in C(A)$. Ekkor a C köztudott tudás függvény definíciója szerint

$$I(\omega)\subseteq A.$$

Ebből $\omega\in I(\omega)$ miatt $\omega\in A$, és így $C(A)\subseteq A$ következik. Tehát a C köztudott tudás függvényre teljesül (CK1).

Ha $\omega\in C(A)$, akkor $I(\omega)\subseteq A$. Mivel $\bigwedge_{i=1}^{n}\mathcal{I}_i$ az $\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2,\ldots,\mathcal{I}_n$ partíciók közös durvítása, azért

$$\forall i\in\{1,2,\ldots,n\}\quad I_i(\omega)\subseteq I(\omega),$$

és így

$$\forall i\in\{1,2,\ldots,n\}\quad I_i(\omega)\subseteq A,$$

ebből mivel

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ és } \forall \omega' \in I_i(\omega)\text{-ra } I_i(\omega) = I_i(\omega'),$$

azért

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad I_i(\omega) \subseteq C(A)$$

következik, tehát a C köztudott tudás függvényre igaz (CK2).

Ha $B \subseteq A$ és $\omega \in C(B)$, akkor felhasználva, hogy C-re teljesül (CK1)

$$I(\omega) \subseteq C(B) \subseteq B \subseteq A,$$

ezért $\omega \in C(A)$, tehát

$$C(B) \subseteq C(A),$$

így a C köztudott tudás függvényre teljesül (CK3) is.

Legyen $A \in \mathcal{A}$ olyan, hogy

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \forall \omega \in A : I_i(\omega) \subseteq A.$$

Ekkor az is igaz, hogy

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \forall \omega \in \Omega \setminus A : I_i(\omega) \subseteq \Omega \setminus A,$$

tehát

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} : \mathcal{I}_i \geq \{A, \Omega \setminus A\},$$

azaz $\{A, \Omega \setminus A\}$ az $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n$ partíciók közös durvítása. Mivel $\bigwedge_{i=1}^{n} \mathcal{I}_i$ az $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n$ partíciók közös durvításai közül a legfinomabb, azért

$$\{A, \Omega \setminus A\} \leq \bigwedge_{i=1}^{n} \mathcal{I}_i,$$

így

$$\forall \omega \in A : I(\omega) \subseteq A,$$

amiből az következik, hogy $C(A) = A$, ezért a C köztudott tudás függvényre (CK4) is fennáll.

Ezzel beláttuk, hogy a C köztudott tudás függvény rendelkezik a (CK1)-(CK4) tulajdonságokkal. Következő lépésként megmutatjuk a (CK1)-(CK4) feltételeket kielégítő függvény unicitását.

Legyen $\widetilde{C}$ tetszőleges, a (CK1)-(CK4) feltételeket kielégítő függvény. Először belátjuk, hogy

$$\forall A \in \mathcal{A} : \widetilde{C}(A) \subseteq C(A),$$

majd hogy

$$\forall A \in \mathcal{A} : C(A) \subseteq \widetilde{C}(A).$$

Legyen $A \in \mathcal{A}$ tetszőleges esemény. Ekkor (CK2) szerint

$$\forall \omega \in \widetilde{C}(A), \forall i \in \{1,2,\ldots,n\} : I_i(\omega) \subseteq \widetilde{C}(A).$$

(1)

Most belátjuk, hogy ekkor

$$\forall \omega \in \Omega \setminus \widetilde{C}(A), \forall i \in \{1,2,\ldots,n\} : I_i(\omega) \cap \widetilde{C}(A) = \emptyset.$$

(2)

Ugyanis indirekt tegyük fel, hogy

valamely $i \in \{1,2,\ldots,n\}$-re és $\omega \in \Omega \setminus \widetilde{C}(A)$-ra $I_i(\omega) \cap \widetilde{C}(A) \neq \emptyset$.

Legyen $\omega' \in I_i(\omega) \cap \widetilde{C}(A)$ tetszőleges. Ez az ω' nyilván nem tesz eleget (CK2)-nek. Ez bizonyítja (2)-t. (2) a következő alakban is felírható:

$$\forall \omega \in \Omega \setminus \widetilde{C}(A), \forall i \in \{1,2,\ldots,n\} : I_i(\omega) \subseteq \Omega \setminus \widetilde{C}(A).$$

Ebből és (1)-ből az következik, hogy

$$\forall i \in \{1,2,\ldots,n\} : \mathcal{I}_i \geq \left\{\widetilde{C}(A), \Omega \setminus \widetilde{C}(A)\right\},$$

tehát $\left\{\widetilde{C}(A), \Omega \setminus \widetilde{C}(A)\right\}$ az $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n$ partíciók közös durvítása. Ebből kihasználva, hogy $\mathcal{I}$ az $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n$ partíciók közös durvításai közül a legfinomabb, azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{I} \geq \left\{\widetilde{C}(A), \Omega \setminus \widetilde{C}(A)\right\},$$

így

$$\forall \omega \in \widetilde{C}(A) : I(\omega) \subseteq \widetilde{C}(A),$$

amiből (CK1) miatt

$$\forall \omega \in \widetilde{C}(A) \, : \, I(\omega) \subseteq A,$$

így

$$\widetilde{C}(A) \subseteq \{\omega \in \Omega \mid I(\omega) \subseteq A\} = C(A).$$

Most legyen $A \in \mathcal{A}$ és $\omega \in C(A)$ tetszőleges. Ekkor a C köztudott tudás függvény definíciója (1.1.17. definíció) szerint $I(\omega) \subseteq A$, így mivel $\widetilde{C}$ kielégíti (CK3)-at, ezért

$$\widetilde{C}(I(\omega)) \subseteq \widetilde{C}(A).$$

(3)

Mivel $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re $\mathcal{I}$ durvítása $\mathcal{I}_i$-nek, ezért

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \forall \omega' \in I(\omega) \, : \, I_i(\omega') \subseteq I(\omega') = I(\omega).$$

Ezért (CK4)-ből az következik, hogy

$$I(\omega) = \widetilde{C}(I(\omega)),$$

így $\omega \in I(\omega)$ miatt $\omega \in \widetilde{C}(I(\omega))$. Ebből és (3)-ból $\omega \in \widetilde{C}(A)$ következik, amivel beláttuk, hogy

$$C(A) \subseteq \widetilde{C}(A).$$

Mivel

$$\forall A \in \mathcal{A} \, : \, \widetilde{C}(A) \subseteq C(A) \text{ és } C(A) \subseteq \widetilde{C}(A)$$

teljesül, azért

$$\forall A \in \mathcal{A} \, : \, \widetilde{C}(A) = C(A),$$

így a $\widetilde{C}$ és C függvények megegyeznek. □

Ezzel áttekintettük partícionális információs struktúra esetén a döntéshozó tudásának, információinak leírásához szükséges fogalmakat, ezek tulajdonságait és összefüggéseiket. Mindezek az irodalomban jórészt ismertek. Eszközként szolgálnak azonban ahhoz, hogy a bemutatott fogalomrendszer mentén megvizsgáljuk, hogyan írható le a nempartícionális információs struktúra. A következőkben tehát megvizsgáljuk, hogy az egyes fogalmak mennyiben használhatók az említett célra, esetleg mennyiben szorulnak módosításra, vagy mennyiben van szükség új fogalmak bevezetésére ahhoz, hogy a nempartícionális információs struktúra leírására alkalmas fogalmi apparátushoz jussunk.

2. FEJEZET

A NEMPARTÍCIONÁLIS INFORMÁCIÓS STRUKTÚRA

Tekintsük most ismét a döntéshozó információs helyzetét. Megfigyelésének realizálása előtti információiról ismét nem teszünk fel semmit, ezért úgy tekintjük, hogy az Ω állapothalmaz minden eleméről elképzelhetőnek tartja, hogy bekövetkezett. Nem tesszük fel, hogy minden állapot egyértelműen meghatározza a döntéshozó által megfigyelt jelzést, hanem csak azt követeljük meg, hogy minden egyes állapothoz kijelölhető legyen az összes jelzések Y halmazának egy olyan részhalmaza, amelynek egyik elemét az adott állapot bekövetkezése esetén a döntéshozó megfigyeli. A megfigyelt jelzés információt hordoz a döntéshozó számára, ha feltesszük, hogy ismeri *jelzőfüggvény*ét, amely a világállapotokhoz a jelzések halmazán értelmezett $(Y, \mathcal{Y}, \varphi(\omega))$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőt rendel a következő módon. A jelzőfüggvény által valamely ω állapothoz rendelt $\varphi(\omega)$ valószínűségi mérték szerint a jelzések egy halmazának valószínűsége megegyezik annak a valószínűségével, hogy a döntéshozó az adott ω állapotban olyan jelzést figyel meg, amely a jelzések említett halmazának eleme.

A továbbiakban feltesszük, hogy az Ω állapothalmaz megszámlálható, a jelzések Y halmaza véges, valamint hogy az $\mathcal{Y}$ σ-algebra megegyezik a $P(Y)$ hatványhalmazzal. Ekkor a jelzőfüggvény által valamely ω állapothoz rendelt $(Y, P(Y), \varphi(\omega))$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőből szokás az Y valószínűség-eloszlását származtatni, amely a jelzésekhez azok ω állapotban történő megfigyelésének valószínűségét rendeli. Feltesszük, hogy adott egy

$\mathcal{A} \subseteq P(\Omega)$ σ-algebra, melynek elemei az események, és hogy bármely jelzés megfigyelése esemény, azaz bármely jelzésre $\mathcal{A}$-mérhető azon állapotok halmaza, melyben az adott jelzés megfigyelhető.

1.2.1. DEFINÍCIÓ: A jelzőfüggvény egy

$$\varphi : \Omega \to \left\{ \mu \in \mathbb{R}^{P(Y)} \mid \mu \text{ valószínűségi mérték } P(Y)\text{-on} \right\}$$

függvény, melyre teljesül, hogy

$$\forall y \in Y\text{-ra } \{\omega \in \Omega \mid y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega)\} \in \mathcal{A}.$$

Az $\omega \in \Omega$ állapot bekövetkezésekor a döntéshozó megfigyeli $\operatorname{supp} \varphi(\omega)$ egy elemét, az $y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega)$ jelzés megfigyelésének valószínűsége $(\varphi(\omega))(y)$. A $\operatorname{supp} \varphi(\omega)$ halmaz elemeit az ω állapotban *megfigyelhető jelzés*eknek nevezzük.

A döntéshozó tehát megfigyeli jelzését, majd jelzőfüggvényének ismeretében meghatározza, hogy melyek azok az állapotok, amelyekben az aktuálisan megfigyelt jelzés számára megfigyelhető. Ezen állapotok halmaza a megfigyelt jelzéshez tartozó *információs halmaz*, az összes információs halmazból álló halmazrendszer pedig a döntéshozó *információs struktúrá*ja. A megfigyelt jelzés alapján a világállapotra ilyen módon történő következtetést írja le a φ^- függvény.

1.2.2. DEFINÍCIÓ: φ^- a következő függvény:

$$\varphi^- : Y \to P(\Omega) \quad y \mapsto \{\omega \in \Omega \mid y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega)\}.$$

1.2.3. DEFINÍCIÓ: $I \in P(\Omega)$ információs halmaz, ha van olyan $y \in Y$, hogy

$$I = \varphi^-(y).$$

1.2.4. DEFINÍCIÓ: A döntéshozó információs struktúrája a következő halmazrendszer:

$$\mathcal{I} = \{\varphi^{-}(y) \mid y \in Y\}.$$

Abból, hogy bármely jelzés megfigyelése esemény, az következik, hogy az $\mathcal{I}$ halmazrendszer minden eleme az Ω állapothalmaz egy $\mathcal{A}$-mérhető részhalmaza.

Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{I}$ nem feltétlenül partíció Ω-n. Az információs struktúra pontosan akkor partíció az állapothalmazon, ha a jelzőfüggvény által a különböző állapotokhoz rendelt eloszlások tartói páronként diszjunkt halmazok, amint az a következő állításból kitűnik.

1.2.1. ÁLLÍTÁS: $\mathcal{I}$ pontosan akkor partíció Ω-n, ha

minden $\omega' \in \Omega$ esetén $\operatorname{supp}\varphi(\omega) \cap \operatorname{supp}\varphi(\omega') = \varnothing$ vagy $\operatorname{supp}\varphi(\omega) = \operatorname{supp}\varphi(\omega')$.

BIZONYÍTÁS: Legyen $\mathcal{I} = \{\varphi^{-}(y) \mid y \in Y\}$ az Ω egy partíciója. Ekkor

$$\forall y, y' \in Y \text{ esetén } \varphi^{-}(y) = \varphi^{-}(y') \text{ vagy } \varphi^{-}(y) \cap \varphi^{-}(y') = \varnothing.$$

Tegyük fel, hogy

$$\exists \omega, \omega' \in \Omega\colon \operatorname{supp}\varphi(\omega) \cap \operatorname{supp}\varphi(\omega') \neq \varnothing \text{ és } \operatorname{supp}\varphi(\omega) \neq \operatorname{supp}\varphi(\omega').$$

Ekkor

$$\exists \omega, \omega' \in \Omega, \exists y, y' \in Y\colon y \in \operatorname{supp}\varphi(\omega) \setminus \operatorname{supp}\varphi(\omega') \text{ és}$$
$$y' \in \operatorname{supp}\varphi(\omega) \cap \operatorname{supp}\varphi(\omega').$$

Az ilyen tulajdonságú ω, ω', y, y'-re teljesül, hogy

$$\omega \in \varphi^{-}(y) \neq \varphi^{-}(y') \text{ és } \varphi^{-}(y) \cap \varphi^{-}(y') \neq \varnothing,$$

ami ellentmond annak, hogy $\mathcal{I}$ elemei páronként diszjunktak.

Az ellentétes irány bizonyításához tegyük fel, hogy

minden $\omega' \in \Omega$ esetén $\operatorname{supp}\varphi(\omega) \cap \operatorname{supp}\varphi(\omega') = \varnothing$ vagy $\operatorname{supp}\varphi(\omega) = \operatorname{supp}\varphi(\omega')$.

Mivel minden $\omega \in \Omega$-ra $\varphi(\omega)$ eloszlás Y-on, azért $\operatorname{supp}\varphi(\omega) \neq \varnothing$, így $\mathcal{I}$

elemei lefedik Ω-t.

Most megmutatjuk, hogy $\mathcal{I}$ elemei páronként diszjunktak. Legyenek $y, y' \in Y$ tetszőleges jelzések. Teljesül, hogy

$$\varphi^{-}(y) \cap \varphi^{-}(y') \neq \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad \exists \omega \in \varphi^{-}(y) \cap \varphi^{-}(y').$$

Ekkor

$$\forall \omega' \in \varphi^{-}(y)\text{-ra } y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega) \text{ és } y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega'),$$

így

$$\operatorname{supp} \varphi(\omega) \cap \operatorname{supp} \varphi(\omega') \neq \emptyset,$$

amiből feltevésünk szerint

$$\operatorname{supp} \varphi(\omega) = \operatorname{supp} \varphi(\omega'),$$

azaz

$$\forall y'' \in Y \text{ esetén } \omega \in \varphi^{-}(y'') \Leftrightarrow \omega' \in \varphi^{-}(y'')$$

következik. Így $\varphi^{-}(y) = \varphi^{-}(y')$, azaz ha két információs halmaz nem diszjunkt, akkor megegyeznek. Ezzel beláttuk az elégségességet. □

Rátérünk a tudás fogalmának megadására.

A feltételes és a feltétlen tudás

Ha a döntéshozó az $\omega \in \Omega$ állapot bekövetkezésekor megfigyeli az $y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega)$ jelzést, akkor tudja, hogy a $\varphi^{-}(y)$ esemény bekövetkezett.

Legyen $E \in \mathcal{A}$ tetszőleges esemény. Az, hogy a döntéshozó tudja-e, hogy az

E esemény bekövetkezett, attól függ, hogy milyen jelzést figyel meg.

1.2.5. DEFINÍCIÓ: A döntéshozó az $y \in Y$ jelzés megfigyelése esetén tudja, hogy E bekövetkezett, ha $\varphi^{-}(y) \subseteq E$.

Általában csak a döntéshozó által megfigyelt jelzés birtokában lehet megmondani, hogy a döntéshozó tudja-e, hogy az adott esemény bekövetkezett. Bizonyos információs struktúrák esetén a megfigyelt jelzés pontos ismerete nélkül is tudunk valamit a döntéshozó tudásáról állítani. Ha csupán azt tudjuk, hogy mely állapot valósult meg – illetve az adott állapotban a döntéshozó számára megfigyelhető jelzések halmazát ismerjük –, el tudjuk dönteni, hogy vajon előfordulhat-e, hogy a döntéshozó tudja, hogy az E esemény bekövetkezett. Ha lehetséges, hogy a döntéshozó tudja, hogy az E esemény bekövetkezett, akkor az ω állapotban megfigyelhető jelzések között található olyan $y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega)$, amelyre $\varphi^{-}(y) \subseteq E$. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a döntéshozó *feltételesen tudja*, hogy az E esemény bekövetkezett.

1.2.6. DEFINÍCIÓ: Az $\omega \in \Omega$ állapotban a döntéshozó feltételesen tudja, hogy az $E \in \mathcal{A}$ esemény bekövetkezett, ha létezik $y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega)$, melyre $\varphi^{-}(y) \subseteq E$.

Más információs struktúrák esetén még ennél is többet mondhatunk. Előfordulhat ugyanis, hogy bármely, az adott állapotban megfigyelhető jelzésének megfigyelése után a döntéshozó tudja, hogy az E esemény bekövetkezett, azaz bármely $y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega)$ esetén $\varphi^{-}(y) \subseteq E$. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az ω állapotban az E eseményt a döntéshozó *feltétel nélkül tudja*, vagy *feltétlenül tudja*, vagy egyszerűen ω-ban az E esemény a döntéshozó *feltétlen tudás*a.

1.2.7. DEFINÍCIÓ: Az $\omega \in \Omega$ állapotban a döntéshozó feltétlenül tudja, hogy az $E \in \mathcal{A}$ esemény bekövetkezett, ha

$$\bigcup_{y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega)} \varphi^{-}(y) \subseteq E.$$

A következő egyszerű példa arra világít rá, hogy a feltételes tudás és a feltétlen tudás fogalmak a partícionális információs struktúrák esetére értelmezett tudás fogalom általánosításai. Ezt két lépésben mutatjuk meg. Először a példában szereplő nempartícionális információs struktúrához – az állapothalmaz újradefiniálásával – megadunk egy partícionális információs struktúrát, amely ugyanazt az információs helyzetet írja le. Ezután rámutatunk a tudás, a feltételes tudás és a feltétlen tudás fogalmak közötti különbségre az újradefiniált állapothalmaz, illetve partícionális információs struktúra mellett.

PÉLDA: Legyen az állapothalmaz: $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$, a jelzések halmaza: $Y = \{a,b,c,d\}$, valamint a φ jelzőfüggvény a következő:

$$\begin{array}{llll}
\varphi(1)(a) = 1, & \varphi(1)(b) = 0, & \varphi(1)(c) = 0, & \varphi(1)(d) = 0, \\
\varphi(2)(a) = 0{,}5, & \varphi(2)(b) = 0{,}5, & \varphi(2)(c) = 0, & \varphi(2)(d) = 0, \\
\varphi(3)(a) = 0, & \varphi(3)(b) = 0{,}5, & \varphi(3)(c) = 0{,}5, & \varphi(3)(d) = 0, \\
\varphi(4)(a) = 0, & \varphi(4)(b) = 0, & \varphi(4)(c) = 0, & \varphi(4)(d) = 1, \\
\varphi(5)(a) = 0, & \varphi(5)(b) = 0, & \varphi(5)(c) = 0, & \varphi(5)(d) = 1.
\end{array}$$

Ekkor

$$\varphi^{-}(a) = \{1,2\}, \quad \varphi^{-}(b) = \{2,3\}, \quad \varphi^{-}(c) = \{3\}, \quad \varphi^{-}(d) = \{4,5\},$$

az információs struktúra:

$$\mathcal{I} = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3\},\{4,5\}\}.$$

Ez nem partíció.

Ugyanennek a döntéshozónak az információs helyzete partícionális információs struktúrával is leírható. Ehhez vegyük az Ω állapothalmaz és a jelzések Y halmazának az $\Omega \times Y$ Descartes-szorzatát. E Descartes-szorzat valamely

$(\omega, y) \in \Omega \times Y$ eleme azt jelöli, hogy az Ω elemei közül ω valósult meg, és a döntéshozó az y jelzést figyeli meg. Legyen $\overline{\Omega} \subseteq \Omega \times Y$ azon állapot-jelzés párok halmaza, melyek pozitív valószínűséggel megvalósulhatnak. A továbbiakban nevezzük az így kapott

$$\overline{\Omega} = \{(1,a),(2,a),(2,b),(3,b),(3,c),(4,d),(5,d)\}$$

halmazt módosított állapothalmaznak. A módosított állapothalmazon a döntéshozó információs struktúrája:

$$\overline{\overline{\mathcal{I}}} = \{\{(1,a),(2,a)\},\{(2,b),(3,b)\},\{(3,c)\},\{(4,d),(5,d)\}\}.$$

Ez partíció.

Legyen az E esemény a következő: $E = \{2,3,4\}$. Az E eseménynek az újradefiniált állapothalmazon az

$$\overline{E} = \{(2,a),(2,b),(3,b),(3,c),(4,d)\}$$

esemény felel meg. Vizsgáljuk meg, hogy mit tud a döntéshozó az E, illetve $\overline{E}$ eseményről az egyes állapotokban!

A $(2,a)$ újradefiniált állapot az $\{(1,a),(2,a)\}$ információs halmazban van és $\{(1,a),(2,a)\} \not\subseteq \overline{E}$, így a döntéshozó $(2,a)$-ban nem tudja, hogy $\overline{E}$. A $(2,b)$ újradefiniált állapotban a döntéshozó információs halmaza $\{(2,b),(3,b)\}$, melyre $\{(2,b),(3,b)\} \subseteq \overline{E}$, ezért a döntéshozó $(2,b)$-ben tudja, hogy $\overline{E}$. Így ha az eredeti Ω állapothalmaz 2 eleme valósul meg, akkor az, hogy a döntéshozó mit tud az E eseményről, attól függ, hogy milyen jelzést figyel meg. Mivel 2-ben van olyan megfigyelhető jelzés, amely esetén a döntéshozó tudja, hogy E, azért a döntéshozó 2-ben feltételesen tudja, hogy E. Ez az újradefiniált állapothalmaz esetén azt jelenti, hogy a $\overline{2} = \{(2,a),(2,b)\} \subseteq \overline{\Omega}$ esemény bekövetkezésekor van olyan újradefiniált állapot, amely esetén a döntéshozó tudja, hogy $\overline{E}$.

A $(3,b)$ újradefiniált állapot a $\{(2,b),(3,b)\}$ információs halmazban van és $\{(2,b),(3,b)\} \subseteq \overline{E}$, így a döntéshozó $(3,b)$-ben tudja, hogy $\overline{E}$. A $(3,c)$ újradefiniált állapotban a döntéshozó információs halmaza $\{(3,c)\}$, melyre

$\{(3,c)\} \subseteq \overline{E}$, ezért a döntéshozó $(3,c)$-ben tudja, hogy $\overline{E}$. Így ha az eredeti Ω állapothalmaz 3 eleme valósul meg, akkor a döntéshozó bármely megfigyelhető jelzés esetén tudja, hogy *E*. Így a döntéshozó 3-ban feltétlenül tudja, hogy *E*. Ez az újradefiniált állapothalmaz esetén azt jelenti, hogy a $\overline{3} = \{(3,b),(3,c)\} \subseteq \overline{\Omega}$ esemény bekövetkezésekor a döntéshozó bármely állapotban tudja, hogy $\overline{E}$.

A $(4,d)$ újradefiniált állapot a $\{(4,d),(5,d)\}$ információs halmazban van és $\{(4,d),(5,d)\} \not\subseteq \overline{E}$, így a döntéshozó $(4,d)$-ben nem tudja, hogy $\overline{E}$. Így ha az eredeti Ω állapothalmaz 4 eleme valósul meg, akkor a döntéshozó egyetlen megfigyelhető jelzés esetén sem tudja, hogy *E*. Így a döntéshozó 4-ben még feltételesen sem tudja, hogy *E*. Ez az újradefiniált állapothalmaz esetén azt jelenti, hogy a $\overline{4} = \{(4,d)\} \subseteq \overline{\Omega}$ esemény bekövetkezésekor a döntéshozó egyetlen állapotban sem tudja, hogy $\overline{E}$.

A feltételes és a feltétlen tudás definíciójának (1.2.6. és 1.2.7. definíció) egyenes következménye, hogy ha egy esemény az adott állapotban feltétlen tudás, akkor feltételes tudás is.

A feltételes tudás függvény és a feltétlen tudás függvény

Partícionális információs struktúrák esetén szokás a tudás függvényt úgy értelmezni, hogy az minden eseményhez azon állapotok halmazát rendeli, melyekben a döntéshozó tudja, hogy a szóban forgó esemény bekövetkezett. (1.1.8. definíció) A nempartícionális információs struktúrák esetén kétféle tudás fogalom különböztethető meg: a feltételes tudás és a feltétlen tudás. Ennek megfelelően a tudás függvénynek két változata értelmezhető: a feltételes tudás függvény és a feltétlen tudás függvény.

Először a feltételes tudás függvényt definiáljuk, majd megvizsgáljuk, hogy a partícionális információs struktúrák esetén értelmezett tudás függvény korábban említett tulajdonságai közül melyek érvényesek a feltételes tudás függvényre. Ezután rátérünk a feltétlen tudás függvény tárgyalására.

A feltételes tudás függvény

A feltételes tudás függvényt a partícionális információs struktúrák esetére értelmezett tudásfüggvény mintájára, a következő módon értelmezzük.

A feltételes tudás függvény minden $E \in \mathcal{A}$ eseményhez azon állapotok halmazát rendeli, melyekben a döntéshozó feltételesen tudja, hogy az E esemény bekövetkezett. A feltételes tudás definícióját felhasználva ez azt jelenti, hogy a feltételes tudás függvény az $E \in \mathcal{A}$ eseményhez az

$$\{\omega \in \Omega \mid \exists y \in \operatorname{supp}\varphi(\omega) : \varphi^{-}(y) \subseteq E\}$$

halmazt rendeli.

1.2.8. DEFINÍCIÓ: A feltételes tudás függvény a következő:

$$K^{c} : \mathcal{A} \to P(\Omega) \quad E \mapsto \{\omega \in \Omega \mid \exists y \in \operatorname{supp}\varphi(\omega) : \varphi^{-}(y) \subseteq E\}.$$

Először belátjuk, hogy bármely $E \in \mathcal{A}$ eseményre $K^{c}(E)$ is esemény, tehát a

K^c függvény értékei az $\mathcal{A}$ σ-algebrából valók.

1.2.2. ÁLLÍTÁS: Bármely $E \in \mathcal{A}$ eseményre $K^c(E) \in \mathcal{A}$.

BIZONYÍTÁS: Legyen $E \in \mathcal{A}$ tetszőleges esemény. Jelölje Y_1 azon jelzések halmazát, melyek megfigyelése esetén a döntéshozó tudja, hogy az E esemény bekövetkezett:

$$Y_1 = \{y \in Y \mid \varphi^-(y) \subseteq E\}.$$

A feltételes tudás függvény definíciója (1.2.8. definíció) szerint valamely $\omega \in \Omega$ állapotra pontosan akkor teljesül az $\omega \in K^c(E)$ reláció, ha

$$\exists y \in Y : \omega \in \varphi^-(y) \subseteq E.$$

Ebből az következik, hogy a $K^c(E)$ halmaz előáll információs halmazok halmazelméleti egyesítéseként:

$$K^c(E) = \bigcup_{y \in Y_1} \varphi^-(y).$$

Abból, hogy bármely jelzés megfigyelése esemény, $\varphi^-(y) \in \mathcal{A}$ következik bármely $y \in Y$-ra. Mivel $\mathcal{A}$ σ-algebra, és mert Y végessége miatt $Y_1 \subseteq Y$ véges, azért teljesül a

$$K^c(E) = \bigcup_{y \in Y_1} \varphi^-(y) \in \mathcal{A}$$

reláció, azaz $K^c(E)$ esemény. □

A következő állítás a feltételes tudás függvény tulajdonságairól szól.

1.2.3. ÁLLÍTÁS: Bármely $A, B \in \mathcal{A}$ események esetén teljesülnek a következők.

(K^{c}1) $\quad K^c(\Omega) = \Omega.$

(K^{c}2) $\quad K^c(A \cap B) \subseteq K^c(A) \cap K^c(B).$

(K^c3) $K^c(A) \subseteq A$.

(K^c4) $K^c(K^c(A)) = K^c(A)$.

(K^c5) $K^c(\Omega \setminus K^c(A)) \subseteq \Omega \setminus K^c(A)$.

BIZONYÍTÁS: A jelzőfüggvény és φ^- definíciójából (1.2.1. és 1.2.2. definíció) következik, hogy

$$\text{minden } \omega \in \Omega\text{-hoz van olyan } y \in Y, \text{ melyre } \omega \in \varphi^-(y),$$

és hogy

$$\text{bármely } y \in Y \text{ jelzésre } \varphi^-(y) \subseteq \Omega.$$

E két állításból $\Omega \subseteq K^c(\Omega)$ következik. Másrészt K^c definíciójából (1.2.8. definíció) $K^c(\Omega) \subseteq \Omega$ következik. Ezzel beláttuk, hogy (K^c1) teljesül.

K^c definíciója (1.2.8. definíció) miatt teljesül a következő:

$$\begin{aligned}
&K^c(A) \cap K^c(B) = \{\omega \in \Omega \mid \exists y \in \operatorname{supp}\varphi(\omega) : \varphi^-(y) \subseteq A\} \cap \\
&\cap \{\omega \in \Omega \mid \exists y \in \operatorname{supp}\varphi(\omega) : \varphi^-(y) \subseteq B\} = \\
&= \left\{\omega \in \Omega \mid \exists y, y' \in \operatorname{supp}\varphi(\omega) : \varphi^-(y) \subseteq A \text{ és } \varphi^-(y') \subseteq B\right\} \supseteq \\
&\supseteq \left\{\omega \in \Omega \mid \exists y \in \operatorname{supp}\varphi(\omega) : \varphi^-(y) \subseteq A \text{ és } \varphi^-(y) \subseteq B\right\} = \\
&= \{\omega \in \Omega \mid \exists y \in \operatorname{supp}\varphi(\omega) : \varphi^-(y) \subseteq A \cap B\} = K^c(A \cap B).
\end{aligned}$$

Tehát teljesül (K^c2).

(K^c3) bizonyításához gondoljuk meg, hogy egyrészt

$$\omega \in K^c(A) \Leftrightarrow \exists y \in \operatorname{supp}\varphi(\omega) : \varphi^-(y) \subseteq A.$$

Másrészt

$$y \in \operatorname{supp}\varphi(\omega) \Rightarrow \omega \in \varphi^-(y).$$

így ha $\omega \in K^c(A)$, akkor $\omega \in A$ is teljesül. Ezzel beláttuk, hogy (K^c3) igaz.

Az 1.2.2. állítás bizonyítása során beláttuk, hogy

$$\exists Y_1 \subseteq Y, \text{ melyre } K^c(A) = \bigcup_{y \in Y_1} \varphi^-(y),$$

így

$$\text{minden } \omega \in K^c(A)\text{-ra } \exists y \in Y_1, \text{ hogy } \omega \in \varphi^-(y) \subseteq K^c(A).$$

Ebből a K^c függvény definíciója (1.2.8. definíció) szerint – felhasználva, hogy ha A esemény, akkor $K^c(A)$ is esemény (1.2.2. állítás) – következik, hogy $K^c(A) \subseteq K^c(K^c(A))$. Ezt ($K^c$3)-mal összevetve kapjuk, hogy (K^c4) igaz.

(K^c3)-nak $\Omega \setminus K^c(A)$-ra történő alkalmazásával (K^c5) teljesülése következik.

□

Az állításban szereplő (K^c1) tulajdonság szerint a döntéshozó bármely állapotban feltételesen tudja, hogy valamely állapot bekövetkezett. Ez azt jelenti, hogy bármely állapotban van olyan megfigyelhető jelzése, melynek megfigyelése esetén a döntéshozó tudja, hogy valamely állapot bekövetkezett, ami nyilvánvalóan teljesül.

A (K^c2) tulajdonság azt jelenti, hogy ha a döntéshozó feltételesen tudja, hogy az A és B események mindegyike bekövetkezett, akkor mind az A eseményről, mind a B eseményről feltételesen tudja, hogy bekövetkezett.

A (K^c3) jelentése az, hogy ha a döntéshozó valamely eseményről feltételesen tudja, hogy bekövetkezett, akkor az említett esemény valóban bekövetkezett, tehát a döntéshozó feltételes tudása soha nem téves.

A feltételes tudás függvény (K^c4) tulajdonsága szerint a döntéshozó akkor és csakis akkor tudja feltételesen, hogy egy esemény bekövetkezett, ha az is feltételes tudása, hogy feltételesen tudja, hogy a szóban forgó esemény bekövetkezett.

(K^c5) a feltételes tudás függvény azon tulajdonságáról szól, hogy ha a döntéshozó feltételesen tudja, hogy nem igaz, hogy feltételesen tudja egy bizonyos esemény bekövetkezését, akkor nem igaz, hogy feltételesen tudja, hogy az említett esemény bekövetkezett. Tehát, ha valamely állapotban van olyan megfigyelhető jelzése, melynek megfigyelése esetén tudja azt, hogy nem figyelhetett volna meg olyan jelzést, amelynek megfigyelésekor tudná, hogy egy A esemény bekövetkezett, akkor ez a tudása nem volna téves.

A (K^c2), (K^c3) és (K^c5) állításokban a tartalmazási relációk helyett egyenlőséget írhatnánk, ha a fent bizonyított állítások megfordítása – amit formálisan a tartalmazási relációk "megfordításával" kapunk – is igaz lenne. A következő példában látni fogjuk, hogy az említett állítások megfordítása nem igaz.

PÉLDA: Legyen az állapothalmaz: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, a jelzések halmaza: $Y = \{y_1, y_2\}$, végül a φ jelzőfüggvény olyan, hogy

$$\begin{aligned} \varphi(\omega_1)(y_1) &= 1, & \varphi(\omega_1)(y_2) &= 0, \\ \varphi(\omega_2)(y_1) &= 0,5, & \varphi(\omega_2)(y_2) &= 0,5, \\ \varphi(\omega_3)(y_1) &= 0, & \varphi(\omega_3)(y_2) &= 1. \end{aligned}$$

Ekkor

$$\varphi^-(y_1) = \{\omega_1, \omega_2\}, \qquad \varphi^-(y_2) = \{\omega_2, \omega_3\},$$

az információs struktúra:

$$\mathcal{I} = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_2, \omega_3\}\}.$$

Legyenek az A, B, C események a következők:

$$A = \{\omega_1, \omega_2\}, \qquad B = \{\omega_2, \omega_3\}, \qquad C = \{\omega_1\}.$$

Ekkor

$$K^c(A) = \{\omega_1, \omega_2\}, \qquad \text{és} \qquad K^c(B) = \{\omega_2, \omega_3\},$$

ezért

$$K^c(A \cap B) = K^c(\{\omega_2\}) = \emptyset \not\supseteq \{\omega_2\} = K^c(A) \cap K^c(B),$$

tehát (K^c2)-ben a tartalmazási reláció helyett nem írható egyenlőség.

Másrészt

$$K^c(C) = \emptyset \not\supseteq C,$$

amiből következik, hogy (K^c3)-ban sem írható egyenlőségjel.

Végül

$$K^c(\Omega \setminus K^c(A)) = K^c(\{\omega_3\}) = \varnothing \not\supseteq \{\omega_3\} = \Omega \setminus K^c(A).$$

így (K^c5)-ben sem igaz a fordított irányú tartalmazási reláció.

Végül megemlítjük a szemléletes jelentését annak, hogy a (K^c2), (K^c3) és (K^c5) állítások megfordítása nem igaz.

(K^c2) megfordítása nem igaz a következők miatt. Ha egy állapotban a döntéshozó feltételesen tudja, hogy az *A* esemény bekövetkezett, és feltételesen tudja, hogy a *B* esemény bekövetkezett, nem biztos, hogy feltételesen tudja, hogy az *A* és *B* események mindegyike bekövetkezett. Ennek az az oka, hogy ha egy állapotban van olyan megfigyelhető jelzése, amelynek megfigyelése esetén tudja *A*-t, és ugyanebben az állapotban van olyan megfigyelhető jelzése, melynek megfigyelése esetén tudja *B*-t, akkor nem biztos, hogy van olyan megfigyelhető jelzése, amely megfigyelése esetén tudja *A*-t is és *B*-t is.

(K^c3) megfordítása azt jelentené, hogy bármely esemény bekövetkezése esetén a döntéshozó feltételesen tudja, hogy a szóban forgó esemény bekövetkezett. Mivel ez nem igaz, azért nem kizárt olyan esemény létezése, amelyhez van olyan állapot, amelyben az említett esemény bekövetkezik, de nincs olyan az adott állapotban megfigyelhető jelzés, melynek megfigyelése esetén tudja, hogy a szóban forgó esemény bekövetkezett.

Ha (K^c5) megfordítása teljesülne, az a következőket jelentené. Bármely *A* esemény esetén minden olyan állapotban, melyben nem igaz, hogy a döntéshozó feltételesen tudja, hogy az *A* esemény bekövetkezett, a döntéshozó feltételesen tudná, hogy nem igaz, hogy feltételesen tudja *A*-t. Tehát ha egy állapotban nincs olyan megfigyelhető jelzése, melynek megfigyelésekor a döntéshozó tudja *A*-t, akkor van olyan megfigyelhető jelzése, melynek megfigyelése esetén a döntéshozó tudja, hogy nincs olyan megfigyelhető jelzése, melynek megfigyelésekor tudja *A*-t.

A feltétlen tudás függvény

A feltétlen tudás függvény minden $E \in \mathcal{A}$ eseményhez azon állapotok halmazát rendeli, melyekben a döntéshozó feltétlenül tudja, hogy az E esemény bekövetkezett. A feltétlen tudás definícióját felhasználva ez azt jelenti, hogy a feltétlen tudás függvény az $E \in \mathcal{A}$ eseményhez az

$$\left\{ \omega \in \Omega \mid \bigcup_{y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega)} \varphi^{-}(y) \subseteq E \right\}$$

halmazt rendeli.

1.2.9. DEFINÍCIÓ: A feltétlen tudás függvény a következő:

$$K^u : \mathcal{A} \to P(\Omega) \quad E \mapsto \left\{ \omega \in \Omega \mid \bigcup_{y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega)} \varphi^{-}(y) \subseteq E \right\}.$$

Először belátjuk, hogy bármely $E \in \mathcal{A}$ eseményre $K^u(E)$ is esemény, tehát a K^u függvény értékei az $\mathcal{A}$ σ-algebrából valók.

1.2.4. ÁLLÍTÁS: Bármely $E \in \mathcal{A}$ eseményre $K^u(E) \in \mathcal{A}$.

BIZONYÍTÁS: Ha $\omega \in K^u(E)$, akkor

$$\forall \omega' \in \left(\bigcap_{y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega)} \varphi^{-}(y) \right) \setminus \left(\bigcap_{y \in Y \setminus \operatorname{supp} \varphi(\omega)} \varphi^{-}(y) \right) \text{ esetén } \operatorname{supp} \varphi(\omega) = \operatorname{supp} \varphi(\omega').$$

Így abból, hogy

$$\bigcup_{y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega)} \varphi^{-}(y) \subseteq E,$$

következik, hogy

$$\forall \omega' \in \left(\bigcap_{y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega)} \varphi^{-}(y) \right) \setminus \left(\bigcap_{y \in Y \setminus \operatorname{supp} \varphi(\omega)} \varphi^{-}(y) \right) : \bigcup_{y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega')} \varphi^{-}(y) \subseteq E,$$

tehát $\omega' \in K^u(E)$. Így ha $\omega \in K^u(E)$, akkor

$$\left(\bigcap_{y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega)} \varphi^{-}(y) \right) \setminus \left(\bigcap_{y \in Y \setminus \operatorname{supp} \varphi(\omega)} \varphi^{-}(y) \right) \subseteq K^u(E),$$

amiből

$$\bigcup_{\omega \in K^u(E)} \left(\left(\bigcap_{y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega)} \varphi^{-}(y) \right) \setminus \left(\bigcap_{y \in Y \setminus \operatorname{supp} \varphi(\omega)} \varphi^{-}(y) \right) \right) \subseteq K^u(E).$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\text{minden } \omega \in \Omega\text{-ra } \omega \in \left(\bigcap_{y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega)} \varphi^{-}(y) \right) \setminus \left(\bigcap_{y \in Y \setminus \operatorname{supp} \varphi(\omega)} \varphi^{-}(y) \right),$$

ezért

$$K^u(E) \subseteq \bigcup_{\omega \in K^u(E)} \left(\left(\bigcap_{y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega)} \varphi^{-}(y) \right) \setminus \left(\bigcap_{y \in Y \setminus \operatorname{supp} \varphi(\omega)} \varphi^{-}(y) \right) \right).$$

Az utóbbi két tartalmazási reláció teljesüléséből

$$\bigcup_{\omega \in K^u(E)} \left(\left(\bigcap_{y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega)} \varphi^{-}(y) \right) \setminus \left(\bigcap_{y \in Y \setminus \operatorname{supp} \varphi(\omega)} \varphi^{-}(y) \right) \right) = K^u(E)$$

következik. A φ jelzőfüggvény definíciója (1.2.1. definíció) szerint bármely $y \in Y$ esetén $\varphi^{-}(y) \in \mathcal{A}$, amiből következik

$$\left(\bigcap_{y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega)} \varphi^{-}(y) \right) \setminus \left(\bigcap_{y \in Y \setminus \operatorname{supp} \varphi(\omega)} \varphi^{-}(y) \right) \in \mathcal{A},$$

végül

$$K^u(E) = \bigcup_{\omega \in K^u(E)} \left(\left(\bigcap_{y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega)} \varphi^{-}(y) \right) \setminus \left(\bigcap_{y \in Y \setminus \operatorname{supp} \varphi(\omega)} \varphi^{-}(y) \right) \right) \in \mathcal{A}.$$

Ezzel beláttuk, hogy minden E eseményre az is esemény, hogy „a döntéshozó feltétlenül tudja, hogy az E esemény bekövetkezett". □

Az imént bizonyított állítás azt jelenti, hogy ha E esemény, akkor "a döntéshozó feltétlenül tudja, hogy E" is esemény, ezért például van értelme annak a valószínűségéről beszélni, hogy a döntéshozó feltétlenül tudja, hogy E bekövetkezett. A feltétlen tudás függvény minden eseményhez a "döntéshozó feltétlenül tudja, hogy E" eseményt rendeli.

1.2.5. ÁLLÍTÁS: Bármely $A, B \in \mathcal{A}$ események esetén teljesülnek a következők.

(K^u1) $\quad K^u(\Omega) = \Omega.$

(K^u2) $\quad K^u(A \cap B) = K^u(A) \cap K^u(B).$

(K^u3) $\quad K^u(A) \subseteq A.$

(K^u4) $\quad K^u(K^u(A)) \subseteq K^u(A).$

(K^u5) $\quad K^u(\Omega \setminus K^u(A)) \subseteq \Omega \setminus K^u(A).$

BIZONYÍTÁS: Nyilvánvaló, hogy

$$K^u(\Omega) \subseteq \Omega,$$

és mivel

$$\text{minden } y \in Y\text{-ra } \varphi^{-}(y) \subseteq \Omega,$$

azért

$$\text{bármely } \omega \in \Omega \text{ esetén } \bigcup_{y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega)} \varphi^{-}(y) \subseteq \Omega$$

is teljesül. Ekkor definíció szerint minden $\omega \in \Omega$ eleme a $K^u(\Omega)$ halmaznak (1.2.9. definíció), így $K^u(\Omega) = \Omega$. Tehát teljesül (K^u1).

A feltétlen tudás függvény definícióját (1.2.9. definíció) felhasználva a következőt kapjuk:

$$K^u(A) \cap K^u(B) = \left\{\omega \in \Omega \mid \bigcup_{y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega)} \varphi^-(y) \subseteq A\right\} \cap$$

$$\cap \left\{\omega \in \Omega \mid \bigcup_{y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega)} \varphi^-(y) \subseteq B\right\} =$$

$$= \left\{\omega \in \Omega \mid \bigcup_{y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega)} \varphi^-(y) \subseteq A \text{ és } \bigcup_{y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega)} \varphi^-(y) \subseteq B\right\} =$$

$$= \left\{\omega \in \Omega \mid \bigcup_{y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega)} \varphi^-(y) \subseteq A \cap B\right\} = K^u(A \cap B),$$

ezért igaz (K^u2).

A K^u függvény definíciója (1.2.9. definíció) szerint

$$\text{ha } \omega \in K^u(A), \text{ akkor } \forall y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega) \text{ esetén } \varphi^-(y) \subseteq A.$$

Ugyanakkor φ^- definíciójából (1.2.2. definíció) következik, hogy

$$y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega) \text{ akkor és csakis akkor, ha } \omega \in \varphi^-(y).$$

A fentiek összevetésével

$$\text{ha } \omega \in K^u(A), \text{ akkor } \forall y \in \operatorname{supp} \varphi(\omega) \text{ esetén } \omega \in \varphi^-(y) \subseteq A$$

adódik, amiből következik (K^u3).

(K^u3)-at a $K^u(A)$ eseményre alkalmazva adódik (K^u4).

Az $\Omega \setminus K^u(A)$ eseményre alkalmazva (K^u3)-at (K^u5) teljesülését kapjuk. □

Az állításban szereplő (K^u1) tulajdonság szerint a döntéshozó bármely állapotban feltétlenül tudja, hogy valamely állapot bekövetkezett. Ez azt jelenti, hogy bármely állapotban bármely megfigyelhető jelzésének megfigyelése esetén a döntéshozó tudja, hogy valamely állapot bekövetkezett, ami nyilvánvalóan teljesül.

A (K^u2) tulajdonság azt jelenti, a döntéshozó akkor és csak is akkor tudja feltétlenül, hogy az A és B események mindegyike bekövetkezett, ha mind az A eseményről, mind a B eseményről feltétlenül tudja, hogy bekövetkezett. Tehát az, hogy egy állapotban a döntéshozó bármely jelzés megfigyelése esetén tudja, hogy az A és B esemény bekövetkezett, egyenértékű azzal, hogy egy állapotban a döntéshozó bármely jelzés megfigyelése esetén tudja, hogy az A esemény bekövetkezett és tudja, hogy a B esemény bekövetkezett.

A (K^u3) jelentése az, hogy ha a döntéshozó valamely eseményről feltétlenül tudja, hogy bekövetkezett, akkor az említett esemény valóban bekövetkezett, tehát a döntéshozó feltétlen tudása soha nem téves.

A feltétlen tudás függvény (K^u4) tulajdonsága szerint ha a döntéshozó feltétlenül tudja, hogy egy esemény bekövetkezett, akkor feltétlenül tudja, hogy feltétlenül tudja, hogy a szóban forgó esemény bekövetkezett.

(K^u5) a feltétlen tudás függvény azon tulajdonságáról szól, hogy ha a döntéshozó feltétlenül tudja, hogy nem igaz, hogy feltétlenül tudja egy bizonyos esemény bekövetkezését, akkor nem igaz, hogy feltétlenül tudja, hogy az említett esemény bekövetkezett. Tehát, ha valamely állapotban bármely megfigyelhető jelzésének megfigyelése esetén tudja azt, hogy nem minden megfigyelhető jelzésének megfigyelésekor tudná, hogy egy A esemény bekövetkezett, akkor ez a tudása nem volna téves.

A (K^u3), (K^u4) és (K^u5) állításokban a tartalmazási relációk helyett egyenlőséget írhatnánk, ha a fent bizonyított állítások megfordítása – amit formálisan a tartalmazási relációk "megfordításával" kapunk – is igaz lenne. A következő példában látni fogjuk, hogy az említett állítások megfordítása nem igaz.

PÉLDA: Legyen az állapothalmaz: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, a jelzések halmaza: $Y = \{y_1, y_2\}$, végül a φ jelzőfüggvény olyan, hogy

$$\begin{aligned} \varphi(\omega_1)(y_1) &= 1, & \varphi(\omega_1)(y_2) &= 0, \\ \varphi(\omega_2)(y_1) &= 0{,}5, & \varphi(\omega_2)(y_2) &= 0{,}5, \\ \varphi(\omega_3)(y_1) &= 0, & \varphi(\omega_3)(y_2) &= 1. \end{aligned}$$

Ekkor

$$\varphi^{-}(y_1) = \{\omega_1, \omega_2\}, \qquad \varphi^{-}(y_2) = \{\omega_2, \omega_3\},$$

az információs struktúra:

$$\mathcal{I} = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_2, \omega_3\}\}.$$

Legyen az A esemény a következő:

$$A = \{\omega_1, \omega_2\}.$$

Ekkor

$$K^u(A) = \{\omega_1\} \not\supseteq A,$$

tehát (K^u3)-ban a tartalmazási reláció helyett nem írható egyenlőség.

Másrészt

$$K^u(K^u(A)) = K^u(\{\omega_1\}) = \emptyset \not\supseteq \{\omega_1\} = K^u(A),$$

amiből következik, hogy (K^u4)-ben sem írható egyenlőségjel.

Végül

$$K^u(\Omega \setminus K^u(A)) = K^u(\{\omega_2, \omega_3\}) = \{\omega_3\} \not\supseteq \{\omega_2, \omega_3\} = \Omega \setminus K^u(A),$$

így (K^u5)-ben sem igaz a fordított irányú tartalmazási reláció.

Végül megemlítjük a szemléletes jelentését annak, hogy a (K^u3), (K^u4) és (K^u5) állítások megfordítása nem igaz.

(K^u3) megfordítása azt jelentené, hogy bármely esemény bekövetkezése esetén a döntéshozó feltétlenül tudja, hogy a szóban forgó esemény bekövetkezett. Mivel ez nem igaz, azért nem kizárt olyan esemény létezése, amelyhez van olyan állapot, amelyben az említett esemény bekövetkezik, és van olyan az adott állapotban megfigyelhető jelzés, melynek megfigyelése esetén a döntéshozó nem tudja, hogy a szóban forgó esemény bekövetkezett.

Mivel (K^u4) megfordítása nem igaz, ezért előfordulhat az, hogy egy adott állapotban a döntéshozó feltétlenül tudja, hogy egy esemény bekövetkezett, ugyanakkor nem igaz, hogy feltétlenül tudja, hogy feltétlenül tudja, hogy az említett esemény bekövetkezett. Ekkor ebben az állapotban a döntéshozó bármely megfigyelhető jelzésének megfigyelésekor tudja, hogy a szóban forgó esemény bekövetkezett, de van olyan megfigyelhető jelzése, melynek megfigyelését követően nem lehet biztos abban, hogy az említett esemény az ő feltétlen tudása.

Ha (K^u5) megfordítása teljesülne, az a következőket jelentené. Bármely A esemény esetén minden olyan állapotban, melyben nem igaz, hogy a döntéshozó feltétlenül tudja, hogy az A esemény bekövetkezett, a döntéshozó feltétlenül tudná, hogy nem igaz, hogy feltétlenül tudja A-t. Tehát ha egy állapotban van olyan megfigyelhető jelzése, melynek megfigyelésekor a döntéshozó nem tudja A-t, akkor bármely megfigyelhető jelzésének megfigyelése esetén a döntéshozó tudja, hogy van olyan az adott állapotban megfigyelhető jelzése, melynek megfigyelésekor nem tudja A-t.

Végül kimondunk egy, a feltételes tudás függvény és feltétlen tudás függvény viszonyára vonatkozó állítást.

1.2.6. ÁLLÍTÁS: Bármely $E \in \mathcal{A}$ eseményre $K^u(E) \subseteq K^c(E)$.

BIZONYÍTÁS: Az állítás a feltételes és feltétlen tudás definíciójából (1.2.8. és 1.2.9. definíció) közvetlenül következik. □

Imént megfogalmazott állításunk azt jelenti, hogy ha egy esemény egy állapotban feltétlen tudás, akkor ugyanaz az esemény ugyanabban az állapotban egyúttal feltételes tudás is.

A döntéshozó vélekedése

Az információs problémák vizsgálata során szokásos feltevés, hogy a döntéshozó jelzésének megfigyelése előtt, illetve döntésének meghozatalakor ugyan nem feltétlenül tudja, hogy mely állapot valósult meg, de ismer egy valószínűségi mértéket az események halmazán. Ez a valószínűségi mérték – pontosabban a mögötte meghúzódó valószínűségi mező – a döntéshozó vélekedése.

Amennyiben a döntéshozó ismeri jelzőfüggvényét, jelzésének megfigyelése az aktuális állapot jellegére vonatkozó információt hordoz számára: azokat az állapotokat, melyekben a megfigyelt jelzést nem figyelhette volna meg, a továbbiakban nem tartja lehetségesnek. Ezt a fajta tudást jellemzi a döntéshozó információs struktúrája. Mivel a lehetségesnek tartott állapotok halmaza – vélekedésének tartója – a jelzés megfigyelését követően más, mint előtte volt, nyilvánvaló, hogy a döntéshozó vélekedése is megváltozik a jelzés megfigyelésének következtében. Jelzésének megfigyelése előtti vélekedését szokás a döntéshozó *kezdeti vélekedés*ének nevezni.

1.2.10. DEFINÍCIÓ: A döntéshozó kezdeti vélekedése egy $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező.

A döntéshozónak az esélyeket jól leíró valószínűségi mértékkel kapcsolatos elgondolása jelzésének megfigyelését követően a megfigyelt jelzéstől függ: ha az $y \in Y$ jelzést figyelte meg, akkor ez a $p(\bullet \mid \varphi^{-}(y))$ mérték. Ezért a döntéshozó *korrigált vélekedése* egy feltételes valószínűségi mező. (Rényi [1968], pp. 70-74)

1.2.11. DEFINÍCIÓ: A döntéshozó korrigált vélekedése az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{I}, p(A \mid I))$

feltételes valószínűségi mező, ahol $\mathcal{I}$ a döntéshozó információs struktúrája.

A továbbiakban, ha ez nem okoz félreértést, időnként az $(\Omega, \mathcal{A}, p(\cdot \mid I))$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőt is korrigált vélekedésnek fogjuk nevezni.

A feltételes és a feltétlen köztudott tudás

A köztudott tudás fogalma nempartícionális információs struktúra esetén definiálható akár a feltételes tudás, akár a feltétlen tudás fogalmának felhasználásával. Először megadjuk a két definíciót, majd megmutatjuk, hogy a két fogalom egymással ekvivalens.

Azt mondjuk, hogy az $\omega \in \Omega$ állapotban az $E \in \mathcal{A}$ esemény az $1, 2, \ldots, n$ döntéshozók között *feltételes köztudott tudás*, ha

i feltételesen tudja, hogy E minden $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re, és

i feltételesen tudja, hogy j feltétlenül tudja, hogy E minden $i,j \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re, és

i feltételesen tudja, hogy j feltétlenül tudja, hogy l feltétlenül tudja, hogy E minden $i,j,l \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re, stb.

Tehát valamely E esemény feltételes köztudott tudás az ω állapotban, ha van olyan ω-ban megfigyelhető jelzésekből álló $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ profil, hogy ha bármely $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re az i-edik döntéshozó az y_i jelzést figyeli meg, akkor

i tudja, hogy E minden $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re, és

i tudja, hogy j feltétlenül tudja, hogy E minden $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re, és
i tudja, hogy j feltétlenül tudja, hogy l feltétlenül tudja, hogy E minden
$i, j, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re, stb.

1.2.12. DEFINÍCIÓ: Az $E \in \mathcal{A}$ esemény az $\omega \in \Omega$ állapotban feltételes köztudott tudás az $1, 2, \ldots, n$ döntéshozók között, ha bármely $k \in \mathbb{N}^+$ pozitív egész szám és $i : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ függvény esetén

$$\omega \in K^c_{i(1)}\Big(K^u_{i(2)} \ldots \Big(K^u_{i(k)}(E)\Big) \ldots\Big).$$

A feltétlen köztudott tudás ennél többet követel meg.

Az $\omega \in \Omega$ állapotban az $E \in \mathcal{A}$ esemény 1 és 2 között *feltétlen köztudott tudás*, ha
i feltétlenül tudja, hogy E minden $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re, és
i feltétlenül tudja, hogy j feltétlenül tudja, hogy E minden $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re, és
i feltétlenül tudja, hogy j feltétlenül tudja, hogy l feltétlenül tudja, hogy E minden
$i, j, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re, stb.

Azaz bármely, az ω-ban megfigyelhető jelzésekből álló $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ profil esetén, ha minden $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re az i-edik döntéshozó az y_i jelzést figyeli meg, akkor
i tudja, hogy E minden $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re, és
i tudja, hogy j feltétlenül tudja, hogy E minden $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re, és
i tudja, hogy j feltétlenül tudja, hogy l feltétlenül tudja, hogy E minden
$i, j, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re, stb.

1.2.13. DEFINÍCIÓ: Az $E \in \mathcal{A}$ esemény az $\omega \in \Omega$ állapotban feltétlen köztudott tudás az $1,2,\ldots,n$ döntéshozók között, ha bármely $k \in \mathbb{N}^+$ pozitív egész szám és $i : \{1,2,\ldots,k\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ függvény esetén

$$\omega \in K^u_{i(1)}\left(K^u_{i(2)}\ldots\left(K^u_{i(k)}(E)\right)\ldots\right).$$

Mivel a feltétlen tudásnak következménye a feltételes tudás, azért abból, hogy egy E esemény feltétlen köztudott tudás, az következik, hogy E feltételes köztudott tudás is.

Most kimondjuk a kétféle köztudott tudás fogalom ekvivalenciájáról szóló állítást.

1.2.7. ÁLLÍTÁS: Bármely $E \in \mathcal{A}$ esemény és $\omega \in \Omega$ állapot esetén az E esemény akkor és csakis akkor feltétlen köztudott tudás az $1,2,\ldots,n$ döntéshozók között, ha E feltételes köztudott tudás az $1,2,\ldots,n$ döntéshozók között.

BIZONYÍTÁS: Mivel bármely $E \in \mathcal{A}$ eseményre $K^u(E) \subseteq K^c(E)$ (1.2.6. állítás), azért minden $\omega \in \Omega$, $E \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}^+$ és $i : \{1,2,\ldots,k\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ esetén

$$\omega \in K^u_{i(1)}\left(K^u_{i(2)}\ldots\left(K^u_{i(k)}(E)\right)\ldots\right) \quad \Rightarrow \quad \omega \in K^c_{i(1)}\left(K^u_{i(2)}\ldots\left(K^u_{i(k)}(E)\right)\ldots\right).$$

Ebből az következik, hogy ha az E esemény az ω állapotban feltétlen köztudott tudás az $1,2,\ldots,n$ döntéshozók között, akkor E az ω állapotban feltételes köztudott tudás az $1,2,\ldots,n$ döntéshozók között.

A fordított irány belátásához legyen $\omega \in \Omega$, $E \in \mathcal{A}$ $k \in \mathbb{N}^+$ és $i : \{1,2,\ldots,k\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ tetszőleges, a továbbiakban rögzített. Tegyük fel, hogy az E esemény ω-ban feltételes köztudott tudás az $1,2,\ldots n$ döntéshozók között. Ekkor a feltételes köztudott tudás definíciója (1.2.12. definíció) szerint teljesül, hogy

$$\omega \in K_1^c\left(K_{i(1)}^u\left(K_{i(2)}^u\ldots\left(K_{i(k)}^u(E)\right)\ldots\right)\right).$$

(4)

A feltételes tudás függvény (K^c3) tulajdonságából (1.2.3. állítás)

$$K_1^c\left(K_{i(1)}^u\left(K_{i(2)}^u\ldots\left(K_{i(k)}^u(E)\right)\ldots\right)\right) \subseteq K_{i(1)}^u\left(K_{i(2)}^u\ldots\left(K_{i(k)}^u(E)\right)\ldots\right)$$

következik, így

$$\omega \in K_{i(1)}^u\left(K_{i(2)}^u\ldots\left(K_{i(k)}^u(E)\right)\ldots\right)$$

is igaz. Mivel ez utóbbi reláció bármely $k \in \mathbb{N}^+$ és $i : \{1,2,\ldots,k\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ esetén következik (4)-ből, azért ha ω-ban E feltételes köztudott tudás az $1,2,\ldots,n$ döntéshozók között, akkor ω-ban E feltétlen köztudott tudás az $1,2,\ldots,n$ döntéshozók között. □

Az előbbi állítás szerint a feltételes köztudott tudás és a feltétlen köztudott tudás egymással ekvivalens fogalmak. Ezért nincs szükség a két fogalom megkülönböztetésére, így a továbbiakban az egyszerűség kedvéért csak köztudott tudásról beszélünk, és a köztudott tudás definíciójának a feltétlen köztudott tudás meghatározását tekintjük.

1.2.13. DEFINÍCIÓ: Az $E \in \mathcal{A}$ esemény az $\omega \in \Omega$ állapotban köztudott tudás az $1,2,\ldots,n$ döntéshozók között, ha bármely $k \in \mathbb{N}^+$ pozitív egész szám és $i : \{1,2,\ldots,k\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ függvény esetén

$$\omega \in K_{i(1)}^u\left(K_{i(2)}^u\ldots\left(K_{i(k)}^u(E)\right)\ldots\right).$$

A köztudott tudás ekvivalens meghatározása

Következő lépésként megfogalmazunk egy állítást, amely a nempartícionális információs struktúrák esetére értelmezett köztudott tudás olyan meghatározását adja, amely az Aumann által partícionális információs struktúrák esetére adott köztudott tudás fogalom általánosítása. (Aumann [1976]) Végül kimondunk egy állítást a partícionális és a nempartícionális információs struktúrák esetére definiált köztudott tudás fogalom kapcsolatára vonatkozóan. Mindezekhez szükség lesz néhány fogalom bevezetésére.

1.2.14. DEFINÍCIÓ: Legyen $\mathcal{I},\mathcal{I}' \subseteq P(\Omega)$ tetszőleges. $\mathcal{I}'$ durvább, mint $\mathcal{I}$, ha

$$\forall I' \in \mathcal{I}' \ \exists I_1.I_2,\ldots,I_n \in \mathcal{I}: \quad I' = \bigcup_{i=1}^{n} I_i, \text{ és}$$

$$\forall I \in \mathcal{I} \ \exists I' \in \mathcal{I}': \quad I \subseteq I'.$$

Ilyenkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{I}'$ (gyenge) durvítása $\mathcal{I}$-nek. Jelölése: $\mathcal{I}' \leq \mathcal{I}$.

1.2.15. DEFINÍCIÓ: Legyen $\mathcal{I},\mathcal{I}' \subseteq P(\Omega)$ tetszőleges. $\mathcal{I}'$ partícionális durvítása $\mathcal{I}$-nek, ha $\mathcal{I}' \leq \mathcal{I}$ és $\mathcal{I}'$ partíció.

A következőkben megmutatjuk, hogy tetszőleges halmazrendszerhez egyértelműen létezik annak legfinomabb partícionális durvítása. Ehhez szükségünk lesz a következő fogalomra.

1.2.16. DEFINÍCIÓ: Legyen $\mathcal{I}_1$ és $\mathcal{I}_2$ az Ω két partíciója. $\mathcal{I}_1$ és $\mathcal{I}_2$ legdurvább közös finomítása $\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$, ha teljesíti a következő feltételeket:

$\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$ az Ω partíciója,

$\mathcal{I}_1 \leq \mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$ és $\mathcal{I}_2 \leq \mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$,

ha $\mathcal{I}_3 \subseteq P(\Omega)$, $\mathcal{I}_1 \leq \mathcal{I}_3$ és $\mathcal{I}_2 \leq \mathcal{I}_3$, akkor $\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2 \leq \mathcal{I}_3$.

1.2.8. ÁLLÍTÁS: Legyen $\mathcal{I} \subseteq P(\Omega)$ tetszőleges. Ekkor egyértelműen létezik $\mathcal{I}' \subseteq P(\Omega)$, melyre teljesülnek a következő feltételek:

(1) $\mathcal{I}' \leq \mathcal{I}$,

(2) $\mathcal{I}'$ partíció,

(3) $\forall \mathcal{I}'' \subseteq P(\Omega)$ partíció esetén $\mathcal{I}'' \leq \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{I}'' \leq \mathcal{I}'$.

BIZONYÍTÁS: Vezessük be a következő jelölést:

$$\Pi = \left\{ \mathcal{I}'' \subseteq P(\Omega) \;\middle|\; \mathcal{I}'' \text{ partícionális durvítása } \mathcal{I}\text{-nek} \right\}.$$

$\Pi \neq \emptyset$, mert $\{\Omega\} \in \Pi$. Először megmutatjuk, hogy Π zárt a legdurvább közös finomítás képzésére. Legyen $\Theta \subseteq \Pi$ tetszőleges. Ekkor

minden $\mathcal{I}'' \in \Theta$-ra $\mathcal{I}''$ partíció és $\mathcal{I}'' \leq \mathcal{I}$.

Ebből a $\vee$ művelet definíciója szerint következik, hogy

$$\bigvee_{\mathcal{I}'' \in \Theta} \mathcal{I}'' \leq \mathcal{I} \text{ és } \bigvee_{\mathcal{I}'' \in \Theta} \mathcal{I}'' \text{ partíció.}$$

Ekkor pedig

$$\bigvee_{\mathcal{I}'' \in \Theta} \mathcal{I}'' \in \Pi,$$

ami pontosan azt jelenti, hogy Π zárt a $\vee$ műveletre. Vezessük be a következő jelölést:

$$\mathcal{I}' = \bigvee_{\mathcal{I}'' \in \Pi} \mathcal{I}''.$$

Ekkor mivel Π zárt a $\vee$ műveletre, azért $\mathcal{I}' \in \Pi$ teljesül, amiből (1) és (2) következik.

Másrészt, ha $\Pi \subseteq P(\Omega)$ partíció és $\mathcal{I}'' \leq \mathcal{I}$, akkor $\mathcal{I}'' \in \Pi$, amiből $\mathcal{I}'' \leq \mathcal{I}'$ következik. Ez pedig (3) teljesülését biztosítja.

Az (1)-(3) feltételeket kielégítő $\mathcal{I}'$ egyértelműségének belátásához tegyük fel, hogy $\tilde{\mathcal{I}}$ is teljesíti az (1)-(3) feltételeket. Ekkor egyrészt $\tilde{\mathcal{I}} \leq \mathcal{I}'$, másrészt $\mathcal{I}' \leq \tilde{\mathcal{I}}$ teljesül, amelyekből $\tilde{\mathcal{I}} = \mathcal{I}'$ következik. □

1.2.17. DEFINÍCIÓ: Legyen $\mathcal{I},\mathcal{I}' \subseteq P(\Omega)$ tetszőleges. $\mathcal{I}'$ a legfinomabb partícionális durvítása $\mathcal{I}$-nek, ha

(1) $\mathcal{I}' \leq \mathcal{I}$,

(2) $\mathcal{I}'$ partíció,

(3) $\forall \mathcal{I}'' \subseteq P(\Omega)$ partíció esetén $\mathcal{I}'' \leq \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{I}'' \leq \mathcal{I}'$.

Jelölés: $\mathcal{I}^{\wedge}$ az $\mathcal{I}$ legfinomabb partícionális durvítása.

MEGJEGYZÉS: Ha $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ partíció, akkor $\mathcal{I}^{\wedge}=\mathcal{I}$.

1.2.18. DEFINÍCIÓ: Legyen 1 és 2 két döntéshozó az $\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2 \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ információs struktúrával. $\mathcal{I}^{\wedge}$ a legfinomabb közös partícionális durvítása $\mathcal{I}_1$-nek és $\mathcal{I}_2$-nek, ha $\mathcal{I}^{\wedge} = \mathcal{I}_1^{\wedge} \wedge \mathcal{I}_2^{\wedge}$.

Tehát $\mathcal{I}_1$ és $\mathcal{I}_2$ legfinomabb közös partícionális durvítása éppen a legfinomabb partícionális durvításuk legfinomabb közös durvítása. Az előző megjegyzésből következik, hogy ha $\mathcal{I}_1$ és $\mathcal{I}_2$ partíciók, akkor azok legfinomabb közös partícionális durvítása megegyezik legfinomabb közös durvításukkal. Tehát a legfinomabb közös partícionális durvítás fogalma a legfinomabb közös durvítás fogalmának általánosítása.

Most kimondjuk a fejezet elején említett állítást.

1.2.9. ÁLLÍTÁS: Legyen $\omega \in \Omega$ és $E \in \mathcal{A}$ tetszőleges. Legyenek $\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2,\ldots,\mathcal{I}_n$

az $1, 2, \ldots, n$ döntéshozók információs struktúrái. Legyen $\mathcal{I}^\wedge = \mathcal{I}_1^\wedge \wedge \mathcal{I}_2^\wedge \wedge \ldots \wedge \mathcal{I}_n^\wedge$ és $I \in \mathcal{I}^\wedge$ olyan, hogy $\omega \in I$. Az E esemény pontosan akkor köztudott tudás ω-ban a döntéshozók között, ha $I \subseteq E$.

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel először, hogy az ω állapotban az E esemény köztudott tudás, és legyen $I \in \mathcal{I}^\wedge$ olyan, hogy $\omega \in I$. Elegendő megmutatni, hogy ekkor

$$\forall \omega' \in I \text{ esetén } \omega' \in E.$$

Legyen $\omega' \in I$ tetszőleges. Ekkor mivel $\mathcal{I}^\wedge$ az $\mathcal{I}_1^\wedge, \mathcal{I}_2^\wedge, ..., \mathcal{I}_n^\wedge$ partíciók legfinomabb közös durvítása, azért

$$\exists l \in \mathbb{N}^+, \exists I_1^\wedge, I_2^\wedge, \ldots, I_l^\wedge \in \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{I}_i^\wedge :$$

$$\omega \in I_1^\wedge, \omega' \in I_l^\wedge, I_j^\wedge \cap I_{j+1}^\wedge \neq \emptyset \ \forall j \in \{1, 2, \ldots, l-1\}. \quad (5)$$

Az ilyen tulajdonságú $I_1^\wedge, I_2^\wedge, \ldots, I_l^\wedge$ halmazok mindegyike valamelyik döntéshozó információs struktúrájának legfinomabb partícionális durvításából egy-egy elem, így ha például $I_j^\wedge \in \mathcal{I}_i^\wedge$, akkor

$$\forall \omega_1, \omega_2 \in I_j^\wedge \ \exists l_i \in \mathbb{N}^+, \exists I_1, I_2, \ldots, I_{l_i} \in \mathcal{I}_i : \omega_1 \in I_1, \omega_2 \in I_{l_i}, I_m \cap I_{m+1} \neq \emptyset$$

$$\forall m \in \{1, 2, \ldots, l_i - 1\}.$$

Ezt (5)-tel összevetve teljesül, hogy

$$\exists k \in \mathbb{N}^+, \exists I_1, I_2, \ldots, I_k \in \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{I}_i : \omega \in I_1, \omega' \in I_k, I_j \cap I_{j+1} \neq \emptyset$$

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}.$$

Az ilyen tulajdonságú $I_1, I_2, ..., I_k$ információs halmazokhoz léteznek olyan

$$i : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$$

és

$$\zeta : \{1, 2, \ldots, k-1\} \to \Omega$$

függvények, hogy

$$\forall j \in \{1,2,\ldots,k\} \text{ esetén } I_j \in \mathcal{I}_{i(j)},$$

$$\zeta(j) \in I_j \cap I_{j+1} \ \forall j \in \{1,2,\ldots,k-1\}.$$

Mivel az ω állapotban E köztudott tudás, azért teljesül az

$$\omega \in K^u_{i(1)}\Big(K^u_{i(2)} \ldots \Big(K^u_{i(k)}(E)\Big) \ldots\Big)$$

reláció. Ebből a feltétlen tudás függvény definíciója (1.2.9. definíció) szerint

$$I_1 \subseteq K^u_{i(2)}\Big(K^u_{i(3)} \ldots \Big(K^u_{i(k)}(E)\Big) \ldots\Big)$$

következik. Így $\zeta(1) \in I_1 \cap I_2$ miatt

$$\zeta(1) \in K^u_{i(2)}\Big(K^u_{i(3)} \ldots \Big(K^u_{i(k)}(E)\Big) \ldots\Big)$$

teljesül.

Bármely $j \in \{1,2,\ldots,k-2\}$ esetén a fentiekhez hasonlóan a

$$\zeta(j) \in K^u_{i(j+1)}\Big(K^u_{i(j+2)} \ldots \Big(K^u_{i(k)}(E)\Big) \ldots\Big)$$

teljesüléséből

$$I_{j+1} \subseteq K^u_{i(j+2)}\Big(K^u_{i(j+3)} \ldots \Big(K^u_{i(k)}(E)\Big) \ldots\Big)$$

és $\zeta(j+1) \in I_{j+1} \cap I_{j+2}$ miatt

$$\zeta(j+1) \in K^u_{i(j+2)}\Big(K^u_{i(j+3)} \ldots \Big(K^u_{i(k)}(E)\Big) \ldots\Big)$$

következik. Így

$$\zeta(k-1) \in K^u_{i(k)}(E)$$

is teljesül, amiből a feltétlen tudás függvény definíciója (1.2.9. definíció) szerint

$$I_{i(k)}(\zeta(k-1)) \subseteq E,$$

és így

$$\omega' \in I_k = I_{i(k)}(\zeta(k-1))$$

miatt $\omega' \in E$ következik.

Az ellentétes irány bizonyításához legyen $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ és $I \in \mathcal{I}^\wedge$ tetszőleges. $\mathcal{I}^\wedge_i \geq \mathcal{I}^\wedge$, mert $\mathcal{I}^\wedge$ az $\mathcal{I}^\wedge_1, \mathcal{I}^\wedge_2, \ldots, \mathcal{I}^\wedge_n$ partíciók közös durvítása. Ezért I előáll $\mathcal{I}^\wedge_i$ elemeinek egyesítéseként:

$$\exists \tilde{\mathcal{I}}_i \subseteq \mathcal{I}_i^{\wedge}: I = \bigcup_{I_i^{\wedge} \in \tilde{\mathcal{I}}_i^{\wedge}} I_i^{\wedge},$$

mivel $\mathcal{I}_i^{\wedge}$ az $\mathcal{I}_i$ legfinomabb partícionális durvítása, azért

$$\forall I_i^{\wedge} \in \mathcal{I}_i^{\wedge}, \forall \omega \in I_i^{\wedge}, \forall y \in \operatorname{supp} \varphi_i(\omega): \varphi^{-}(y) \subseteq I_i^{\wedge},$$

így

$$\forall \omega \in I, \forall y \in \operatorname{supp} \varphi_i(\omega) : \varphi^{-}(y) \subseteq I,$$

azaz

$$I \subseteq K_i^u(I),$$

amiből (K^u3) felhasználásával (1.2.5. állítás)

$$I = K_i^u(I)$$

következik. Abból, hogy ez az összefüggés bármely $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ és $I \in \mathcal{I}$ esetén fennáll, teljes indukcióval az következik, hogy

$$\forall k \in \mathbb{N}^{+}, \forall i : \{1,2,\ldots,k\} \to \{1,2,\ldots,n\} \text{ esetén } I = K_{i(1)}^u\left(K_{i(2)}^u \ldots \left(K_{i(k)}^u(I)\right)\right).$$

Tehát

$\forall I \in \mathcal{I}, \forall \omega \in I$: I köztudott tudás az $1,2,\ldots,n$ döntéshozók között ω-ban.

Legyen most $\omega \in \Omega$ és $I \in \mathcal{I}^{\wedge}$ tetszőleges, melyekre $\omega \in I$. Tegyük fel, hogy $E \in \mathcal{A}$ olyan, hogy $I \subseteq E$ teljesül. Ekkor iménti megállapításunk, mely szerint $I = K_i^u(I)$, valamint $I \cap E = I$ miatt (K^u2)-ből (1.2.5. állítás)

$$I = K_i^u(I) = K_i^u(I \cap E) = K_i^u(I) \cap K_i^u(E) = I \cap K_i^u(E) \subseteq K_i^u(E)$$

következik minden $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ esetén. Így teljes indukcióval

$$\forall k \in \mathbb{N}^{+}, \forall i : \{1,2,\ldots,k\} \to \{1,2,\ldots,n\} \text{ esetén}$$
$$I = K_{i(1)}^u\left(K_{i(2)}^u \ldots \left(K_{i(k)}^u(I)\right)\right) \subseteq K_{i(1)}^u\left(K_{i(2)}^u \ldots \left(K_{i(k)}^u(E)\right)\right),$$

ezért $\omega \in I$ miatt az következik, hogy az E esemény ω-ban köztudott tudás a döntéshozók között. □

Végül megfogalmazunk egy állítást több döntéshozó "köztudott tudás szerkezetére" vonatkozóan, amennyiben információs struktúrájuk partícionális illetve nempartícionális.

1.2.10. ÁLLÍTÁS: Legyenek az $1, 2, \ldots, n$ döntéshozók információs struktúrái $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n$ egy adott helyzetben, illetve ugyanezen döntéshozók információs struktúrái $\mathcal{I}_1^\wedge, \mathcal{I}_2^\wedge, \ldots, \mathcal{I}_n^\wedge$ egy másik helyzetben. Legyen az első helyzetben

$$CK(E) = \{\omega \in \Omega \mid E \text{ köztudott tudás } \omega\text{-ban}\},$$

a második helyzetben

$$CK^\wedge(E) = \{\omega \in \Omega \mid E \text{ köztudott tudás } \omega\text{-ban}\}.$$

Ekkor

$$CK(E) = CK^\wedge(E).$$

BIZONYÍTÁS: Tetszőleges $E \in \mathcal{A}$ eseményre

$CK(E) = \{\omega \in \Omega \mid E$ köztudott tudás ω-ban az $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n$ információs struktúrák mellett$\} = \{\omega \in \Omega \mid \mathcal{I}^\wedge(\omega) \subseteq E\} = \{\omega \in \Omega \mid E$ köztudott tudás ω-ban az $\mathcal{I}_1^\wedge, \mathcal{I}_2^\wedge, \ldots, \mathcal{I}_n^\wedge$ információs struktúrák mellett$\} = CK^\wedge(E)$.
□

Rendelkezésünkre áll tehát az az apparátus, amellyel le tudjuk írni egy aktor tudását, információs struktúrája akár partícionális, akár nempartícionális. Mielőtt azonban ezt az apparátust munkába állítanánk, még kell tennünk egy rövid kitérőt.

II. RÉSZ

DÖNTÉS INFORMÁCIÓS PROBLÉMA MELLETT

Mindeddig egy tetszőleges aktor tudását, információit írtuk le, függetlenül attól, hogy egyébként milyen szituációban van, és mit tesz, vagy kíván tenni, azaz döntéshozó, játékos, vagy egyszerűen bármely szituáció szereplője. Mivel az eddigieket egy olyan szituációban kívánjuk alkalmazni, amelyben a szereplők döntéseket hoznak, meg kell fogalmaznunk a döntési feladatot. A következőkben megadott döntési feladat döntéshozatali vagy stratégiai szempontból hagyományos, azonban igyekszünk úgy megfogalmazni, hogy mind az egyéni, mind a stratégiai döntés leírására alkalmas legyen. Információs szempontból azonban nem hagyományos. Olyan döntéshozó feladatát írjuk le, aki valamilyen döntése szempontjából releváns információnak nincs birtokában, mielőtt azonban döntését meghozná, további információhoz jut. Az ilyen feladatot információs probléma melletti döntésnek fogjuk nevezni (megkülönböztetendő a bizonytalanság melletti döntéstől). A döntési feladatot megfogalmazzuk mind partícionális, mind nempartícionális információs struktúra esetére. Kimondunk ugyanakkor néhány állítást, amelyek a döntéshozó információs struktúrájának tulajdonságai és a döntés révén elérhető eredmény közötti kapcsolatra vonatkoznak.

1. FEJEZET

DÖNTÉS PARTÍCIONÁLIS INFORMÁCIÓS STRUKTÚRÁVAL JELLEMEZHETŐ INFORMÁCIÓS PROBLÉMA ESETÉN

Az információs probléma melletti döntési feladatban a döntéshozó célfüggvényének értéke a választott döntési alternatívától és a megvalósuló világállapottól egyaránt függ. Amikor döntését meghozza, a döntéshozó nem tudja, hogy mely világállapot valósult meg, de ismer egy valószínűségi mértéket az események halmazán, és megfigyel egy jelzést, amely a jelzőfüggvény által meghatározott módon a bekövetkezett világállapottól függ. A döntéshozó által a jelzés megfigyelése előtt ismert, az események halmazán értelmezett valószínűségi mérték – pontosabban a mögötte meghúzódó valószínűségi mező – a döntéshozó kezdeti vélekedése. A jelzés megfigyelését követően, de még a döntésének meghozatala előtt a döntéshozó módosítja vélekedését. A döntéshozó korrigált vélekedése egy feltételes valószínűségi mező, amely minden jelzés esetére magában foglalja a döntéshozó által a jelzés megfigyelését követően helyesnek tartott – az események halmazán értelmezett – valószínűségi mértéket. A döntéshozó azt a döntési alternatívát választja, amely célfüggvényének várható értékét maximalizálja azon valószínűségi mérték mellett, amelyet korrigált vélekedése a ténylegesen megfigyelt jelzéshez, mint feltételhez rendel. Így az információs probléma melletti döntési feladatot a döntéshozó kezdeti vélekedésén, a döntési alternatíváinak halmazán és a célfüggvényén kívül a döntéshozó jelzőfüggvénye határozza meg. A partícionális információs struktúrával rendelkező döntéshozó információs probléma melletti döntési feladatának lényeges vonása, hogy a döntéshozó számára minden állapotban pontosan egy jelzés figyelhető meg. Az információs függvény minden állapothoz azt az egyetlen jelzést rendeli, amely az adott állapotban megfigyelhető.

2.1.1. DEFINÍCIÓ: A partícionális információs struktúrával rendelkező döntéshozó információs probléma melletti döntési feladata az $((\Omega, \mathcal{A}, p), Y, \varphi, D, U)$ rendezett ötös, ahol $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ a döntéshozó kezdeti vélekedése, Y a jelzések halmaza, $\varphi : \Omega \to Y$ a jelzőfüggvény, D a döntési alternatívák halmaza, $U : \Omega \times D \to \mathbb{R}$ a döntéshozó célfüggvénye, melyre teljesül, hogy $U|_{\Omega \times \{d\}}$ mérhető függvény bármely $d \in D$ esetén.

A fenti definícióban szereplő feltevés, mely szerint bármely $d \in D$-re $U|_{\Omega \times \{d\}}$ mérhető függvény, nagyjából azt jelenti, hogy bármely r valós szám, és a döntéshozó bármely $d \in D$ döntése esetén az, hogy a döntéshozó célfüggvényének értéke r, esemény. Sőt, az is esemény, hogy a célfüggvény értéke legalább r, és esemény az is, hogy a célfüggvény értéke legfeljebb r, ha a döntéshozó az $d \in D$ alternatívát választja és $r \in \mathbb{R}$. Ha a célfüggvény nem rendelkezne ezzel a tulajdonsággal, akkor nem lenne értelmezhető a várható értéke, amely fogalom a döntéshozatal leírása során megkerülhetetlennek tűnik.

Ha a döntéshozó az $y \in Y$ jelzést megfigyeli, akkor vélekedése az $((\Omega, \mathcal{A}, p(\bullet \mid \varphi^{-1}(y)))$ valószínűségi mező. Választása arra a döntési alternatívára fog esni, amely célfüggvényének ezen valószínűségi mező alapján számított várható értékét maximalizálja. Így az y jelzést megfigyelő döntéshozó döntési feladata a következő:

$$\max_{d \in D} E(U(\omega, d) \mid \varphi^{-1}(y)).$$

A döntéshozó által választott döntési alternatíva függ az általa megfigyelt jelzéstől. A döntéshozó stratégiája egy olyan hozzárendelés, amely minden jelzéshez egy döntési alternatívát rendel.

2.1.2. DEFINÍCIÓ: Az $((\Omega, \mathcal{A}, p), Y, \varphi, D, U)$ információs probléma melletti döntési feladattal szembenálló döntéshozó stratégiája egy $s : Y \to D$ függvény.

A döntéshozó, miután jelzését megfigyelte, azon stratégiájának megfelelően választ a döntési alternatívák közül, amely stratégiája bármely jelzésének megfigyelése esetén maximalizálja célfüggvényének várható értékét. Ez a stratégia a döntéshozó optimális stratégiája.

2.1.3. DEFINÍCIÓ: Az $((\Omega, \mathcal{A}, p), Y, \varphi, D, U)$ információs probléma melletti döntési feladattal szemben álló döntéshozó optimális stratégiája az a $s : Y \to D$ stratégia, melyre

$$\text{bármely } y \in Y \text{ esetén } s(y) \in \arg\max_{d \in D} \; E(U(\omega, d) \mid \varphi^{-1}(y)).$$

Az optimális stratégiának megfelelő módon viselkedő döntéshozó várható hasznossága, ha az $y \in Y$ jelzést figyelte meg,

$$\max_{d \in D} \; E(U(\omega, s) \mid \varphi^{-1}(y)).$$

A döntéshozó ex ante várható célfüggvényértéke a célfüggvényének a jelzés megfigyelése előtti vélekedése és optimális stratégiája alapján számítható várható értéke. A továbbiakban az ex ante várható célfüggvényértéket időnként röviden ex ante célfüggvényértéknek nevezzük.

2.1.4. DEFINÍCIÓ: A $\mathcal{D} = ((\Omega, \mathcal{A}, p), Y, \varphi, D, U)$ információs probléma melletti döntési feladattal szemben álló döntéshozó ex ante (várható) célfüggvényértéke a

$$V(\mathcal{D}) = E\left(\max_{d \in D} E(U(\omega, d) \mid \varphi^{-1}(y)) \right)$$

várható érték.

MEGJEGYZÉS: Teljesül a

$$V(\mathcal{D}) = E\left(\max_{d \in D} E(U(\omega,) \mid \varphi^{-1}(y)) \right) = E(U(\omega, s))$$

egyenlőség, ahol s az optimális stratégia.

Az információs probléma melletti döntési feladattal szemben álló döntéshozó ex ante (várható) célfüggvényértéke és a döntéshozó jelzőfüggvénye által definiált információs struktúra finomsága között fontos kapcsolat van. Ennek kifejtéséhez gondoljunk el két olyan jelzőfüggvényt, amelyek egyike olyan partícionális információs struktúrát definiál, amely gyenge finomítása a másik jelzőfüggvény által definiált partícionális információs struktúrának. Képzeljünk most el két olyan információs probléma melletti döntési feladatot, amelyek csak a jelzőfüggvényben és esetleg a jelzések halmazában különböznek egymástól: az egyik döntési feladatban az iménti két jelzőfüggvény egyike, a másik döntési feladatban a másik jelzőfüggvény – és az aktuális jelzőfüggvény értékkészlete, a jelzések halmaza – szerepel. Megmutatható, hogy ekkor a döntéshozó ex ante (várható) célfüggvényértéke nem lehet nagyobb abban az információs probléma melletti döntési feladatban, amelyben a gyengén durvább információs struktúrát definiáló jelzőfüggvény szerepel, mint a másikban. Erről szól a következő állítás.

2.1.1. ÁLLÍTÁS: (Laffont [1993] pp. 59-61) Legyen Ω tetszőleges halmaz. Bármely $\mathcal{I}_1 \subseteq P(\Omega)$ és $\mathcal{I}_2 \subseteq P(\Omega)$ partíciók esetén a következő két állítás egyenértékű.

(1) $\mathcal{I}_1 \geq \mathcal{I}_2$.

(2) Bármely $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező, D halmaz, $U : \Omega \times D \to \mathbb{R}$ függvény, Y_1 és Y_2 halmazok, valamint $\varphi_1 : \Omega \to Y_1$, illetve $\varphi_2 : \Omega \to Y_2$ függvények esetén ha

$$\mathcal{I}_1 = \{\varphi_1^{-1}(y) \mid y \in Y_1\}, \mathcal{I}_2 = \{\varphi_2^{-1}(y) \mid y \in Y_2\},$$

$$\mathcal{D}_1 = ((\Omega, \mathcal{A}, p), Y_1, \varphi_1, D, U) \text{ és } \mathcal{D}_2 = ((\Omega, \mathcal{A}, p), Y_2, \varphi_2, D, U),$$

akkor

$$V(\mathcal{D}_1) \geq V(\mathcal{D}_2).$$

BIZONYÍTÁS: Legyen Ω tetszőleges halmaz.

Először megmutatjuk, hogy (1)-ből következik (2). Ehhez legyen $\mathcal{I}_1 \subseteq P(\Omega)$ és $\mathcal{I}_2 \subseteq P(\Omega)$ olyan partíció, hogy $\mathcal{I}_1 \geq \mathcal{I}_2$. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ tetszőleges Kolmogorov-féle valószínűségi mező, D tetszőleges halmaz, $U : \Omega \times D \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény, Y_1 és Y_2 tetszőleges halmazok, és $\varphi_1 : \Omega \to Y_1$, illetve $\varphi_2 : \Omega \to Y_2$ tetszőleges függvények, melyekre $\mathcal{I}_1 = \{\varphi_1^{-1}(y) \mid y \in Y_1\}$ és $\mathcal{I}_2 = \{\varphi_2^{-1}(y) \mid y \in Y_2\}$ teljesül.

Legyen $y_2 \in Y_2$ tetszőleges. Az $\mathcal{I}_1 \geq \mathcal{I}_2$ reláció teljesüléséből az 1.1.12. definíció szerint következik, hogy

$$\exists \widetilde{Y}_1 \subseteq Y_1, \quad \text{melyre} \quad \varphi_2^{-1}(y_2) = \bigcup_{y_1 \in \widetilde{Y}_1} \varphi_1^{-1}(y_1).$$

(6)

Legyen s_1 és s_2 rendre a $\mathcal{D}_1 = ((\Omega, \mathcal{A}, p), Y_1, \varphi_1, D, U)$ és $\mathcal{D}_2 = ((\Omega, \mathcal{A}, p), Y_2, \varphi_2, D, U)$ információs probléma melletti döntési feladattal szemben álló döntéshozó optimális stratégiája. Ekkor mivel s_1 optimális stratégia, azért

$$\forall y_1 \in \widetilde{Y}_1 \text{ esetén } E(U(\omega, s_1(y_1)) \mid \varphi_1^{-1}(y_1)) \geq E(U(\omega, s_2(y_2)) \mid \varphi_1^{-1}(y_1)),$$

amiből

$$E\Big(E(U(\omega,s_1(y_1)) \;\mid\; \varphi_1^{-1}(y_1)) \;\mid\; y_1 \in \widetilde{Y}_1\Big) \geq$$

$$\geq E\Big(E(U(\omega,s_2(y_2)) \;\mid\; \varphi_1^{-1}(y_1)) \;\mid\; y_1 \in \widetilde{Y}_1\Big)$$

következik. Mivel ez az egyenlőtlenség bármely $y_2 \in Y_2$ és az y_2-höz tartozó – a (6) feltételt kielégítő – $\widetilde{Y}_1 \subseteq Y_1$ esetén teljesül, azért az

$$E(U(\omega,s_1)) \geq E(U(\omega,s_2))$$

egyenlőtlenség is fennáll, amiből korábbi megjegyzésünk szerint

$$V(\mathcal{D}_1) \geq V(\mathcal{D}_2)$$

következik.

Annak bizonyításához, hogy (2)-ből következik (1), elegendő megmutatni, hogy ha $\mathcal{I}_1 \subseteq P(\Omega)$ és $\mathcal{I}_2 \subseteq P(\Omega)$ olyan partíció, melyekre

$$\mathcal{I}_1 \ngeq \mathcal{I}_2 \text{ és } \mathcal{I}_1 \nleq \mathcal{I}_2$$

egyszerre teljesül – azaz $\mathcal{I}_1$ és $\mathcal{I}_2$ közül egyik sem (gyenge) durvítása a másiknak –, akkor találhatóak olyan

$$\mathcal{D}_1 = ((\Omega,\mathcal{A},p),Y_1,\varphi_1,D,U_1),\ \mathcal{D}_2 = ((\Omega,\mathcal{A},p),Y_2,\varphi_2,D,U_1),$$

$$\mathcal{D}_1{}' = ((\Omega,\mathcal{A},p),Y_1,\varphi_1,D,U_2) \text{ és } \mathcal{D}_2{}' = ((\Omega,\mathcal{A},p),Y_2,\varphi_2,D,U_2)$$

információs probléma melletti döntési feladatok, melyekre

$$\mathcal{I}_1 = \{\varphi_1^{-1}(y) \;\mid\; y \in Y_1\} \text{ és } \mathcal{I}_2 = \{\varphi_2^{-1}(y) \;\mid\; y \in Y_2\},$$

valamint

$$V(\mathcal{D}_1) < V(\mathcal{D}_2) \text{ és } V(\mathcal{D}_1{}') > V(\mathcal{D}_2{}')$$

teljesül.

A feltevés, hogy

$$\mathcal{I}_1 \ngeq \mathcal{I}_2 \text{ és } \mathcal{I}_1 \nleq \mathcal{I}_2,$$

azzal egyenértékű, hogy

$$\exists\omega_3 \in \Omega, \text{ melyre } I_1(\omega_3) \not\subseteq I_2(\omega_3) \text{ és } I_1(\omega_3) \not\supseteq I_2(\omega_3).$$

Ezért

$$\exists\omega_1,\omega_2 \in \Omega, \text{ hogy } \omega_1 \in I_1(\omega_3) \setminus I_2(\omega_3) \text{ és } \omega_2 \in I_2(\omega_3) \setminus I_1(\omega_3).$$

Ekkor ω_1, ω_2 és ω_3 nyilván különböző elemei Ω-nak.

Legyen $D = \{d_1, d_2\}$ tetszőleges kételemű halmaz, és legyen $\mathcal{A}$ tetszőleges olyan σ-algebra, melyre

$$\mathcal{A} \subseteq P(\Omega) \text{ és } \{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}\} \subset \mathcal{A}$$

teljesül. Legyen a $p : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ valószínűségi mérték a következő módon adott:

$$p(\{\omega_1\}) = p(\{\omega_2\}) = p(\{\omega_3\}) = \tfrac{1}{3},$$

$$\forall A \in P(\Omega \setminus \{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}) \cap \mathcal{A} : p(A) = 0,$$

valamint legyen az $U_1 : \Omega \times D \to \mathbb{R}$ függvény a következő:

$$\forall\omega \in \Omega \setminus \{\omega_1,\omega_2,\omega_3\} \text{ és } \forall d \in D \text{ esetén } U_1(\omega,d) = 0,$$

$$U_1(\omega_1,d_1) = U_1(\omega_3,d_2) = 1,$$

$$U_1(\omega_2,d_1) = U_1(\omega_3,d_1) = U_1(\omega_1,d_2) = U_1(\omega_2,d_2) = 0.$$

Ekkor a $\mathcal{D}_1 = ((\Omega,\mathcal{A},p), Y_1, \varphi_1, D, U_1)$ információs probléma melletti döntési feladat döntéshozójának egy optimális stratégiája a következő:

$$\forall y \in Y_1\text{-re } s_1(y) = d_1,$$

így a döntéshozó ex ante célfüggvényértéke:

$$V(\mathcal{D}_1) = \tfrac{1}{3}.$$

A $\mathcal{D}_2 = ((\Omega,\mathcal{A},p), Y_2, \varphi_2, D, U_1)$ információs probléma melletti döntési feladat döntéshozójának egy optimális stratégiája a következő:

$$s_2(\varphi_2(\omega_1)) = d_1,$$

$$\forall y \in Y_2 \setminus \{\varphi_2(\omega_1)\}\text{-re } s_2(y) = d_2,$$

így a döntéshozó ex ante célfüggvényértéke:

$$V(\mathcal{D}_2) = \tfrac{2}{3}.$$

Így $V(\mathcal{D}_1) < V(\mathcal{D}_2)$ teljesül.

Legyen az $U_2 : \Omega \times D \to \mathbb{R}$ függvény a következő módon adott:

$$\forall\omega \in \Omega \setminus \{\omega_1,\omega_2,\omega_3\} \text{ és } \forall d \in D \text{ esetén } U_2(\omega,d) = 0,$$

$$U_2(\omega_2, d_1) = U_2(\omega_3, d_2) = 1,$$
$$U_2(\omega_1, d_1) = U_2(\omega_3, d_1) = U_2(\omega_1, d_2) = U_2(\omega_2, d_2) = 0.$$

Ekkor a $\mathcal{D}_1{}' = ((\Omega, \mathcal{A}, p), Y_1, \varphi_1, D, U_2)$ információs probléma melletti döntési feladat döntéshozójának egy optimális stratégiája a következő:

$$s_1{}'(\varphi_1(\omega_2)) = d_1,$$
$$\forall y \in Y_1 \setminus \{\varphi_1(\omega_2)\}\text{-re } s_1{}'(y) = d_2,$$

így a döntéshozó ex ante célfüggvényértéke:

$$V(\mathcal{D}_1{}') = \tfrac{2}{3}.$$

A $\mathcal{D}_2{}' = ((\Omega, \mathcal{A}, p), Y_2, \varphi_2, D, U_2)$ információs probléma melletti döntési feladat döntéshozójának egy optimális stratégiája a következő:

$$\forall y \in Y_2\text{-re } s_2{}'(y) = d_1,$$

így a döntéshozó ex ante célfüggvényértéke:

$$V(\mathcal{D}_2{}') = \tfrac{1}{3}.$$

Így $V(\mathcal{D}_1{}') > V(\mathcal{D}_2{}')$ teljesül. □

Ezzel áttekintettük partícionális információs struktúra esetén az információs problémával szembenéző döntéshozó döntési feladatának legfontosabb elemeit. Mindezek az irodalomban jórészt ismertek. Eszközként szolgálnak majd ahhoz, hogy elemezzük egy játék döntéshozóinak – a játékosoknak – a viselkedését az egyensúlyban. Mivel a vizsgálandó játék egyensúlyában – a tökéletes bayesi egyensúlyban – az egyik játékos információs struktúrája nem feltétlenül partícionális, ezért következő lépésként röviden áttekintjük annak az információs problémával szembenéző döntéshozónak a döntési feladatát, akinek információs struktúrája nempartícionális.

2. FEJEZET

DÖNTÉS NEMPARTÍCIONÁLIS INFORMÁCIÓS STRUKTÚRÁVAL JELLEMEZHETŐ INFORMÁCIÓS PROBLÉMA ESETÉN

Az információs probléma melletti döntési feladatban a döntéshozó célfüggvényének értéke a választott döntési alternatívától és a megvalósuló világállapottól egyaránt függ. Amikor döntését meghozza, a döntéshozó nem tudja, hogy mely világállapot valósult meg, de ismer egy valószínűségi mértéket az események halmazán, és megfigyel egy jelzést, amely a jelzőfüggvény által meghatározott módon a bekövetkezett világállapottól függ. A döntéshozó által a jelzés megfigyelése előtt ismert, az események halmazán értelmezett valószínűségi mérték – pontosabban a mögötte meghúzódó valószínűségi mező – a döntéshozó kezdeti vélekedése. A jelzés megfigyelését követően, de még a döntésének meghozatala előtt a döntéshozó módosítja vélekedését. A döntéshozó korrigált vélekedése egy feltételes valószínűségi mező, amely minden jelzés esetére magában foglalja a döntéshozó által a jelzés megfigyelését követően helyesnek tartott – az események halmazán értelmezett – valószínűségi mértéket. A döntéshozó azt a döntési alternatívát választja, amely célfüggvényének várható értékét maximalizálja azon valószínűségi mérték mellett, amelyet korrigált vélekedése a ténylegesen megfigyelt jelzéshez, mint feltételhez rendel. Így az információs probléma melletti döntési feladatot a döntéshozó kezdeti vélekedésén, a döntési alternatíváinak halmazán és a célfüggvényén kívül a döntéshozó jelzőfüggvénye határozza meg. A nempartícionális információs struktúrával rendelkező döntéshozó információs probléma melletti döntési feladatának lényeges vonása, hogy a döntéshozó számára valamely állapotban legalább egy – némely állapotban egynél több – jelzés figyelhető meg. Az információs függvény minden állapothoz az adott állapotban megfigyelhető jelzések egy eloszlását rendeli.

2.2.1. DEFINÍCIÓ: A nempartícionális információs struktúrával rendelkező döntéshozó információs probléma melletti döntési feladata az $((\Omega, \mathcal{A}, p), Y, \varphi, D, U)$ rendezett ötös, ahol $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ a döntéshozó kezdeti vélekedése, Y a jelzések halmaza,

$$\varphi : \Omega \to \left\{\mu \in \mathbb{R}^{P(Y)} \mid \mu \text{ valószínűségi mérték } P(Y)\text{-on}\right\}$$

a jelzőfüggvény, D a döntési alternatívák halmaza, $U : \Omega \times D \to \mathbb{R}$ a döntéshozó célfüggvénye, melyre teljesül, hogy $U|_{\Omega\times\{d\}}$ mérhető függvény bármely $d \in D$ esetén.

A fenti definícióban szereplő feltevés, mely szerint bármely $d \in D$-re $U|_{\Omega\times\{d\}}$ mérhető függvény, nagyjából azt jelenti, hogy bármely r valós szám, és a döntéshozó bármely $d \in D$ döntése esetén az, hogy a döntéshozó célfüggvényének értéke r, esemény. Sőt, az is esemény, hogy a célfüggvény értéke legalább r, és esemény az is, hogy a célfüggvény értéke legfeljebb r, ha a döntéshozó az $d \in D$ alternatívát választja és $r \in \mathbb{R}$. Ha a célfüggvény nem rendelkezne ezzel a tulajdonsággal, akkor nem lenne értelmezhető a várható értéke, amely fogalom a döntéshozatal leírása során megkerülhetetlennek tűnik.

Ha a döntéshozó az $y \in Y$ jelzést megfigyeli, akkor vélekedése az $((\Omega, \mathcal{A}, p(\cdot \mid \varphi^{-}(y)))$ valószínűségi mező. Választása arra a döntési alternatívára fog esni, amely célfüggvényének ezen valószínűségi mező alapján számított várható értékét maximalizálja. Így az y jelzést megfigyelő döntéshozó döntési feladata a következő:

$$\max_{d \in D} E(U(\omega, d) \mid \varphi^{-}(y)).$$

A döntéshozó által választott döntési alternatíva függ az általa megfigyelt jelzéstől. A döntéshozó stratégiája egy olyan hozzárendelés, amely minden jelzéshez egy döntési alternatívát rendel.

2.2.2. DEFINÍCIÓ: Az $((\Omega, \mathcal{A}, p), Y, \varphi, D, U)$ információs probléma melletti döntési feladattal szembenálló döntéshozó stratégiája egy $s : Y \to D$ függvény.

A döntéshozó, miután jelzését megfigyelte, azon stratégiájának megfelelően választ a döntési alternatívák közül, amely stratégiája bármely jelzésének megfigyelése esetén maximalizálja célfüggvényének várható értékét. Ez a stratégia a döntéshozó optimális stratégiája.

2.2.3. DEFINÍCIÓ: Az $((\Omega, \mathcal{A}, p), Y, \varphi, D, U)$ információs probléma melletti döntési feladattal szemben álló döntéshozó optimális stratégiája az a $s : Y \to D$ stratégia, melyre

$$\text{bármely } y \in Y \text{ esetén } s(y) \in \arg\max_{d \in D} E(U(\omega, d) \mid \varphi^{-}(y)).$$

Az optimális stratégiának megfelelő módon viselkedő döntéshozó várható hasznossága, ha az $y \in Y$ jelzést figyelte meg,

$$\max_{d \in D} E(U(\omega, d) \mid \varphi^{-}(y)).$$

A döntéshozó ex ante várható célfüggvényértéke a célfüggvényének a jelzés megfigyelése előtti vélekedése és optimális stratégiája alapján számítható várható értéke. A továbbiakban az ex ante várható célfüggvényértéket időnként röviden célfüggvényértéknek nevezzük.

2.2.4. DEFINÍCIÓ: A $\mathcal{D} = ((\Omega, \mathcal{A}, p), Y, \varphi, D, U)$ információs probléma melletti döntési feladattal szemben álló döntéshozó ex ante (várható) célfüggvényértéke a

$$V(\mathcal{D}) = E\left(\max_{d \in D} E(U(\omega, d) \mid \varphi^{-}(y)) \right)$$

várható érték.

MEGJEGYZÉS: Az optimális stratégia definíciójából következik, hogy teljesül a

$$V(\mathcal{D}) = E\left(\max_{d \in D} E(U(\omega, d) \mid \varphi^{-}(y)) \right) = E(U(\omega, s))$$

egyenlőség, ahol s az optimális stratégia.

Az információs probléma melletti döntési feladattal szemben álló döntéshozó ex ante célfüggvényértéke és a döntéshozó jelzőfüggvénye között fontos kapcsolat van. Ennek kifejtéséhez gondoljunk el két olyan jelzőfüggvényt, amelyek egyike a másik jelzőfüggvényből egy "zaj" hozzáadásával áll elő. Képzeljünk most el két olyan információs probléma melletti döntési feladatot, amelyek csak a jelzőfüggvényben különböznek egymástól: az egyik döntési feladatban az iménti két jelzőfüggvény egyike, a másik döntési feladatban a másik jelzőfüggvény szerepel. Megmutatható, hogy ekkor a döntéshozó ex ante célfüggvényértéke nem lehet nagyobb abban az információs probléma melletti döntési feladatban, amelyben a "zajosabb" jelzőfüggvény szerepel. Erről szól a következő állítás, melyet elsőként Blackwell bizonyított be. (Blackwell [1951]) Az általunk adott bizonyítás Crémer-től származik. (Crémer [1982])

2.2.1. ÁLLÍTÁS: (Blackwell [1951]) Legyen $\Omega = \{1, 2, \ldots, |\Omega|\}$, $Y_1 = \{1, 2, \ldots, |Y_1|\}$ és $Y_2 = \{1, 2, \ldots, |Y_2|\}$ tetszőleges véges halmazok, $(\Omega, P(\Omega), p)$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező, és $\varphi_1 : \Omega \to \Delta Y_1$,

$\varphi_2 : \Omega \to \Delta Y_2$ tetszőleges jelzőfüggvények. A következő két állítás ekvivalens.

(1) Bármely D halmaz és $U : \Omega \times D \to \mathbb{R}$ függvény esetén a $\mathcal{D}_1 = ((\Omega, P(\Omega), p), Y_1, \varphi_1, D, U)$ és $\mathcal{D}_2 = ((\Omega, P(\Omega), p), Y_2, \varphi_2, D, U)$ információs probléma melletti döntési feladatokra teljesül a $V(\mathcal{D}_1) \geq V(\mathcal{D}_2)$ egyenlőtlenség.

(2) Létezik $\beta \in \mathbb{R}^{|Y_2| \times |Y_1|}$, hogy

$$\forall y_1 \in Y_1 \text{ esetén } \sum_{y_2 \in Y_2} \beta_{y_2, y_1} = 1,$$

és

$$\forall \omega \in \Omega, \forall y_2 \in Y_2 \text{ esetén } (\varphi_2(\omega))(y_2) = \sum_{y_1 \in Y_1} \beta_{y_2, y_1} (\varphi_1(\omega))(y_1).$$

BIZONYÍTÁS: (Crémer [1982]) Legyen

$$B = \left\{ \beta \in \mathbb{R}^{|Y_2| \times |Y_1|} \mid \forall y_1 \in Y_1 : \sum_{y_2 \in Y_2} \beta_{y_2, y_1} = 1 \right\},$$

legyen $\psi \in \mathbb{R}^{|Y_2| \times |\Omega|}$ olyan vektor, melyre

$$\psi_{y_2 + |Y_1| \cdot (\omega - 1)} = (\varphi_2(\omega))(y_2),$$

és legyen

$$G = \left\{ g \in \mathbb{R}^{|Y_2| \times |\Omega|} \mid \exists \beta \in B : g_{y_2 + |Y_1| \cdot (\omega - 1)} = \sum_{y_1 \in Y_1} \beta_{y_2, y_1} (\varphi_1(\omega))(y_1) \right\}.$$

Vezessük be a

$$\pi_i(y_i) = \sum_{\omega \in \Omega} (\varphi_i(\omega))(y_i) \cdot p(\omega)$$

és

$$p_i(\omega \mid y_i) = \frac{(\varphi_i(\omega))(y_i) \cdot p(\omega)}{\pi_i(y_i)}$$

jelöléseket, ahol $i \in \{1, 2\}$, $y_i \in Y_i$.

Az állítás bizonyítása előtt megmutatjuk, hogy az alábbi öt állítás egyenértékű.

(i) Teljesül (2).

(ii) $\psi \in G$.

(iii) $\forall h \in \mathbb{R}^{|Y_2| \times |\Omega|} \quad \exists \beta \in B$:

$$\sum_{y_2 \in Y_2, \omega \in \Omega} h_{y_2+|Y_1| \cdot (\omega-1)} \cdot \psi_{y_2+|Y_1| \cdot (\omega-1)} \leq \sum_{y_2 \in Y_2, \omega \in \Omega} h_{y_2+|Y_1| \cdot (\omega-1)} \sum_{y_1 \in Y_1} \beta_{y_2, y_1} (\varphi_1(\omega))(y_1) =$$

$$= \sum_{y_1 \in Y_1} \sum_{y_2 \in Y_2} \beta_{y_2, y_1} \sum_{\omega \in \Omega} h_{y_2+|Y_1| \cdot (\omega-1)} \cdot (\varphi_1(\omega))(y_1).$$

(iv) $\forall h \in \mathbb{R}^{|Y_2| \times |\Omega|}$:

$$\sum_{y_2 \in Y_2, \omega \in \Omega} h_{y_2+|Y_1| \cdot (\omega-1)} \cdot \psi_{y_2+|Y_1| \cdot (\omega-1)} \leq \sum_{y_1 \in Y_1} \left[\max_{y_2 \in Y_2} \sum_{\omega \in \Omega} h_{y_2+|Y_1| \cdot (\omega-1)} \cdot (\varphi_1(\omega))(y_1) \right]$$

(v) $\forall \phi \in \mathbb{R}^{|Y_2| \times |\Omega|}$: $\quad \sum_{y_2 \in Y_2} \pi_2(y_2) \sum_{\omega \in \Omega} \phi_{y_2+|Y_1| \cdot (\omega-1)} \cdot p_2(\omega \mid y_2) \leq$

$$\leq \sum_{y_1 \in Y_1} \pi_1(y_1) \max_{y_2 \in Y_2} \left[\sum_{\omega \in \Omega} \phi_{y_2+|Y_1| \cdot (\omega-1)} \cdot p_1(\omega \mid y_1) \right].$$

Az (i) és (ii) állítások ekvivalenciája nyilvánvaló.

Az (ii) és (iii) állítások ekvivalenciája a szeparáló hipersíkok tételéből következik. Ugyanis ha (iii) nem teljesülne, akkor ψ és G hipersíkkal szeparálható lenne, ami ellentmondana (ii)-nek.

Az (iii) és (iv) állítás egyenértékű, mert

$$\sum_{y_1 \in Y_1} \left[\max_{y_2 \in Y_2} \sum_{\omega \in \Omega} h_{y_2+|Y_1| \cdot (\omega-1)} \cdot (\varphi_1(\omega))(y_1) \right] =$$

$$= \max_{\beta \in B} \left[\sum_{y_1 \in Y_1} \sum_{y_2 \in Y_2} \beta_{y_2, y_1} \sum_{\omega \in \Omega} h_{y_2+|Y_1| \cdot (\omega-1)} \cdot (\varphi_1(\omega))(y_1) \right].$$

Az (iv) és (v) állítások ekvivalenciája a

$$h_{y_2+|Y_1| \cdot (\omega-1)} = p(\omega) \cdot \phi_{y_2+|Y_1| \cdot (\omega-1)}$$

helyettesítéssel adódik.

Rátérünk Blackwell tételének bizonyítására.

Először megmutatjuk, hogy (1)-ből következik (2). Ehhez tegyük fel, hogy (2) nem teljesül. Ekkor – mivel (i) és (v) ekvivalens – azért (v) sem teljesül, így

$$\exists \phi \in \mathbb{R}^{|Y_2|\times|\Omega|} : \qquad \sum_{y_1 \in Y_1} \pi_1(y_1) \max_{y_2 \in Y_2} \left[\sum_{\omega\in\Omega} \phi_{y_2+|Y_1|\cdot(\omega-1)} \cdot p_1(\omega \mid y_1) \right] <$$

$$< \sum_{y_2 \in Y_2} \pi_2(y_2) \sum_{\omega\in\Omega} \phi_{y_2+|Y_1|\cdot(\omega-1)} \cdot p_2(\omega \mid y_2) \leq$$

$$\leq \sum_{y_2 \in Y_2} \pi_2(y_2) \max_{y_2 \in Y_2} \left[\sum_{\omega\in\Omega} \phi_{y'_2+|Y_1|\cdot(\omega-1)} \cdot p_2(\omega \mid y_2) \right].$$

Legyen $D = Y_2$, és

$$U : \Omega \times Y_2 \to \mathbb{R} \qquad (\omega, y_2) \mapsto \phi_{y_2+|Y_1|\cdot(\omega-1)}.$$

Ekkor

$$V(\mathcal{D}_1) < V(\mathcal{D}_2),$$

ami ellentmond (1)-nek.

Az ellentétes irány belátásához legyen D tetszőleges halmaz és

$$U : \Omega \times Y_2 \to \mathbb{R}$$

tetszőleges függvény. Legyen

$$D' = \left\{ d \in D \mid \exists y_2 \in Y_2 : d \in \arg\max_{d\in D} \sum_{\omega\in\Omega} p_2(\omega \mid y_2) \cdot U(\omega, d) \right\}.$$

Legyen

$$\mathcal{D}_1' = ((\Omega, P(\Omega), p), Y_1, \varphi_1, D', U)$$

és

$$\mathcal{D}_2' = ((\Omega, P(\Omega), p), Y_2, \varphi_2, D', U).$$

Ekkor

$$V(\mathcal{D}_2) = V(\mathcal{D}_2') \qquad \text{és} \qquad V(\mathcal{D}_1) \geq V(\mathcal{D}_1')$$

teljesül. Jelölje s az optimális stratégiát a $\mathcal{D}_2$ döntési feladatban. Ekkor s optimális stratégia a $\mathcal{D}_2'$ döntési feladatban is. Ekkor (v)-ből a

$$\phi_{y_2+|Y_1|\cdot(\omega-1)} = U(\omega, s(y_2))$$

helyettesítéssel

$$V(\mathcal{D}_2') \leq V(\mathcal{D}_1')$$

adódik, így

$$V(\mathcal{D}_2) = V(\mathcal{D}_2{}') \leq V(\mathcal{D}_1{}') \leq V(\mathcal{D}_1)$$

teljesül, amivel az állítást bebizonyítottuk. □

III. RÉSZ

JÁTÉK

Ebben a részben felhasználjuk az eddigi eredményeket egy játék egyensúlyának definíciójához. A legegyszerűbb játékot vizsgáljuk. A játéknak két szereplője van, az egyikük információja teljes, a másiké nem. Az előbbi – a jól informált fél – hozza meg először döntését, ezt a másik – a rosszul informált fél – megfigyeli, majd ő is meghozza döntését és a játéknak vége. Az ilyen játékot szokás szignál-játéknak nevezni. A szignál-játék közgazdasági alkalmazásai széleskörűek és jól ismertek. Az egyik első példa a Spence-féle munkapiaci szignál. De jól ismert a vállalat viselkedése, amely termékének – a fogyasztó által nem ismert – minőségét jelzi az árral, vagy garancia nyújtásával. Ugyancsak szignál-játék a piaci belépéstől elrettentés jól ismert modellje. De használják a szignál játékot hitelpiaci, pénzpiaci stb. jelenségek leírásához is.

Az említett játék jól ismert egyensúlya a tökéletes bayesi egyensúly. Ennek szokásos definíciója három pillérre épül, ezek: a két játékos egyensúlyi stratégiái, valamint a rosszul informált fél egyensúlyi korrigált vélekedése. Ugyanakkor éppen az említett közgazdasági alkalmazásokban fontos szerepet játszik a tökéletes bayesi egyensúly három típusa: a szeparáló, az elvegyítő és a részben-szeparáló egyensúly. Ezek definíciói az irodalomban hiányoznak. Ez alól részben kivétel Kreps és Sobel cikke, itt ugyanis megtaláljuk a szeparáló és az elvegyítő egyensúly egyfajta definícióját. (Kreps – Sobel [1994])

A harmadik részben tehát definiáljuk a szignál játékot és megadjuk a tökéletes bayesi egyensúly hagyományos definícióját. Ezután megadjuk – az eddigi eredmények felhasználásával – ezen egyensúly típusainak a játékosok tudásán alapuló definícióját. Végül megvizsgáljuk a különböző, lehetséges egyensúly-definíciók kapcsolatát.

1. FEJEZET

A SZIGNÁL-JÁTÉK

A szignál-játék játékosainak kifizetése függ mindkét játékos akciójától és egy olyan körülménytől, amelyet egyikük sem képes befolyásolni. Ezt a körülményt szokás világállapotnak vagy az 1. játékos típusának nevezni. A játék kezdetekor mindkét játékos ismeri a lehetséges világállapotok halmazát, sőt az 1. játékos ismeri az aktuális világállapotot. A 2. játékosnak a játék megkezdésekor a világállapotra vonatkozó információja a kezdeti vélekedése, amely egy Kolmogorov-féle valószínűségi mező. Így az 1. játékos a jól informált, míg a 2. játékos a rosszul informált játékos.

A játékot a következő módon játsszák. Először az 1. játékos lép, a 2. játékos ezt megfigyeli, majd a 2. játékos lép. A szignál-játék megadásához így a játékosok listáján, a játékosok akcióhalmazán és a kifizetőfüggvényeken kívül ismernünk kell az 1. játékos típusainak – a világállapotok – halmazát és a 2. játékos kezdeti vélekedését.

Feltesszük, hogy mind az 1. játékos típusainak halmaza, mind a játékosok akcióinak halmaza véges. Mivel az általunk vizsgált játékokban a lehetséges világállapotok halmaza véges, azért feltehető, hogy a rosszul informált játékos kezdeti vélekedése olyan Kolmogorov-féle valószínűségi mező, melyben az események σ-algebrája a világállapotok halmazának hatványhalmaza. Ezért a rosszul informált játékos kezdeti vélekedését egyértelműen meghatározza a világállapotok halmazának hatványhalmazán értelmezett valószínűségi mérték.

3.1.1. DEFINÍCIÓ: A szignál-játék $\mathcal{S} = \big((1,2), T, p, (D_i)_{i\in\{1,2\}}, (U_i)_{i\in\{1,2\}}\big)$, ahol

$(1,2)$ a játékosok listája,

T az 1. játékos típusainak véges halmaza,

$p : P(T) \to [0,1]$ egy függvény, melyre $(T, P(T), p)$ a 2. játékos kezdeti vélekedése,

D_i az i-edik játékos akcióinak véges halmaza,

$U_i : T \times D_1 \times D_2 \to \mathbb{R}$ az i-edik játékos kifizetőfüggvénye.

A szignál-játékban az 1. játékos döntésének meghozatalakor ismeri a bekövetkezett világállapotot, ezért információs helyzete leírható egy injektív függvénnyel, így információs struktúrája egyelemű halmazokból álló partíció. Ebben a vonásban döntési feladata hasonlít egy olyan döntéshozóéhoz, akinek információs struktúrája partíció. Ezért az 1. játékos által választott akció függ az általa megfigyelt jelzéstől, azaz a bekövetkezett világállapottól. Így tiszta stratégiája egy olyan hozzárendelés, amely minden világállapothoz egy akciót rendel.

3.1.2. DEFINÍCIÓ: A szignál-játék 1. játékosának egy tiszta stratégiája egy

$$s_1 : T \to D_1$$

függvény.

Ha a játékosok tiszta stratégiát játszanak, akkor a 2. játékos információs helyzetét az 1. játékos által játszott tiszta stratégia határozza meg. Ugyanis az 1. játékos akciója az azt megfigyelő 2. játékos számára jelzés, hiszen tisztában van azzal, hogy az 1. játékos a világállapot ismeretében hajtja végre akcióját. Ezért a 2. játékos stratégiája egy olyan függvény, amelynek az értelmezési tartománya az 1.

játékos akcióinak halmaza, képhalmaza pedig a 2. játékos akcióinak halmaza.

3.1.3. DEFINÍCIÓ: A 2. játékos tiszta stratégiája egy

$$s_2 : D_1 \to D_2$$

függvény.

A játékosok által a játék lejátszása során követett stratégia gyakran nem tiszta stratégia, hanem egy olyan függvény, amely minden egyes jelzéshez a játékos akcióhalmazán értelmezett Kolmogorov-féle valószínűségi mezőt rendel. Erről a valószínűségi mezőről az akcióhalmazok végessége miatt feltehető, hogy az események σ-algebrája az akcióhalmaz hatványhalmaza. Ezért a játékos stratégiája által valamely típushoz rendelt, az akcióhalmazon értelmezett valószínűségi mezőt egyértelműen meghatározza a valószínűségi mértéknek az akcióhalmaz egyelemű részhalmazaira való leszűkítése.

3.1.4. DEFINÍCIÓ: A szignál-játék 1. játékosának stratégiája egy

$$\sigma_1 : T \to [0,1]^{D_1}$$

függvény, melyre teljesül, hogy

$$\text{minden } t \in T \text{ esetén } \sum_{d_1 \in D_1} (\sigma_1(t))(d_1) = 1.$$

A 2. játékos stratégiája egy

$$\sigma_2 : D_1 \to [0,1]^{D_2}$$

függvény, melyre teljesül, hogy

$$\text{minden } d_1 \in D_1 \text{ esetén } \sum_{d_2 \in D_2} (\sigma_2(d_1))(d_2) = 1.$$

Ha az 1. játékos a σ_1 stratégiát játssza, akkor a t típusú 1. játékos a d_1 akciót

$(\sigma_1(t))(d_1)$ valószínűséggel választja. Hasonlóan, ha a 2. játékos stratégiája σ_2 és az 1. játékos a d_1 akciót hajtotta végre, akkor $(\sigma_2(d_1))(d_2)$ annak a valószínűsége, hogy a 2. játékos akciója d_2.

2. FEJEZET

A TÖKÉLETES BAYESI EGYENSÚLY

Az egyensúlyban a jelzőfüggvény, amely alapján a 2. játékos a korrigált vélekedését kiszámítja, összhangban van az 1. játékos egyensúlyi stratégiájával. Formálisan ez azt jelenti, hogy ha a jól informált játékos a σ_1 egyensúlyi stratégiáját játssza, akkor a 2. játékos jelzőfüggvénye a

$$\varphi : T \to [0,1]^{P(D_1)}$$

függvény, melyre

$$\forall t \in T, \forall \widetilde{D}_1 \subseteq D_1 \text{ esetén } (\varphi(t))(\widetilde{D}_1) = \sum_{d_1 \in \widetilde{D}_1} (\sigma_1(t))(d_1).$$

Ekkor a rosszul informált játékos korrigált vélekedésére teljesül a

$$p(t \mid d_1) = \frac{p(t)\cdot(\sigma_1(t))(d_1)}{\sum_{t' \in T} p(t')\cdot(\sigma_1(t'))(d_1)}, \text{ ha } \sum_{t' \in T} p(t') \cdot (\sigma_1(t'))(d_1) > 0$$

összefüggés.

Az egyensúlyban a 2. játékos az optimális stratégiáját játssza az egyensúlyi korrigált vélekedése és a jól informált játékos egyensúlyi stratégiája mellett. Ez azt jelenti, hogy ha a 2. játékos egyensúlyi korrigált vélekedése $p(\cdot \mid d_1)$ és a jól informált játékos egyensúlyi stratégiája σ_1, akkor a 2. játékos egyensúlyi σ_2 stratégiája maximalizálja a 2. játékos várható kifizetését $p(\cdot \mid d_1)$ mellett. Ekkor teljesül, hogy

$$\forall d_1 \in D_1 \qquad \operatorname{supp} \sigma_2(d_1) \subseteq \arg\max_{d_2 \in D_2} \sum_{t \in T} U_2(t, d_1, d_2) \cdot p(t \mid d_1).$$

Végül az egyensúlyban teljesülnie kell annak is, hogy az 1. játékos egyensúlyi stratégiája maximalizálja az 1. játékos várható kifizetését a 2. játékos egyensúlyi stratégiája mellett, így teljesül, hogy

$$\forall t \in T \qquad \operatorname{supp}\sigma_1(t) \subseteq \arg\max_{d_1 \in D_1} \sum_{d_2 \in D_2} U_1(t, d_1, d_2) \cdot (\sigma_2(d_1))(d_2).$$

A játékosok stratégiáiból és a rosszul informált játékos korrigált vélekedéséből álló együttest tökéletes bayesi egyensúlynak nevezzük, ha közöttük az említett három összefüggés fennáll.

3.2.1. DEFINÍCIÓ: Az $\mathcal{S} = \big((1,2), T, p, (D_i)_{i\in\{1,2\}}, (U_i)_{i\in\{1,2\}}\big)$ szignál-játék tökéletes bayesi egyensúlya a játékosok stratégiáiból és a rosszul informált játékos korrigált vélekedéséből álló $(\sigma_1, \sigma_2, p(\cdot \mid d_1))$ rendezett hármas, ha teljesülnek a következők.

(1) $\forall t \in T \qquad \operatorname{supp}\sigma_1(t) \subseteq \arg\max_{d_1 \in D_1} \sum_{d_2 \in D_2} U_1(t, d_1, d_2) \cdot (\sigma_2(d_1))(d_2),$

(2) $\forall d_1 \in D_1 \qquad \operatorname{supp}\sigma_2(d_1) \subseteq \arg\max_{d_2 \in D_2} \sum_{t \in T} U_2(t, d_1, d_2) \cdot p(t \mid d_1),$

(3) $p(t \mid d_1) = \frac{p(t)\cdot(\sigma_1(t))(d_1)}{\sum_{t' \in T} p(t')\cdot(\sigma_1(t'))(d_1)}$, ha $\sum_{t' \in T} p(t') \cdot (\sigma_1(t'))(d_1) > 0.$

Mivel az egyensúlyban a rosszul informált játékos jelzőfüggvénye és a jól informált játékos stratégiája összhangban van, azért a rosszul informált játékos egyensúlyi információs struktúrája a jól informált játékos egyensúlyi stratégiájától nem független. A 2. játékos információs struktúrájában két világállapot pontosan akkor van egy információs halmazban, ha van olyan akciója az 1. játékosnak, amelyet mindkét világállapotban pozitív valószínűséggel választ.

Ha $(\sigma_1, \sigma_2, p(\cdot \mid d_1))$ az $\mathcal{S} = \big((1,2), T, p, (D_i)_{i\in\{1,2\}}, (U_i)_{i\in\{1,2\}}\big)$ szignál-játék tökéletes bayesi egyensúlya, akkor a 2. játékosnak valamely $d_1 \in D_1$ akció megfigyeléséhez tartozó információs halmaza ebben az egyensúlyban:

$$\varphi^{-}(d_1) = \{t \in T \mid d_1 \in \operatorname{supp}\varphi(t)\} = \{t \in T \mid d_1 \in \operatorname{supp}\sigma_1(t)\}.$$

3.2.2. DEFINÍCIÓ: Az $\mathcal{S} = \left((1,2), T, p, (D_i)_{i\in\{1,2\}}, (U_i)_{i\in\{1,2\}}\right)$ szignál-játék $(\sigma_1, \sigma_2, p(\cdot \mid d_1))$ tökéletes bayesi egyensúlyában a 2. játékos egyensúlyi információs struktúrája:

$$\mathcal{I} = \{\varphi^{-}(d_1) \mid d_1 \in D_1\}.$$

Az egyensúlyi információs struktúra ismeretében vizsgálható, hogy mit tud feltételesen, illetve mit tud feltétlenül a 2. játékos a szignál-játék valamely tökéletes bayesi egyensúlyában a bekövetkezett világállapotról, azaz a jól informált játékos típusáról. Következő lépésként megadjuk a tökéletes bayesi egyensúlynak a 2. játékos tudásán alapuló egy lehetséges tipológiáját.

Egyensúlytípusok

Ha a szignál-játék valamely tökéletes bayesi egyensúlyában az 1. játékos bármely típusa esetén az 1. játékos akciójának megfigyelését követően a 2. játékos tudja, hogy az 1. játékos milyen típusú, akkor azt mondjuk, hogy az egyensúly szeparáló. Ez azt jelenti, hogy az 1. játékos bármely típusa esetén a 2. játékos a döntésének meghozatalakor feltétlenül tudja, hogy a jól informált játékos milyen típusú.

3.2.3. DEFINÍCIÓ: Az $\mathcal{S} = \left((1,2), T, p, (D_i)_{i\in\{1,2\}}, (U_i)_{i\in\{1,2\}}\right)$ szignál-játék szeparáló egyensúlya a játékosok stratégiáiból és a rosszul informált játékos korrigált vélekedéséből álló $(\sigma_1, \sigma_2, p(\cdot \mid d_1))$ rendezett hármas, ha

(1) $(\sigma_1, \sigma_2, p(\cdot \mid d_1))$ az $\mathcal{S}$ tökéletes bayesi egyensúlya,

(2) bármely $t \in T$ állapotban a jól informált játékos lépésének megfigyelését követően a rosszul informált játékos feltétlenül tudja, hogy $\{t\}$.

Ha a szignál-játék valamely tökéletes bayesi egyensúlyában bármely világállapotban teljesül, hogy az 1. játékos akciójának megfigyelését követően a 2. játékos a jól informált játékos bármely típusát lehetségesnek tartja, akkor az egyensúly elvegyítő. Ilyenkor az 1. játékosnak nincs olyan akciója, amelynek megfigyelését követően a 2. játékos a világállapotok egy részét nem tartja lehetségesnek, míg a többi világállapot bekövetkezésének pozitív valószínűséget tulajdonít. Így egyetlen állapotban sem található a világállapotoknak olyan T_1 valódi részhalmaza, hogy az 1. játékos lépése után a 2. játékos feltételesen tudja, hogy a T_1 esemény bekövetkezett.

3.2.4. DEFINÍCIÓ: Az $\mathcal{S} = \left((1,2), T, p, (D_i)_{i\in\{1,2\}}, (U_i)_{i\in\{1,2\}}\right)$ szignál-játék elvegyítő egyensúlya a játékosok stratégiáiból és a rosszul informált játékos korrigált vélekedéséből álló $(\sigma_1, \sigma_2, p(\cdot \mid d_1))$ rendezett hármas, ha

(1) $(\sigma_1, \sigma_2, p(\cdot \mid d_1))$ az $\mathcal{S}$ tökéletes bayesi egyensúlya,

(2) nem létezik olyan $t \in T$ állapot és $T_1 \subsetneqq T$, hogy a t állapotban a jól informált játékos lépésének megfigyelését követően a rosszul informált játékos feltételesen tudja, hogy T_1.

A szignál-játék egy tökéletes bayesi egyensúlya részben-szeparáló, ha se nem szeparáló, se nem elvegyítő egyensúly. Mivel az ilyen egyensúly nem szeparáló, azért van olyan állapot, amelyben az 1. játékos akcióját megfigyelő 2. játékos nem tudja feltétlenül, hogy milyen állapot következett be, ugyanakkor tudása több mint az elvegyítő egyensúlyban, mert van olyan világállapot, amely esetén az 1. játékos akcióját megfigyelő 2. játékos nem tartja lehetségesnek az 1. játékos bizonyos típusait.

3.2.5. DEFINÍCIÓ: Az $\mathcal{S} = \left((1,2), T, p, (D_i)_{i\in\{1,2\}}, (U_i)_{i\in\{1,2\}}\right)$ szignál-játék részben-szeparáló egyensúlya a játékosok stratégiáiból és a rosszul informált játékos korrigált vélekedéséből álló $(\sigma_1, \sigma_2, p(\cdot \mid d_1))$ rendezett hármas, ha

(1) $(\sigma_1, \sigma_2, p(\cdot \mid d_1))$ az $\mathcal{S}$ tökéletes bayesi egyensúlya,

(2) létezik olyan $t \in T$, hogy a t állapotban a jól informált játékos lépésének megfigyelését követően a rosszul informált játékos nem tudja feltétlenül, hogy $\{t\}$,

(3) létezik olyan $t \in T$ és $T_1 \subsetneqq T$, hogy a t állapotban a jól informált játékos lépésének megfigyelését követően a rosszul informált játékos feltételesen tudja, hogy T_1.

A következőkben az egyes egyensúlytípusok különböző definíciói közötti viszonyt vizsgáljuk. Háromféle definíciót adunk meg. A szeparáló egyensúly esetében az egyik az általunk adott definíció, a másik az egyensúlyi információs struktúrát jellemzi, a harmadik pedig a Kreps – Sobel által használt definíció. (Kreps – Sobel [1994])

3.2.1. ÁLLÍTÁS: Legyen az $\mathcal{S} = \left((1,2), T, p, (D_i)_{i\in\{1,2\}}, (U_i)_{i\in\{1,2\}}\right)$ szignál-játék tökéletes bayesi egyensúlya $(\sigma_1, \sigma_2, p(\cdot \mid d_1))$. A következő állítások egyenértékűek.

(S1) $(\sigma_1, \sigma_2, p(\cdot \mid d_1))$ az $\mathcal{S}$ szignál-játék szeparáló egyensúlya.

(S2) A 2. játékos egyensúlyi információs struktúrája a T egyelemű részhalmazaiból álló partíció.

(S3) A $\{\operatorname{supp}\sigma_1(t) \mid t \in T\}$ halmazrendszer elemei páronként diszjunktak.

BIZONYÍTÁS: Először megmutatjuk, hogy az (S1) állításból következik (S2). Legyen $(\sigma_1, \sigma_2, p(\bullet \mid d_1))$ az $\mathcal{S}$ szignál-játék szeparáló egyensúlya és φ a 2. játékos jelzőfüggvénye ebben az egyensúlyban. Ekkor bármely $t \in T$ esetén a 2. játékos feltétlenül tudja, hogy $\{t\}$. Ez a feltétlen tudás definíciója (1.2.7.definíció) szerint azt jelenti, hogy

$$\forall t \in T \bigcup_{d_1 \in \operatorname{supp}\varphi(t)} \varphi^-(d_1) \subseteq \{t\},$$

azaz

$$\forall t \in T,\ \forall d_1 \in \operatorname{supp}\varphi(t)\colon \varphi^-(d_1) \subseteq \{t\}.$$

(7)

Mivel φ^- definíciója (1.2.2.definíció) szerint

$$\forall t \in T \text{ esetén ha } d_1 \in \operatorname{supp}\varphi(t), \text{ akkor } t \in \varphi^-(d_1),$$

azért

$$\forall t \in T,\ \forall d_1 \in \operatorname{supp}\varphi(t)\colon \{t\} \subseteq \varphi^-(d_1)$$

is teljesül. Ebből (7) figyelembevételével

$$\forall t \in T,\ \forall d_1 \in \operatorname{supp}\varphi(t)\colon \{t\} = \varphi^-(d_1)$$

következik, azaz minden d_1 megfigyelhető jelzésre a $\varphi^-(d_1)$ információs halmaz egyelemű.

Mivel minden $t \in T$-re $\varphi(t)$ valószínűségi mérték D_1-en, azért

$$\forall t \in T\colon |\operatorname{supp}\varphi(t)| \geq 1,$$

amiből következik, hogy az információs halmazok lefedik a T halmazt.

Annak belátásához, hogy az (S2) állításból következik (S3), tegyük fel, hogy (S3) nem teljesül. Ekkor

$$\exists t, t' \in T,\ t \neq t'\colon \operatorname{supp}\sigma_1(t) \cap \operatorname{supp}\sigma_1(t') \neq \emptyset,$$

azaz

$$\exists t, t' \in T, t \neq t', \exists \widetilde{d}_1 \in D_1 : \widetilde{d}_1 \in \operatorname{supp} \sigma_1(t) \cap \operatorname{supp} \sigma_1(t').$$

Legyen a továbbiakban t, t' és $\widetilde{d}_1$ rögzített, az iménti feltételt kielégítő két világállapot és akció. Ekkor

$$\widetilde{d}_1 \in \operatorname{supp} \sigma_1(t) \qquad \Rightarrow \qquad t \in \varphi^-(\widetilde{d}_1)$$

és

$$\widetilde{d}_1 \in \operatorname{supp} \sigma_1(t') \qquad \Rightarrow \qquad t' \in \varphi^-(\widetilde{d}_1)$$

így

$$\{t, t'\} \subseteq \varphi^-(\widetilde{d}_1),$$

amiből kihasználva, hogy $t \neq t'$, az következik, hogy $\varphi^-(\widetilde{d}_1)$ legalább két elemet tartalmazó információs halmaz. Tehát ha nem teljesül (S3), akkor nem teljesül (S2) sem. Így (S2)-ből következik (S3).

Végül bebizonyítjuk, hogy (S3)-ból következik (S1). Tegyük fel, hogy teljesül (S3), és legyen $t \in T$ tetszőleges. A t állapotban a 2. játékos számára megfigyelhető jelzések halmaza:

$$\operatorname{supp} \varphi(t) = \operatorname{supp} \sigma_1(t).$$

Legyen $d_1 \in \operatorname{supp} \sigma_1(t)$ tetszőleges, a t állapotban megfigyelhető jelzés. Ekkor (S3) teljesüléséből az következik, hogy

$$\text{ha } t' \in T, t \neq t', \text{akkor } d_1 \notin \operatorname{supp} \sigma_1(t'),$$

azaz bármely a t-től különböző t'-ben a d_1 jelzés nem figyelhető meg, így a 2. játékos a d_1 akció megfigyelésekor tudja, hogy $\{t\}$. Mivel feltevésünk szerint d_1 tetszőleges $\operatorname{supp} \sigma_1(t)$-beli elem, azaz tetszőleges, a t állapotban megfigyelhető jelzés, és $t \in T$ tetszőleges állapot, azért $(\sigma_1, \sigma_2, p(\cdot \mid d_1))$ az $\mathcal{S}$ szignál-játék szeparáló egyensúlya. □

Most az előzőekhez hasonlóan az elvegyítő egyensúly három definícióját vetjük egybe. Itt meg kell azonban említeni, hogy Kreps – Sobel a definíciót csak tiszta stratégiák esetére adja meg, mert amennyiben az egyszeri metszés feltétel teljesül, ebben az egyensúlyban a játékosok tiszta stratégiát játszanak. (Kreps – Sobel [1994]) (Mellékesen megjegyezzük, hogy az irodalom az egyszeri metszés feltételt többféle értelemben használja, de Kreps – Sobel ennek pontos definícióját adja.) Ez azonban definíciójuk érvényességi körét azokra az esetekre szűkíti, amelyekben a játékosok célfüggvényei eleget tesznek bizonyos követelményeknek, amelyek az egyszeri metszés feltétel teljesülését biztosítják. Ezzel szemben az általunk adott, a játékosok tudásán alapuló definíció a játékosok célfüggvényére nézve semmit nem követel meg.

3.2.2. ÁLLÍTÁS: Legyen az $\mathcal{S} = \left((1,2), T, p, (D_i)_{i\in\{1,2\}}, (U_i)_{i\in\{1,2\}}\right)$ szignál-játék tökéletes bayesi egyensúlya $(\sigma_1, \sigma_2, p(\cdot \mid d_1))$. A következő állítások egyenértékűek.

(E1) $(\sigma_1, \sigma_2, p(\cdot \mid d_1))$ az $\mathcal{S}$ szignál-játék elvegyítő egyensúlya.

(E2) A 2. játékos egyensúlyi információs struktúrája a $\{T\}$ partíció.

(E3) A $\{\operatorname{supp}\sigma_1(t) \mid t \in T\}$ halmazrendszer egyelemű.

BIZONYÍTÁS: Először belátjuk, hogy (E1)-ből következik az (E2) állítás. Legyen $(\sigma_1, \sigma_2, p(\cdot \mid d_1))$ az $\mathcal{S}$ szignál-játék elvegyítő egyensúlya. Az elvegyítő egyensúly definíciója (3.2.4.definíció) szerint ekkor

$$\forall t \in T, \forall T_1 \subsetneq T, \forall d_1 \in \operatorname{supp}\varphi(t)\colon \varphi^-(d_1) \not\subseteq T_1.$$

Ebből, mivel minden $d_1 \in D_1$-re $\varphi^-(d_1) \subseteq T$ teljesül, az következik, hogy

$$\forall t \in T, \forall d_1 \in \operatorname{supp}\varphi(t)\colon \varphi^-(d_1) = T,$$

így a 2. játékos egyetlen információs halmaza maga a T halmaz.

Annak belátásához, hogy (E2)-ből következik (E3), tegyük fel, hogy (E3) nem teljesül. Ekkor

$$\exists t, t' \in T, \exists d_1 \in D_1\colon d_1 \in \operatorname{supp}\sigma_1(t) \setminus \operatorname{supp}\sigma_1(t').$$

Legyenek t, t' és d_1 ilyen tulajdonságú állapotok és akció. Ekkor

$$t \in \varphi^{-}(d_1) \text{ és } t' \notin \varphi^{-}(d_1),$$

így

$$\varnothing \neq \varphi^{-}(d_1) \neq T,$$

azaz nem teljesül (E2). Tehát ha (E2) igaz, akkor (E3) is.

Annak megmutatásához, hogy (E3)-ból következik (E1), tegyük fel, hogy $(\sigma_1, \sigma_2, p(\cdot \mid d_1))$ nem elvegyítő egyensúly. Ekkor

$$\exists t \in T, \exists T_1 \subsetneqq T, \exists d_1 \in \operatorname{supp} \varphi(t) \colon \varphi^{-}(d_1) \subseteq T_1.$$

Legyen t, T_1, d_1 rögzített, az iménti feltételt kielégítő állapot, esemény és akció. Mivel $T_1 \neq T$, azért $\exists t' \in T \setminus T_1$. Rögzítsünk egy ilyen tulajdonságú t'-t is. A $\varphi^{-}(d_1) \subseteq T_1$ és $t' \notin T_1$ relációkból $t' \notin \varphi^{-}(d_1)$ következik, így $d_1 \notin \operatorname{supp} \sigma_1(t')$. Mivel $d_1 \in \operatorname{supp} \varphi(t) = \operatorname{supp} \sigma_1(t)$, azért ez ellentmond (E3)-nak. □

A következőkben a részben-szeparáló egyensúly három definícióját vetjük egybe. Ezek a definíciók az irodalomban egyáltalán nem léteznek. Ezért megkonstruáltuk a tökéletes bayesi egyensúly fogalmának megfelelő alkalmazását, továbbá Kreps – Sobel által alkalmazott eddigi két definíció szellemének megfelelő harmadikat és ideillesztjük az általunk adott definíciót. (Kreps – Sobel [1994])

3.2.3. ÁLLÍTÁS: Legyen az $\mathcal{S} = \left((1,2), T, p, (D_i)_{i \in \{1,2\}}, (U_i)_{i \in \{1,2\}}\right)$ szignál-játék tökéletes bayesi egyensúlya $(\sigma_1, \sigma_2, p(\cdot \mid d_1))$. A következő állítások egyenértékűek.

(1) $(\sigma_1, \sigma_2, p(\cdot \mid d_1))$ az $\mathcal{S}$ szignál-játék részben-szeparáló egyensúlya.

(2) A 2. játékos egyensúlyi információs struktúrája nem a $\{T\}$ partíció, és van olyan eleme, amely legalább kételemű.

(3) A $\{\operatorname{supp} \sigma_1(t) \mid t \in T\}$ legalább kételemű és van két olyan eleme, amelyek nem diszjunktak.

BIZONYÍTÁS: Az előző két állításból következik. □

ÖSSZEFOGLALÁS ÉS TOVÁBBI KUTATÁSI LEHETŐSÉGEK

Tekintsük át eredményeinket az eddigiektől kissé eltérő gondolatmenetben!

A szekvenciális, aszimmetrikus információs játékok egyensúlyának, a tökéletes bayesi egyensúlynak három típusa ismert, a szeparáló, az elvegyítő és a részben-szeparáló egyensúly. Amennyiben a játék kétszereplős és a jól informált fél lép először, a szeparáló egyensúlyt szokás azzal jellemezni, hogy az egyensúlyban a rosszul informált fél tudja, hogy a jól informált fél milyen típusú. Ennek megfelelően az elvegyítő egyensúlyban nem tudja (abban az értelemben, hogy éppen annyit tud róla, mint a játék megkezdése előtt). Hasonló gondolatmenettel azt lehet mondani, hogy a részben-szeparáló egyensúlyban a rosszul informált fél, a jól informált fél bizonyos akcióját megfigyelve tudja, más akcióját megfigyelve pedig nem tudja, hogy milyen típusú. Csakhogy ez az utóbbi állítás némi megfontolást igényel. Ugyanis a részben-szeparáló egyensúlyban a rosszul informált fél információs struktúrája nempartícionális, azonban a tudás fogalmát nempartícionális információs struktúrák esetére eddig nem értelmezték, így nem volt világos, hogy mit értsünk az iménti állítás alatt. Az értekezés középpontjában ezért újfajta tudásfogalmak, illetve a tökéletes bayesi egyensúly változatainak ezeken a tudásfogalmakon alapuló definíciói állnak.

A nempartícionális információs struktúrával rendelkező döntéshozó sajátos információs helyzete abból fakad, hogy az egyes állapotok nem határozzák meg egyértelműen a döntéshozó számára megfigyelhető jelzést. Ezért általánosítottuk a jelzőfüggvény fogalmát és megadtuk, hogy hogyan határozza meg a jelzőfüggvény a döntéshozó információs struktúráját. A tudás fogalmának a nempartícionális információs struktúrával jellemezhető helyzetekre is érvényes általánosítása azonban nem egyértelmű, ezért bevezettünk két fogalmat: a feltételes tudás és a feltétlen tudás fogalmát. Megvizsgáltuk e két fogalom tulajdonságait és a köztük levő kapcsolatot is. Definiáltuk a döntéshozó kezdeti és korrigált vélekedését, mely fogalmak a tökéletes bayesi egyensúly vizsgálatánál jutnak szerephez. A játékokban fontos szerepet betöltő másik fogalom, a köztudott tudás definiálási lehetőségeinek vizsgálata során arra jutottunk, hogy habár a kétféle tudás-fogalommal kétféle köztudott tudás fogalom értelmezhető, ezek egymással ekvivalensek. Ezen kívül kitértünk az Aumann-féle köztudott tudás-fogalom nempartícionális információs struktúrák esetére történő általánosítására is.

A nempartícionális információs struktúrával rendelkező döntéshozó tudásának leírásához szükséges fogalmak megalkotása lehetővé tette a tökéletes bayesi egyensúly változatainak a rosszul informált fél tudásán alapuló definiálását. Megmutattuk, hogy az általunk adott definíció egyenértékű a szakirodalomban a szeparáló és az elvegyítő egyensúlyra található formális definícióval, valamint hogy megfelelnek azoknak a körülírásoknak, melyekkel a kézikönyvek rendszerint jellemzik ezen egyensúly-fogalmakat.

A kutatás folytatására több lehetőséget látunk. Az értekezésben csak a legegyszerűbb kétszereplős, kétlépéses, egyoldalúan aszimmetrikus információs játék esetén vizsgáltuk meg a tökéletes bayesi egyensúlynak a játékosok tudásán alapuló definiálási lehetőségét. Meg kell vizsgálni, hogy milyen más játéktípusok esetén célravezető ez a fajta definíció. Egyaránt szóba jöhetnek a többszereplős, a többlépéses, valamint a két- vagy többoldalúan aszimmetrikus információs játékok is.

Másik lehetséges kutatási irány a nemteljes információs játékok megoldásfogalma mögött meghúzódó másik feltevés, a Harsányi-doktrína – mely szerint a játékosok kezdeti vélekedése azonos – feloldási lehetőségének vizsgálata lehet. E feltevéssel kapcsolatban nem a relevanciáját vitatók, illetve amellett érvelők táborát kívánjuk növelni, hanem az olyan játékok megoldásfogalmának megalkotására gondolunk, amelyek nem feltétlenül elégítik ki a Harsányi-doktrína feltevését.

Úgy véljük, hogy az értekezés tárgyát képező problémakör vizsgálata jó alapot teremtett a kutatásnak az említett területeken történő folytatására.

IRODALOMJEGYZÉK

Arya, A. – J. Glover – R. Young [1996]: Mechanism Design under Alternative Information Structures and Constrained Capacity. *Journal of Economic Theory*, 70, 420-443.

Aumann, R. J. [1974]: Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies. *Journal of Mathematical Economics*, 1, 67-96.

Aumann, R. J. [1976]: Agreeing to Disagree, *The Annals of Statistics*, 4(6), 1236-1239.

Aumann, R. J. [1987]: Correlated Equilibrium as an Expression of Bayesian Rationality. *Econometrica*, 55(1), 1-18.

Aumann, R. J. [1999a]: Interactive Epistemology I: Knowledge. *International Journal of Game Theory*, 28, 263-300.

Aumann, R. J. [1999b]: Interactive Epistemology II: Probability. *International Journal of Game Theory*, 28, 301-314.

Aumann, R. - A. Brandenburger [1995]: Epistemic Conditions for Nash Equilibrium. *Econometrica*, 63(5), 1161-1180.

Bacharach, M. [1985]: Some Extensions of a Claim of Aumann in an Axiomatic Model of Knowledge. *Journal of Economic Theory*, 37, 167-190.

Binmore, K. G. [1992]: *Fun and Games*, D. C. Heath, Lexington.

Blackwell, D. [1951]: Comparison of Experiments. Megjelent: J. Neyman (ed.): *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. University of California Press.

Bonanno, G. – K. Nehring [1999]: How to Make Sense of the Common Prior Assumption under Incomplete Information. *International Journal of Game Theory*, 28, 409-434.

Brandenburger, A. – E. Dekel – J. Geanakoplos [1992]: Correlated Equilibrium with Generalized Information Structures. *Games and Economic Behavior*, 4, 182-201.

Cave, J. A. K. [1983]: Learning to Agree. *Economics Letters*, 12, 147-152.

Crémer, J. [1982]: A Simple Proof of Blackwell's "Comparison of Experiments" Theorem. *Journal of Economic Theory*, 27, 439-443.

Fagin, R. – J. Geanakoplos – J. Y. Halpern – M. Y. Vardi [1999]: The Hierarchical Approach to Modeling Knowledge and Common Knowledge. *International Journal of Game Theory*, 28, 331-336.

Fudenberg, D. – J. Tirole [1983]: Sequential Bargaining with Incomplete Information. *Review of Economic Studies*, 50, 221-247.

Fudenberg, D. – J. Tirole [1991a]: *Game Theory*. MIT Press, Cambridge (MA).

Fudenberg, D. – J. Tirole [1991b]: Perfect Bayesian Equilibrium and Sequential Equilibrium. *Journal of Economic Theory*, 53, 236-260.

Fudenberg, D. – J. Tirole [1992]: Noncooperative Game Theory for Industrial Organization: An Introduction and Overview. Megjelent: R. Schmalensee – R. D. Willig: *Handbook of Industrial Organization*. 1. kötet, (3rd pr.), Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 259-327.

Geanakoplos, J. [1989]: Game Theory without Partitions, and Applications to Speculations and Consensus. *Cowles Foundation Discussion Paper 914*, Yale University.

Geanakoplos, J. [1992]: Common Knowledge. *Journal of Economic Perspectives*. 6(4), 53-82.

Geanakoplos, J. [1994]: Common Knowledge. Megjelent: R. J. Aumann – S. Hart: *Handbook of Game Theory with Economic Applications*. 2. kötet, Elsevier Science B. V., Amsterdam, 1437-1496.

Geanakoplos, J. D. –H. M. Polemarchakis [1982]: We Can't Disagree Forever. *Journal of Economic Theory*, 28, 192-200.

Harsanyi, J. C. [1967-1968]: Games with Incomplete Information Played by „Bayesian" Players, I-III. *Management Science*, 14(3, 5, 7), 159-182, 320-334, 486-502.

Hart, S. – A. Heifetz – D. Samet [1996]: „Knowing whether," „Knowing that," and the Cardinality of State Spaces. *Journal of Economic Theory*, 70, 249-256.

Heifetz, A. [1996]: Comment on Consensus without Common Knowledge. *Journal of Economic Theory*, 70, 273-277.

Heifetz, A. [1999]: How Canonical Is the Canonical Model? A Comment on Aumann's Interactive Epistemology. *International Journal of Game Theory*, 28, 435-442.

Kreps, D. [1990]: *A Course in Microeconomic Theory*. Harvester Wheatsheaf, Herdfordshire.

Kreps, D. M. – G. Ramey [1987]: Structural Consistency, Consistency, and Sequential Rationality. *Econometrica*, 55(6), 1331-1348.

Kreps, D. M. – J. Sobel [1994]: Signalling. Megjelent: R. J. Aumann – S. Hart:

Handbook of Game Theory with Economic Applications. 2. kötet, Elsevier Science B. V., Amsterdam., 849-867.

Kreps, D. M. – R. Wilson [1982]: Sequential Equilibria, *Econometrica*, 50(4), 863-894.

Laffont, J.-J. [1993]: *The Economics of Uncertainty and Information*. MIT Press, Cambridge (MA).

Matsuhisa, T. – K. Kamiyama [1997]: Lattice Structure of Knowledge and Agreeing to Disagree. *Journal of Mathematical Economics*, 27, 389-410.

Milgrom, P. [1981]: An Axiomatic Characterization of Common Knowledge. *Econometrica*, 49(1), 219-222.

Milgrom, P. – N. Stokey [1982]: Information, Trade and Common Knowledge. *Journal of Economic Theory*, 26, 17-27.

Morris, S. [1994]: Trade with Heterogeneous Prior Beliefs and Asymmetric Information. *Econometrica*, 62(6), 1321-1347.

Morris, S. [1999]: Approximate Common Knowledge Revisited. *International Journal of Game Theory*, 28, 385-408.

Morris, S. – H. S. Shin [1998]: Unique Equilibrium in a Model of Self-Fulfilling Currency Attacks. *American Economic Review*, 88, 587-597.

Neeman, Z. [1996]: Common Beliefs and the Existence of Speculative Trade. *Games and Economic Behavior*, 16, 77-96.

Nielsen, L. T. [1984]: Common Knowledge, Communication, and Convergence of Beliefs. *Mathematical Social Sciences*, 1-14.

Nielsen, L. T. [1996]: Common Knowledge: The Case of Linear Regression. *Journal of Mathematical Economics*, 26, 285-304.

Osborne M. J. – A. Rubinstein [1994]: *A Course in Game Theory.* MIT Press, Cambridge (MA).

Rényi A. [1968]: *Valószínűségszámítás*. Tankönyvkiadó, Budapest.

Rubinstein, A. – A. Wolinsky [1990]: On the Logic of „Agreeing to Disagree" Type Results, *Journal of Economic Theory*, 51, 184-193.

Samet, D. [1990]: Ignoring Ignorance and Agreeing to Disagree. *Journal of Economic Theory*, 52, 190-207.

Samet, D. [1996]: Hypotetical Knowledge and Games with Perfect Information. *Games and Economic Behavior*, 17, 230-251.

Shin, H. S. [1993]: Logical Structure of Common Knowledge. *Journal of Economic Theory*, 60, 1-13.

Simon, R. S. [1999]: The Difference between Common Knowledge of Formulas and Sets. *International Journal of Game Theory*, 28, 367-384.

SZAKSZAVAK JEGYZÉKE

állapot, világállapot	state, state-of-the-world
durvítás	coarsening
egyszeri metszés feltétel	single crossing condition
elvegyítő egyensúly	pooling equilibrium
finomítás	refinement
információs függvény	information function
információs halmaz	information set
információs struktúra	information structure
jelzés	signal
jelzőfüggvény	signal function
kezdeti vélekedés	prior belief
kiszorító árazás	limit pricing
korrigált vélekedés	posterior belief
közös durvítás	common coarsening
köztudott tudás	common knowledge
köztudott tudás függvény	common knowledge function
legdurvább közös finomítás	coarsest common refinement
legfinomabb közös durvítás, metszet	finest common coarsening, meet
metszet függvény	meet function
részben-szeparáló egyensúly	semi-separating equilibrium
tökéletes bayesi egyensúly	perfect Bayesian equilibrium
szeparáló egyensúly	separating equilibrium
vélekedés	belief

A SZERZŐNEK A TÉMÁBAN MEGJELENT PUBLIKÁCIÓI

Badics J. [1998]: Nem partícionális információs struktúra és köztudott tudás. *Kézirat*, Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem.

Badics J. – Gömöri A. [2000]: Nem partícionális információs struktúra és köztudott tudás. *Szigma*, 31(1-2), 33-38.

Badics J. – Gömöri A. [2001]: Döntés információs probléma mellett és a köztudott tudás. Megjelent: Gömöri András: *Információ és interakció. Bevezetés az információs aszimmetria közgazdasági elméletébe.* Typotex Kiadó, Budapest, 9-21.

Badics J. – Gömöri A. [2001]: Általánosítás: az elvegyítő, szeparáló és részben-szeparáló egyensúly definíciója. Megjelent: Gömöri András: *Információ és interakció. Bevezetés az információs aszimmetria közgazdasági elméletébe.* Typotex Kiadó, Budapest, 39-41.

Badics J. [2001]: Az Aumann-tétel. Megjelent: Gömöri András: *Információ és interakció. Bevezetés az információs aszimmetria közgazdasági elméletébe.* Typotex Kiadó, Budapest, 197-201.

Badics J. [2001]: A Milgrom-féle köztudott tudás definíció. Megjelent: Gömöri András: *Információ és interakció. Bevezetés az információs aszimmetria közgazdasági elméletébe.* Typotex Kiadó, Budapest, 193-197.