BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM
Közgazdasági és Gazdaságinformatikai Doktori Iskola

TÉZISGYŰJTEMÉNY

Balog Imre

Néhány probléma a diszkontált sztochasztikus játékok elméletéből

című Ph.D. értekezéséhez

Témavezetők:
Ágoston Kolos Csaba PhD
Pintér Miklós PhD

Budapest, 2025

1. Kutatási előzmények és a téma indoklása

A *sztochasztikus játékok* (más néven *Markov-játékok*) különösen fontos szerepet töltenek be, mivel általános és rugalmas keretet nyújtanak a dinamikus, több időszakon átívelő döntési problémák elemzésére (Shapley, 1953; Solan és Vieille, 2015). A sztochasztikus játékok ezért a (nemkooperatív) játékelméletben a következőképpen helyezhetők el. A *Markov-folyamatok* egyik természetes kiterjesztését a *Markov döntési folyamatok* jelentik, ahol az állapotokhoz már kifizetések és akciók is társulnak. Egy Markov döntési folyamat pedig felfogható egy egyszereplős sztochasztikus játékként. Ugyanakkor a sztochasztikus játékok az *ismételt játékok* általánosításai is, mivel az egyes játékkörökben a játékosok nem feltétlenül ugyanazzal a játékkal szembesülnek, hanem az állapotváltozások révén eltérő játékhelyzetek adódhatnak.

A különböző problémák eltérő játékmodellekhez vezetnek, amelyek egyik alapvető választóvonala az, hogy a sztochasztikus játék *diszkrét* vagy *folytonos* időben zajlik. Mivel a sztochasztikus játékok elmélete rendkívül szerteágazó, az értekezés elsősorban a *diszkrét idejű*, *véges számú játékost* tartalmazó játékmodellek vizsgálatára összpontosít. Kiemelendő továbbá, hogy figyelmünk főként a *diszkontált* sztochasztikus játékok elemzésére irányul, ugyanakkor bizonyos esetekben a *teljes jutalom*, illetve a *hosszú tá-*

vú átlagos jutalom esetének vizsgálata is szerepet kap, kisebb-nagyobb hangsúllyal.

A sztochasztikus játékok alkalmazási területe széleskörű: megjelennek többek között a fegyverkezési versenyek elemzésében (Winston, 1978), az adóelkerülés vizsgálatában (Raghavan, 2006), valamint a halászati erőforrásokért folytatott konfliktusok modellezésében (Levhari és Mirman, 1980). További alkalmazásokat számos tanulmány és monográfia tárgyal; a teljesség igénye nélkül lásd például White (1993); Puterman (1994); Amir (2003); Solan és Vieille (2015); Chen (2019).

Az utóbbi években számos kutatás középpontjába a diszkontált sztochasztikus játékok kerültek, amelyekben változatos diszkontálási technikákat vettek figyelembe Wu, Wang és Kong (2021); Wu, Tang és Medina (2022); Yu, Guo és Xia (2022).

Az értekezés három eltérő játékmodell keretében vizsgálja azokat az eseteket, amikor a sztochasztikus játékokban a diszkontráta az idő, az aktuális állapot vagy az akcióprofil függvényében változik.

Az 1. táblázat összefoglalja, hogy az értekezésben vizsgált három probléma mely fejezetben, milyen játékmodell keretében jelenik meg, továbbá azt is, hogy az adott fejezetben mely diszkontálási technika kerül részletes elemzésre. Végezetül, a táblázat utolsó oszlopa bemutatja, hogy az egyes problémák megoldásához milyen eszközöket alkalmazunk.

Fejezet	**Játékmodell**	**Diszkontálás**	**Megközelítés**
2	N-személyes véges sztochasztikus játékok	Általánosított	Folytonos általánosított játékok
3	Kétszemélyes zérusösszegű sztochasztikus játékok	Szeparábilis	Szuperjátékok
4	Végesen additív Markov döntési folyamatok	Fodrozódó	Szuperfolyamatok
		Szeparábilis	

1. táblázat. Az egyes fejezetekben tárgyalt problémák és a hozzájuk kapcsolódó megoldás.

A játékelméletbe a *folytonos általánosított játékok* osztályát - legjobb tudomásunk szerint - Balog és Pintér (2025) vezeti be, Glicksberg (1952) munkájának alapján. A *szuperjátékok* és *szuperfolyamatok* elvének alkalmazása nem újdonság a sztochasztikus játékok irodalmában (lásd például Filar és Vrieze (1992)), ugyanakkor a bennük rejlő potenciál mindeddig nem került széles körben kiaknázásra.

1.1. Véges sztochasztikus játékok általánosított diszkontálás mellett

Az értekezés elsőként a véges sztochasztikus játékokat tárgyalja általánosított diszkontálás mellett. A kutatás kiindulópontját Fink (1964), Takahashi (1964) és Sobel (1971) eredménye adja: minden véges sztochasztikus játékban exponenciális diszkontálás mellett létezik stacionárius Nash-egyensúly.

A vizsgált kutatási irányhoz kötődően a következő kutatási kérdéseket tesszük fel:

(KK1) *Létezik-e Nash-egyensúlya bármely véges sztochasztikus játéknak általánosított diszkontálás mellett?*

(KK2) *Amennyiben a (KK1) kutatási kérdésre pozitív a válasz, miként jellemezhető az egyensúlyt meghatározó stratégiaprofil?*

1.2. Zérusösszegű sztochasztikus játékok szeparábilis diszkontálás mellett

Az értekezés második problémaköre a (kétszemélyes) zérusösszegű sztochasztikus játékok elemzésére irányul *szeparábilis diszkontálás* mellett. Ismert, hogy exponenciális diszkontálás esetén minden zérusösszegű véges sztochasztikus játéknak létezik értéke, és mindkét játékos számára létezik 0-optimális (röviden: optimális) stacionárius stratégia (Shapley, 1953).

Ezen előzményekre támaszkodva kutatásunk középpontjában az alábbi, hierarchikusan strukturált kutatási kérdések állnak:

(KK3) *Létezik-e értéke bármely zérusösszegű sztochasztikus játéknak szeparabális diszkontálás mellett?*

(KK4) *Feltéve, hogy a (KK3) kutatási kérdésre adott válasz pozitív, létezik-e minden játékos számára optimális stratégia?*

(KK5) *Amennyiben a (KK4) kutatási kérdésre adott válasz igenlő, milyen további tulajdonságokkal rendelkeznek ezek az optimális stratégiák?*

1.3. Diszkontált Markov döntési folyamatok végesen additív keretrendszerben

Az értekezés harmadik problémaköreként a diszkontált Markov döntési folyamatok vizsgálata történik végesen additív keretrendszerben, *szeparábilis* és *fodrozódó (ripple)* diszkontálás alkalmazásával egyaránt. Az elemzést ismételten az exponenciális diszkontálásra vonatkozó eredmény alapozza meg (Sudderth, 2016): minden végesen additív Markov döntési folyamatban, exponenciális diszkontálás mellett, a játékos számára létezik optimális stacionárius stratégia.

A fodrozódó diszkontálás esetén a vizsgálat az alábbi kutatási kérdésekre összpontosít:

(KK6) *Létezik-e optimális stratégia a játékos számára minden végesen additív Markov-döntési folyamatban fodrozódó diszkontálás mellett?*

(KK7) *Amennyiben a (KK6) kutatási kérdésre adott válasz pozitív, milyen további tulajdonságokkal rendelkeznek az optimális stratégiák?*

A szeparábilis diszkontálás esetén az alábbi kutatási kérdések merülnek fel:

(KK8) *Létezik-e optimális stratégia a játékos számára minden végesen additív Markov döntési folyamatban szeparábilis diszkontálás mellett?*

(KK9) *Amennyiben a (KK8) kutatási kérdésre adott válasz pozitív, milyen további tulajdonságokkal rendelkeznek az optimális stratégiák?*

2. Felhasznált módszerek és jelölések

Az értekezés diszkontált sztochasztikus játékokkal foglalkozik, a matematika különböző ágait felhasználva, többek között az *általános topológia*, a *funkcionálanalízis*, a *leíró halmazelmélet* és a *végesen additív halmazfüggvények* elméletét.

Továbbá az értekezés minden fejezete specifikus játékelméleti fogalmakat és eszközöket alkalmaz. A 2. fejezet a véges sztochasztikus játékokat tárgyalja, Parthasarathy és Babu (2020, 2. fejezet) és Solan (2022, 4. fejezet) munkáira támaszkodva. A folytonos általánosított játékok elemzéséhez a *Glicksberg-féle fixponttételt* (Glicksberg, 1952) használja. A 3. fejezet a zérusösszegű sztochasztikus játékokra összpontosít, követve Parthasarathy és Babu (2020, 3. fejezet), valamint Flesch, Predtetchinski and Sudderth (2020) és Nowak (1984A,B) munkáit. A 4. fejezet erőteljesen épít Sudderth (2016) munkájára a végesen additív Markov döntési folyamatokról.

3. Az értekezés tudományos eredményei

3.1. Véges sztochasztikus játékok általánosított diszkontálás mellett

A fejezetben ismertetett tudományos eredmények a Balog és Pintér (2025) tanulmányban kerültek publikálásra. Az eredmények a szerzők közös és elválaszthatatlan munkájának eredményeként jöttek létre. Az értekezés ezeket a kutatási eredményeket mutatja be:

1. Bevezeti a *folytonos általánosított játékok* osztályát, és igazolja, hogy minden ilyen játéknak létezik Nash-egyensúlya.

2. Megmutatja, hogy minden véges sztochasztikus játék általánosított diszkontálás mellett egy folytonos általánosított játék.

3. A (KK1) kutatási kérdés esetében bizonyítja, hogy minden véges sztochasztikus játéknak létezik Nash-egyensúlya általánosított diszkontálás mellett.

4. A (KK2) kutatási kérdés esetében bemutat egy példát arra, hogy létezik olyan véges sztochasztikus játék, amelynek nincs stacionárius Nash-egyensúlya általánosított diszkontálás mellett.

3.2. Zérusösszegű sztochasztikus játékok szeparábilis diszkontálás mellett

Az értekezés bevezeti a *szeparábilis diszkontálás* technikáját zérusösszegű sztochasztikus játékok esetén, valamint a megoldásukhoz a *szuperjátékok* fogalmát. Emellett az értekezés Nowak (1984A,B) munkái alapján meghatároz továbbá a zérusösszegű végtelen sztochasztikus játékok három speciális osztályát szeparábilis diszkontálás mellett: a *Borel*, a *Szuszlin* és a *Nowak* sztochasztikus játékokat.

A (KK3) kutatási kérdésre válaszul az értekezés az alábbi eredményeket adja:

1. Minden zérusösszegű *véges* sztochasztikus játéknak létezik értéke szeparábilis diszkontálás mellett.

2. Egy zérusösszegű *megszámlálható* sztochasztikus játéknak *létezik* létezik értéke szeparábilis diszkontálás mellett, *amennyiben* legalább az egyik játékos minden állapotban csupán véges számú akció közül választhat.

3. Minden zérusösszegű *Borel*, *Szuszlin* és *Nowak* sztochasztikus játéknak létezik értéke szeparábilis diszkontálás mellett.

Az egyszerűség kedvéért nevezzük a szeparábilisan diszkontált jutalmat maximalizáló játékost *Támadónak*, a másik játékost pedig *Védekezőnek*. A (KK4) és a (KK5) kutatási kérdésekre adott válaszok a következők:

1. Minden zérusösszegű *véges* sztochasztikus játékban, szeparálható diszkontálás mellett, mindkét játékosnak van *optimális Markov-stratégiája*.

2. A *Védekezőnek* mindig van optimális Markov-stratégiája zérusösszegű *Borel*, *Suslin* és *Nowak* sztochasztikus játékokban.

3. Zérusösszegű *számlálható* sztochasztikus játékban, szeparábilis diszkontálás mellett, a *Védekezőnek* van optimális Markov-stratégiája, *amennyiben* legalább az egyik játékos minden állapotban csupán véges számú akció közül választhat.

4. Zérusösszegű *Borel*, *Suslin* és *Nowak* sztochasztikus játékokban a *Támadónak* mindig van ε-optimális Markov-stratégiája minden $\varepsilon > 0$ esetén.

5. Zérusösszegű *számlálható* sztochasztikus játékokban, szeparábilis diszkontálás mellett, az *Támadónak* van ε-optimális Markov-stratégiája, *amennyiben* legalább az egyik játékos minden állapotban csupán véges számú akció közül választhat.

6. A disszertáció megad egy zérusösszegű *véges* sztochasztikus játékot szeparábilis diszkontálással, amelyben egyik játékosnak sincs optimális *stacionárius* stratégiája.

A fenti eredmények elérése érdekében az értekezés a *szuperjáték* módszerét alkalmazza. Ennek során nagymértékben épít Flesch et al. (2020) munkájára a pozitív zérusösszegű megszámlálható sztochasztikus játékok, valamint Nowak (1984A,B) munkáira a zérusösszegű végtelen sztochasztikus játékok területén.

3.3. Diszkontált Markov döntési folyamatok végesen additív keretrendszerben

Az értekezés bevezeti a *szeparábilis* és a *fodrozódó (ripple) diszkontálás* fogalmát végesen additív Markov döntési folyamatokban, valamint a megoldásukhoz a *szuperfolyamatokat*.

A (KK6) és a (KK7), valamint a (KK8) és a (KK9) kutatási kérdésekre válaszul az értekezés az alábbi eredményeket adja:

1. Minden végesen additív Markov döntési folyamatban a játékosnak van *optimális* stratégiája *fodrozódó diszkontálás* mellett.

2. Minden végesen additív Markov döntési folyamatban a játékosnak van *optimális Markov* stratégiája *szeparábilis diszkontálás* mellett.

3. Bemutattunk egy példát olyan végesen additív Markov döntési folyamatra *szeparábilis diszkontálás* mellett, amelyben a játékosnak *nincs optimális stacionárius*

stratégiája. Hasonló ellenpélda konstruálható fodrozódó diszkontálás esetén is.

A fenti eredmények elérése érdekében az értekezés a *szuperfolyamatok* módszerét alkalmazza. Ennek során nagymértékben támaszkodik Sudderth (2016) munkájára a negatív végesen additív Markov döntési folyamatok területén.

4. Főbb hivatkozások

Amir, R. (2003): *Stochastic Games in Economics and Related Fields: An Overview*. In: Neyman, A. and Sorin, S. (eds.), Stochastic Games and Applications, NATO Science Series C, Mathematical and Physical Sciences, Vol. 570, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Chapter 30, pp. 455–470.
https://doi.org/10.1007/978-94-010-0189-2_30

Chen, B. S. (2019): *Stochastic Game Strategies and their Applications*. CRC Press
https://doi.org/10.1201/9780429432941

Filar, J. A. és Vrieze, O. J. (1992). *Weighted reward criteria in Competitive Markov Decision Processes*. ZOR Zeitschrift für Operations Research Methods and Models of Operations Research, 36:343–358.
https://doi.org/10.1007/BF01416234

Fink, A. M. (1964): *Equilibrium in a stochastic n-person game*. Journal of Science of the Hiroshima University, 28(1):89–93.
https://doi.org/10.32917/hmj/1206139508

Flesch, J., Predtetchinski, A. és Sudderth, W. (2020): *Positive Zero-Sum Stochastic Games with Countable State and Action Spaces*. Applied Mathematics & Optimization, 82:499–516.

https://doi.org/10.1007/s00245-018-9536-3

Glicksberg, I. L. (1952): *A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem, with Application to Nash Equilibrium Points*. Proceedings of the American Mathematical Society, 3(1):170–174. https://doi.org/10.2307/2032478

Levhari, D. és Mirman, L. J. (1980): *The Great Fish War: An Example Using a Dynamic Cournot-Nash Solution*. The Bell Journal of Economics, 11(1):322–334. https://doi.org/10.2307/3003416

Nowak, A. S. (1984A): *On zero-sum stochastic games with general state space I*. Probability and Mathematical Statistics, 4(1):13–32.

Nowak A. S. (1984B): *On zero-sum stochastic games with general state space II*. Probability and Mathematical Statistics, 4(2):143–152.

Parthasarathy, T. és Babu, S. (2020): *Stochastic Games and Related Concepts*. Springer Singapore https://doi.org/10.1007/978-981-15-6577-9

Puterman, M. L. (1994): *Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming*. John Wiley & Sons, Inc. https://doi.org/10.1002/9780470316887

Raghavan, T. E. S. (2006): *A Stochastic Game Model of Tax Evasion*. In: Haurie, A., Muto, S., Petrosjan, L.A., Raghavan, T.E.S. (eds) Advances in Dynamic Games. Annals of the International Society of Dynamic Games, vol 8. Birkhäuser Boston. Chapter 21, pp. 397–420.
https://doi.org/10.1007/0-8176-4501-2_21

Shapley, L. S. (1953): *Stochastic games*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 39(10):1095–1100.
https://doi.org/10.1073/pnas.39.10.1095

Sobel, M. J. (1971): *Noncooperative Stochastic Games*. The Annals of Mathematical Statistics, 42(6): 1930–1935.
https://doi.org/10.1214/aoms/1177693059

Solan, E. (2022): *A Course in Stochastic Game Theory*. Cambridge University Press
https://doi.org/10.1017/9781009029704

Solan E. és Vieille N. (2015): *Stochastic games*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 112(45):13743–13746.
https://doi.org/10.1073/pnas.1513508112

Sudderth, W. D. (2016): *Finitely Additive Dynamic Programming*. Mathematics of Operations Research, 41(1):92—108.
https://doi.org/10.1287/moor.2015.0717

Takahashi, M. (1964): *Equilibrium points of stochastic non-cooperative n-person games*. Journal of Science of the Hiroshima University, 28(1):95–99.
https://doi.org/10.32917/hmj/1206139509

White, D. J. (1993): *A Survey of Applications of Markov Decision Processes*. Journal of the Operational Research Society, 44(11):1073–1096.
https://doi.org/10.1057/jors.1993.181

Winston, W. (1978): *A Stochastic Game Model of a Weapons Development Competition*. SIAM Journal on Control and Optimization, 16(3):411–419.
https://doi.org/10.1137/0316026

Wu, X., Wang, Q. és Kong, Y. (2021): *Two-person zero-sum stochastic games with varying discount factors*. AIMS Mathematics, 6(10):11516–11529.
https://doi.org/10.3934/math.2021668

Wu, X., Tang, Y. és Medina, R. (2022): *Numerical Calculation of Optimal Policy Pairs in Zero-sum Stochastic Games with Varying Discount Factors*. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2022(1):1–10.
https://doi.org/10.1155/2022/7474566

Yu, Z., Guo, X. és Xia, L. (2022): *Zero-sum semi-Markov games with state-action-dependent discount factors*. Discrete Event Dynamic Systems, 32(4):545–571.

https://doi.org/10.1007/s10626-022-00366-4

5. Saját publikációk listája

Balog, I. (2023): *Biztosítási díj meghatározása összetett kockázati modellben általánosított exponenciális hasznosságfüggvény esetében*. Szigma, 54(1):55–79.

Balog, I. és Pintér, M. (megjelentés alatt): *Folytonos általánosított játékok*. Alkalmazott Matematikai Lapok