Közgazdasági és Gazdaságinformatikai Doktori Iskola

TÉZISGYŰJTEMÉNY

Szádoczki Zsombor

Preferencia modellezés gráfelméleti megközelítéssel

című Ph.D. értekezéséhez

Témavezető:

Bozóki Sándor
egyetemi tanár

Budapest, 2024

Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék

TÉZISGYŰJTEMÉNY

Szádoczki Zsombor

Preferencia modellezés gráfelméleti megközelítéssel

című Ph.D. értekezéséhez

Témavezető:

Bozóki Sándor
egyetemi tanár

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke

I. Kutatási előzmények és a téma indoklása

1. A kutatás háttere

A doktori disszertáció többszempontú döntési problémákra koncentrál, különös tekintettel a páros összehasonlítás alapú módszerekre. A többszempontú döntési módszerek célja véges számú (általában egymással ellentétes) kvantitatív és kvalitatív szempontok alapján meghatározni alternatívák egy véges halmazából a legjobb vagy a legjobb néhány alternatívát, esetleg egy teljes rangsort hirdetni az alternatívákra vonatkozóan.

Az egyik legnépszerűbb többszempontú döntési módszer az Analytic Hierarchy Process (AHP), melyet Saaty javasolt 1977-ben (Saaty, 1977, 1980). Ez a szempontok, alszempontok, és így tovább, egy hierarchikus rendszerén alapszik, míg az alternatívák szempontonkénti értékelésére és a szempontsúlyok meghatározására páros összehasonlítás mátrixokat (Pairwise comparison matrix–PCM) használ. Egy (multiplikatív, arány skálájú) páros összehasonlítás mátrix adott eleme megmutatja, hogy a sorának megfelelő alternatíva (szempont) hányszor olyan jó/erős/fontos, mint az oszlopának megfelelő alternatíva.

A döntések modellezése mellett számos más területen használnak páros összehasonlítás mátrixokat. Ilyen például a preferenciák számszerűsítése, a rangsorolás, a sport és a pszichometria (Thurstone, 1927; Davidson és Farquhar, 1976; Csató, 2021). Egy páros összehasonlítás mátrix esetében ezeket az összehasonlításokat egy mátrixba helyezzük. A módszer alapötlete az, hogy a döntéshozók általában nem tudják a preferenciáikat egy lépésben pontosan meghatározni egy bonyolult feladattal kapcsolatban, azonban jól meg tudják őket becsülni az alternatívák párjaira vonatkozóan egyetlen szempont szerint.

Kutatásainkban elsősorban azzal az esettel foglalkozunk, amikor néhány összehasonlítás hiányzik, így egy nem teljes adatsorral, egy nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixszal (incomplete PCM–IPCM) van dolgunk. Bár a döntéselméleti megközelítést használjuk a disszertációban, mivel mind a páros összehasonlítások, mind a hiányzó adatok gyakran megjelennek számos egyéb kutatási területen, így eredményeink sokkal szélesebb körben lehetnek alkalmazhatóak.

A páros összehasonlítás mátrix nem teljességének megannyi oka lehet. Előfordulhat, hogy az adatok egy része elveszett, néhány összehasonlítást egyszerűen nem lehet elvégezni, vagy a döntéshozónak nincs elég ideje, esetleg egyszerűen csak nem szeretné az összes összehasonlítást elvégezni, ami gyakran egy kifejezetten hosszadalmas feladat.

Harker (1987) az elsők között javasolta a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok alkalmazását annak érdekében, hogy a döntéshozónak föltett kérdések számát csökkenteni lehessen az Analytic Hierarchy Process módszerben. Ez a megoldás különösen hasznos csoportos döntési feladatokban, amikor a döntést számos döntéshozó preferenciái alapján kell meghozni, és mindannyiuknak ki kell töltenie az összes szükséges páros összehasonlítás mátrixot.

Ha nem teljes adatsorral dolgozunk, akkor az eredmény – az alternatíváknak a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokból számolt rangsora – erősen függ az ismert elemek számától és azok elrendezésétől. Az utóbbinak, az összehasonlítások struktúrájának, a kezelésére rendkívül hasznos eszköz a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok reprezentáló gráfja (Gass, 1998). A reprezentáló gráfban a csúcsok az alternatíváknak (szempontoknak) feleltethetők meg, míg pontosan akkor van él két csúcs között, ha a megfelelő két elem közötti összehasonlítás ismert.

Bár a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok irodalma a páros összehasonlításokhoz kapcsolódó egyéb területekhez képest nem túl nagy, az elmúlt években számos tanulmány jelent meg a témában mind az elméleti eredményeket (Zhou et al., 2018; Kułakowski és Talaga, 2020; Szybowski et al., 2020; Ágoston és Csató, 2022), mind az alkalmazásokat tekintve (Bozóki et al., 2016).

A kutatásunk egyik fő témája a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok ajánlott kitöltési mintázatai. Az összehasonlítások milyen struktúrája biztosítja, hogy a számított eredmények közel lesznek ahhoz, amit a teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixból kapnánk? Ennek és az ehhez hasonló kérdéseknek a megválaszolásában nyújt segítséget a reprezentáló gráfok gráfelméleti tulajdonságainak vizsgálata. Az eredményeink nem csak elméleti szempontból fontosak, de könnyen alkalmazhatók a többszempontú döntési módszerek gyakorlatában is.

A doktori disszertációban szereplő összes kutatási eredmény folyóiratcikkek formájában került dokumentálásra. Az értekezésben az alábbi tanulmányokat fűztük össze újraszerkesztés nélkül, olyan formában ahogyan megjelentek, illetve megjelentetni tervezzük őket.

I. Szádoczki, Zs., Bozóki, S., és Tekile, H. A. (2022). Filling in pattern designs for incomplete pairwise comparison matrices: (Quasi-)regular graphs with minimal diameter. *Omega*, 107:102557. https://doi.org/10.1016/j.omega.2021.102557.

II. Szádoczki, Zs., Bozóki, S., Juhász, P., Kadenko, S. V., és Tsyganok, V. (2023). Incomplete pairwise comparison matrices based on graphs with average degree approximately 3. *Annals of Operations Research*, 326(2):783-807. https://doi.org/10.1007/s10479-022-04819-9.

III. Szádoczki, Zs., és Bozóki, S. (2023). Optimal sequences for pairwise comparisons: the graph of graphs approach. *Műhelytanulmány.* https://doi.org/10.48550/arXiv.2205.08673.

IV. Temesi, J., **Szádoczki, Zs.** és Bozóki, S. (2024). Incomplete pairwise comparison matrices: Ranking top women tennis players. *Journal of the Operational Research Society*, 75(1):145-157. https://doi.org/10.1080/01605682.2023.2180447.

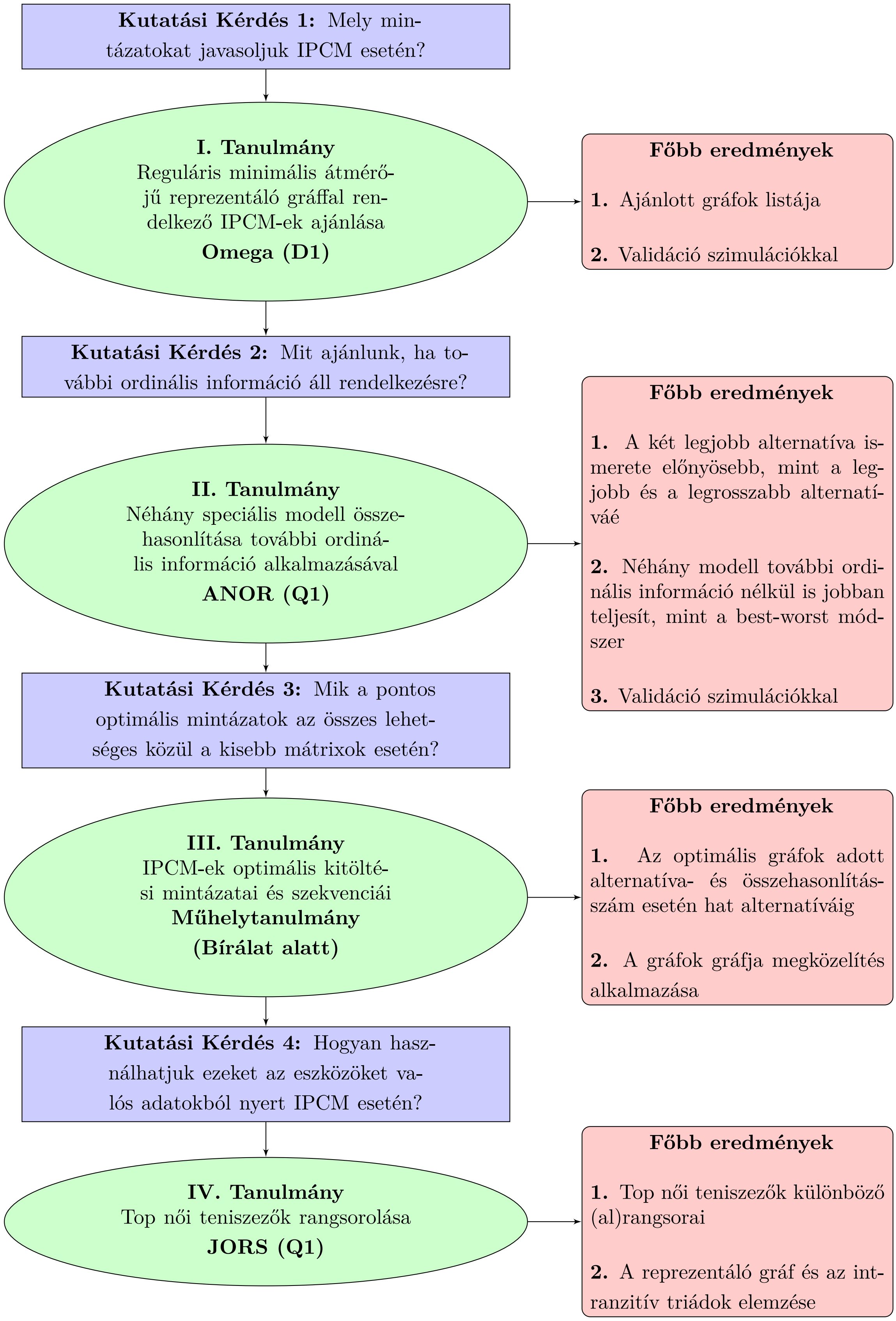
2. A kutatás struktúrája

A disszertáció ugyanabba a kutatási vonalba, akadémiai műhelybe tartozik, mint Bozóki (2006), Csató (2015), Ábele-Nagy (2019) és Poesz (2022). Ahogy azt korábban említettük a főbb vizsgált kérdések és elemzett problémák a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok reprezentáló gráfjainak gráfelméleti tulajdonságai köré csoportosulnak. Az értekezésben szereplő tanulmányok kutatási kérdéseinek, publikációinak és eredményeinek kapcsolata az 1. ábrán látható.

Az I., II. és III. Tanulmányok egymás természetes (és bizonyos értelemben véve lineáris) folytatásai, módszertani szempontból mindegyik különböző szimulációkon alapul. A IV. Tanulmány a többszempontú döntési feladatokhoz tartozó irodalom és a gráfelmélet ugyanazon eszközeit használja, mint a többi publikáció, azonban az optimális kitöltési mintázatok helyett a páros összehasonlításokon alapuló rangsorra koncentrál.

Minden, a disszertációban szereplő kutatási eredmény egy sejtéssel kezdődött, miszerint a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok reprezentáló gráfjának átmérője (a leghosszabb legrövidebb út) egy fontos tulajdonság lehet annak érdekében, hogy megbízható és jó becslését kapjuk a döntéshozó preferenciáinak. Ez a sejtés az I. Tanulmány egyik szerzőtársának diplomamunkájából származott (Tekile, 2017), ahol az asztali tenisz játékosok mérkőzéseiből generált reprezentáló gráf tartalmazott egy nagyon hosszú legrövidebb utat két csúcs (játékos) között, aminek köszönhetően a kiszámított eredmények félrevezetőek voltak.

Széleskörű irodalomkutatást végeztünk a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok kitöltési struktúráival kapcsolatban, amelyből kiderült, hogy a reprezentáló gráf valamilyen értelemben vett regularitásáról többen megállapították, hogy egy fontos tulajdonság lehet az eredményekre nézve (Wang és Takahashi, 1998; Kułakowski et al., 2019), azonban az átmérő szinte teljesen hiányzott a releváns publikációkból.



1. ábra. A kutatási kérdések, publikációk és fő eredmények folyamatábrája

Az I. Tanulmányban a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok reguláris minimális átmérővel rendelkező reprezentáló gráfú kitöltési mintázatait javasoltuk, az ajánlott gráfoknak egy listáját szolgáltattuk, valamint a javaslatainkat szimulációk segítségével validáltuk. Ezek az eredmények számos további kutatási kérdéshez vezettek.

Elsőként a II. Tanulmányban a leggyakoribb esetekkel foglalkoztunk részletesebben, amikor csak néhány alternatívát tartalmaz a feladat, valamint az előzetes ordinális információk bevonására koncentráltunk, amit gyakran használnak a különböző többszempontú döntési módszerek esetében, mint például a best-worst eljárás (Rezaei, 2015). Mivel egy ukrán kutatócsoport tőlünk függetlenül, nagyjából egy időben talált rá a reprezentáló gráf átmérőjének fontosságára (Kadenko és Tsyganok, 2020), így közösen folytattuk vizsgálatainkat a II. Tanulmányban. Sikerült összehasonlítanunk néhány népszerű kitöltési modellt a mi javaslatainkkal, valamint az előzetes ordinális információk hasznosságát is értékeltük.

A III. Tanulmányban továbbra is kisebb mátrixokat (legfeljebb hat alternatívával) vizsgáltunk, amelyek a leggyakoribbak a többszempontú döntési problémákban. A II. Tanulmány egyik legfontosabb limitációja az volt, hogy néhány esetben az összehasonlított kitöltési struktúrák különböző számú összehasonlítással rendelkeztek, így a kitöltési mintázat és az összehasonlítások számának hatása nem volt szétválasztható. Ennek alapján a III. Tanulmányban a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok összes lehetséges kitöltési mintázatát összehasonlítottuk adott számú alternatívára és összehasonlításszámra vonatkozóan, aminek köszönhetően ki tudtuk választani közülük a legjobbat. Gyarmati et al. (2023) alapján az eredményeink általánosabbnak tűnnek, és nem a páros összehasonlítás mátrixokra specifikusak.

Ahogy korábban említettük, a IV. Tanulmány ugyanazokat az eszközöket használta, mint a többi disszertációban szereplő publikáció, azonban a nem teljes páros összehasonlítások rangsorolási aspektusára koncentrált, benne top női teniszezők kerülnek rangsorolásra ezzel a módszerrel. Alapvetően visszatértünk egy korábbi kutatáshoz (Bozóki et al., 2016), amely hasonló valós adatbázist használt, azonban az eredményeket kibővítettük a játékosok mérkőzéseit reprezentáló gráf mélyebb elemzésével és az intranzitív triádok részletesebb vizsgálatával.

II. A felhasznált módszerek

Ebben a fejezetben a disszertációban használt módszerekhez, a (nem teljesen kitöltött) páros összehasonlítás mátrixokhoz és gráf reprezentációikhoz kapcsolódó legfontosabb fogalmakat definiáljuk. Az itt fölsorolt legtöbb fogalom az értekezéshez tartozó négy eredeti tanulmányban is megjelenik.

Legyen a szempontok (alternatívák) száma egy többszempontú döntési problémában n!

1. Definíció (Páros összehasonlítás mátrix (PCM)). *Egy $n \times n$-es $A = [a_{ij}]$ mátrixot páros összehasonlítás mátrixnak nevezünk, ha pozitív ($a_{ij} > 0$ minden i és j esetén) és teljesíti a reciprocitás tulajdonságát ($1/a_{ij} = a_{ji}$ minden i és j esetén).*

Amikor a valóságban egy döntéshozó kitölt egy páros összehasonlítás mátrixot, általában a mátrix elemei között van valamekkora inkonzisztencia. Előfordulhat, hogy az A alternatíva kétszer olyan jó, mint B, míg B háromszor olyan jó, mint C, azonban A nem $(2 \times 3 =)$6-szor olyan jó, mint C.

2. Definíció (Konzisztens PCM). *Egy páros összehasonlítás mátrixot konzisztensnek nevezünk, ha $a_{ik} = a_{ij}a_{jk}$ teljesül minden i, j, k esetén. Ha egy páros összehasonlítás mátrix nem konzisztens, akkor inkonzisztensnek nevezzük.*

Az inkonzisztencia mérésének számos módja létezik (Brunelli, 2018; Kułakowski és Talaga, 2020), azonban a gyakorlatban továbbra is a Saaty által javasolt inkonzisztencia index a legnépszerűbb mérőszám (Saaty, 1977).

3. Definíció (CR inkonzisztencia index (Consistency Ratio)). *Az A $n \times n$-es PCM CR inkonzisztencia indexét az alábbi módon definiáljuk:*

$$CR = \frac{CI}{RI}, \tag{1}$$

ahol CI (Consistency Index) a következő kifejezéssel írható le:

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}, \tag{2}$$

ahol $\lambda_{\max}$ az A mátrixhoz tartozó domináns (legnagyobb) sajátérték, RI (Random Index) pedig véletlenszerűen generált $n \times n$-es PCM-ek megfelelően nagy mintájából számolt átlagos CI mutató.

Ahhoz, hogy meghatározhassuk az alternatívák rangsorát, szükségünk van egy súlyvektor számítási módszerre. A kiszámított súlyvektor elemei mutatják az adott alternatívák teljesítményét, jóságát. Konzisztens páros összehasonlítás mátrixok esetén az általában használt módszerek mind ugyanazt a vektort határozzák meg, azonban inkonzisztens mátrixok esetén az eredmények különbözhetnek.

A két leggyakrabban használt súlyszámítási technika a logaritmikus legkisebb négyzetek módszere (Crawford és Williams, 1985) és a sajátvektor módszer (Saaty, 1977).

4. Definíció (Logaritmikus legkisebb négyzetek módszere (LLSM)). *Legyen A egy $n \times n$-es PCM! Az A mátrixból az LLSM módszer segítségével meghatározott pozitív w súlyvektor a következő probléma optimális megoldása:*

$$\min_{w} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\ln(a_{ij}) - \ln\left(\frac{w_i}{w_j}\right)\right)^2, \tag{3}$$

ahol w_i a w vektor i. koordinátája.

5. Definíció (Sajátvektor (EV) módszer). *Legyen A egy $n \times n$-es PCM! Az A mátrixból az EV módszer segítségével meghatározott pozitív w súlyvektort az alábbi módon definiáljuk:*

$$A \cdot w = \lambda_{\max} \cdot w, \tag{4}$$

ahol λ_{max} az A mátrix domináns sajátértéke.

A (3) és (4) egyenletek megoldása csak skalárral való szorzás erejéig egyértelmű, így a súlyvektorok elemeinek összegét általában egyre normálják.

A kutatásaink legnagyobb része a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok reprezentáló gráfjaival foglalkozik.

6. Definíció (Nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix (IPCM)). *Az $A = [a_{ij}]$ $n \times n$-es mátrixot nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixnak (IPCM) nevezzük, ha:*

- $a_{ij} \in \mathbb{R}_+ \cup \{*\}\ \forall\ 1 \leq i, j \leq n$ *és*
  - $a_{ji} = 1/a_{ij}$ *ha* $a_{ij} \in \mathbb{R}_+$,
  - $a_{ji} = *$ *ha* $a_{ij} = *$,

ahol $*$ jelöli a hiányzó elemeket, míg $\mathbb{R}_+$ a pozitív valós számok halmaza.

7. Definíció (Reprezentáló gráf). *Az A nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixban szereplő összehasonlítások struktúráját a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf segítségével reprezentálhatjuk, ahol:*

- *a $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ csúcsok az alternatíváknak felelnek meg,*
- *míg az élek E halmaza az A mátrix főátlón kívüli elemeit reprezentálja:*

$$e_{ij} \in E \iff a_{ij} \neq * \text{ és } i \neq j.$$

8. Definíció (Út). *Egy út élek olyan véges (vagy végtelen) sorozata, amely csúcsok egy sorozatát köti össze úgy, hogy minden egyes csúcsot (és így minden egyes élt) csak egyszer tartalmaz (egyszer látogat meg).*

A logaritmikus legkisebb négyzetek módszere és a sajátvektor súlyszámítási módszer is általánosítható a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok halmazára. Az LLSM esetében a (3) optimalizálási problémát csak az ismert mátrixelemekre alkalmazzuk, míg az EV módszer esetén a súlyvektort abból a teljessé tett mátrixból számoljuk, ahol a hiányzó elemeket úgy helyettesítjük változókkal, hogy a CR inkonzisztencia index minimális legyen (ezt a technikát időnként CREV módszerként is említik). Mindkét módszer pontosan akkor határoz meg egyértelmű súlyvektort, ha a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix reprezentáló gráfja összefüggő (Bozóki et al., 2010).

9. Definíció (Összefüggő gráf). *Egy irányítatlan gráf két csúcsa, u és v, összefüggő, ha a gráfban található út u és v között. Egy gráfot összefüggőnek nevezünk, ha a gráf bármely két csúcsa összefüggő.*

A minimálisan összefüggő gráfokat feszítőfáknak nevezzük, amelyek n csúcs esetén $n - 1$ élt tartalmaznak, és fontos szerepet játszanak a bemutatott kutatásban.

10. Definíció (Feszítőfa). *Legyen $G = (V, E)$ egy összefüggő gráf! $G' = (V, E')$ a G egy feszítőfája, ha $E' \subseteq E$ az élek egy olyan minimális halmaza, amely összeköti G összes csúcsát.*

A regularitás és a reprezentáló gráf átmérőjének értéke a két legfontosabb tulajdonság, amit vizsgálunk a disszertáció tanulmányaiban.

11. Definíció (k-regularitás). *Egy gráfot k-regulárisnak nevezünk, ha minden csúcsnak k szomszédja van, vagyis minden csúcs fokszáma k.*

12. Definíció (Egy gráf átmérője). *A G gráf d átmérője a leghosszabb legrövidebb út hossza bármely két csúcs között:*

$$d = \max_{u,v \in V(G)} \ell(u, v),$$

ahol $V(G)$ a G gráf csúcsainak halmaza, $\ell(.,.)$ pedig a gráftávolság két csúcs között, azaz a legrövidebb út hossza közöttük.

Az ebben a fejezetben definiált fogalmakat a doktori disszertációban összefűzött valamennyi tanulmányban alkalmazzuk. Ezek mellett az I., II. és III. Tanulmányok különböző szimulációkat alkalmaznak, míg a IV. Tanulmány a páros összehasonlítások intranzitív triádjait teszteli különböző módokon. Ezeket a módszereket a következő fejezetben részletezzük, mivel az értekezés tudományos eredményeinek szerves részét képezik.

III. Az értekezés főbb eredményei

1. I. Tanulmány: Nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok kitöltési mintázatai: (Kvázi-)reguláris minimális átmérőjű gráfok

Az I. Tanulmány (Szádoczki et al., 2022) a disszertációban szereplő későbbi kutatások legtöbbjének alapjául és inspirációjául szolgált. A célunk az volt, hogy egy új megközelítést javasoljunk a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok kitöltési mintázataira, ami megmutatja, hogy mely összehasonlításokat érdemes elvégezni. A tanulmányban erősen támaszkodtunk a mátrixok gráf reprezentációjára (Gass, 1998), és az ezen gráfokhoz tartozó gráfelméleti tulajdonságokra. Ez a publikáció az alábbi kritikus fontosságú feltevésekkel él:

- megválaszthatjuk, hogy mely összehasonlításokat kellene a döntéshozónak elvégeznie (nem adottak előre);
- az összehasonlítandó elemekre vonatkozóan nincs semmilyen előzetes információnk, így kezelhetjük őket szimmetrikusan és koncentrálhatunk a címkézetlen reprezentáló gráfok esetére (az izomorf gráfokat azonosnak tekintjük);

- az összehasonlítások teljes halmazát a döntési folyamat megkezdése előtt kell meghatározni (a feltett kérdések nem adaptívak, nem függnek a korábbi kérdésekre adott válaszoktól).

Ahogy azt említettük, egy korábbi eredmény (Tekile, 2017) alapján az volt a sejtésünk, hogy a reprezentáló gráf átmérője fontos tulajdonság lehet, ha szeretnénk olyan kitöltési mintázatokat meghatározni, amik jól becsülik a teljes mátrixból számolt eredményeket.

Az átmérő a leghosszabb legrövidebb utat számszerűsíti a gráfban. Ennek a mértéknek a minimalizálásával biztosíthatjuk azt, hogy ne legyen két olyan alternatíva a feladatunkban, amelyek csak egy nagyon hosszú indirekt úton keresztül vannak összehasonlítva. Abban az esetben, ha ez előfordulna, akkor a kisebb hibák ezen út mentén összeadódhatnának, szignifikáns hibát okozva az eredményekben.

Egy részletes irodalomáttekintés után azt találtuk, hogy számos korábban ajánlott kitöltési mintázatban megjelenik egyfajta regularitás (McCormick és Bachus, 1952; McCormick és Roberts, 1952; Wang és Takahashi, 1998), azonban az átmérőt nem vizsgálták széles körben.

A reprezentáló gráf regularitása olyan szempontból fontos, hogy az összehasonlítások egyfajta szimmetrikusságát biztosítja, minden alternatívát ugyanannyi másikkal hasonlítunk össze, és nincs központi eleme az összehasonlítások rendszerének.

Azt is érdemes megemlíteni, hogy a korábbi kitöltési mintázatok által használt regularitás definíciók szigorúak voltak. Mi egy enyhébb, általánosabb fogalmat használtunk, és a gráfok egy sokkal szisztematikusabb listáját szolgáltattuk a tanulmány online Függelékében, ami egyfajta „receptkönyvként” szolgálhat a gyakorlati szakemberek számára, hogy adott problémában mely összehasonlítások elvégzését érdemes kérni a döntéshozótól.

Annak érdekében, hogy a kutatásunk szempontjából érdekes gráfokat megtaláljuk, az általunk használt három paraméter a csúcsok (alternatívák) száma, n, a regularitás szintje, k, és az adott mintázat átmérője, d, voltak.

Fontos megemlíteni, hogy abban az esetben, ha n és k is páratlan, akkor nem léteznek n csúcsú k-reguláris gráfok. Emiatt definiáltuk a k-kvázi-reguláris gráfokat, ahol pontosan egy csúcsnak $k+1$ a fokszáma, míg az összes többinek k szomszédja van.

Az összehasonlítások számát (és így a k paramétert) igyekeztünk, amennyire lehet, alacsonyan tartani, és ezzel párhuzamosan minimalizálni a gráf átmérőjét. Matematikai szempontból a minimális d paramétert kerestük adott (n, k) pár esetén.

Kiderült, hogy ennek a kérdésnek erős kapcsolata van a fokszám-átmérő problémával (lásd például Miller és Širáň (2013)), ahol a legnagyobb n paramétert keresik adott (k, d) pár mellett.

Ennek a területnek az ismert eredményei és a többszempontú döntési problémák jellemzői alapján azt állapítottuk meg, hogy a $k = 3, 4, 5$ és a $d = 2, 3$ paraméterértékek lehetnek érdekesek a számunkra (ahol a $d = 1$ azt jelenti, hogy teljes páros összehasonlítás mátrixszal van dolgunk), míg az alternatívák számát 5 és 24 között vizsgáltuk. 24 csúcs fölött a futtatott szimulációk nagyon sok időt vennének igénybe, azonban az alternatívák száma jellemzően jóval kisebb, mint 24 a gyakorlati problémákban, valamint a legnagyobb 5-reguláris gráf, aminek az átmérője 2, éppen 24 csúccsal rendelkezik, így ez egy szép elméleti korlát is. Emellett a probléma kevesebb, mint öt alternatíva esetén nem igazán releváns.

Bár, ahogy azt korábban említettük, néhány gráf már ismert volt a fokszám-átmérő probléma irodalmából, a legtöbb ajánlott kitöltési mintát reprezentáló gráfot nekünk kellett meghatároznunk. Ehhez számos módszert használtunk: kisebb esetekben az összes lehetséges gráf leszámlálása, és azok közül a minimális átmérőjűek kiválasztása is működött, míg nagyobb csúcsszám esetén különböző gráfbővítési technikákkal, gráfszorzatokkal, egészértékű programozással, és egyéb technikákkal próbálkoztunk. Ez egy hosszú és időigényes folyamat volt, ugyanaz az ötlet és módszer ritkán működött két eltérő esetben. Végül a különböző paraméterkombinációkra vonatkozóan összesen 34 típusú ajánlott gráfot határoztunk meg.

A gráfok meghatározása után validálnunk kellett, hogy ezek a struktúrák valóban jobb eredményeket biztosítanak, mint egyéb kitöltési mintázatok, vagyis a teljesen kitöltött mátrixból meghatározott súlyvektorhoz közelebbi súlyok adódnak belőlük. Ennek tesztelésére szimulációkat alkalmaztunk, ahol a CREV és a nem teljesen kitöltött esetre általánosított LLSM súlyszámítási módszereket használtuk, míg távolsági mértékként az euklideszi távolság és a Csebisev-távolság (maximum abszolút távolság) kerültek alkalmazásra. Minden egyes paraméterkombinációra vonatkozóan meghatároztuk ezen mutatók átlagát és szórását, az adott kitöltési mintázatból számolt súlyvektor és a teljes mátrixból számolt súlyvektor között.

1000 véletlen konzisztens páros összehasonlítás mátrixot generáltunk minden egyes paraméterkombinációra, majd módosítottuk ezeket három különböző perturbációs (inkonzisztencia) szintet alkalmazva, hogy inkonzisztens mátrixokat kapjunk. Ezt követően az így kapott mátrixokból határoztuk meg a súlyvektorokat, mindig csak az adott mintázathoz tartozó mátrixelemeket figyelembe véve.

A szimulációk során az alábbi struktúrákat hasonlítottuk össze (minden vizsgált gráf összefüggő volt):

- (i) k-(kvázi-)reguláris minimális átmérőjű gráfok;
- (ii) Véletlen összefüggő gráfok ugyanakkora élszámmal, mint az általunk javasolt mintázatok;
- (iii) k-(kvázi-)reguláris nem minimális átmérőjű gráfok;
- (iv) Véletlenszerűen generált, minimális átmérőjű, de nem reguláris gráfok;
- (v) Módosított csillaggráfok (minimális átmérővel és) ugyanakkora élszámmal, mint az általunk javasolt mintázatok.

A szimulációk megerősítették, hogy az általunk javasolt mintázatok jobban teljesítenek az összes többi vizsgált struktúránál szinte minden paraméterkombináció, mindkét távolságmérték, mindkét súlyszámítási módszer és mindhárom inkonzisztencia szint esetén. Emellett azt is validáltuk, hogy a jó eredményekhez mindkét tulajdonságra – a regularitásra és a minimális átmérőre is – szükség van. Az utóbbi egy motiváló példa segítségével is szemléltetésre került, ahol egy kitöltési mintázatként használt reguláris gráfnak kiemelkedően nagy volt az átmérője, ami a teljes esetből számolt súlyvektorhoz képest távoli súlyokat eredményezett.

Ahogy azt korábban említettük, ennek a tanulmánynak az eredményei azonnal alkalmazhatók gyakorlati döntési problémákban, valamint számos további kutatási kérdést generáltak, amelyek egy részét a II. és a III. Tanulmányban vizsgáltuk meg.

A tanulmányhoz kapcsolódó egyéni hozzájárulásainkat és a társszerzőinkkel közös eredményeket az alábbiakban részletezzük.

Egyéni hozzájárulás:

- A validációhoz szükséges szimulációk implementálása Scilab programban;
- Gráfkereső módszerek implementálása Wolfram Mathematicában és Pythonban;
- Az általunk javasolt gráfok szisztematikus listájának létrehozása számos formátumban (szomszédsági mátrix, éllista, gráf, és „Graph6” formátum);
- A (több, mint 100 oldal hosszú) online Függelék elkészítése;
- LaTeX kódok implementálása illusztratív ábrák létrehozása érdekében.

Oszthatatlan közös eredmények a társszerzőkkel (*Bozóki Sándor* és *Hailemariam Abebe Tekile*)**:**

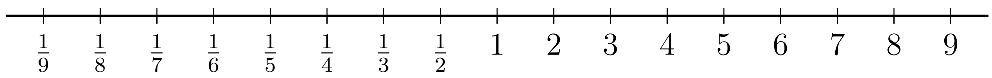
- Részletes irodalomkutatás a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok kitöltési mintázataival és a fokszám-átmérő gráfelméleti problémával kapcsolatban;
- A megfelelő tulajdonságokkal rendelkező gráfok keresése;
- Egy motivációs példa meghatározása az átmérő fontosságának bemutatására;
- Szimulációk futtatása;
- A cikk írása és szerkesztése.

2. II. Tanulmány: A közel 3 átlagos fokszámú gráfokkal rendelkező nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok

Számos többszempontú döntési módszer, mint a SMART (simple multi-attribute rating technique) (Edwards, 1977), a Swing (von Winterfeldt és Edwards, 1986), és ezek általánosításai esetén előfordul, hogy előzetes ordinális információt – általában a legjobb, a legrosszabb vagy a legjobb és a legrosszabb alternatíva kilétét – használunk.

Ennek megfelelően folytattuk az I. Tanulmányban megkezdett kutatásunkat, és föloldottuk azt a feltevésünket, hogy az összehasonlítandó elemekről semmilyen előzetes információ nem ismert. Különösen az elmúlt néhány évben széleskörű irodalommal (Mi et al., 2019) rendelkező best-worst módszer (Rezaei, 2015) által igényelt előzetes információkat szerettük volna megvizsgálni. A tanulmányunk (Szádoczki et al., 2023) emellett elsősorban a kisebb mátrixokra (legfeljebb 10 alternatíva esete) koncentrál, ami a leggyakoribb a többszempontú döntési problémákban.

Hasonló szimuláció alapú megközelítést alkalmaztunk ebben az esetben is, mint az I. Tanulmányban, három megkülönböztethető inkonzisztencia szinttel, azonban a szimuláció számos aspektusán jelentősen fejlesztettünk. A mátrixonkénti megoldás helyett elemenkénti perturbációt használtunk, és a különböző skálák kezelésén is javítottunk. A konzisztens páros összehasonlítás mátrixok elemeit véletlenszerűen generáltuk az $[1/9, 9]$ intervallumból, míg a perturbálás során egyenletes eloszlású hibákat használtunk. Azonban a módosított mátrixelemek nem az eredeti skálán voltak egyenletes eloszlásúak, hanem az eredeti érték körül a 2. ábrán prezentált skálán. Ennek oka az alábbi: ha egy döntéshozó azon gondolkodik, hogy az A alternatíva vajon 2-szer vagy 3-szor olyan jó, mint a B, akkor ez ugyanaz a probléma, mintha azon gondolkodna, hogy a B 1/2-szer vagy 1/3-szor olyan jó, mint A. Ennek köszönhetően egy olyan skálát használtunk, ahol a távolság az 1/9 és az 1 között ugyanakkora, mint az 1 és a 9 között.



2. ábra. A skála, amin a perturbált elemek egyenletes eloszlásúak az eredeti érték körül

A szimulációban használt (távolság)mértékek sorát szintén kibővítettük. A következő mérőszámokat vizsgáltuk meg:

- távolságok (euklideszi, Csebisev és Manhattan);
- rangkorrelációk (Kendall-tau és Spearman-rhó);
- és kompatibilitási (hasonlósági) indexek (Garuti kompatibilitási indexe (Garuti, 2017), koszinusz hasonlósági index (Kou et al., 2021), és Dice hasonlósági index (Ye, 2012)).

A szimulációk során 10 000 páros összehasonlítás mátrixból álló mintákkal dolgoztunk, és igyekeztünk az összehasonlítások számát relatíve alacsonyan tartani. Így az alábbi kitöltési modelleket (reprezentáló gráfokat) vizsgáltuk:

- (i) Best-worst gráf;
- (ii) TOP2 gráf;
- (iii) Best-random gráf;
- (iv) Random-random gráf;
- (v) 3-(kvázi-)reguláris minimális átmérőjű gráf;
- (vi) Két véletlenszerűen generált élfüggetlen feszítőfa uniója;
- (vii) Véletlenszerűen generált 2-szeresen élösszefüggő gráf.

Az első négy kitöltési modell ugyanazon a gráf reprezentáción alapul (két csillaggráf uniója), különböző előzetes ordinális információk fölhasználása mellett. Vagyis ezekben az esetekben két kiemelt elem van, amelyek különböznek a négy modellben, és minden más alternatívát kizárólag ezekkel hasonlítunk össze. Elsősorban a best-worst módszer miatt szerettük volna ezeket a struktúrákat megvizsgálni, mivel ott minden alternatívát csak a legjobb és a legrosszabb elemmel hasonlítanak össze. A módszer feltételezi, hogy a döntéshozó mindig meg tudja határozni a legjobb és a legrosszabb alternatívát, azonban ez azt jelenti, hogy valójában mindig meg tudja határozni az alternatívák teljes rangsorát egy adott szempont szerint, hiszen, ha eltávolítjuk a korábbi legjobb és legrosszabb alternatívát, akkor újra meg tudjuk majd határozni a megmaradt lehetőségek közül a legjobbat és a legrosszabbat. Így aztán releváns kérdés, ha a legjobb és a legrosszabb helyett egyéb alternatíva párokat tesztelünk, amelyeket érdemes lehet kiemelt elemekként kezelni.

A TOP2 modell esetén a kiemelt elemek a legjobb és a második legjobb alternatíva, a Best-random gráf esetében a legjobb és egy véletlenszerűen választott elem, míg a Random-random modell esetében mindkét kiemelt alternatívát véletlenszerűen választjuk. Így ezeket az előzetes információkat is értékelni tudtuk, hogy valóban a teljesen kitöltött mátrixból számolt súlyvektorokhoz közelebbi eredményeket biztosítanak-e. A TOP2 modellt mi javasoltuk, mivel ha egy alternatíva több összehasonlításban is szerepel, akkor a hozzá tartozó súlyt általában pontosabban tudjuk becsülni, és a legtöbb döntési problémában a két legjobb elem súlyának becslése a legfontosabb.

A 3-(kvázi-)reguláris gráf modelljét szintén mi javasoltuk az I. Tanulmányban, de ez semmilyen előzetes ordinális információt nem használ, ahogy a két véletlenszerűen generált élfüggetlen feszítőfa uniója és a véletlenszerűen generált 2-szeresen élösszefüggő gráfok sem. Ez utóbbi kettő a két csillaggráf uniójának általánosítása: a csillaggráf maga is egy feszítőfa, míg a 2-szeresen élösszefüggő gráf egy olyan gráfot jelent, ami összefüggő marad azt követően is, hogy (tetszőlegesen) kitörlünk belőle egy élt, ami szintén igaz a két csillaggráf uniójára.

A szimulációk alapján elmondható, hogy lényegében minden általunk használt mérték ugyanazokat az eredményeket és fő megfigyeléseket szolgáltatta, így a kimenetelek nem függenek erősen a használt metrikáktól. Kiderült, hogy a TOP2 modell preferált a Best-worst módszerhez képest, ami azt jelenti, hogy ha van lehetőségünk az ilyen jellegű feladatoknál előzetes ordinális információt kérni, akkor átlagosan jobb, ha a két legjobb alternatívát kérdezzük meg, mint ha a népszerű legjobb és legrosszabb alternatíva kerülne bekérésre. Azonban néhány modell, ami egyáltalán nem használ előzetes ordinális információt, jobban teljesített az összes csillaggráfok unióján alapuló struktúránál. Kisebb csúcsszámok esetén ez igaz a 3-(kvázi-)reguláris minimális átmérőjű gráfokra, és lényegében az általunk megfigyelt összes esetben igaz a véletlenszerűen generált két élfüggetlen feszítőfa uniójának modelljére.

Mindazonáltal fontos kiemelni ennek a kutatásnak az egyik leglényegesebb limitációját. Ez pedig nem más, mint, hogy előfordultak olyan esetek, amelyekben néhány az itt összehasonlított modellek közül különböző számú összehasonlítást használt, ami nem tette lehetővé, hogy megkülönböztessük a kitöltési mintázat hatását az összehasonlítások számának hatásától. Ezt a problémát később a III. Tanulmányban próbáltuk meg kezelni.

Ebben a publikációban az összes eredmény a társszerzőinkkel (*Bozóki Sándor*, *Juhász Patrik*, *Sergii V. Kadenko*, és *Vitaliy Tsyganok*) közös.

3. III. Tanulmány: Páros összehasonlítások optimális szekvenciái: a gráfok gráfja megközelítés

A III. Tanulmányban (Szádoczki és Bozóki, 2022) igyekeztünk tovább dolgozni a legkisebb eseteken, amik a leggyakrabban fordulnak elő a többszempontú döntési problémákban, illetve szerettük volna föloldani a II. Tanulmány azon limitációját is, hogy különböző számú összehasonlítással rendelkező modellek kerültek összevetésre, így néhány esetben nem lehetett egyértelmű konklúziókat levonni.

Sikerült automatizálnunk a szimulációkat, aminek segítségével jóval nagyobb mintaelemszámokat használhattunk, és az összes lehetséges kitöltési mintát (reprezentáló gráfot) össze tudtuk hasonlítani a korábbi néhány speciális eset vizsgálata helyett. Egymáshoz képest csak azokat a struktúrákat vizsgáltuk, amelyek pontosan ugyanannyi összehasonlítást (élt) használtak hat alternatíváig (csúcsig). Egyúttal visszatértünk eredeti feltevésünkhöz, miszerint semmilyen előzetes információ nem érhető el az összehasonlítandó elemekről, hiszen a gráfok címkézése rengeteg további kitöltési lehetőséget eredményez.

Távolságmértékekként az euklideszi távolságot és a Kendall-tau metrikát alkalmaztuk. Adott számú alternatívára (n) és adott számú összehasonlításra (e) 1 millió mátrixból álló mintákat használtunk, amely adott hibahatárt és szignifikancia szintet eredményezett a különböző átlagokra vonatkozóan.

A szimulációkból kiderült, hogy lényegében mindig ugyanaz a reprezentáló gráf szolgáltatta a teljes esethez legközelebbi súlyvektorokat adott (n, e) pár esetén az euklideszi távolság és a Kendall-tau szerint is, ráadásul az eredmény nem függött sem az inkonzisztencia szintjétől, sem a súlyszámítási módszertől. Így ilyen értelemben meg tudtuk határozni az optimális kitöltési mintázatokat adott alternatívaszámra (legfeljebb hat alternatíváig) és adott összehasonlításszámra, ami a tanulmány egyik legfontosabb hozzájárulása az irodalomhoz.

Azt találtuk továbbá, hogy számos optimális eset elérhető egymásból, vagyis, ha egy további összehasonlítást hozzáadunk az e összehasonlítással rendelkező optimális mintázathoz, akkor az

$e+1$ összehasonlítással rendelkező optimális esetet kapjuk. Ily módon páros összehasonlítás mátrixok optimális kitöltési szekvenciáit határozhatjuk meg, amelyek különösen hasznosak lehetnek olyan, online kérdőívekre építő csoportos döntési feladatok esetén, amikor a döntéshozók által szolgáltatott összehasonlítások száma bizonytalan. Ha az optimális kitöltési szekvenciát követjük egy ilyen feladatban, akkor biztosíthatjuk, hogy a döntéshozók preferenciáit átlagosan a lehető legjobban becsüljük meg, bármikor is hagyják abba a további összehasonlítások elvégzését.

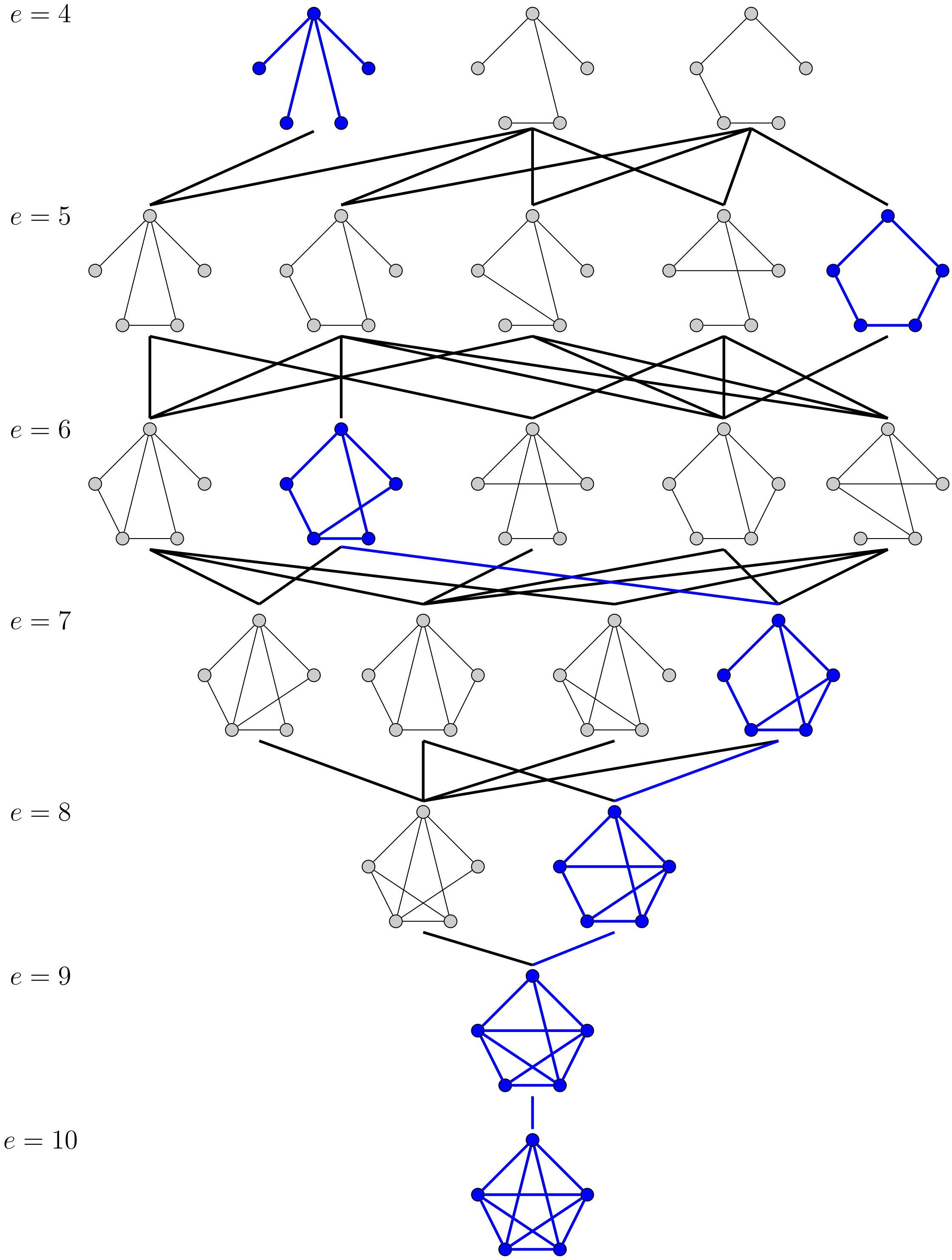
Ezt követően végrehajtottunk egy irodalomkutatást annak vizsgálatára, hogy az eredményeink ábrázolására milyen vizualizáció lenne a legmegfelelőbb. Ennek alapján alkalmaztuk a gráfok gráfja megközelítést (lásd például Lovász (1977)), ahol a nagy gráf csúcsai maguk is gráfok, esetünkben a kitöltési mintázatok reprezentáló gráfjai. Két kis gráf között pedig pontosan akkor fut él, ha elérhetőek egymásból, azaz az egyik megkapható a másikból pontosan egy összehasonlítás (él) hozzáadásával (törlésével).

Példaként az öt csúcsú gráfok gráfját a 3. ábra prezentálja. Az összehasonlítások (élek) száma a bal oldalon látható, míg az optimális gráfokat és a részleges optimális kitöltési szekvenciákat kék színnel és félkövérrel emeltük ki. Fontos megemlíteni, hogy az eredmények mintázata nagyon hasonló az alternatívák más száma esetén is.

A feszítőfák között (az első sorban) a csillaggráf bizonyult optimálisnak az általunk vizsgált összes esetben, és azt várnánk, hogy ez a struktúra megőrzi optimalitását több alternatíva mellett is. A reguláris és kvázi-reguláris gráfok szintén optimálisak, sőt, a regularitás általánosabb értelemben is fontos tulajdonság, nevezetesen, a csúcsok fokszáma mindig olyan közel volt egymáshoz az optimális gráfok esetében, amennyire csak lehetséges. A reprezentáló gráf párossága szintén fontos tulajdonság az optimalitás szempontjából, ami azt jelenti, hogy a csúcsok két független halmazra oszthatók, jelöljük ezeket A-val és B-vel! Ekkor a gráfok minden éle az A halmaz egy csúcsát köti össze a B halmaz egy csúcsával.

Ahogy az a 3. ábrán látható, ebben az esetben a páros összehasonlítás mátrixnak nem létezik teljes optimális kitöltési szekvenciája, azonban meghatározhatunk egy olyan utat a gráfok gráfjában, amely annyi optimális esetet tartalmaz, amennyit csak lehetséges, és a további gráfok is a lehető legközelebb vannak az optimalitáshoz.

Hasonlóan az I. Tanulmányhoz, az eredményeket különböző formában közöltük, amely lehetővé teszi a gyakorlati döntési problémákkal foglalkozó szakemberek számára, hogy azonnal alkalmazzák őket adott többszempontú döntési feladatokban. Emellett néhány eredményünk segítséget nyújthat a minimálisan szükséges kérdések számának meghatározásában, ha szeretnénk



3. ábra. A gráfok gráfja $n = 5$ alternatíva esetén, az optimális gráfokat kék szín és félkövér kiemelés mutatja

az általunk vizsgált metrikákat egy adott szint fölött (alatt) tartani. A legújabb számításaink alapján, amelyek nagyban építenek a III. Tanulmányra (Gyarmati et al., 2023), az itt bemutatott eredményeink (a javasolt gráfok és szekvenciák) általánosabbnak tűnnek, nem kizárólag a páros összehasonlítás mátrixokra működnek, hanem más páros összehasonlításokon alapuló modellekben is optimálisak.

A tanulmányhoz kapcsolódó egyéni hozzájárulásainkat és a társszerzőnkkel közös eredményeket az alábbiakban részletezzük.

Egyéni hozzájárulás:

- Az összes lehetséges reprezentáló gráfot meghatározó módszerek implementálása Wolfram Mathematicában;
- A szimulációk implementálása Scilab programban, amiknek segítségével meghatározhatjuk az optimális eseteket;
- LaTeX kódok implementálása illusztratív ábrák létrehozása érdekében (a különböző gráfok gráfjainak létrehozása).

Oszthatatlan közös eredmények a társszerzőnkkel (*Bozóki Sándor*)**:**

- A páros összehasonlítás mátrixok kitöltési szekvenciáihoz és a gráfok gráfja megközelítéshez kapcsolódó irodalomkutatás;
- Szimulációk futtatása;
- A cikk írása és szerkesztése.

4. IV. Tanulmány: Nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok: A női teniszezők világrangsora

A IV. Tanulmány (Temesi et al., 2023) ugyanazokat a gráfelméleti eszközöket használja egy valós adatbázison, mint a korábban bemutatott publikációk, egyúttal bizonyos értelemben folytatja a Bozóki et al. (2016) által megkezdett kutatást.

A célunk ebben a tanulmányban az volt, hogy a legjobb női teniszezőknek egy örökrangsorát állítsuk föl a győzelem/vereség arányaikból számolt nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix alapján. Az alternatívák azok a teniszezőnők voltak, akik valamely ponton 1973 (a Női Tenisz Szövetség (Women's Tennis Association (WTA)) megalapítása) és 2022 között a WTA hivatalos oldalán az első helyet töltötték be. 28 ilyen teniszezőnőt találtunk, és természetesen voltak hiányzó elemek az adatbázisunkban, hiszen néhányan közülük soha nem mérkőztek meg egymással karrierjük során.

Annak érdekében, hogy alkalmazhassuk a korábban bemutatott súlyszámítási módszereket a reprezentáló gráf összefüggőségének ellenőrzése mellett, számos technikai kiigazítást kellett végeznünk az adatokon, amelyek során Bozóki et al. (2016) módszereit követtük.

Ha egy párban minden mérkőzést az egyik fél nyert, akkor az adott győzelem/vereség arányban a nullával való osztás problémája merül föl. Ekkor az adott elem helyén a mátrixban a győzelmek számát növeltük kettővel, és ezt szerepeltettük. Ezt követően egy hatványkitevővel az összes értéket módosítottuk annak érdekében, hogy kezelni tudjuk azt a helyzetet, hogy voltak olyan párok, akik alig néhányszor játszottak egymással, míg mások számos versenyen összemérték erejüket. Ennek a kiigazításnak a lényege az, hogy megbízhatóbbnak ítélhetők azon párok közötti összehasonlítások, akik sokszor mérkőztek meg egymással.

A sajátvektor és az LLSM súlyszámítási módszereket is alkalmaztuk (a nem teljesen kitöltött esetre általánosítva) a fönti módosításokban különböző paramétereket használva, valamint egy másik rangsorolási technikát, a Bradley–Terry modellt (Bradley és Terry, 1952), is alkalmaztuk az összehasonlítás kedvéért. A rangsorok egymáshoz nagyon hasonlónak bizonyultak, a kiszámolt Spearman rangkorrelációk meggyőzően nagyok (0,860 volt a legkisebb érték) és robusztusak voltak a különböző módosításokra.

Az első két helyen Serena Williams és Steffi Graf szerepeltek az összes módszer szerint. Utánuk következett Navratilova, Hingis, Clijsters, és Henin apróbb eltérésekkel. Némileg meglepő módon a legfőbb különbség a Bradley–Terry modell és a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokon alapuló modellek eredményei között az volt, hogy néhányan a legkorábbi teniszezőnők közül (Goolagong, Evert, és Austin) a Bradley–Terry módszer alapján jobban teljesítettek.

Amellett, hogy demonstráljuk, hogy a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokhoz kapcsolódó többszempontú döntési módszerek használhatóak nagyméretű valós adatbázisok alapján történő rangsorolásra, a kutatásunk célja volt, hogy alaposan megvizsgáljuk a páros összehasonlítások struktúráját. Az adatok számos részmátrixát elemeztük, ahogy azt az esetet is megvizsgáltuk, amikor a teniszezőnők egyesével lépnek be az adatbázisunkba.

Azt találtuk, hogy lehetséges a játékosoknak egy relatíve nagy halmazát, akiknek az aktív karrierje ugyanabban az időszakban volt, úgy megválasztani, hogy az egymás elleni eredményeik lényegében meghatározzák a helyezéseiket a teljes rangsorra vonatkozóan. A teniszezőnők egyesével való beléptetése az adatbázisba pedig azt mutatta meg, hogy általában egy ilyen belépésnek köszönhetően csak kis változások következnek be a rangsorban, és lényegében minden játékosnak azokra van a legnagyobb hatása, akikkel a legtöbbször mérkőzött meg.

A reprezentáló gráf tulajdonságait vizsgálva megállapítottuk, hogy ha az adatbázisunkban szereplő négy legkorábbi teniszezőnőt (Goolagong, Evert, Navratilova és Austin), valamint a legfrissebb világelsőt (Swiatek) töröljük, akkor a különböző mutatók alapján egy nagyon erősen összefüggő gráfot kapunk. Ennek a módosított gráfnak az átmérője (leghosszabb legrövidebb útja) mindössze 2, és akár úgy is interpretálható, mint két csillaggráf uniója középpontokként a Williams nővérekkel (azaz ők játszottak mindenki más ellen a karrierjük során), kiegészítve néhány további éllel. Ez a fajta struktúra és az erős összefüggőség lehet az egyik oka a kiszámított rangsorok robusztusságának.

Emellett az ordinálisan intranzitív triádokat (hármasokat) is vizsgáltuk az adatbázisunkban. Sportokban gyakran előfordul, hogy A az esetek többségében nyert B ellen, és általában B is sikeresen szerepelt C-vel szemben. Ugyanakkor C is többször nyert A ellen, mint fordítva.

Ezeknek a fajta triádoknak jelentős irodalma létezik, Kendall és Babington Smith (1940) például meghatározta ezek eloszlását az alternatívák alacsony száma mellett, és egy szignifikancia tesztet javasolt, amelyet később számos kutató általánosított és kibővített. A páros összehasonlítás mátrixokhoz és a döntési problémákhoz kapcsolódóan a kérdésben Iida (2009) vizsgált különböző teszteket és indexeket.

Annak érdekében, hogy alkalmazhassuk a szükséges khí-négyzet intranzitivitási tesztet, módosítanunk kellett az eredetileg használt nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixunkon, mivel ez a próba csak teljes, döntetlent nem tartalmazó adatokon alkalmazható. A kiigazított mátrix győzelem/vereség arányokat tartalmazott minden párra, a mérkőzések helyett a szettekre vonatkozóan. Ha esetleg a szett arányokra is döntetlent kaptunk volna, akkor az eredeti LLSM rangsort használtuk referenciaként, hogy relációba állítsuk a két teniszezőnőt. Ha két játékos soha nem mérkőzött meg egymással a karrierjük folyamán (nem található él az általuk meghatározott két csúcs között), akkor szintén az LLSM rangsort használtuk arra, hogy meghatározzuk melyik teniszezőnő volt a győztes az adott párban.

Ezen módosítások révén létrehoztunk egy olyan irányított gráfot, amire a teszt épül. Ez alapján az ordinálisan intranzitív triádok száma nem szignifikáns a mi adatbázisunkban, ami szintén könnyen lehet az egyik oka a számolt rangsorok robusztusságának.

Összességében tehát eredményeink nem csak a tenisz szakértők és rajongók számára lehetnek érdekesek, de empirikus bizonyítékkal szolgálnak, hogy a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok módszere megfelelő jól érthető rangsorok létrehozásához, valamint a reprezentáló gráfokhoz kapcsolódó kutatást összeköti egy nagyméretű valós adatbázissal és a sportok világával.

A tanulmányhoz kapcsolódó egyéni hozzájárulásainkat és a társszerzőinkkel közös eredményeket az alábbiakban részletezzük.

Egyéni hozzájárulás:

- Top női teniszezők rangsorainak kiszámítása különböző módszerek és különböző részmátrixok alapján;
- R, Scilab, és Wolfram Mathematica kódok implementálása különböző módszerek és tesztek futtatásához az adatokon;
- LaTeX kódok implementálása illusztratív ábrák létrehozása érdekében.

Oszthatatlan közös eredmények a társszerzőkkel (*Temesi József* és *Bozóki Sándor*)**:**

- Kiterjedt irodalomkutatás a sportokkal kapcsolatos rangsorolásra, az intranzitív triádokra, és a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokkal való rangsorolásra vonatkozóan;
- A cikk írása és szerkesztése.

5. Jövőbeli kutatási irányok

A doktori disszertációban szereplő négy eredeti tanulmányhoz kapcsolódó kutatás végrehajtása közben számos további kérdés merült föl, sőt teljesen új kutatási irányokat is találtunk, melyek közül van olyan, amin már el is kezdtünk dolgozni.

Van néhány természetes folytatási lehetősége a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok kitöltési mintázataihoz és szekvenciáihoz kapcsolódó kutatásoknak (I., II. és III. Tanulmányok), mint például a több alternatívát tartalmazó esetek vizsgálata. Azonban jogos érvelés lehet, hogy a szimulációk mellett inkább a módszertan bővítése lenne fontos.

Ezt a problémát legalább két irányból közelíthetjük meg. Az empirikus páros összehasonlítás mátrixok nagyban különbözhetnek a szimulált mátrixoktól, így érdekes lehet megvizsgálni néhány valós PCM-et is, melyekre vonatkozó adatbázisokat használtak a korábbi irodalomban (Bozóki et al., 2013). Ebben az esetben is tesztelhetnénk, hogy mely mintázatok optimálisak a különböző számú összehasonlítások esetén, mivel a kitöltési sorrendek szintén elkönyvelésre kerültek, és ezek különböztek az egyes döntéshozók esetében.

Másrészről szép eredmény lenne formális állításokat bizonyítani az optimális gráfokkal kapcsolatban. Egy új kutatás alapján (Gyarmati et al., 2023) az eredmények általánosabbnak tűnnek, azonban egyelőre még nem tudtuk karakterizálni az optimális reprezentáló gráfokat. Kulcskérdés lehet ezzel kapcsolatban, hogy eddig a számított súlyvektorok közelségére koncentráltunk, amik maguk is különböző optimalizálási feladatok megoldásai. Ha azonban a súlyvektorok helyett a mátrixokra koncentrálnánk, az jó eséllyel megkönnyítené a formális bizonyítások létrehozását.

Emellett lehetséges a címkézett reprezentáló gráfok esetében is megvizsgálni a gráfok gráfját. Mely ordinális információ a leghasznosabb a III. Tanulmány optimális mintázatai esetén? Ha valamilyen előzetes információval is bírunk, akkor is optimálisak maradnak ezek a struktúrák? Ezek a kérdések mind érdekesek lehetnek, nem csak a döntéselmélet szempontjából, de sportok vonatkozásában is. Mely csapatok (játékosok) kellene, hogy megmérkőzzenek egymással, ha van valamilyen előzetes információnk az erősségükre vonatkozóan?

A gráfok gráfja megközelítés egyéb kutatási kérdéseket is fölvet, amelyek kapcsolódnak a sportokhoz. Mi történik, ha közvetlen utak helyett a gráfok gráfjában tartalmazási relációkat vizsgálunk, azaz egy lépésben több összehasonlítást is elvégezhetünk? Egy szép példa lehet erre vonatkozóan olyan sportbajnokságok esete, ahol minden körben az összes csapatnak (játékosnak) meg kell mérkőznie egy másikkal, ami a reguláris gráfok gráfjához vezet.

A IV. Tanulmánnyal kapcsolatban számos lehetőség van az adatok bővítésére, vagy arra, hogy a különböző borításokra vonatkozóan különböző rangsorokat hozzunk létre, ami valószínűleg érdekes lenne a tenisz szakértők és rajongók számára, azonban aligha járna további módszertani előnyökkel. Az ordinálisan intranzitív triádokra vonatkozó számítások és tesztek viszont, véleményünk szerint, egy másik fontos kutatási irányt jelentenek. Eddig módosítanunk kellett az adatainkat ahhoz, hogy az intranzitivitási tesztet alkalmazni tudjuk. Szép lenne ezeket a teszteket a nem teljes adatok esetére, nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokra általánosítani, amivel kapcsolatban szintén azt gondoljuk, hogy a kulcs a gráfelmélet eszközeiben rejtőzhet.

Természetesen a páros összehasonlítás mátrixokhoz és gráfokhoz kapcsolódó egyéb területek is érdekesek lehetnek, amelyek a disszertációban nem kaptak említést, mint például a Pareto-hatékony súlyvektorok témaköre (Blanquero et al., 2006; Ábele-Nagy és Bozóki, 2016; Ábele-Nagy et al., 2018; Fernandes és Furtado, 2022).

IV. Főbb hivatkozások

Ábele-Nagy, K. és Bozóki, S. (2016). Efficiency analysis of simple perturbed pairwise comparison matrices. *Fundamenta Informaticae*, 144(3-4):279–289. https://doi.org/10.3233/FI-2016-1335.

Ábele-Nagy, K., Bozóki, S., és Rebák, Ö. (2018). Efficiency analysis of double perturbed pairwise comparison matrices. *Journal of the Operational Research Society*, 69(5):707–713. https://doi.org/10.1080/01605682.2017.1409408.

Ábele-Nagy, K. (2019). *Páros összehasonlítás mátrixok a többszempontú döntéselméletben*. PhD disszertáció, Budapesti Corvinus Egyetem. https://doi.org/10.14267/phd.2019036.

Ágoston, K. Cs. és Csató, L. (2022). Inconsistency thresholds for incomplete pairwise comparison matrices. *Omega*, 108:102576. https://doi.org/10.1016/j.omega.2021.102576.

Blanquero, R., Carrizosa, E., és Conde, E. (2006). Inferring efficient weights from pairwise comparison matrices. *Mathematical Methods of Operations Research*, 64(2):271–284. https://doi.org/10.1007/s00186-006-0077-1.

Bozóki, S., Csató, L., és Temesi, J. (2016). An application of incomplete pairwise comparison matrices for ranking top tennis players. *European Journal of Operational Research*, 248(1):211–218. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.06.069.

Bozóki, S. (2006). *Súlyozás páros összehasonlítással és értékelés hasznossági függvényekkel a többszempontú döntési feladatokban*. PhD disszertáció, Budapesti Corvinus Egyetem. https://phd.lib.uni-corvinus.hu/245/1/bozoki_sandor.pdf

Bozóki, S., Dezső, L., Poesz, A., és Temesi, J. (2013). Analysis of pairwise comparison matrices: an empirical research. *Annals of Operations Research*, 211(1):511–528. https://doi.org/10.1007/s10479-013-1328-1.

Bozóki, S., Fülöp, J., és Rónyai, L. (2010). On optimal completion of incomplete pairwise comparison matrices. *Mathematical and Computer Modelling*, 52(1):318–333. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2010.02.047.

Bradley, R. A. és Terry, M. E. (1952). Rank analysis of incomplete block designs: I. The method of paired comparisons. *Biometrika*, 39(3/4):324–345. https://doi.org/10.2307/2334029.

Brunelli, M. (2018). A survey of inconsistency indices for pairwise comparisons. *International Journal of General Systems*, 47(8):751–771. https://doi.org/10.1080/03081079.2018.1523156.

Crawford, G. és Williams, C. (1985). A note on the analysis of subjective judgment matrices. *Journal of Mathematical Psychology*, 29(4):387–405. https://doi.org/10.1016/0022-2496(85)90002-1.

Csató, L. (2015). *A páros összehasonlításokon alapuló rangsorolás módszertani és alkalmazási kérdései*. PhD disszertáció, Budapesti Corvinus Egyetem. https://doi.org/10.14267/phd.2015022.

Csató, L. (2021). *Tournament Design: How Operations Research Can Improve Sports Rules*. Palgrave Pivots in Sports Economics, Palgrave Macmillan. https://doi.org/10.1007/978-3-030-59844-0.

Davidson, R. és Farquhar, P. (1976). A bibliography on the method of paired comparisons. *Biometrics*, 32(2):241–252. https://www.jstor.org/stable/2529495.

Edwards, W. (1977). How to use multiattribute utility measurement for social decisionmaking. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 7(5):326–340. https://doi.org/10.1109/TSMC.1977.4309720.

Fernandes, R. és Furtado, S. (2022). Efficiency of the principal eigenvector of some triple perturbed consistent matrices. *European Journal of Operational Research*, 298(3):1007–1015. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2021.08.012.

Garuti, C. E. (2017). Reflections on scales of measurement, not measurement of scales. *International Journal of the Analytic Hierarchy Process*, 9(3). https://doi.org/10.13033/ijahp.v9i3.522.

Gass, S. (1998). Tournaments, transitivity and pairwise comparison matrices. *Journal of the Operational Research Society*, 49(6):616–624. https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1057/palgrave.jors.2600572.

Gyarmati, L., Orbán-Mihálykó, É., Mihálykó, Cs., Szádoczki, Zs., és Bozóki, S. (2023). The incomplete analytic hierarchy process and Bradley–Terry model: (In)consistency and information retrieval. *Expert Systems with Applications*, 229(Part B):120522. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2023.120522.

Harker, P. T. (1987). Incomplete pairwise comparisons in the analytic hierarchy process. *Mathematical Modelling*, 9(11):837–848. https://doi.org/10.1016/0270-0255(87)90503-3.

Iida, Y. (2009). The number of circular triads in a pairwise comparison matrix and a consistency test in the AHP. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 52(2):174–185. https://doi.org/10.15807/jorsj.52.174.

Kadenko, S. és Tsyganok, V. (2020). An update on combinatorial method for aggregation of expert judgments in AHP. Proceedings of the International Symposium on the Analytic Hierarchy Process, ISAHP-2020. https://doi.org/10.13033/isahp.y2020.012.

Kendall, M. G. és Babington Smith, B. (1940). On the method of paired comparisons. *Biometrika*, 31(3/4):324–345. https://doi.org/10.2307/2332613.

Kou, G., Peng, Y., Chao, X., Herrera-Viedma, E., és Alsaadi, F. E. (2021). A geometrical method for consensus building in GDM with incomplete heterogeneous preference information. *Applied Soft Computing*, 105:107224. https://doi.org/10.1016/j.asoc.2021.107224.

Kułakowski, K., Szybowski, J., és Prusak, A. (2019). Towards quantification of incompleteness in the pairwise comparisons methods. *International Journal of Approximate Reasoning*, 115:221–234. https://doi.org/10.1016/j.ijar.2019.10.002.

Kułakowski, K. és Talaga, D. (2020). Inconsistency indices for incomplete pairwise comparisons matrices. *International Journal of General Systems*, 49(2):174–200. https://doi.org/10.1080/03081079.2020.1713116.

Lovász, L. (1977). A homology theory for spanning trees of a graph. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 30(3-4):241–251. https://doi.org/10.1007/bf01896190.

McCormick, E. és Bachus, J. (1952). Paired comparison ratings: 1. The effect on ratings of reductions in the number of pairs. *Journal of Applied Psychology*, 36(3):123–127. https://doi.org/10.1037/h0054842.

McCormick, E. és Roberts, W. (1952). Paired comparison ratings: 2. The reliability of ratings based on partial pairings. *Journal of Applied Psychology*, 36(3):188–192. https://doi.org/10.1037/h0055956.

Mi, X., Tang, M., Liao, H., Shen, W., és Lev, B. (2019). The state-of-the-art survey on integrations and applications of the best worst method in decision making: Why, what, what for and what's next? *Omega*, 87:205–225. https://doi.org/10.1016/j.omega.2019.01.009.

Miller, M. és Širáň, J. (2013). Moore graphs and beyond: A survey of the degree/diameter problem. *Electronic Journal of Combinatorics*, 20(2):1–92. https://doi.org/10.37236/35.

Poesz, A. (2022). *Inkonzisztencia a döntéshozatalban*. PhD disszertáció, Budapesti Corvinus Egyetem. https://doi.org/10.14267/phd.2022053.

Rezaei, J. (2015). Best-worst multi-criteria decision-making method. *Omega*, 53:49–57. https://doi.org/10.1016/j.omega.2014.11.009.

Saaty, T. L. (1977). A scaling method for priorities in hierarchical structures. *Journal of Mathematical Psychology*, 15(3):234–281. https://doi.org/10.1016/0022-2496(77)90033-5.

Saaty, T. L. (1980). *The Analytic Hierarchy Process*. McGraw-Hill, New York.

Szádoczki, Zs. és Bozóki, S. (2022). Optimal sequences for pairwise comparisons: the graph of graphs approach. *Műhelytanulmány*. https://doi.org/10.48550/arXiv.2205.08673.

Szádoczki, Zs., Bozóki, S., Juhász, P., Kadenko, S. V., és Tsyganok, V. (2023). Incomplete pairwise comparison matrices based on graphs with average degree approximately 3. *Annals of Operations Research*, 326(2):783–807. https://doi.org/10.1007/s10479-022-04819-9.

Szádoczki, Zs., Bozóki, S., és Tekile, H. A. (2022). Filling in pattern designs for incomplete pairwise comparison matrices: (Quasi-)regular graphs with minimal diameter. *Omega*, 107:102557. https://doi.org/10.1016/j.omega.2021.102557.

Szybowski, J., Kułakowski, K., és Prusak, A. (2020). New inconsistency indicators for incomplete pairwise comparisons matrices. *Mathematical Social Sciences*, 108:138–145. https://doi.org/10.1016/j.mathsocsci.2020.05.002.

Tekile, H. A. (2017). Incomplete pairwise comparison matrices in multi-criteria decision making and ranking. MSc diplomamunka, Central European University.

Temesi, J., Szádoczki, Zs., és Bozóki, S. (2024). Incomplete pairwise comparison matrices: Ranking top women tennis players. *Journal of the Operational Research Society*, 75(1):145–157. https://doi.org/10.1080/01605682.2023.2180447.

Thurstone, L. (1927). A law of comparative judgment. *Psychological Review*, 34(4):273–286. https://doi.org/10.1037/h0070288.

von Winterfeldt, D. és Edwards, W. (1986). *Decision Analysis and Behavioral Research*. Cambridge University Press, Cambridge.

Wang, K. és Takahashi, I. (1998). How to select paired comparisons in AHP of incomplete information – strongly regular graph design. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 41(2):311–328. https://doi.org/10.15807/jorsj.41.311.

Ye, J. (2012). Multicriteria decision-making method using the Dice similarity measure based on the reduct intuitionistic fuzzy sets of interval-valued intuitionistic fuzzy sets. *Applied Mathematical Modelling*, 36(9):4466–4472. https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.11.075.

Zhou, X., Hu, Y., Deng, Y., Chan, F. T. S., és Ishizaka, A. (2018). A DEMATEL-based completion method for incomplete pairwise comparison matrix in AHP. *Annals of Operations Research*, 271:1045–1066. https://doi.org/10.1007/s10479-018-2769-3.

V. A témakörrel kapcsolatos saját publikációk

1. Idegen nyelvű publikációk

A Ph.D. disszertációban szereplő publikációk

1) Szádoczki, Zs. és Bozóki, S. (2022). Optimal sequences for pairwise comparisons: the graph of graphs approach. *Műhelytanulmány, bírálat alatt*. https://doi.org/10.48550/arXiv.2205.08673.

2) Szádoczki, Zs., Bozóki, S., Juhász, P., Kadenko, S. V., és Tsyganok, V. (2023). Incomplete pairwise comparison matrices based on graphs with average degree approximately 3. *Annals of Operations Research*, 326(2):783–807. https://doi.org/10.1007/s10479-022-04819-9.

3) Szádoczki, Zs., Bozóki, S., és Tekile, H. A. (2022). Filling in pattern designs for incomplete pairwise comparison matrices: (Quasi-)regular graphs with minimal diameter. *Omega*, 107:102557. https://doi.org/10.1016/j.omega.2021.102557.

4) Temesi, J., Szádoczki, Zs., és Bozóki, S. (2024). Incomplete pairwise comparison matrices: Ranking top women tennis players. *Journal of the Operational Research Society*, 75(1):145-157. https://doi.org/10.1080/01605682.2023.2180447.

A Ph.D. disszertációban nem szereplő referált folyóiratcikkek

5) Duleba, Sz. és Szádoczki, Zs. (2022). Comparing aggregation methods in large-scale group AHP: Time for the shift to distance-based aggregation. *Expert Systems with Applications*, 196:116667. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2022.116667.

6) Gyarmati, L., Orbán-Mihálykó, É., Mihálykó, Cs., Szádoczki, Zs., és Bozóki, S. (2023). The incomplete analytic hierarchy process and Bradley–Terry model: (In)consistency and information retrieval. *Expert Systems with Applications*, 229(Part B):120522. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2023.120522.

7) Kadenko, S., Tsyganok, V., Szádoczki, Zs., és Bozóki, S. (2021). An update on combinatorial method for aggregation of expert judgments in AHP. *Production*, 31:e20210045. https://doi.org/10.1590/0103-6513.20210045.

8) Szabo, Zs. K., Szádoczki, Zs., Bozóki, S., Stănciulescu, G. C., és Szabo, D. (2021). An Analytic Hierarchy Process approach for prioritisation of strategic objectives of sustainable development. *Sustainability*, 13(4). https://doi.org/10.3390/su13042254.

9) Szádoczki, Zs. és Duleba, Sz. (2022). Distance-based aggregation in group AHP. *Journal of Decision Systems*, 31(sup1):98–106. https://doi.org/10.1080/12460125.2022.2070952.

A Ph.D. disszertációban nem szereplő műhelytanulmányok

10) Csató, L., Kiss, L. M., és Szádoczki, Zs. (2024). The allocation of FIFA World Cup slots based on the ranking of confederations. *Műhelytanulmány, bírálat alatt.* https://doi.org/10.48550/arXiv.2310.19100.

11) Kelemen, A., Szabo, Zs. K., Szádoczki, Zs., és Bozóki, S. (2024). A sensitivity analysis of composite indicators: Min/max thresholds. *Műhelytanulmány, bírálat alatt.*

2. Magyar nyelvű publikációk

A Ph.D. disszertációban nem szereplő referált folyóiratcikk

12) Temesi, J., Szádoczki, Zs., és Bozóki, S. (2022). Nem teljes páros összehasonlítások: A női teniszezők világrangsorának példája. *Szigma*, 53(1):1–32. https://journals.lib.pte.hu/index.php/szigma/article/view/5709/5492.

A Ph.D. disszertációban nem szereplő könyvismertetés

13) Szádoczki, Zs. (2022). Operációkutatás a sportok profitabilitásáért. Könyvismertetés, László Csató: *Tournament Design. How Operations Research Can Improve Sports Rules? Közgazdasági Szemle*, 69(2):283–288. https://doi.org/10.18414/KSZ.2022.2.283.