



Általános és kvantitatív közgazdaságtan
Doktori Iskola

TÉZISGYŰJTEMÉNY

Ábele-Nagy Kristóf

**Páros összehasonlítás mátrixok a
többszemponútú döntéelméletben**

című Ph.D. értekezéséhez

Témavezető:

Dr. Bozóki Sándor Ph.D
egyetemi docens

Budapest, 2019

TÉZISGYŰJTEMÉNY

Ábele-Nagy Kristóf

**Páros összehasonlítás mátrixok a
többszemponjú döntéelméletben**

című Ph.D. értekezéséhez

Témavezető:

Dr. Bozóki Sándor Ph.D
egyetemi docens

© Ábele-Nagy Kristóf

Tartalomjegyzék

1. Kutatási előzmények és a téma indoklása	2
2. A felhasznált módszerek	7
2.1. Páros összehasonlítás mátrixok	7
2.2. Súlyvektor számítási módszerek	11
2.2.1. Sajátvektor módszer	11
2.2.2. Logaritmikusan legkisebb négyzetek módszere	13
2.3. Pareto-hatékonyság	14
2.4. A ciklikus koordináták módszere	16
2.5. Newton-módszer	17
2.6. A Collatz-Wielandt formula	17
3. Az értekezés eredményei	18
3.1. A logaritmikusan legkisebb négyzetek módszere és az optimális kitöltés	18
3.2. A sajátvektor módszer és a Pareto-hatékonyság	19
3.3. A sajátvektor számítása ciklikus koordináták módszerével	19
3.3.1. Optimális kitöltés Newton-módszerrel	20
3.3.2. Pozitív mátrixok domináns sajátvektora ciklikus koordinátákkal	21
4. Saját publikációk	23

1. fejezet

Kutatási előzmények és a téma indoklása

Döntési szituációban vagyunk minden olyan esetben, amikor egynél több lehetséges alternatíva közül kell választanunk. Ez lehet a legjobb alternatíva kiválasztása, de előfordul, hogy rangsorolnunk kell az alternatívákat. Néha a probléma átfogalmazható egyetlen szempont szerinti döntésre, például lehetséges, hogy egy vállalat csak a profit szempontjából vizsgál meg mindent. Ilyen esetekben egy szempontú döntési problémánk van, azaz egy célfüggvényt kell minimalizálni vagy maximalizálni, amelyet az operációkutatás hagyományos eszköztárával oldhatunk meg. Azonban még egy olyan, látszólag egyszerű célfüggvény, mint a profit sem biztos, hogy felírható egyetlen szemponttal, hiszen ezt is számos tényező befolyásolhatja. Ha ezt az egyszerűsítést nem áll módunkban megtenni, akkor egy többszempontú döntési problémával állunk szemben.

A mindennapi problémák során nem alkalmazunk komoly módszertant egy-egy kisebb döntés meghozatalakor, mert túl nagy lenne az idő és esetlegesen az erőforrás igénye. Ilyen helyzetekben gyorsan, bejáratott sémák szerint, illetve heurisztikák alapján döntünk. Nagyobb, fontosabb és bonyolultabb döntések esetén azonban érdemes lehet igénybe venni egy olyan

megalapozott döntéseméleti módszertant, ami hozzásegít, hogy a problémát részenként elemezzük és értékeljük ki. Egy nagy döntési feladat kisebb részekre való visszavezetése megkönnyíti a pontos értékelést, ezáltal a jobb döntéshozatalt. Ehhez azonban már a mindennapi heurisztikáknál komolyabb apparátusra lehet szükségünk.

A többszemponútú döntésemélet (angolul Multi-Criteria Decision Making, röviden MCDM) a konkrét alkalmazott módszertantól függetlenül a döntéshozó preferenciáinak modellezéséről szól. Ilyen bonyolult kérdésekben a döntéshozó általában nem tud annyi szempontot akkurátusan figyelembe venni, a szempontok fontosságait közvetlenül megfelelően meghatározni, hogy végül a saját szubjektív preferenciáinak legmegfelelőbb döntés szülessen. Ebben a döntéseméleti módszertanok alkalmazásával segíthetjük a döntéshozót, ezért ezt a tudományterületet többszemponútú döntéstámogatásnak (Multi-Criteria Decision Aid, MCDA) is nevezik. Az MCDA rövidítés olykor a Multi-Criteria Decision Analysis rövidítéseként szerepel, mely tulajdonképpen ugyanazt tartalmazza, mint az MCDM. A többszemponútú döntésemélet nem kizárólag egy döntéshozó egy döntésben való támogatásáról szól, hanem például csoportos döntésekkel, bizonytalanság melletti döntéshozatallal és alternatívák más szituációban történő rangsorolásával is foglalkozik, illetve jelentős tematikai átfedés tapasztalható a szavazások és társadalmi döntések elméletével.

Gyakran előfordul, hogy alternatívák értékelésénél vagy a szempontok fontossági súlyainak meghatározásánál nem állnak közvetlenül rendelkezésünkre maguk a számszerű értékek, csupán azok arányaira vannak becslésünk. Például nem valószínű, hogy egy döntéshozó sok szempont esetén kellő bizonyossággal meg tudja mondani, hogy az egyes szempontok milyen súllyal befolyásolják a döntését. A szempontok súlyainak viszonyát azonban általában jobban tudja a döntéshozó becsülni. Amennyiben a viszonyok arányok, akkor a kérdés, melyre a döntéshozónak minden szempontpár esetén válaszolnia kell, az, hogy hányszor fontosabb az egyik szempont a másiknál. Ebben az esetben tehát kardinális összehasonlításokról van szó, a válaszok konkrét

számértékek. Az arányokból n összehasonlítható elem esetén egy $n \times n$ -es páros összehasonlítás mátrixot alkothatunk. Ha a kardinális tranzitivitási tulajdonság is teljesül egy páros összehasonlítás mátrixra, akkor *konzisztensnek* nevezzük.

A célunk tehát az, hogy a szempontok páros összehasonlításait alkalmazva megkapjuk az egyes szempontok súlyait, pontosabban azok becslését a döntési szituációban, melyek vektora az úgynevezett *súlyvektor*. A döntéshozó preferenciáit a szempontok valódi súlyai testesítik meg, ezt azonban nehéz számszerűsíteni, ezért alkalmazzuk a páros összehasonlítás mátrixok módszertanát. A súlyvektort tekintjük a döntéshozó (szempont-) preferenciáinak saját becsléseként. A súlyvektor meghatározására több módszer is van.

A sajátvektor módszer (angolul Eigenvector Method, röviden EM) a legrégibbi súlyvektor számítási módszer, Saaty a páros összehasonlítás mátrixokkal együtt az 1977-es cikkében vezette be [19]. Ez a módszer a domináns sajátértékhez tartozó jobboldali sajátvektort javasolja súlyvektornak.

A Saaty által megalkotott [19, 20] Analytic Hierarchy Process, röviden AHP döntéstámogatási módszerben jelentek meg először a Saaty által bevezetett páros összehasonlítás mátrixok, és egyben ezeknek a mátrixoknak továbbra is leggyakoribb alkalmazási területe. Az AHP módszer a népszerűségét az egyszerűségének, a páros összehasonlításokon alapuló módszernek, illetve a látványos strukturálhatóságnak, alszempontokra bonthatóságának köszönheti.

A Pareto-hatékonyság – vagy más elnevezéssel Pareto-optimalitás – a közgazdaságtan alapvető fogalma. Azt fejezi ki, hogy egy elosztást, tevékenységet, stb. nem lehet triviálisan javítani, azaz anélkül javítani valaminek vagy valakinek a helyzetén, hogy ez máshol ne járna kár okozásával. Definiálható a páros összehasonlítás mátrixokból számolt súlyvektorok Pareto-hatékonysága. Egy súlyvektor akkor hatékony, ha nem lehet a vektor elemeinek változtatásával egy mátrixelem közelítését sem javítani anélkül, hogy más mátrixelem közelítésén ne rontanánk. A hatékonyság egy természete-

sen elvárható tulajdonság. Blanquero, Carrizosa és Conde azonban megmutatta, hogy a sajátvektor módszer által adott súlyvektor, azaz a jobboldali domináns sajátvektor nem mindig hatékony [5, Section 3]. Bozóki [6] azt is megmutatta, hogy a hatékonyság az inkonzisztencia mértékétől sem függ közvetlenül. Ugyancsak Blanquero, Carrizosa és Conde [5] mutatta meg, hogy a Pareto-hatékonyság ekvivalens egy, a mátrixból és a hozzá tartozó súlyvektorból felrajzolható irányított gráf erős összefüggőségével.

Vegyünk egy konzisztens páros összehasonlítás mátrixot, és módosítsuk egyetlen (nem főátlóbeli) elemében és annak reciprokában. Ekkor egy olyan páros összehasonlítás mátrixot kapunk, mely egy elemtől eltekintve konzisztens. Farkas [12] foglalkozott korábban ilyen mátrixokkal, és az ő jóvoltából ismertek a domináns sajátvektor explicit képletei, ám ő nem hatékonysági szempontból vizsgálta őket.

Előfordul olyan eset, hogy nem áll rendelkezésünkre az összes páros összehasonlítás, csak azok egy részhalmaza. Olyan eset is adódhat, hogy nem akarjuk, vagy nem is áll módunkban mind az $\binom{n}{2}$ összehasonlítást végigkérdezni a döntéshozótól. Ilyenkor a páros összehasonlítás mátrix bizonyos elemei lesznek csak kitöltve, a többi hiányzik. Ilyenkor nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixról beszélünk [14]. A sajátvektor módszer Hiraishi, Obata és Daigo [21] által javasolt kiterjesztése a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok esetére az egyik legfontosabb súlyvektor számítási módszer, mely egy CR inkonzisztencia indexre optimális kitöltést is szolgáltat.

Bozóki, Fülöp és Rónyai [7] bizonyították be, hogy egy, a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixból felírható gráf összefüggősége szükséges és elégséges feltétele az előbb említett sajátvektor módszer szerinti (optimális) kitöltés egyértelmű létezésének. Ugyancsak ők javasoltak egy, a ciklikus koordináták módszerét [17][253–254. oldal] alkalmazó eljárást az optimális kitöltés meghatározására.

Teljesen kitöltött esetben is igaz, hogy nagy mátrixok domináns sajátér-

6 1. FEJEZET. KUTATÁSI ELŐZMÉNYEK ÉS A TÉMA INDOKLÁSA

tékét és sajátvektorát (azaz a sajátvektor módszer által javasolt súlyvektort) kiszámítani lassú. Ezzel a problémával kapcsolatban Fülöp adott egy gyors algoritmust [13]. Ez az eljárás hasonló alapokon nyugszik, mint az értekezés 5.2. fejezetében bemutatott új algoritmus, de nem ciklikus koordinátákkal dolgozik.

2. fejezet

A felhasznált módszerek

Az értekezés 2. fejezetében a páros összehasonlítás mátrixok módszertanának szélesebb körű bemutatása található. Itt csak a saját eredmények ismertetéséhez elengedhetetlenül szükséges definíciók, tételek, jelölések és módszerek bemutatására kerül sor.

2.1. Páros összehasonlítás mátrixok

1. Definíció. Az $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ mátrixot páros összehasonlítás mátrixnak nevezzük, ha

1. $a_{ij} > 0$ és
2. $a_{ij} = 1/a_{ji}$,

minden $i, j = 1, \dots, n$ indexpár esetén.

A második tulajdonságból következik, hogy $a_{ii} = 1$. Az $n \times n$ -es páros összehasonlítás mátrixok halmazát \mathcal{PCM}_n -el jelöljük.

Egy $\mathbf{A} \in \mathcal{PCM}_n$ páros összehasonlítás mátrix általános alakban tehát a

következésképpen írható fel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 1 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Ha a kardinális tranzitivitási tulajdonság is teljesül egy páros összehasonlítás mátrixra, akkor *konzisztensnek* nevezzük:

2. Definíció. Az $\mathbf{A} \in \mathcal{PCM}_n$ páros összehasonlítás mátrix konzisztens, ha

$$a_{ik}a_{kj} = a_{ij} \quad (2.2)$$

minden $i, j, k = 1, \dots, n$ indexhármásra.

Konzisztens mátrix esetén tehát, ha például az A szempont 2-szer fontosabb a B szempontnál, a B pedig 3-szor fontosabb a C-nél, akkor A 6-szor fontosabb C-nél. Az $n \times n$ -es konzisztens páros összehasonlítás mátrixok halmazát \mathcal{PCM}_n^* -al jelöljük. Egy páros összehasonlítás mátrixot *inkonzisztensnek* nevezünk, ha nem konzisztens.

Mint fentebb említve lett, előfordul olyan eset, hogy nem áll rendelkezésünkre az összes páros összehasonlítás, csak azok egy részhalmaza. Ekkor egy nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixunk van [14], melyből néhány elem (és reciproka) hiányzik.

3. Definíció. A egy nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix, ha az alábbi alakot ölti:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & - & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} & \dots & - \\ - & 1/a_{23} & 1 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & - & 1/a_{3n} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

ahol a kihúzott pozíciókban hiányzó elemek vannak, és $a_{ij} > 0$. A hiányzó elemek a főátlón kívül bárhol lehetnek, nem csak az itt szemléltetésként felhozott pozíciókban. Továbbá ha egy elem hiányzik, akkor a reciproka is.

A 3. Definícióban szereplő objektum formálisan nem mátrix, ezért ilyen formában nem is lehet ekként kezelni. Matematikailag megfoghatóvá válik azonban, ha a hiányzó elemek helyére változókat írunk. Ekkor is figyelniük kell a reciprok szimmetriára, azaz ha egy hiányzó helyre beírunk egy változót, akkor az átellenes pozícióba ugyanannak a változónak a reciprokát kell írni, ezáltal annyi változónk lesz, ahány elem hiányzik a mátrix felső háromszögéből.

A nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokhoz adható egy egyszerű és szemléletes gráf reprezentáció, amelynek komoly szerepe lesz a súlyvektor számítási módszereknél. A gráf csúcsai az egyes összehasonlítandó szempontoknak felelnek meg, az élei pedig azoknak a pároknak, amik ténylegesen össze vannak hasonlítva, azaz a hozzá tartozó elem nem hiányzik a mátrixból. Formálisan:

4. Definíció. Az \mathbf{A} $n \times n$ -es nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixhoz tartozó $G_{\mathbf{A}}(V, E)$ irányítatlan gráf a következő:

$$V = \{1, \dots, n\},$$

$$E = \{e(i, j) \mid a_{ij} \text{ (és } a_{ji}) \text{ adott, } i \neq j\}.$$

Speciálisan egy teljesen kitöltött mátrixhoz tartozó gráf az n pontú teljes gráf, azaz K_n .

Az új eredmények közül kettő egy, illetve két elemtől eltekintve konzisztens páros összehasonlítás mátrixokról szól, ezért az alábbi definíciók ismerete szükséges.

5. Definíció. Egy $\mathbf{A}_{\delta} \in \mathcal{PCM}_n$ páros összehasonlítás mátrix egy elemtől eltekintve konzisztens, ha alkalmas sor- és oszlop-cserékkel az alábbi alakra

hozható:

$$\mathbf{A}_\delta = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{x}_1\delta & x_2 & \dots & x_{n-1} \\ \frac{1}{\mathbf{x}_1\delta} & 1 & \frac{x_2}{x_1} & \dots & \frac{x_{n-1}}{x_1} \\ \frac{1}{x_2} & \frac{x_1}{x_2} & 1 & \dots & \frac{x_{n-1}}{x_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_{n-1}} & \frac{x_1}{x_{n-1}} & \frac{x_2}{x_{n-1}} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

ahol $0 < \delta \neq 1$ és $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} > 0$.

6. Definíció. Egy páros összehasonlítás mátrix legfeljebb két elemtől eltekintve konzisztens, ha alkalmas sor- és oszlopcserekkel az alábbi alakok egyikére hozható:

1. eset ($n \geq 4$):

$$\mathbf{P}_{\gamma,\delta} = \begin{pmatrix} 1 & \delta\mathbf{x}_1 & \gamma\mathbf{x}_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} \\ \mathbf{1}/(\delta\mathbf{x}_1) & 1 & x_2/x_1 & x_3/x_1 & \dots & x_{n-1}/x_1 \\ \mathbf{1}/(\gamma\mathbf{x}_2) & x_1/x_2 & 1 & x_3/x_2 & \dots & x_{n-1}/x_2 \\ 1/x_3 & x_1/x_3 & x_2/x_3 & 1 & \dots & x_{n-1}/x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/x_{n-1} & x_1/x_{n-1} & x_2/x_{n-1} & x_3/x_{n-1} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

2. eset ($n \geq 4$):

$$\mathbf{R}_{\gamma,\delta} = \begin{pmatrix} 1 & \delta\mathbf{x}_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_{n-1} \\ \mathbf{1}/(\delta\mathbf{x}_1) & 1 & x_2/x_1 & x_3/x_1 & x_4/x_1 & \dots & x_{n-1}/x_1 \\ 1/x_2 & x_1/x_2 & 1 & \gamma\mathbf{x}_3/\mathbf{x}_2 & x_4/x_2 & \dots & x_{n-1}/x_2 \\ 1/x_3 & x_1/x_3 & \mathbf{x}_2/(\gamma\mathbf{x}_3) & 1 & x_4/x_3 & \dots & x_{n-1}/x_3 \\ 1/x_4 & x_1/x_4 & x_2/x_4 & x_3/x_4 & 1 & \dots & x_{n-1}/x_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/x_{n-1} & x_1/x_{n-1} & x_2/x_{n-1} & x_3/x_{n-1} & x_4/x_{n-1} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

ahol $x_1, \dots, x_{n-1} > 0$ és $0 < \delta, \gamma \neq 1$.

A 2. esetet az értekezésben algebrai okok miatt külön 2.A ($n = 4$) és 2.B ($n \geq 5$) esetre kellett bontani.

2.2. Súlyvektor számítási módszerek

Egy páros összehasonlítás mátrixból sokféle módszerrel számolhatunk súlyvektort, melyek közül az értekezés jónéhányat bemutat. A saját eredmények értelmezéséhez két módszer ismeretére lesz szükség. Az első a sajátvektor módszer [19], mely a legrégebbi, és az egyik legnépszerűbb eljárás a súlyvektor meghatározására. A második a szintén népszerű és sok jó tulajdonsággal bíró Logaritmikus legkisebb négyzetek módszere [9, 10, 11, 18].

2.2.1. Sajátvektor módszer

Mivel egy $\mathbf{A} \in \mathcal{PCM}_n$ páros összehasonlítás mátrix pozitív, ezért a Perron–Frobenius-tétel következtében egyértelműen létezik legnagyobb (valós) sajátértéke, és a hozzá tartozó, lényegében egyértelmű sajátvektor elemei választhatóak mind pozitívnak. A legnagyobb (avagy domináns) sajátértéket inentől jelölje λ_{\max} . A sajátvektor módszer a λ_{\max} -hoz tartozó jobboldali sajátvektort javasolja súlyvektornak. A sajátvektor módszer által adott megoldást inentől jelölje \mathbf{w}^{EM} , melyre tehát teljesül, hogy

$$\mathbf{A}\mathbf{w}^{EM} = \lambda_{\max}\mathbf{w}^{EM}. \quad (2.6)$$

Egy páros összehasonlítás mátrix inkonzisztenciájának mértékét a különböző inkonzisztencia indexek ragadják meg. Az irodalomban rengeteg inkonzisztencia index található. Azonban ezek közül is a legrégebbi és az egyik legnépszerűbb a szintén Saaty [19] által bevezetett *CR* (Consistency Ratio) index, mely egyidős az AHP módszerrel, és a sajátvektor módszerrel van szoros kapcsolatban.

Mivel egy páros összehasonlítás mátrix legnagyobb sajátértékére $\lambda_{\max} \geq n$ és ez a reláció pontosan akkor teljesül egyenlőséggel, ha a mátrix konzisztens, ezért a λ_{\max} értéke felhasználható egy inkonzisztencia index képzésére. λ_{\max} lehetséges nagysága azonban a mátrix dimenziójától (azaz a szempontok számától), vagyis n -től függ, ezért ezt először egyfajta normalizálásnak kell

alávetni. Innen ered az első kiszámítandó érték, a CI (Consistency Index), melyet a következő módon kapunk:

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}.$$

A CI index azonban még mindig nem alkalmas különböző méretű mátrixok összehasonlítására, mert nagyobb (véletlengenerált) mátrixok átlagos CI értéke nagyobb, mint a kisebbeké. Így még ezt a mutatót is tovább kell normálni, hogy megkapjuk a CR indexet. A további normáláshoz véletlengenerált $n \times n$ -es páros összehasonlítás mátrixok sokaságára kell kiszámítani a CI mutatót, és ezek átlagát nevezzük RI -nek (Random Index), mely n -től függ, azaz

$$RI = \frac{\overline{\lambda_{\max}} - n}{n - 1},$$

ahol $\overline{\lambda_{\max}}$ az $n \times n$ -es véletlengenerált páros összehasonlítás mátrixok átlagos λ_{\max} értéke. Ilyen módon az RI egy-egy valós szám lesz minden n -re, mely kigyűjthető egy táblázatba (ld. például [22, Table 1]), melynek segítségével már előállítható a CR mutató:

$$CR = \frac{CI}{RI}.$$

A sajátvektor módszer kiterjesztéséhez nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok esetére Shiraishi, Obata és Daigo cikke [21] alapján abból az ötletből indulunk ki, hogy a lehető legkisebb CR inkonzisztenciájú kitöltéshez tartozó jobboldali domináns sajátvektort tekintjük súlyvektornak. Mivel egy konkrét kitöltéshez tartozó vektort nézünk, ennek a módszernek megvan az a jó tulajdonsága, hogy nem csak egy súlyvektort, hanem egy kitöltést is szolgáltat.

Mivel a CR inkonzisztencia a domináns sajátérték egy lineáris transzformációja, ezért a lehető legkisebb CR inkonzisztencia elérése ekvivalens a domináns sajátérték minimalizálásával. Formálisan tehát az $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix esetén a következő feladatot kell

megoldanunk:

$$\min_{\mathbf{x} > \mathbf{0}} \lambda_{\max}(\mathbf{A}(\mathbf{x})). \quad (2.7)$$

A (2.7) feladat megoldásából származó minimális λ_{\max} -hoz tartozó sajátvektor lesz a kiterjesztett sajátvektor módszer súlyvektora. Az az \mathbf{x} vektor, ahol ez a minimum felvétetik, szolgáltatja az optimális kitöltést.

A (2.7) feladatnak azonban nem mindig létezik egyértelmű megoldása. Könnyen látható, hogy a mátrixhoz tartozó gráf összefüggősége szükséges feltétel. Bozóki, Fülöp és Rónyai [7] bizonyították be, hogy a gráf összefüggősége nemcsak szükséges, de elégséges is. A (2.7) feladatnak pontosan akkor létezik tehát egyértelmű megoldása, ha $G_{\mathbf{A}}(V, E)$ összefüggő.

2.2.2. Logaritmikus legkisebb négyzetek módszere

Az úgynevezett Legkisebb négyzetek módszere (angolul Least Squares Method, röviden LSM) [8] a mátrixelemeknek a súlyok arányaitól vett négyzetes normában mért távolságának összegét minimalizálja, ami intuitív, de számos problémával küzd. Ennek módosítása a logaritmikus legkisebb négyzetek módszere (angolul Logarithmic Least Squares Method, röviden LLSM), mely a mátrixelemek logaritmusát a súlyvektor elemek hányadosának logaritmusával hasonlítja össze [9, 10, 11, 18]. Formálisan tehát a logaritmikus legkisebb négyzetek módszere azt a $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^\top$ vektort eredményezi súlyvektorként, amely a következő optimalizálási feladat megoldása:

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\log a_{ij} - \log \frac{w_i}{w_j} \right)^2 & \quad (2.8) \\ \sum_{i=1}^n w_i & = 1 \\ w_i > 0, \quad i & = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

A legkisebb négyzetek módszerével ellentétben a logaritmikus legkisebb négyzetek módszerének mindig egyértelmű optimuma van: a (2.8) feladatnak

a megoldása az a vektor, amelynek elemei a mátrix sorainak mértani közepei [9], azaz

$$w_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}}, \quad i = 1, \dots, n,$$

alkalmas normalizálással.

A logaritmikus legkisebb négyzetek módszere értelemszerűen terjeszthető ki a nem teljesen kitöltött esetre, így kapjuk az Incomplete Logarithmic Least Squares Method, röviden ILLSM módszert. A (2.8) célfüggvényt csak azokra az a_{ij} mátrixelemekre írjuk fel, amelyek adottak. Tehát

$$\min \sum_{\substack{i,j=1 \\ a_{ij} \text{ adott}}}^n \left(\log a_{ij} - \log \frac{w_i}{w_j} \right)^2 \quad (2.9)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

$$w_i > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Az, hogy a_{ij} adott, ekvivalens azzal, hogy a mátrixhoz tartozó gráfban, $G_{\mathbf{A}}(V, E)$ -ben $e(i, j) \in E$.

Bozóki, Fülöp és Rónyai a logaritmikus legkisebb négyzetek módszerére is bizonyította [7], hogy a (2.9) feladatnak pontosan akkor van egyértelmű megoldása, ha a mátrixhoz tartozó gráf összefüggő, azaz minden elem minden másik elemmel össze van hasonlítva, közvetlenül vagy közvetve. Ugyancsak Bozóki, Fülöp és Rónyai mutatta meg [7], hogy a logaritmikus legkisebb négyzetek módszere megoldható egy lineáris egyenletrendszer megoldásával.

2.3. Pareto-hatékonyság

A Pareto-hatékonyság – vagy más elnevezéssel Pareto-optimalitás – a közgazdaságtan alapvető fogalma. Azt fejezi ki, hogy egy elosztást, tevékenységet, stb. nem lehet triviálisan javítani, azaz anélkül javítani valaminek

vagy valakinek a helyzetén, hogy ez máshol ne járna kár okozásával. Defináljuk most a páros összehasonlítás mátrixokból számolt súlyvektorok Pareto-hatékonyságát!

Legyen $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n} \in \mathcal{PCM}_n$ rögzített. Legyen továbbá $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^\top$ egy pozitív súlyvektor (ekkor tehát $S = \mathbb{R}_{++}^n$, azaz a pozitív ortáns), ahol n a szempontok száma. A célfüggvényeink legyenek $f_{ij}(\mathbf{w}) := \left| a_{ij} - \frac{w_i}{w_j} \right|$ minden $i \neq j$ -re, így $M = n^2 - n$ célfüggvényünk van. Ilyen keretek között a következő definíciót írhatjuk fel:

7. Definíció. Egy pozitív \mathbf{w} súlyvektor *hatékony* (vagy *Pareto-hatékony*), ha nem létezik olyan másik pozitív $\mathbf{w}' = (w'_1, w'_2, \dots, w'_n)^\top$ súlyvektor, amire

$$\left| a_{ij} - \frac{w'_i}{w'_j} \right| \leq \left| a_{ij} - \frac{w_i}{w_j} \right| \quad \text{minden } 1 \leq i, j \leq n\text{-re, és} \quad (2.10)$$

$$\left| a_{k\ell} - \frac{w'_k}{w'_\ell} \right| < \left| a_{k\ell} - \frac{w_k}{w_\ell} \right| \quad \text{valamely } 1 \leq k, \ell \leq n\text{-re.} \quad (2.11)$$

A fenti definíció tehát azt jelenti, hogy egy páros összehasonlítás mátrixhoz tartozó súlyvektor akkor hatékony, ha nem lehet a vektor elemeinek változtatásával egy mátrixelem közelítését sem javítani anélkül, hogy más mátrixelem közelítésén ne rontanánk.

A hatékonyság egy természetesen elvárható tulajdonság. Blanquero, Carrizosa és Conde azonban megmutatta, hogy a sajátvektor módszer által adott súlyvektor, azaz a jobboldali domináns sajátvektor nem mindig hatékony [5, Section 3]. Bozóki [6] azt is megmutatta, hogy a hatékonyság az inkonzisztencia mértékétől sem függ közvetlenül.

Blanquero, Carrizosa és Conde [5] a hatékonyság több szükséges és elégséges feltételét is vizsgálta, melyek közül az alábbi, irányított gráffal adott reprezentációt fogjuk használni.

8. Definíció. Legyen $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n} \in \mathcal{PCM}_n$ és $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^\top$ egy pozitív súlyvektor. A $G := (V, \vec{E})_{\mathbf{A}, \mathbf{w}}$ irányított gráfot a következő

módon definiáljuk: $V = \{1, 2, \dots, n\}$ és

$$\vec{E} = \left\{ \text{arc}(i \rightarrow j) \mid \frac{w_i}{w_j} \geq a_{ij}, i \neq j \right\},$$

ahol $\text{arc}(i \rightarrow j)$ az i csúcsból a j csúcsba vezető irányított élt jelöli.

A definícióban meghatározott irányított gráfban tehát akkor megy egy irányított él az i pontból a j pontba, ha a w_i/w_j súlyarány felülbecsli az a_{ij} mátrixelemet. Tökéletes közelítés esetén, azaz amikor $a_{ij} = w_i/w_j$, az i és j csúcs között mindkét irányban fut egy-egy irányított él. Az is látható, hogy bármely két csúcs között legalább az egyik irányba mindig fut él.

A 8. Definíció segítségével az alábbi tétel mondható ki:

1. Tétel ([5, Corollary 10]). *Legyen $\mathbf{A} \in \mathcal{PCM}_n$. Egy \mathbf{w} pozitív súlyvektor pontosan akkor hatékony, ha $G = (V, \vec{E})_{\mathbf{A}, \mathbf{w}}$ egy erősen összefüggő gráf, azaz minden i, j csúcspárra létezik irányított út i -ből j -be és j -ből i -be.*

2.4. A ciklikus koordináták módszere

Az értekezés 5. fejezetében szereplő két eljáráshoz a ciklikus koordináták módszerét [17][253–254. oldal] alkalmazzuk, mely egy numerikus optimalizálási módszer. A ciklikus koordináták módszerének lényege, hogy egy többváltozós optimalizálási feladatban egyszerre mindig csak egy változót tekintünk ténylegesen változónak, a többi változó az előző lépésben számolt értéken van rögzítve. Annak az elemnek, amelyik ténylegesen változik, az új értéke az a szám lesz, ahol az optimalizálási feladat szerinti (a többi elem változatlanlansága mellett) optimuma felvétetik. Azt, hogy melyik változót tekintjük egy adott lépésben ténylegesen változónak, ciklikusan változtatjuk, azaz először az elsőt, majd a másodikat stb., majd amikor az utolsó változón is túl vagyunk, visszaugrunk az elsőre és ugyanígy folytatjuk, amíg el nem érjük a leállási kritériumot. Az, hogy mi a leállási kritérium, a feladattól függ.

2.5. Newton-módszer

A Newton-módszer egy ismert iteratív szélsőérték kereső módszer, egy- illetve többváltozós esetre. Az egyváltozós esetben az r -edik iterációban egy általános $f(x)$ függvényre a szélsőérték kereső algoritmus alapvető formája a következő:

$$x^{(r+1)} = x^{(r)} - \frac{f'(x^{(r)})}{f''(x^{(r)})},$$

ahol $x^{(r)}$ az x változó r -edik iterációban számolt értéke.

A többváltozós esetben legyen $L(\mathbf{t})$, melyet minimalizálni szeretnénk. Ekkor többváltozós Newton-módszer a

$$\mathbf{t}^{(r+1)} = \mathbf{t}^{(r)} - \gamma [HL(\mathbf{t}^{(r)})]^{-1} \nabla L(\mathbf{t}^{(r)})$$

formát ölti, ahol $HL(\mathbf{t})$ az $L(\mathbf{t})$ Hesse-mátrixa, $\nabla L(\mathbf{t})$ a gradiens vektora, γ pedig egy, a Newton-módszernél szokásos lépésköz paraméter. Ezt a lépésköz paramétert az egyváltozós módszernél is használhatjuk.

2.6. A Collatz–Wielandt formula

Az eredeti tétel ugyan úgynevezett irreducibilis mátrixokra vonatkozik (az értekezésben is így van kimondva), azonban az új eredményeknél feltesszük, hogy pozitív mátrix áll a rendelkezésünkre, ami speciális esete az irreducibilisnek. Mivel egy páros összehasonlítás mátrix mindig pozitív, ezért a tétel alkalmazható rá.

2. Tétel (Collatz–Wielandt). *Legyen $\mathbf{A} \geq 0$ egy pozitív (általánosabban irreducibilis) $n \times n$ -es mátrix.*

$$\lambda_{\max} = \max_{\mathbf{w} > 0} \min_{i=1, \dots, n} \frac{(\mathbf{A}\mathbf{w})_i}{w_i} = \quad (2.12)$$

$$= \min_{\mathbf{w} > 0} \max_{i=1, \dots, n} \frac{(\mathbf{A}\mathbf{w})_i}{w_i}. \quad (2.13)$$

3. fejezet

Az értekezés eredményei

3.1. A logaritmikusan legkisebb négyzetek módszere és az optimális kitöltés

Ez az állítás a 2.5.2 alfejezetben található, az értekezés bevezető részében.

Nem teljesen kitöltött mátrixok optimális kitöltésére is szükségünk lehet. A sajátvektor módszer teljesen közvetlenül szolgáltat egy, a CR indexre optimális (minimális) kitöltést, és ebből számol súlyvektort. A logaritmikusan legkisebb négyzetek módszere esetén ez azonban nem ilyen egyértelmű, itt kitöltés nélkül közvetlenül számoljuk a súlyvektort. A súlyvektor elemeinek arányait visszaírhatjuk a mátrix megfelelő kitöltetlen pozícióiba, azonban erről ránézésre nem világos, hogy megfelelő eredményre vezet.

A sajátvektor módszer esetén ha az optimálisan kitöltött mátrixból újra számolunk egy súlyvektort, az természetesen ugyanaz lesz, mint amit elsőre kaptunk. Ezt a kritériumot kell teljesítenie a logaritmikusan legkisebb négyzetes kitöltésnek is ahhoz, hogy azt mondhassuk, hogy a kitöltés a célfüggvényre nézve optimális. A következő állítás új eredmény, a felvetés tőlem származik, a bizonyítás pedig Bozóki Sándortól.

1. Állítás. *A nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokra vonat-*

3.2. A SAJÁTVEKTOR MÓDSZER ÉS A PARETO-HATÉKONYSÁG 19

kozó logaritmikusan legkisebb négyzetek módszere (ILLSM) optimális kitöltést ad a hiányzó elemek $a_{ij} = \frac{w_i^{ILLSM}}{w_j^{ILLSM}}$ helyettesítésével.

A bizonyítás helyszűke miatt ebben az összefoglalóban nem szerepel, azonban az értekezésben rögtön az állítás után megtalálható.

3.2. A sajátvektor módszer és a Pareto-hatékonyság

Mint korábban említve lett, a sajátvektor módszer esetén nem garantálható a súlyvektor Pareto-hatékonysága. A korábban bevezetett két (a gyakorlatban is lényeges) speciális esetben azonban sikerült a hatékonyságot igazolni.

3. Tétel ([2, Theorem 3.4]). *Az egy elemtől eltekintve konzisztens páros összehasonlítás mátrixok jobboldali domináns sajátvektora Pareto-hatékonny.*

A bizonyításra egy elemi módszereket használó, és egy, az 1. Tételt használó bizonyítás is megtalálható mind az értekezés 4.1. fejezetében, mind az [2] cikkben.

4. Tétel ([3, Theorem 3]). *A két elemtől eltekintve konzisztens páros összehasonlítás mátrixok jobb oldali domináns sajátvektora Pareto-hatékonny.*

Az igen kiterjedt bizonyítás megtalálható a [3] cikkben, illetve egy összefoglalás az értekezés 4.2 fejezetében.

3.3. A sajátvektor számítása ciklikus koordináták módszerével

Ebben a témakörben két új eljárást mutatok be. Az első közülük nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok sajátvektor módszer szerinti optimális kitöltését Newton-módszer segítségével végzi [1]. A második egy általános módszer domináns sajátérték és sajátvektor számításra [4]. Mindkét esetben a ciklikus koordináták módszerét [17][253–254. oldal] alkalmazzuk.

3.3.1. Optimális kitöltés Newton–módszerrel

Az itt szereplő új eljárás leírása megtalálható az értekezés 5.1. fejezetében, illetve a [1] cikkben. A cél a minimális domináns sajátértékű kitöltés megkeresése, a többváltozós függvényünk tehát a domináns sajátérték a hiányzó elemek függvényében. A Newton–módszer alkalmazása ciklikus koordinátákkal úgy történik, hogy a nem teljesen kitöltött mátrix felső háromszögében először minden hiányzó elemet beállítunk egy kezdőértékre. Ezután egyesével végigmegyünk (a ciklikus koordináták módszere szerint) a hiányzó elemeken, és egyszerre mindig csak a kiválasztott változót változtatva, a többi változó értékét pedig az előző lépésben számolt értéken (vagy az első iterációban a kezdőértéken) fixálva Newton–módszerrel elvégezzük az egyváltozós minimumkeresést.

Sajnos azonban a λ_{\max} optimalizálása közvetlenül a hiányzó elemekben egy nem konvex feladat [7]. Annak érdekében, hogy garantálható legyen az egyértelmű globális minimumhoz való konvergencia, a feladatot át kell skáláznunk olyan módon, hogy konvex optimalizálási feladatot kapjunk. Bozóki, Fülöp és Rónyai [7] ötlete alapján legyen $x_i = e^{t_i}$, $i = 1, \dots, d$. Az így kapott $\mathbf{B}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})$ mátrixban a domináns sajátérték, $\lambda_{\max}(\mathbf{B}(\mathbf{t}))$ már konvex függvénye \mathbf{t} -nek [7]. Harker [15] jóvoltából ismertek a domináns sajátértéknek a mátrix elemei szerinti első és második deriváltjai, és ezek csak a mátrixelem (i, j) pozíciójától függenek. Ezek a deriváltak azonban az eredeti mátrixelemekre, azaz az x_i , $i = 1, \dots, d$ -re vonatkoznak, és nem t_i -re. Ahhoz, hogy a t_i szerint vett deriváltakat megkapjuk, magukat a deriváltakat is át kell skálázni. Az átszámolás az értekezésben, és a [1] cikkben is megtalálható. Ezeknek az átskálázott deriváltaknak az ismeretében már alkalmazható az egyváltozós Newton–módszer ciklikus koordinátákkal (az értekezés 5.1.1 alfejezete), illetve közvetlenül egy többváltozós Newton–módszer is (az értekezés 5.1.2 alfejezete).

3.3.2. Pozitív mátrixok domináns sajátvektora ciklikus koordinátákkal

Az ebben a fejezetben szereplő eljárás részletes leírása megtalálható az értekezés 5.2. fejezetében, illetve a [4] kéziratban. Egy iteratív algoritmust adtunk pozitív mátrixok domináns sajátértékének és sajátvektorának kiszámítására. Ez az eljárás ugyan igen általános keretek között is működik, de egyik alkalmazása a sajátvektor módszer számolása páros összehasonlítás mátrixok esetén.

Az algoritmus a (2.13) formulát használja a λ_{\max} közelítésére, azonban ez a választás önkényes: az algoritmus könnyen átalakítható úgy, hogy a (2.12) összefüggést használja. Később azonban mindkét alakot felhasználjuk a megállási kritérium meghatározásához.

Ebben az esetben is a ciklikus koordináták módszerét alkalmazzuk. A változóink ezúttal a domináns sajátvektor, \mathbf{w} elemei: w_1, \dots, w_n . A ciklikus koordináták módszere, a korábban leírtak szerint minden lépésben csak egy változót tekint ténylegesen változónak. Jelölje ennek a változónak az indexét k , így minden lépésben w_k lesz az aktuális változónk, míg a többi változó értéke ideiglenesen azok előző lépésben számolt értékein van rögzítve.

A fentiek alapján (2.13) szerint minden lépésben w_k azon értékét keressük, amire teljesül, hogy

$$w_k = \arg \min_{w_k} \max_{i=1, \dots, n} \frac{(\mathbf{A}\mathbf{w})_i}{w_i}. \quad (3.1)$$

Mivel a többi, w_j , $j \neq k$ érték fix, ezért a (3.1) kifejezés minden i -re csupán w_k -tól függ. Így bevezethetjük a következő jelölést. Legyen

$$f_i(w_k) = \frac{(\mathbf{A}\mathbf{w})_i}{w_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Amit keresünk tehát egy lépésben, az az a $w_k > 0$ érték, amelyre

$$w_k = \arg \min_{w_k} \max_{i=1, \dots, n} f_i(w_k),$$

azaz ahol az f_i függvények felső burkolójának a minimumpontja van. Az $f_i(w_k)$ függvényérték pedig a λ_{\max} közelítése (felső korlátja) lesz. Megmutatható, hogy a vizsgált f_i függvények $i \neq k$ -ra lineáris függvények, $i = k$ -ra pedig $f_k(w_k)$ egy hiperbolikus függvény. Szintén megmutatható, hogy elegendő csak az f_k függvény metszéspontjait kiszámolni minden f_i , $i \neq k$ függvénnyel. Az f_k szigorúan monoton csökkenése miatt, az a $w_k > 0$, amelyik eleget tesz a (3.1) feltételnek, az a legkisebb w_k lesz, amelyik a hiperbolikus és egy lineáris függvény metszéspontjában van. A metszéspont pedig a másodfokú megoldóképlet alapján könnyen számolható.

Egy további gyorsítási lehetőség adódik azáltal, hogy nem feltétlenül szükséges az összes metszéspontot kiszámolnunk: csak a lineáris függvények maximumának a hiperbolikus függvénnyel vett metszéspontjára van szükségünk. Így azok a lineáris függvények, amelyeknek nincs közös pontja a lineárisak felső burkolójával, érdektelenek.

A megállási kritérium úgy adódik, hogy ha a Collatz–Wielandt formulában szereplő $\min_{\mathbf{w}>0} \max_{i=1,\dots,n} \frac{(\mathbf{A}\mathbf{w})_i}{w_i}$ érték becslése (a felső burkoló minimuma) és a $\max_{\mathbf{w}>0} \min_{i=1,\dots,n} \frac{(\mathbf{A}\mathbf{w})_i}{w_i}$ becslése (az alsó burkoló maximuma) egy küszöbértéknél közelebb vannak egymáshoz, akkor az algoritmus leáll.

Kezdőértéknek elvileg bármely pozitív súlyvektor megfelel. Ha egyszerűen akarunk eljárni, használhatjuk a $w_i^{(0)} = 1, i = 1, \dots, n$ csupa 1-es kezdőértékeket. Páros összehasonlítás mátrixok esetén azonban, ahol a sajátvektor módszer szerint a domináns sajátvektort (és sajátértéket) keressük, amely közel van a logaritmikus legkisebb négyzetek módszere által adott soronként vett mértani középhez [16]. Így a kezdőértékeket ebben az esetben érdemes a következő módon választani: $w_i^{(0)} = \prod_{j=1}^n \sqrt[n]{a_{ij}}$. Ezt a kezdőértéket általános pozitív mátrixok esetén is használhatjuk a csupa egyesekből álló kezdőérték helyett.

A fent leírt algoritmus egy új eljárás a domináns sajátvektor és sajátérték számításra, mely nagy mátrixokra van szabva és egyszerűségét a ciklikus koordináták módszere, valamint az aritmetikailag egyszerű számítások adják.

4. fejezet

Saját publikációk

Idegen nyelvű referált szakmai folyóirat cikkek

1. K. Ábele-Nagy. Minimization of the Perron eigenvalue of incomplete pairwise comparison matrices by Newton iteration. *Acta Universitatis Sapientiae, Informatica*, 7(1):58–71, 2015.
2. K. Ábele-Nagy and S. Bozóki. Efficiency analysis of simple perturbed pairwise comparison matrices. *Fundamenta Informaticae*, 144:279–289, 2016.
3. K. Ábele-Nagy, S. Bozóki, and Ö. Rebák. Efficiency analysis of double perturbed pairwise comparison matrices. *Journal of the Operational Research Society*, 69(5):707–713, 2018.

Idegen nyelvű kézirat

4. K. Ábele-Nagy and J. Fülöp. On computing the principal eigenvector of positive matrices by the method of cyclic coordinates. *kézirat*, 2019.

Szakdolgozatok

5. K. Ábele-Nagy. Nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok a többszemponútú döntésekben. Diplomamunka, Eötvös Loránd Tudományegyetem, 2010.
6. K. Ábele-Nagy. Nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok aggregálása. MA Szakdolgozat, Budapesti Corvinus Egyetem, 2012.

Irodalomjegyzék

- [1] K. Ábele-Nagy. Minimization of the Perron eigenvalue of incomplete pairwise comparison matrices by Newton iteration. *Acta Universitatis Sapientiae, Informatica*, 7(1):58–71, 2015.
- [2] K. Ábele-Nagy and S. Bozóki. Efficiency analysis of simple perturbed pairwise comparison matrices. *Fundamenta Informaticae*, 144:279–289, 2016.
- [3] K. Ábele-Nagy, S. Bozóki, and Ö. Rebák. Efficiency analysis of double perturbed pairwise comparison matrices. *Journal of the Operational Research Society*, 69(5):707–713, 2018.
- [4] K. Ábele-Nagy and J. Fülöp. On computing the principal eigenvector of positive matrices by the method of cyclic coordinates. *kézirat*, 2019.
- [5] R. Blanquero, E. Carrizosa, and E. Conde. Inferring efficient weights from pairwise comparison matrices. *Mathematical Methods of Operations Research*, 64(2):271–284, 2006.
- [6] S. Bozóki. Inefficient weights from pairwise comparison matrices with arbitrarily small inconsistency. *Optimization*, 63(12):1893–1901, 2014.
- [7] S. Bozóki, J. Fülöp, and L. Rónyai. On optimal completion of incomplete pairwise comparison matrices. *Mathematical and Computer Modelling*, 52(1-2):318–333, 2010.

- [8] A. T. W. Chu, R. E. Kalaba, and K. Spingarn. A comparison of two methods for determining the weights of belonging to fuzzy sets. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 27(4):531–538, 1979.
- [9] G. Crawford and C. Williams. A note on the analysis of subjective judgment matrices. *Journal of Mathematical Psychology*, 29(4):387–405, 1985.
- [10] J. G. de Graan. Extensions of the multiple criteria analysis method of T.L. Saaty. Technical report, National Institute for Water Supply, Leidschendam, The Netherlands, 1980.
- [11] P. de Jong. A statistical approach to Saaty’s scaling method for priorities. *Journal of Mathematical Psychology*, 28(4):467–478, 1984.
- [12] A. Farkas. The analysis of the principal eigenvector of pairwise comparison matrices. *Acta Polytechnica Hungarica*, 4(2):99–115, 2007.
- [13] J. Fülöp. A sajátvektor módszer egy optimalizálási megközelítése. XXX. Magyar Operációkutatási Konferencia, 2013.
- [14] P. Harker. Incomplete pairwise comparisons in the Analytic Hierarchy Process. *Mathematical Modelling*, 9(11):837–848, 1987.
- [15] P. T. Harker. Derivatives of the Perron root of a positive reciprocal matrix: With application to the Analytic Hierarchy Process. *Applied Mathematics and Computation*, 22(2-3):217–232, 1987.
- [16] M. Kwiesielewicz. The logarithmic least squares and the generalized pseudoinverse in estimating ratios. *European Journal of Operational Research*, 93(3):611–619, 1996.
- [17] D. G. Luenberger and Y. Ye. *Linear and Nonlinear Programming*, volume 116 of *International Series in Operations Research & Management Science*. Springer, 3rd edition, 2008.

- [18] G. Rabinowitz. Some comments on measuring world influence. *Journal of Peace Science*, 2(1):49–55, feb 1976.
- [19] T. L. Saaty. A scaling method for priorities in hierarchical structures. *Journal of Mathematical Psychology*, 15(3):234–281, 1977.
- [20] T. L. Saaty. *The Analytic Hierarchy Process*. McGraw-Hill, 1980.
- [21] S. Shiraishi, T. Obata, and M. Daigo. Properties of a positive reciprocal matrix and their application to AHP. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 41(3):404–414, 1998.
- [22] W. C. Wedley. Consistency prediction for incomplete AHP matrices. *Mathematical and Computer Modelling*, 17(4-5):151–161, 1993.