Általános és
Kvantitatív
Közgazdaságtan
Doktori Iskola

TÉZISGYŰJTEMÉNY

Vékás Péter

Az élettartam-kockázat modellezése

című Ph.D. értekezéséhez

Témavezetők:

Dr. Kovács Erzsébet CSc

Dr. Deák István DSc

Budapest, 2016

Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék

TÉZISGYŰJTEMÉNY

Vékás Péter

Az élettartam-kockázat modellezése

című Ph.D. értekezéséhez

Témavezetők:

Dr. Kovács Erzsébet CSc

Dr. Deák István DSc

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Kutatási előzmények és a téma indoklása

1.1. Az élettartam-kockázat problémája

Empirikus tény, hogy az emberi élettartam átlagos hossza az elmúlt két évszázad során jelentősen növekedett a fejlett országok túlnyomó részében, melynek hátterében többek között az orvostudomány fejlődése, a csecsemő- és gyermekhalandóság jelentős csökkenése, az élelmiszerellátás és a közegészségügyi helyzet javulása, valamint az emberi életmód jelentős átalakulása állnak. A növekedés mértéke országonként eltérő, de gyakran viszonylag rövid távon is érzékelhető. A magyarországi férfiak és nők születéskor várható élettartama 1900 és 2014 között közel megkétszereződött. Ez az alapvetően pozitív jelenség ugyanakkor az aktuáriustudományok területén módszertani problémák forrása, mivel ellentmond a statikus halandósági rátákra vonatkozó hagyományos aktuáriusi feltevésnek. Ez különösen a nyugdíjrendszerek és az életjáradékok területén okoz problémákat, ahol a statikus feltevés súlyos tervezési hibákhoz vezet, melyre az értekezésemben ismertetett két esettanulmány is rámutat. Értekezésem a probléma aktuáriusi vetületére fókuszál, jóllehet a jelenség például a demográfiai és a kvantitatív pénzügyi tudományterületeken is releváns.

1.1.1. Élettartam-kockázat a Szolvencia II keretrendszerben

A téma aktualitását növeli az európai biztosító társaságok és nyugdíjpénztárak kockázatkezelését szabályozó, a gyakorlatban 2016. január 1-én hatályba lépett Szolvencia II kockázatkezelési keretrendszer (EU [2009]), amely az élettartam-kockázatot a szavatolótőke egyik legfontosabb összetevőjét jelentő életbiztosítási kockázati modul almoduljaként nevesíti, és egyebek mellett az élettartam-kockázat szavatolótőkeszükségletének kiszámítását is szabályozza. E szavatolótőke-szükséglet az úgynevezett sztenderd formula vagy a vállalati sajátosságokat figyelembe vevő belső modell segítségével számítható ki. Belső modellek készítéséhez elengedhetetlen a halandóság előrejelzése.

1.2. Szakirodalmi áttekintés

1.2.1. Nemzetközi szakirodalom

A modern halandóság-előrejelzés megjelenése Lee–Carter [1992] tanulmányához köthető, melynek szerzői egy olyan viszonylag egyszerű, életkortól és időszaktól függő log-bilineáris struktúrát javasolnak a logaritmikus halandósági ráták leírására, amely meglepően jól írja le az Egyesült Államok néphalandósági rátáinak alakulását az 1900 és 1989 közötti időszakban. Az eljárás második lépéseként a szerzők az időtől függő paraméterek (az úgynevezett mortalitási index) újrabecsülését javasolják a tényleges és várható halálesetek számainak egyezése alapján. Végül az újrabecsült mortalitási index idősorát autoregresszív mozgóátlagolású ARIMA folyamatként modellezik, és az eltolásos véletlen bolyongás alkalmazását javaslolják. A Lee–Carter [1992] modell extrapolatív eljárás, mely figyelmen kívül hagyja a halandóság csökkenésének mögöttes okait. A modellben a mortalitási index lineárisan, az előrejelzett halandósági ráták pedig exponenciálisan csökkennek. Az ezredfordulóra az eljárás a halandóság-előrejelzés vezető módszerévé vált a világon (Deaton–Paxson [2001]). A módszer számos nemzetközi alkalmazását ismertetik Lee [2000] és Tuljapurkar–Li–Boe [2000] tanulmányai.

Keilman ([1998] és [2008]) tanulmányaiban amellett érvel, hogy a gyakran szakértői véleményekre épülő hivatalos demográfiai projekciók a múltban szisztematikusan és jelentősen alábecsülték a halandósági ráták csökkenési ütemét. Lee–Miller [2001] és Wong-Fupuy–Haberman [2004] megállapítják, hogy a Lee–Carter [1992] modellt visszamenőleg alkalmazva a hivatalos projekcióknál jóval precízebb előrejelzések készíthetők.

Vita folyik arról, hogy meddig folytatódhat a halandóság csökkenése a jövőben. A pesszimista hivatalos előrejelzések pontatlansága és a Lee–Carter [1992] modell jó teljesítménye alapján Wong-Fupuy–Haberman [2004] a csökkenő trend folytatását várja, míg Carnes–Olshansky [2007] megkérdőjelezik az extrapolatív módszerek alkalmazhatóságát, és úgy vélik, hogy a várható élettartamok a fejlett országokban előbb-utóbb plafonba ütköznek majd.

Számos tanulmány kritizálta a Lee–Carter [1992] modell feltevéseit és javasolta a modell kiterjesztéseit. Első kiterjesztésként Lee–Carter [1992] a spanyolnátha-járvány idején jelentkező halandósági sokk megragadására bináris változók bevezetését javasolja a halandósági rátákat leíró egyenletekbe. Wilmoth [1993] kritizálja a modell homoszkedaszticitási feltevését, és amellett érvel, hogy a logaritmikus halandósági ráták varianciái valójában fordítottan arányosak a megfigyelt haláleseteк számaival. Ennek megragadására a súlyozott legkisebb négyzetek módszerét javasolja a Lee–Carter [1992] tanulmányában szereplő szingulárisérték-felbontás helyett. Lee–Miller [2001] módosított eljárást ajánl a mortalitási index újrabecslésére, és a logaritmikus halandósági ráták saját utolsó megfigyelt időszakbeli értékeikhez igazodó projekcióját javasolja.

Brouhns és szerzőtársai [2002a] feltételezik, hogy a haláleseti gyakoriságok Poisson-eloszlásúak. Ez a modellváltozat Poisson Lee–Carter modell néven ismert, és az eredeti modellhez képest számos előnyös tulajdonsággal rendelkezik: nem feltételezi a hibatagok homoszkedaszticitását, explicit módon figyelembe veszi a kitettségeket és a haláleseti gyakoriságokat, nem alkalmazza a mortalitási index heurisztikus újrabecslését, illetve könnyebben beépíthető aktuáriusi alkalmazásokba. Ez utóbbi illusztrálására Brouhns és szerzőtársai [2002a] az életjáradékok piacán jelentkező antiszelekciót elemzik a modellváltozat segítségével.

Gyakori kritika a Lee–Carter [1992] modellel szemben, hogy az előrejelzési bizonytalanság modellezése során a becsült paramétereket azok elméleti értékeivel azonosítja, és csak a mortalitási index idősorának hibatagjaiban rejlő varianciát modellezi. Brouhns és szerzőtársai [2005] a Brouhns és szerzőtársai [2002a] által javasolt Poisson Lee–Carter modellváltozatban bootstrap eljárással korrigálják ezt a hiányosságot.

További gyakori kritika a születési évre jellemző kohorszhatás hiánya a Lee–Carter [1992] modellben. Az eljárás kohorszalapú kiterjesztése a Renshaw–Haberman [2006] modell, illetve az annak numerikus problémáit kiküszöbölő, Haberman–Renshaw [2011] tanulmányában javasolt egyszerűsített modellváltozat.[1] A korcsoport–időszak–kohorsz (APC) modell (Hobcraft és szerzőtársai [1982] és Carstensen [2007]) modell egy további népszerű és igen egyszerű, kohorszhatást tartalmazó halandóságelőrejelző modell.

További kiterjesztési lehetőség a további mortalitásiindex-idősorok bevezetése. Ezeket a modellek a szakirodalom többtényezős eljárásoknak nevezi. Booth–MainDonald–Smith [2002] tanulmánya ismerteti a Lee–Carter [1992] modell egy többtényezős kiterjesztését. A szerzők megállapítják, hogy körülményes további mortalitási indexeket beépíteni az előrejelzésekbe, és bemutatnak egy-egy eljárást a mortalitási indexek újrabecslésére, valamint a modellillesztési időszak kiválasztására. Az időskori halandóságot leíró kéttényezős Cairns–Blake–Dowd [2006] és az azt kohorszhatással bővítő Plat [2009] modellek az aktuáriusi területen igen népszerűek.

A halandósági rátákon túl a Lee–Carter [1992] modell és kiterjesztései a termékenységi ráták előrejelzésére is alkalmazhatók (lásd például Hyndman–Ullah [2007] és Wiśniowski és szerzőtársai [2015] cikkeit).

A tudományos és gyakorlati szakmák részéről egyaránt jelentkező, természetes igény a Lee–Carter modell kritikája nyomán született, rendkívül szerteágazó halandóság-előrejelző eljárások átlátható, egységes módszertani keretbe foglalása. Erre többek között Hunt–Blake [2014],

[1] Hunt–Villegas [2015] megmutatják, hogy az egyszerűsített változat sem mentes a numerikus problémáktól.

Villegas és szerzőtársai [2016], valamint Currie [2016] tettek kísérletet a közelmúltban. A Villegas és szerzőtársai [2016] által javasolt egységes modellkeret az életkorban és időszakban log-bilineáris vagy logit-bilineáris, egy- és többtényezős, valamint kohorszhatástól mentes és azt tartalmazó eljárásokat egységesítő általánosított korcsoport–időszak–kohorsz (angol rövidítéssel GAPC) modellcsalád, melynek tagjai többek között a korábbiakban már ismertetett Poisson Lee–Carter (Brouhns és szerzőtársai [2002a]), Renshaw–Haberman [2006], korcsoport–időszak–kohorsz (Carstensen [2007]), Cairns–Blake–Dowd [2006] és Plat [2009] modellek. E modellkeretben lehetőség nyílik többek között a paraméterbecslés, a modellválasztás és az előrejelzés egységes keretben történő tárgyalására és elvégzésére.

Brouhns és szerzőtársai [2002b] a Poisson Lee–Carter modell (Brouhns és szerzőtársai [2002a]) segítségével elemzik az élettartam-kockázat életjáradékok díjára gyakorolt hatását. A szerzők a többdimenziós normális eloszlásból szimulálják (Deák [1990] és Gassmann–Deák–Szántai [2002]) a modell paramétereit a maximum likelihood becslőfüggvény és a Fisher információs mátrix alapján, és az életjáradék díjának eloszlását a szimulált empirikus eloszlással közelítik. Hári és szerzőtársai [2008] a kéttényezős Lee–Carter modellt (Booth–MainDonald–Smith [2002]) alkalmazza erre a célra.

A Nemzetközi Valutaalap (IMF [2012]) élettartam-kockázattal kapcsolatos átfogó jelentése alapján az Egyesült Államokban a 63 éves korban várható élettartam minden egyes egy százalékpontos növekedése 3 százalékkal növeli a nyugdíjkötelezettségek értékét. Az élettartam-kockázat – értekezésemben nem tárgyalt – kvantitatív pénzügyi oldalát elemző néhány fontos forrás: Krutov [2006] és Cairns–Blake–Dowd

[2008] az élettartam-kockázat értékpapírosítását vizsgálják, Blake és szerzőtársai [2006] és Bauer és szerzőtársai [2010] az élettartam-kötvények (longevity bonds) árazását tárgyalják, Dowd és szerzőtársai [2006] pedig az élettartam-csereügyleteket (longevity swaps) elemzik.

1.2.2. Hazai szakirodalom

Baran és szerzőtársai [2007] a Lee–Carter modell többtényezős változatát alkalmazzák hazai adatokon, és az illesztett háromtényezős modell alapján megállapítják, hogy az 1949–2003. évek adatai alapján nyert előrejelzések nem megfelelők a mortalitási indexek trendjeiben bekövetkezett strukturális törések miatt, amelyek az 1989–2003 közötti bázisidőszak esetén azonban már nem jelentkeznek. A szerzők szerint a modell segítségével nyert előrejelzéseket óvatosan kell kezelni a hazai halandóság múltbeli változékonysága miatt.

Mivel a járadékban részesülők halandósága jelentősen eltérhet a néphalandóságtól, és a hazai életjáradék-piac rövid története és alacsony volumene miatti szűkös tapasztalatok általában nem teszik lehetővé a járadékszolgáltatók számára a megbízható, vállalatspecifikus halandósági táblák készítését, ezért Arató és szerzőtársai [2009] tanulmánya más országok olyan, múltbeli halandósági tábláinak használatát javasolja, amelyek kellőképpen hasonlóak az előrejelzendő adatokhoz. A megfelelő referenciatábla kiválasztására három lehetséges távolságmértéket javasolnak, és ismertetnek egy eljárást a táblák egyezésére vonatkozó teszt kritikus értékeinek Monte Carlo szimulációjára (Deák [1990]). A szerzők megállapítják, hogy a 60–90 év közötti életkorokban az Egyesült Államok 1950. évi férfi és 1970. évi női halandósági táblái meglehetősen jól illeszkednek a 2000. évi hazai halandósági tapasztalatokhoz. A referenciatáblák segítségével végzendő előrejelzés céljából bemutatnak továbbá egy egyszerű paraméteres halandósági törvényre épülő előrejelző eljárást és annak egy lehetséges alkalmazását is.

Májer–Kovács [2011] tanulmánya a 65–100. korévek 1970–2006. évi halandósági adataira a Lee–Carter [1992] modellt illeszti, és a klasszikus statikus, keresztmetszeti halandósági tábla és a halandóság előrevetítése alapján egyaránt kiszámítja a jelenlegi nyugdíjkorhatár betöltésekor, 65 évesen várható hátralévő élettartamot és a nyugdíjcélú életjáradék egyszeri nettó díját[2]. A szerzők eredményei alapján a nyugdíjazáskor várható élettartamot $6,33\%$-kal, az életjáradék egyszeri nettó díját pedig $4,51\%$-kal becsüli alá az élettartam-kockázatot figyelmen kívül hagyó keresztmetszeti számítás. A tanulmány két eltérő megközelítésben közöl konfidenciaintervallumokat a nyugdíjazáskor várható élettartamra és az életjáradék nettó díjára. E tanulmány módszertani továbbfejlesztésének és aktualizálásának tekinthető az értekezésemben részletesen ismertetett Vékás [2016] tanulmány.

A nyugdíjpénztári életjáradékok elméleti és gyakorlati kérdéseiről és modellezési problémáiról Banyár [2012] nyújt széles körű áttekintést.

Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] értekezésemben részletesen ismertetett tanulmánya a Lee–Carter [1992] modell alapváltozatát alkalmazza az életkorfüggő halandósági és termékenységi ráták előrejelzésére és a magyar nyugdíjrendszer fenntarthatóságának vizsgálatára.

[2] Az egyszeri nettó díj az az azonnali befizetés, amelyért cserébe az adott szerződésen – a díjtartalékon a technikai kamatlábnak megfelelő hozamot elérve – a járadékszolgáltató díjbevételeinek és járadék-kifizetéseinek várható jelenértékei megegyeznek (Banyár [2003]). A nettó díj közgazdasági értelemben nem tekinthető árnak. Az ár itt a nettó díjon felül felszámított költségekhez kapcsolódik (Banyár–Vékás [2015]).

2. fejezet

A felhasznált módszerek

2.1. A Lee–Carter modell

A Lee–Carter [1992] modell feltételezi, hogy minden $x \in \{1, 2, \ldots, X\}$ korcsoportra és $t \in \{1, 2, \ldots, T\}$ időszakra ($X \geq 2$ és $T \geq 2$ egész számok) ismertek az $m_{xt} > 0$ központi halandósági ráták, melyek a következő egyenlettel írhatók le:

$$\ln m_{xt} = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{xt} \quad (x = 1, 2, \ldots, X, \quad t = 1, 2, \ldots, T). \tag{2.1}$$

A ε_{xt} hibatagok függetlenek és 0 várható értékű, azonos $\sigma^2 > 0$ varianciájú normális eloszlásúak.[1]

A modell paramétereinek száma $2X + T + 1$. Identifikációs megfontolásból szükségesek továbbá a következő paramétermegkötések:

[1] Bár Lee–Carter [1992] eredeti cikke a várható értéken és a variancián túl nem alkalmaz peremeloszlásbeli feltevést a hibatagokra, a normális eloszlás feltevésének előnye, hogy lehetővé teszi a szabatos maximum likelihood becslést, mely az eredeti cikkben leírttal azonos eredményre vezet.

$$\sum_{x=1}^{X} b_x = 1,$$
$$\sum_{t=1}^{T} k_t = 0. \tag{2.2}$$

Az a_x $(x = 1, 2, \ldots, X)$ paraméterek maximum likelihood becslőfüggvényei az életkoronkénti átlagos logaritmikus halandósági ráták:

$$\hat{a}_x = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \ln m_{xt} \quad (x = 1, 2, \ldots, X).$$

A logaritmikus halandósági ráták átlagtól vett eltérései adják a centrált logaritmikus halandósági rátákat:

$$\tilde{m}_{xt} = \ln m_{xt} - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \ln m_{xt} \quad (x = 1, 2, \ldots, X, \quad t = 1, 2, \ldots, T),$$

melyek $\mathbf{M}$ mátrixának domináns bal és jobb oldali szingulárisvektorai a b_x $(x = 1, 2, \ldots, X)$ és k_t $(t = 1, 2, \ldots, T)$ paramétereket tartalmazó $\mathbf{b}$ és $\mathbf{k}$ vektorok maximum likelihood becslőfüggvényei. A hibavariancia maximum likelihood becslőfüggvénye a modell átlagos négyzetes hibája:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{XT} \sum_{x=1}^{X} \sum_{t=1}^{T} (\ln m_{xt} - \hat{a}_x - \hat{b}_x \hat{k}_t)^2.$$

A k_t $(t = 1, 2, \ldots, T)$ mortalitási index, az általános halandósági szint időbeli változását, a b_x $(x = 1, 2, \ldots, X)$ paraméterek pedig az életkoronként különböző változási sebességet jelenítik meg a modellben. A maximum likelihood becslőfüggvények léteznek az értekezésemben ismertetett regularitási feltételek mellett.

Az életkor- és időszakfüggő $E^c_{xt} > 0$ központi kitettségek és a $D_{xt} \in \mathbb{N}$

haláleseti gyakoriságok ismeretében Lee–Carter [1992] a mortalitási index újrabecslését javasolják a következő egyenlet alapján:

$$\hat{\mathbf{k}}^{(adj)} = \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^T : \quad D_t = \sum_{x=1}^{X} D_{xt} = \sum_{x=1}^{X} E_{xt}^c e^{a_x + b_x k_t} \quad (t = 1, 2, \ldots, T)\},$$

előírva a megfigyelt és tényleges haláleseti gyakoriságok egyezését az egyes időszakokban. Lee–Carter [1992] az újrebecsült mortalitási indexet ARIMA folyamatként (lásd például Asteriou–Hall [2015]) modellezi, és empirikus vizsgálat alapján az ARIMA$(0, 1, 0)$ modell alkalmazása mellett dönt, melynek segítségével a (2.1) egyenlet alapján előrejelezhetők a halandósági ráták.

2.2. Az általánosított korcsoport–időszak–kohorsz modellcsalád

A számos népszerű halandóság-előrejelző eljárást magába foglaló általánosított korcsoport–időszak–kohorsz (GAPC) modellcsalád (Villegas és szerzőtársai [2016]) alkalmazásához szükséges az $x \in \{1, 2, \ldots, X\}$ korcsoportokhoz és $t \in \{1, 2, \ldots, T\}$ időszakokhoz tartozó $D_{xt} \in \mathbb{N}$ haláleseti gyakoriságok és $E_{xt}^c > 0$ központi vagy $E_{xt}^0 \in \mathbb{N}_{>0}$ kezdeti kitettségek ismerete. A kitettségek típusától függően a modellcsalád lehetővé teszi az m_{xt} központi vagy kezdeti halandósági ráták előrejelzését. A GAPC modellkeret feltételezi, hogy a D_{xt} haláleseti gyakoriságok a $\tilde{D}_{xt}$ elméleti valószínűségi változók megvalósult értékei, melyek függetlenek, valamint a kitettségek típusától függően Poisson- vagy binomiális eloszlásúak:

$$\begin{aligned} &\tilde{D}_{xt} \sim Poisson(E^c_{xt} m^c_{xt}) \quad (x = 1, 2, \ldots, X, \quad t = 1, 2, \ldots, T) \\ \text{vagy} \quad &\tilde{D}_{xt} \sim Bin(E^0_{xt}, m^0_{xt}) \quad (x = 1, 2, \ldots, X, \quad t = 1, 2, \ldots, T). \end{aligned} \tag{2.3}$$

A (2.3) egyenlet jobb oldalán szereplő halandósági ráták egyenlete:

$$g(m_{xt}) = \eta_{xt} \quad (x = 1, 2, \ldots, X, \quad t = 1, 2, \ldots, T), \tag{2.4}$$

ahol η_{xt} a modell korcsoport-, időszak- és kohorszhatást tartalmazó úgynevezett szisztematikus komponense, melyre

$$\eta_{xt} = a_x + \sum_{i=1}^{N} b_x^{(i)} k_t^{(i)} + b_x^{(0)} c_{t-x} \quad (x = 1, 2, \ldots, X, \quad t = 1, 2, \ldots, T), \tag{2.5}$$

valamint $g: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, szigorúan monoton függvény (kapocsfüggvény). Értekezésemben Hunt–Blake [2014] javaslata alapján központi kitettségek ismerete esetén a logaritmikus, kezdeti kitettségek esetén pedig a logit kapocsfüggvényt alkalmazom. A modell paramétereinek száma $(N+1)(X+T)+2X-1$. A (2.5) egyenletet jellemzően modellspecifikációnként eltérő identifikációs megkötésekkel szükséges kiegészíteni.

A GAPC modellcsalád paraméterei a maximum likelihood elv alapján, numerikus optimalizáló algoritmusok felhasználásával becsülhetők. Modellválasztásra a likelihoodarány-teszt, az Akaike és bayes-i információs kritériumok és az osztott mintás validáció egyaránt alkalmazhatók. A $k_t^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, N,\ t = 1, 2, \ldots, T)$ mortalitási indexeket általában többdimenziós véletlen bolyongásként, a c_j $(j = 1-X, 2-X, \ldots, T-1)$ kohorszhatást pedig ettől független ARIMA folyamatként[2] szokás előrejelezni. A folyamatok előrejelzései alapján a (2.4) és (2.5) egyenletek szolgáltatják a jövőbeli halandósági ráták pontbecsléseit.

Az időtől függő paraméterek idősorainak hibatagjaiból fakadó előrejelzési bizonytalanság Monte Carlo szimuláció (Deák [1990]) segítségével modellezhető. Ez a megközelítés azonban figyelmen kívül hagyja a paraméterbecslési eljárásból fakadó paraméterbizonytalanságot, így alábecsüli a tényleges előrejelzési hiba nagyságát. Az előrejelzési és a paraméterbizonytalanság együttes figyelembe vételére Brouhns és szerzőtársai [2005] a félparaméteres, Koissi és szerzőtársai [2006] pedig a reziduális bootstrap (Efron [1979]) eljárást javasolja.

A Brouhns és szerzőtársai [2005] által javasolt félparaméteres bootstrap eljárás keretében $B \in \mathbb{N}_{>0}$ számú bootstrap mintát szükséges generálni a D_{xt} $(x = 1, 2, \ldots, X,\ t = 1, 2, \ldots, T)$ megfigyelt haláleseti gyakoriságokkal azonos várható értékű Poisson-eloszlásokból, és a korábban kiválasztott konkrét GAPC modellspecifikáció, illetve az előrejelzendő idősorok paramétereit minden egyes bootstrap mintában újra szükséges becsülni. Az elemzett mutatószámok (például halandósági ráták vagy várható élettartamok) eloszlásai azok bootstrap mintákban megfigyelt empirikus eloszlásaival közelíthetők, és a közelítés aszimptotikusan konzisztens, ha a bootstrap minták száma a végtelenhez tart.

A Vékás [2016] tanulmányában szereplő elemzésben használt öt konkrét GAPC modellspecifikációt itt külön szakaszokban ismertetem.

[2] Renshaw–Haberman [2006] az eltolásos ARIMA$(1, 1, 0)$, Plat [2009] pedig az eltolásos ARIMA(2,2,0) specifikációt javasolja erre a célra.

2.2.1. A Poisson Lee–Carter (LC) modell

A Brouhns és szerzőtársai [2002a] által javasolt Poisson Lee–Carter modell szisztematikus komponense:

$$\eta_{xt} = a_x + b_x k_t \quad (x = 1, 2, \ldots, X, \quad t = 1, 2, \ldots, T). \tag{2.6}$$

Brouhns és szerzőtársai [2002a] központi kitettségek és logaritmikus kapocsfüggvény használatát javasolják. A (2.2) paramétermegkötések ebben a modellváltozatban is érvényesek, azonban itt nincs szükség a mortalitási index újrabecslésére. Érdemes megjegyezni, hogy az eredeti Lee–Carter [1992] modell nem a GAPC modellcsalád tagja.

2.2.2. A Renshaw–Haberman (RH) modell

Haberman–Renshaw [2011] a (2.6) egyenletet kohorszhatással bővítik:

$$\eta_{xt} = a_x + b_x k_t + c_{t-x} \quad (x = 1, 2, \ldots, X, \quad t = 1, 2, \ldots, T), \tag{2.7}$$

központi kitettségek és logaritmikus kapocsfüggvény használata mellett. A szükséges identifikációs megkötések:

$$\sum_{x=1}^{X} b_x = 1,$$
$$\sum_{t=1}^{T} k_t = 0,$$
$$\sum_{i=1-X}^{T-1} c_i = 0.$$

2.2.3. A korcsoport–időszak–kohorsz (APC) modell

A korcsoport–időszak–kohorsz modell (Carstensen [2007]) az RH model speciális esete. Szisztematikus komponense:

$$\eta_{xt} = a_x + k_t + c_{t-x} \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T).$$

A modellt jellemzően központi kitettségek, logaritmikus kapocsfüggvény és a következő identifikációs megkötések mellett alkalmazzák:

$$\sum_{t=1}^{T} k_t = 0,$$
$$\sum_{i=1-X}^{T-1} c_i = 0,$$
$$\sum_{i=1-X}^{T-1} i c_i = 0.$$

2.2.4. A Cairns–Blake–Dowd (CBD) modell

Az időskori halandóság előrejelzésére javasolt Cairns–Blake–Dowd [2006] modell szisztematikus komponense:

$$\eta_{xt} = k_t^{(1)} + (x - \bar{x}) k_t^{(2)} \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T), \tag{2.8}$$

ahol $\bar{x} = \frac{1+X}{2}$ a modellbeli életkor-indexek számtani átlaga. A szerzők modelljük alkalmazását $x_0 = 60$ éves kortól kezdődően javasolják, azzal, hogy a (2.8) egyenletben szereplő η_{xt} az $x_0 + x$ éves egyének halandóságát írja le. Cairns–Blake–Dowd [2006] kezdeti kitettségeket és logit kapocsfüggvényt alkalmaznak. Ebben a modellben nincs szükség identifikációs megkötésekre.

2.2.5. A Plat modell

A Plat [2009] által az időskori halandóság modellezésére javasolt modell szisztematikus komponense:

$$\eta_{xt} = a_x + k_t^{(1)} + (x - \bar{x})k_t^{(2)} + c_{t-x} \quad (x = 1, 2, \ldots, X, \quad t = 1, 2, \ldots, T), \tag{2.9}$$

ahol η_{xt} az $x_0 + x$ évesek halandóságát írja le, és x_0 a legalacsonyabb modellezett életkor (például $x_0 = 60$). Plat [2009] központi kitettségek és logaritmikus kapocsfüggvény használatát javasolja a következő identifikációs megkötések mellett:

$$\sum_{t=1}^{T} k_t^{(1)} = 0,$$
$$\sum_{t=1}^{T} k_t^{(2)} = 0,$$
$$\sum_{i=1-X}^{T-1} c_i = 0,$$
$$\sum_{i=1-X}^{T-1} ic_i = 0.$$

3. fejezet

Az értekezés tudományos eredményei

Értekezésem legfontosabb tudományos eredményeit a magyar állami nyugdíjrendszer fenntarthatóságát elemző Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] és a hazai nyugdíjcélú életjáradékok élettartam-kockázatát számszerűsítő Vékás [2016] tanulmányok részletezik.
A disszertációmban feltett kutatási kérdéseim és az azokra adott válaszaim a következők:

- Várhatóan hogyan alakulnak 2035-ig a következő mutatószámok: a magyarországi férfiak és nők halandósági rátái, a termékenységi ráták, az ország népessége, a születéskor várható élettartam és a nyugdíjrendszer szempontjából lényeges időskori függőségi ráta?
  Válasz: A Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] tanulmányában szereplő, a Lee–Carter [1992] modell segítségével készített halandósági előrejelzés szerint mind a férfiak, mind a nők halandósági rátáinak jelentős csökkenése várható 2035-ig, enyhén emelkedő, de a 2,1-es kritikus értéktől az időszak végén is jelentősen elmaradó teljes

termékenységi ráta mellett. E folyamatok eredményeképpen Magyarország népessége 2035-ben várhatóan a 8 648 000 főt sem fogja elérni, miközben a népesség életkor szerinti összetétele jelentősen megváltozik. A születéskor várható élettartamok 2035-ig a férfiak esetén várhatóan elérik majd a 76, nők esetén pedig a 82 évet, miközben az időskori függőségi ráta értéke a jelenlegi érték másfélszeresére, 40 százalék fölé emelkedik, komoly kihívások elé állítva az állami nyugdíjrendszert.

- Mennyi ideig tartható fenn a magyar állami nyugdíjrendszer bevételeinek és kiadásainak egyensúlya a jelenlegi foglalkoztatási, halandósági, gyermekvállalási és reálbér-növekedési trendek és nyugdíjkorhatár mellett, illetve az idő múlásával hogyan alakul várhatóan a rendszer egyenlege? Ceteris paribus milyen paraméterváltozások és várhatóan mennyi ideig képesek meghosszabbítani a rendszer hozzávetőleges egyensúlyi állapotát?

  Válasz: A Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] tanulmányában ismertetett kohorszalapú nyugdíjmodell alapján az alapfeltételezések mellett várhatóan 2026-tól válik negatívvá a nyugdíjkassza egyenlege, a deficit mértéke pedig gyorsuló ütemben emelkedve 2035-re megközelíti a nyugdíjcélú adó- és járulékbevételek 8 százalékát. Az eredmények alapján a probléma 2035-ig ceteris paribus a bruttó bér arányában 4 százalékpontos bérteher-emeléssel vagy a Nyugdíjbiztosítási Alap szociális hozzájárulási adóból való részesedésének a 2015-ben érvényes 85,46 százalékos szintről a 2014-ben érvényes 96,3 százalékos szint közelébe való visszaállításával orvosolható. Ceteris paribus az alapforgatókönyvél alacsonyabb reálbér-növekedési ütem feltételezése esetén 2022-től, a foglalkozta-

tás alacsony javulási üteme mellett 2023-tól, az alapforgatókönyvnél magasabb reálbér-növekedési ütem mellett 2035-től, gyorsabb foglalkoztatás-javulás esetén pedig 2034-tól jelentkezik deficit a modell alapján. Ha 2022 után ceteris paribus a nyugdíjkorhatár a nyugdíjazáskor várható hátralévő élettartam várt emelkedését követi, akkor a vizsgált időszak végéig biztosított az egyensúly a modellben.

- Melyik széles körben elterjedt halandóság-előrejelző modell írja le legmegfelelőbben a hazai időskori halandóság alakulását a mintán kívüli előrejelzési pontosság kritériuma alapján?

  Válasz: A Vékás [2016] által vizsgált öt népszerű halandóság-előrejelző módszer közül a kifejezetten az időskori halandóság előrejelzésére kifejlesztett Cairns–Blake–Dowd [2006] modell mintán kívüli előrejelző képessége a legpontosabb a 65–84 éves életkorokban a 2005–2014. évekből álló tesztelő időszakon. Az időhorizont növelésével e modell használata esetén növekszik a legalacsonyabb ütemben az előrejelzési hiba, amely a nyugdíjszámítások szempontjából legfontosabb 65–70 éves korcsoportban e modell esetén jóval alacsonyabb az egyébként összességében második legpontosabb előrejelzést nyújtó Poisson Lee–Carter modellhez (Brouhns és szerzőtársai [2002a]) képest. A jóval több paraméterrel rendelkező Plat [2009] és Renshaw–Haberman [2006] modellek használata túlillesztéshez vezet, amelyre a tanuló időszakon mért kiváló illeszkedésük és ezzel párhuzamosan a tesztelő időszakon mért gyenge – és az időhorizont növelésével gyors ütemben romló – előrejelzési pontosságuk enged következtetni.

- Várhatóan mekkora tévedést, illetve pénzügyi veszteséget eredményez, ha egy járadékszolgáltató a klasszikus aktuáriusi módszertan alapján, dinamikus helyett statikus halandósági feltételezések mellett számítja ki a nyugdíjkorhatáron várható hátralévő élettartamot és a nyugdíjcélú életjáradékok egyszeri nettó díját?

  Válasz: A Vékás [2016] által bemutatott számítás alapján a Cairns–Blake–Dowd [2006] modell segítségével előre jelzett, dinamikus uniszex néphalandósági tábla használata esetén a nyugdíjkorhatáron várható hátralévő élettartam majdnem két évvel felülmúlja a statikus halandóság alapján számított értéket. A statikus számítás a nyugdíjcélú életjáradék egyszeri nettó díját 6,43%-kal alábecsüli, ami például évi 1 millió Ft összegű életjáradék esetén 1 millió 60 ezer Ft körüli, a biztosítási gyakorlatban igen jelentős mértékű azonnali tartalékhiányt és veszteséget okoz a járadékszolgáltatónak.

- Vajon jelentősen változott-e az életjáradékok díjszámítása során az élettartam-kockázat figyelmen kívül hagyásával elkövetett díjszámítási hiba nagysága a 2006 és 2014 közötti időszakban?

  Válasz: Igen, Vékás [2016] számításai alapján a statikus halandóság feltételezése miatt jelentkező alulárazottság mértéke a Májer–Kovács [2011] tanulmányában szereplő 4,51%-ról 6,43%-ra nőtt a 2006 és 2014 közötti időszakban. A változás az aktuáriusi gyakorlat szempontjából rendkívül jelentős, továbbá a néphalandóság vizsgálatából adódó hatalmas mintaméret miatt formális teszt alkalmazása nélkül is kijelenthető, hogy statisztikai értelemben is szignifikáns.

Az értekezésemben megfogalmazott kutatási hipotéziseim és az azokkal kapcsolatos következtetéseim az alábbiak:

1. hipotézis: A hazai halandóság javulása a termékenységi és munkaerő-piaci trendekkel együttesen az állami nyugdíjrendszer jelenlegi paraméterei mellett középtávon a kiadások túlsúlyához és a rendszer fenntarthatatlanságához vezet.

   Következtetés: Igen, Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] kohorszalapú nyugdíjmodellje alapján az állami nyugdíjrendszer egyenlege – a feltételezett tendenciák mellett, a rendszer paramétereinek változtatása nélkül – 2026-tól gyorsuló ütemben növekvő deficitet mutat majd várhatóan.

2. hipotézis: A hazai időskori halandóság előrejelzésére a klasszikus Lee–Carter [1992] modellnél alkalmasabb valamely az ezredfordulót követően elterjedt újabb eljárás.

   Következtetés: Igen, Vékás [2016] tanulmánya alapján a hazai uniszex időskori halandósági rátákat a választott tesztelő időszakon a Cairns–Blake–Dowd [2006] modell jelzi előre legmegfelelőbben.

3. hipotézis: 2006 és 2014 között országos szinten emelkedett az élettartam-kockázat jelentősége a nyugdíjcélú életjáradékok díjszámításában.

   Következtetés: Igen, Vékás [2016] számításai szerint 2006-hoz képest 2014-ben gyakorlati és statisztikai értelemben is jelentősen nagyobb mértékű hibát követtek volna el a járadékszolgáltatók a statikus halandóság feltételezésével. A változás arra enged következtetni, hogy a vizsgált időszakban az élettartam-kockázat szerepe nőtt az életjáradékok díjszámításában. Továbbá mivel a biztosítási ügyfelek halandósága jellemzően alacsonyabb a néphalandóságnál, és – részben tudatos antiszelekció következtében – a járadéktermé-

keket a biztosítási ügyfelek közül is jellemzően az alacsonyabb halandóságú ügyfelek vásárolják (Banyár [2003]), ezért a járadéktermékek állományaiban feltehetően a Vékás [2016] által kimutatott árazási hibánál még jelentősebb tévedésre lehet számítani a biztosítási gyakorlatban. A kérdés fontosságát tovább növeli, hogy az önkéntes nyugdíjpénztári életjáradékokra vonatkozó új szabályozás (Országgyűlés [2015]) eredményeképpen a közeljövőben jelentős bővülés várható a hazai életjáradékok piacán.

A fenti kérdésekre adott válaszaimon és a kutatási hipotéziseimmel kapcsolatos következtetéseimen túl értekezésem további eredményeinek tartom a Lee–Carter [1992] modell matematikai szempontból szabatos magyar nyelvű tárgyalását, a Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] tanulmányában szereplő, a magyar nyugdíjrendszer sajátosságaira szabott nyugdíjmodellt és a rendszer főbb mutatóinak aktuáriusi előrejelzését és érzékenységvizsgálatát, a Lee–Carter [1992] modell felhasználását a hazai termékenységi folyamatok előrejelzésére, illetve Vékás [2016] alapján a legújabb halandóság-előrejelző módszerek, valamint az azokat egységesítő általánosított korcsoport–időszak–kohorsz (GAPC) modellkeret első magyarországi alkalmazását a hazai időskori halandóság előrejelzésére, a legjobb előrejelző képességű modell kiválasztására és az élettartam-kockázat életjáradékok díjszámításában betöltött szerepének számszerűsítésére.

Célom, hogy eredményeimet a tudományos kutatók, társadalombiztosítási szakemberek és gyakorló aktuáriusok egyaránt eredményesen használhassák fel a jövőben az olyan modellek készítése során, amelyekben lényeges szempont az élettartam-kockázat módszertani szempontból megfelelő figyelembe vétele.

4. fejezet

Főbb hivatkozások

Arató, M., Bozsó, D., Elek, P. & Zempléni, A. (2009). Forecasting and Simulating Mortality Tables. *Mathematical and Computer Modelling*, 49(3–4):805–813. http://dx.doi.org/10.1016/j.mcm.2008.01.012.

Asteriou, D. & Hall, S. G. (2015). *Applied Econometrics (3rd edition, Part V, Chapter 13: ARIMA Models and the Box–Jenkins Methodology)*. Palgrave MacMillan, London. ISBN 9781137415479.

Bajkó, A., Maknics, A., Tóth, K. & Vékás, P. (2015). A magyar nyugdíjrendszer fenntarthatóságáról. *Közgazdasági Szemle*, 62(12):1229–1257. http://dx.doi.org/10.18414/ksz.2015.12.1229.

Banyár, J. (2003). *Életbiztosítás*. Aula Kiadó, Budapest. ISBN 9789639478381.

Banyár, J. (2012). *A kötelező öregségi életjáradékok lehetséges modelljei*. Társadalombiztosítási könyvtár. Gondolat Kiadó, Budapest. ISBN 9789636934224.

Banyár, J. & Vékás, P. (2016). A pénzügyi termékek ára. *Köz-*

gazdasági Szemle, 63(4):380–406. http://dx.doi.org/10.18414/ksz.2016.4.380.

Baran, S., Gáll, J., Ispány, M. & Pap, G. (2007). Forecasting Hungarian mortality rates using the Lee–Carter method. *Acta Oeconomica*, 57:21–34. http://dx.doi.org/10.1556/aoecon.57.2007.1.3.

Bauer, D., Börger, M. & Russ, J. (2010). On the pricing of longevity-linked securities. *Insurance: Mathematics and Economics*, 46:139–149. http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2009.06.005.

Blake, D., Cairns, A., Dowd, K. & MacMinn, R. (2006). Longevity Bonds: Financial Engineering, Valuation, and Hedging. *Journal of Risk and Insurance*, 73:647–672. http://dx.doi.org/10.1111/j.1539-6975.2006.00193.x.

Booth, H., Maindonald J. & Smith, L. (2002). Applying Lee–Carter under Conditions of Variable Mortality Decline. *Population Studies*, 56(3):325–336. http://dx.doi.org/10.1080/00324720215935.

Brouhns, N., Denuit, M. & Van Keilegom, I. (2005). Bootstrapping the Poisson log-bilinear model for mortality forecasting. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2005(3):212–224. http://dx.doi.org/10.1080/03461230510009754.

Brouhns, N., Denuit, M. & Vermunt, J.K. (2002a). A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables. *Insurance: Mathematics and Economics*, 31:373–393. http://dx.doi.org/10.1016/s0167-6687(02)00185-3.

Brouhns, N., Denuit, M. & Vermunt, J.K. (2002b). Measuring the Longevity Risk in Mortality Projections. *Bulletin of the Swiss As-*

sociation of Actuaries, 2:105–130. https://pure.uvt.nl/ws/files/510433/brouhns2002.pdf, letöltés dátuma: 2016.02.11.

Cairns, A. J. G., Blake, D. & Dowd, K. (2006). A Two-Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty: Theory and Calibration. *Journal of Risk and Insurance*, 73(4):687–718. http://dx.doi.org/10.1111/j.1539-6975.2006.00195.x.

Cairns, A. J. G., Blake, D. & Dowd, K. (2008). The Birth of the Life Market. *Asia-Pasific Journal of Risk and Insurance*, 3:6–36. http://dx.doi.org/10.2202/2153-3792.1027.

Carnes, B.A. & Olshansky, S.J. (2007). A Realist View of Aging, Mortality, and Future Longevity. *Population and Development Review*, 33(2):367–381. http://dx.doi.org/10.1111/j.1728-4457.2007.00172.x.

Carstensen, B. (2007). Age–period–cohort models for the Lexis diagram. *Statistics in Medicine*, 26:3018–3045. http://dx.doi.org/10.1002/sim.2764.

Currie, I. (2016). On fitting generalized linear and non-linear models of mortality. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2016(4):356–383. http://dx.doi.org/10.1080/03461238.2014.928230.

Deák, I. (1990). *Random Number Generators and Simulation*, volume 4 of *Mathematical methods of operations research*. Akadémiai Kiadó, Budapest. ISBN 963-05-5316-3.

Deaton, A. & Paxson, C. (2001). Mortality, Income, and Income Inequality Over Time in Britain and the United States. *NBER Working Paper No. 8534, Cambridge*. http://dx.doi.org/10.3386/w8534.

Dowd, K., Blake, D., Cairns, A.J.G. & Dawson, P. (2006). Survivor Swaps. *Journal of Risk and Insurance*, 73:1–17. http://dx.doi.org/10.1111/j.1539-6975.2006.00163.x.

Efron, B. (1979). Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *The Annals of Statistics*, 7(1):1–26. http://dx.doi.org/10.1214/aos/1176344552.

EU (2009). *Directive 2009/138/EC of the European Parliament and of the Council of 25 November 2009 on the taking-up and pursuit of the business of Insurance and Reinsurance.* http://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=CELEX:32009L0138&from=EN, letöltés dátuma: 2016.08.19.

Gassmann, H., Deák, I. & Szántai, T. (2002). Computing multivariate normal probabilities: a new look. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 11(4):920–949. http://dx.doi.org/10.1198/106186002385.

Haberman, S. & Renshaw, A. (2011). A comparative study of parametric mortality projection models. *Insurance: Mathematics and Economics*, 48(1):35–55. http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2010.09.003.

Hári, N., De Waegenaere, A., Melenberg, B. & Nijman, T.E. (2008). Longevity Risk in Portfolios of Pension Annuities. *Insurance: Mathematics and Economics*, 42(2):505–519. http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2007.01.012.

Hobcraft, J., Menken, J. & Preston, S. (1982). Age, Period, and Cohort

Effects in Demography: A Review. *Population Index*, 48(1):4–43. http://dx.doi.org/10.2307/2736356.

Hunt, A. & Villegas, A. (2015). Robustness and convergence in the Lee–Carter model with cohort effects. *Insurance: Mathematics and Economics*, 64:186–202. http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2015.05.004.

Hunt, A. & Blake, D. (2014). A general procedure for constructing mortality models. *North American Actuarial Journal*, 18(1):116–138. http://dx.doi.org/10.1080/10920277.2013.852963.

Hyndman, R.J. & Ullah, M. (2007). Robust forecasting of mortality and fertility rates: a functional data approach. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(10):4942–4956. http://dx.doi.org/10.1016/j.csda.2006.07.028.

IMF (2012). *Global Financial Stability Report. Chapter 4: The financial impact of longevity risk.* International Monetary Fund, Washington D.C. http://www.imf.org/external/pubs/ft/gfsr/2012/01/pdf/text.pdf, letöltés dátuma: 2016.02.11.

Keilman, N. (1998). How Accurate Are the United Nations World Population Projections? *Population and Development Review*, 24(supplement):15–41. http://dx.doi.org/10.2307/2808049.

Keilman, N. (2008). European Demographic Forecasts Have Not Become More Accurate Over the Past 25 Years. *Population and Development Review*, 34(1):137–153. http://dx.doi.org/10.1111/j.1728-4457.2008.00209.x.

Koissi, M., Shapiro, A. & Hognas, G. (2006). Evaluating and extending the Lee–Carter model for mortality forecasting: Bootstrap confidence interval. *Insurance: Mathematics and Economics*, 38(1):1–20. http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2005.06.008.

Kovács, E., Rétallér, O. & Vékás, P. (2015). Modellpontok szerepe a nyugdíj-hatásvizsgálatban. *Közgazdasági Szemle*, 62(12):1328–1342. http://dx.doi.org/10.18414/ksz.2015.12.1328.

Krutov, A. (2006). Insurance-Linked Securities: An Emerging Class of Financial Instruments. *Financial Engineering News*, 48:7–16.

Lee, R. D. & Carter, L. R. (1992). Modeling and forecasting U.S. mortality. *Journal of the American Statistical Association*, 87:659–671. http://dx.doi.org/10.2307/2290201.

Lee, R. (2000). The Lee–Carter Method for Forecasting Mortality, with Various Extensions and Applications. *North American Actuarial Journal*, 4(1):80–93. http://dx.doi.org/10.1080/10920277.2000.10595882.

Lee, R. & Miller, T. (2001). Evaluating the performance of the Lee–Carter method for forecasting mortality. *Demography*, 38(4):537–549. http://dx.doi.org/10.1353/dem.2001.0036.

Májer, I. & Kovács, E. (2011). Élettartam-kockázat – a nyugdíjrendszerre nehezedő egyik teher. *Statisztikai Szemle*, 7–8:790–812. http://www.ksh.hu/statszemle_archive/2011/2011_07-08/2011_07-08_790.pdf, letöltés dátuma: 2016.02.11.

Országgyűlés (2015). 2015. évi CCXV. törvény a pénzügyi közvetítőrendszer egyes szereplőit érintő törvények jogharmonizációs célú módosításáról. http://mkogy.jogtar.hu/?page=show&docid=A1500215.TV, letöltés dátuma: 2016.08.19.

Plat, R. (2009). On stochastic mortality modeling. *Insurance: Mathematics and Economics*, 45(3):393–404. http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2009.08.006.

Renshaw, A. & Haberman, S. (2006). A cohort-based extension to the Lee–Carter model for mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and Economics*, 38(3):556–570. http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2005.12.001.

Tuljapurkar, S., Li, N. & Boe, C. (2000). A Universal Pattern of Mortality Change in the G7 Countries. *Nature*, 405(6788):789–792. https://www.researchgate.net/publication/12453012_A_Universal_Pattern_of_Mortality_Change_in_the_G7_Countries, letöltés dátuma: 2016.08.19.

Vékás, P. (2009). Harry H. Panjer: Operational Risk: Modeling Analytics. *Közgazdasági Szemle*, 56(4):387–389. http://epa.oszk.hu/00000/00017/00158/pdf/07konyvism_panjer.pdf, letöltés dátuma: 2016.08.19.

Vékás, P. (2011). Túlélési modellek. In *Kovács, E. (2011): Pénzügyi adatok statisztikai elemzése (IV. bővített kiadás, 9. fejezet, pp. 173–194.)*. Tanszék Kft., Budapest. ISBN 978-963-88777-2-7.

Vékás, P. (2012). Összefüggő biztosítási kockázatok modellezése. *Corvinus Kutatások*, 2093. http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/2093/, letöltés dátuma: 2016.08.19.

Vékás, P. (2015). Az egyéni munkaerő-piaci aktivitás becslése mikroszimulációs modellkeretben. *Közgazdasági Szemle*, 62(12):1291–1308. http://dx.doi.org/10.18414/ksz.2015.12.1291.

Vékás, P. (2016). Nyugdíjcélú életjáradékok életartam-kockázata az általánosított korcsoport–időszak–kohorsz modellkeretben (elbírálás alatt a Statisztikai Szemlénél). *Corvinus Kutatások*, 2399. http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/2399/, letöltés dátuma: 2016.08.19.

Villegas, A. M., Kaishev, V. & Millossovich, P. (2016). *StMoMo: An R Package for Stochastic Mortality Modelling*. https://cran.r-project.org/web/packages/StMoMo/vignettes/StMoMoVignette.pdf, letöltés dátuma: 2016.08.19.

Wilmoth, J. (1993). Computational Methods for Fitting and Extrapolating the Lee–Carter Model of Mortality Change. *Technical report. Department of Demography, University of California, Berkeley, California*. http://demog.berkeley.edu/~jrw/Papers/LCtech.pdf, letöltés dátuma: 2016.08.19.

Wiśniowski, A. , Smith, P.W.F., Bijak, J., Raymer, J. & Forster, J.J. (2015). Bayesian Population Forecasting: Extending the Lee–Carter Method. *Demography*, 52(3):1035–1059. http://dx.doi.org/10.1007/s13524-015-0389-y.

Wong-Fupuy, C. & Haberman, S. (2004). Projecting Mortality Trends: Recent Developments in the U.S. and U.K. *North American Actuarial Journal*, 8(2):56–83. http://dx.doi.org/10.1080/10920277.2004.10596137.

5. fejezet

A témakörrel kapcsolatos saját publikációk jegyzéke

Referált folyóiratokban megjelent tanulmányok

Bajkó, A., Maknics, A., Tóth, K. & Vékás, P. (2015). A magyar nyugdíjrendszer fenntarthatóságáról. *Közgazdasági Szemle*, 62(12):1229–1257. `http://dx.doi.org/10.18414/ksz.2015.12.1229`

Vékás, P. (2015). Az egyéni munkaerő-piaci aktivitás becslése mikroszimulációs modellkeretben. *Közgazdasági Szemle*, 62(12):1291–1308. `http://dx.doi.org/10.18414/ksz.2015.12.1291`

Kovács, E., Rétallér, O. & Vékás, P. (2015). Modellpontok szerepe a nyugdíj-hatásvizsgálatban. *Közgazdasági Szemle*, 62(12):1328–1342. `http://dx.doi.org/10.18414/ksz.2015.12.1328`

Banyár, J. & Vékás, P. (2016). A pénzügyi termékek ára. *Közgazdasági Szemle*, 63(4):380–406. http://dx.doi.org/10.18414/ksz.2016.4.380

Vékás, P. (2009). Harry H. Panjer: Operational Risk: Modeling Analytics. *Közgazdasági Szemle*, 56(4):387–389. http://epa.oszk.hu/00000/00017/00158/pdf/07konyvism_panjer.pdf, letöltés dátuma: 2016.08.19

Könyvfejezetek

Vékás, P. (2011). Túlélési modellek. In *Kovács, E. (2011): Pénzügyi adatok statisztikai elemzése (IV. bővített kiadás, 9. fejezet, pp. 173–194.)*. Tanszék Kft., Budapest. ISBN 978-963-88777-2-7

Műhelytanulmányok

Vékás, P. (2016). Nyugdíjcélú életjáradékok életartam-kockázata az általánosított korcsoport–időszak–kohorsz modellkeretben (elbírálás alatt a Statisztikai Szemlénél). *Corvinus Kutatások*, 2399. http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/2399/, letöltés dátuma: 2016.08.19

Vékás, P. (2012). Összefüggő biztosítási kockázatok modellezése. *Corvinus Kutatások*, 2093. http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/2093/, letöltés dátuma: 2016.08.19