Általános és kvantitatív közgazdaságtan
Doktori Iskola

TÉZISGYŰJTEMÉNY

Csató László

A páros összehasonlításokon alapuló rangsorolás módszertani és alkalmazási kérdései

című Ph.D. értekezéséhez

Témavezetők:

Dr. Fülöp János Ph.D.
tudományos főmunkatárs

Dr. Temesi József CSc
egyetemi tanár

Budapest, 2014

Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék

TÉZISGYŰJTEMÉNY

Csató László

A páros összehasonlításokon alapuló rangsorolás módszertani és alkalmazási kérdései

című Ph.D. értekezéséhez

Témavezetők:

Dr. Fülöp János Ph.D.
tudományos főmunkatárs

Dr. Temesi József CSc
egyetemi tanár

Tartalomjegyzék

Táblázatok jegyzéke **1**

I. Kutatási előzmények és a téma indoklása **2**

II. Az értekezés felépítése és módszertana **4**

II.1. Felépítés 4

II.2. Módszertan 6

II.2.1. Rangsorolási problémák és megoldásuk 6

II.2.2. Az általánosított Buchholz módszer 8

II.2.3. Pontozási eljárásokra vonatkozó axiómák 9

II.2.4. Svájci rendszerű sakk csapatversenyek 10

III. Az értekezés fontosabb eredményei **11**

1. Bevezetés 11
2. A páros összehasonlításon alapuló rangsorolás modellje 11
3. Pontozási eljárások 11
4. A legkisebb négyzetek módszerének gráf interpretációja 11
5. A pontozási eljárások néhány tulajdonsága 12
6. Kapcsolat a pontszám módszerrel 13
7. Rangsorolás svájci rendszerű sakk csapatversenyekben 14
8. A páros összehasonlítások további alkalmazásai 16
9. Összefoglalás 16

Értékelés 16

IV. Saját publikációk **17**

Idegen nyelvű 17

Magyar nyelvű 18

Hivatkozások **20**

Táblázatok jegyzéke

1. Pontozási eljárások axiomatikus összehasonlítása 14

I. Kutatási előzmények és a téma indoklása

Az utóbbi évek, évtizedek mindennapi életünket egyik leginkább befolyásoló folyamata az információs technológia rohamos fejlődése. A világról rendelkezésre álló adatmennyiség bővülése azonban messze meghaladja az emberi elme befogadóképességének növekedését, ezért elengedhetetlen a beérkező információ szűrése, az adott pillanatban számunkra releváns tényezők kiválasztása. Ez szinte reménytelen feladat a prioritások világos meghatározása, *rangsorolása* nélkül. A döntési alternatívák különböző jellemzői, eltérő tulajdonságai miatt azonban ezek nem feltétlenül mérhetők egyetlen, jól meghatározott skálán. Ugyanakkor az objektumok páronkénti összehasonlításának eredménye ekkor is biztosíthatja a sorrend felállítását.

Valószínűleg nem gondolnánk, egy átlagos napon milyen sokszor találkozunk a páros összehasonlítások alapján történő rangsorolással. Ez húzódik meg az internetes keresés, egy sportbajnokság eredményei, vagy az online piacokról ismerős „Ehhez a termékhez leggyakrabban az alábbiakat választják vásárlóink" jellegű ajánlások mögött. Ezért úgy véljük, nem haszontalan megismerkedni a hasonló feladatok matematikai hátterével, a megoldásra javasolt módszerek alkalmazási lehetőségeivel.

A páros összehasonlításokkal történő rangsorolás három, részben összefüggő területen vet fel kérdéseket. Az első a vizsgált gyakorlati probléma matematikai reprezentációja, a második az így keletkező feladat megoldása, a harmadik a kapott eredmények értelmezése. Értekezésünk az előbbi kettőre fókuszál, bár a 7. fejezetben szereplő alkalmazásában az utóbbira is kitérünk.

Az első kérdés irodalma viszonylag korlátozott. Egy-egy alkalmazás leírásakor természetesen elengedhetetlen az adatok modellbe ágyazásának tárgyalása, mégsem ismerünk olyan cikket, tanulmányt, amely átfogóan elemezné ennek végrehajtását. E területen Jiang et al. (2011) munkája érdemel említést, bár ez szinte kizárólag az egyéni értékelésekből levezetett páros összehasonlítások meghatározásával foglalkozik. Ezért egyik célunk az ismert alkalmazások minél szélesebb körének bemutatása (bár itt sem törekedhettünk a teljességre), illetve a gyakorlati felhasználók számára hasznos tanácsok megfogalmazása. Emellett bemutatunk egy, korábbi kutatásaink (Csató, 2012a,b, 2013a) továbbfejlesztésének tekinthető konkrét alkalmazást.

A másik témában már több cikk született. A feladat megoldásának vizsgálatakor az axiomatikus tárgyalást fogjuk követni, mely Lloyd S. Shapley 2012-es Nobel-díjával újfent bizonyította létjogosultságát a közgazdaságtanban. Az egy-egy módszer karakterizációját, illetve az általunk használtnál szűkebb értelmezési tartományt tárgyaló (például Laslier (1997) vagy Altman és Tennenholtz (2008)) munkákon kívül három fontosabbat említenénk. Chebotarev és Shamis (1998a) az ismert axiomatizációkat tekinti át, számos szempont szerint csoportosítja a több mint 40 módszerhez kapcsolódó tulajdonságokat. Chebotarev és Shamis (1999) a győzelem-vereség egyesítésén és kombinálásán alapuló eljárások megkülönböztetése révén fogalmaz meg erős állításokat, bár a cikk végén ígért teljes körű karakterizáció eddig nem valósult meg. Erre González-Díaz et al. (2014) sem vállalkozik, ellenben számtalan ismert módszert elemez a 14 választott axióma tükrében.

A kérdés általunk adott tárgyalása leginkább González-Díaz et al. (2014) cikkéhez hasonlít. Ehhez több új tulajdonságot vezetünk be, azonban terjedelmi okokból bizonyos eredményeinket kénytelenek voltunk mellőzni (Csató, 2013b, 2014b). Vizsgálatunkat a pontszám, az általánosított sorösszeg és a legkisebb négyzetek módszerekre szűkítjük, döntésünket igyekszünk kimerítően indokolni. A González-Díaz et al. (2014) által szintén elemzett fair bets eljárással Csató (2013d) és Csató (2014b) foglalkozik, míg a maximum likelihoodot – elsősorban a lineáris megoldhatóság hiánya miatt – teljesen mellőzzük.

II. Az értekezés felépítése és módszertana

II.1. Felépítés

Az értekezés megírásakor két célt tűztünk magunk elé: egyrészt a gyakorlatban felmerülő, páros összehasonlítások alapján történő rangsorolást megkívánó feladatok matematikai kezelésének leírását, másrészt az ezek megoldására alkalmas módszerek bemutatását, csoportosítását és értékelését. Előbbivel a 7. és a 8., utóbbival a 2-6. fejezetben foglalkozunk.

A 2. fejezet a páros összehasonlításokkal történő rangsorolás egy, a későbbi tárgyalás alapját képező általános modelljét mutatja be. A rangsorolási problémát kétféleképpen definiáljuk. Az egyik a korábbról ismert aggregált páros összehasonlítási mátrixot (Chebotarev és Shamis, 1998a; González-Díaz et al., 2014) használja, ezt a takarékos változatot elsősorban a számítógépes szimulációk elvégzéshez ajánljuk (néhány, az 5. fejezetben található ellenpéldát is ilyen úton találtunk meg). Több, a disszertációban nem tárgyalt módszer (invariáns, fair bets, maximum likelihood) szintén ebből indul ki. A másik esetben ugyan külön eredménymátrix és mérkőzésmátrix szerepel, de ezek ferdén szimmetrikus, illetve szimmetrikus volta miatt az információigény természetesen változatlan. Ez a változat főként a megértést, valamint a – gráf reprezentáción keresztül – későbbiekben részletesen tárgyalt módszerek és bizonyos tulajdonságok bevezetését segíti. Ismertetjük a két rangsorolási megközelítést, a lineáris rendezéssel való közelítésre és a pontozási eljárások alkalmazására, melyek közül az irodalomban elhangzó érvek – elsősorban Bouyssou (2004) – alapján az utóbbiak használata mellett érvelünk. Ezek irodalmát axiomatikus szempontból ismertetjük, kitérve a karakterizációkra és a tudománymetriai alkalmazhatóság kérdésére. A fejezet összefoglalása során egy aggregálással kapcsolatos problémát is felvetünk.

A 3. fejezet a pontozási eljárásokat tárgyalja. Definiáljuk a későbbiekben használt módszereket, köztük a klasszikus pontszámot és az általánosított sorösszeget (Chebotarev, 1989, 1994). Ezután a legkisebb négyzetek módszerét tárgyaljuk, és az egyértelmű megoldhatósággal támasztjuk alá a választott pontozási eljárások jelentőségét. Végül foglalkozunk az általánosított sorösszeg paraméterének megválasztásával is.

A 4. fejezet az általánosított sorösszeg és a legkisebb négyzetek módszerének egy gráf interpretációját adja; ehhez szintén elengedhetetlen az eredmény- és mérkőzésmátrixok megkülönböztetése. Először technikailag előkészítjük a fő eredmény kimondását, majd részletesen elemezzük a legkisebb négyzetek iteratív felbontását. Kitérünk az irodalomban javasolt hasonló eljárásokra, a kapott matematikai formula értelmezésére és (az értekezés Függelékében) a rendhagyó esetek vizsgálatára. Bemutatjuk a gráf interpretáció egy lehetséges kiterjesztését, az általánosított Buchholz módszert, bizonyítjuk az általánosított sorösszeggel való ekvivalenciáját. Tárgyalásunkat – az eredmények áttekintése mellett – néhány nyitott kérdés felvetésével zárjuk.

A következő két fejezetben absztraktabb nézőpontra térünk át, González-Díaz et al. (2014) nyomán különböző axiómákat definiáltunk, majd megvizsgáltuk, hogy a pontszám, az általánosított sorösszeg és a legkisebb négyzetek teljesítik-e azokat.

Az 5. fejezet pontozási eljárásokra vonatkozó axiómákat ismertet, melyek teljesülését a pontszám, az általánosított sorösszeg, és a legkisebb négyzetek módszere esetén vizsgáljuk. Először a rangsor változatlanságának legegyszerűbb eseteit tárgyaljuk korábban bevezetett fogalmak révén. Ezután a rangsorolási problémák multiplikatív és additív transzformációit elemezzük. Mindkettőhöz bevezetünk egy-egy új tulajdonságot, az előbbinél pedig rámutatunk egy, a szakirodalomban eddig nem említett következményre is. A következő rész az eredménymátrix és az objektumok sorrendjének kapcsolatával foglalkozik. Átfogó képet nyújtunk két ismert tulajdonság viszonyáról, emellett kísérletet teszünk a rangsorolás különböző megközelítéseinek egyesítésére. Megmutatjuk az irreleváns összehasonlítások értelmezését, melyet összekapcsolunk a rangsorolási problémák additivitásával, és vizsgáljuk a döntetlenek hatását. Ezt a szakaszt szintén rövid áttekintéssel és a saját eredmények kiemelésével fejezzük be.

A 6. fejezet az általánosított sorösszeg és a legkisebb négyzetek módszere pontszámmal való kapcsolatát elemzi. Utóbbi Bouyssou (1992) által adott karakterizációjának kimondásához két új tulajdonság, az erős monotonitás és a kör függetlenség bevezetése szükséges. Belátjuk, hogy ez az eredmény csak a körmérkőzéses rangsorolási problémák meglehetősen szűk halmazán érvényes, ahol az általunk vizsgált pontozási eljárások ekvivalensek a pontszám módszerrel. Ezt követően egy korábbról ismert és egy új axiómán keresztül elemezzük a sorösszeggel megmaradó összefüggéseket hiányos és többszörös összehasonlítások megengedése jelenlétében, ami az alkalmazások szempontjából lehet lényeges. Befejezésül áttekintjük a kapott eredményeket, és rámutatunk, hogy az általános esetben egyetlen pontozási eljárásnak sem létezik elfogadhatónak tűnő axiomatizációja.

A 7. fejezetben a választott pontozási eljárásokat svájci rendszerű sakk csapatversenyek eredményének meghatározására alkalmazzuk. Elsőként ezek rangsorolási problémaként történő modellezését ismertetjük: foglalkozunk a nem körmérkőzéses esetben felmerülő kérdésekkel, az egyéni és csapatversenyek jellemzőivel, a hivatalos lexikografikus rendezések hibáival. Igyekszünk megőrizni az axiomatikus szemlélet előnyeit, definícióinkat összekapcsoljuk az előző fejezetekben bevezetett tulajdonságokkal. Ezek alapján rámutatunk az általánosított sorösszeg és a legkisebb négyzetek módszerének használhatóságára. A következő rész a 2011-es és 2013-as sakkcsapat Európa-bajnokság példáján keresztül részletesen elemzi a javasolt eljárást. A rangsorok összehasonlítására a Függelékben tárgyalt távolságfüggvényeket (Can, 2014) használjuk, majd a sokdimenziós skálázás segítségével ábrázoljuk azokat. Az eltérések okait a 4. fejezetben bizonyított dekompozícióval tárjuk fel. A sorrendeket három szempont, az előrejelző képesség, a mintailleszkedés és a robusztusság alapján értékeljük.

A 8. fejezet a páros összehasonlítások gyakorlati alkalmazásaival foglalkozik. Ismertetjük ezek használatát a statisztika (EKS-módszer), a tudománymetria, a pszichológia, a szavazáselmélet és a sport területén, majd bevezetjük a termékértékelési feladatok szavazó-alternatíva mátrixát, és rangsorolási problémára való visszavezetésének módjait. Végül egy keretet adunk a páros összehasonlítások alapján történő rangsorolásra, ajánlásainkat példákkal illusztráljuk.

Az egyes szakaszok tartalmát azok végén összegezzük, így a 9. fejezetben csak röviden vázoljuk a főbb pontokat, további kutatási irányokat. Az axiomatikus megközelítés eredményeit az 1. táblázatban és egy ábrán mutatjuk be.

Az értekezés függelékeiben megvizsgáljuk a gráf reprezentáció egy speciális, Csató (2014a) által nem tárgyalt esetét, Can (2014) nyomán indokoljuk a távolságfüggvények kiválasztását, közöljük a 7. fejezetben elemzett sakk csapatversenyek részleteit és néhány további ábrát, valamint összefoglaljuk a dolgozatban szereplő definíciókat, a pontozási eljárásokra bevezetett axiómák kapcsolatát és az ezekre vonatkozó állítások származási helyét.

A különböző részek meglehetősen szorosan kapcsolódnak egymáshoz. A 2-6. fejezetek lényegében egymásra építkeznek, a módszertani megalapozásához elengedhetetlen vizsgálatokat tárgyalnak. A 7. fejezet viszont, bár felhasználja a bevezetett rangsorolási eljárásokat és axiomatikus eredményeket, önmagában is értelmezhető (Csató, 2014c). A 8. fejezetben adott áttekintés lazábban kötődik a többihez, egy korábbi cikkünk részét képezi (Csató, 2013d).

II.2. Módszertan

Az értekezés precíz matematikai definíciókat és állításokat mond ki, ugyanakkor minimális ilyen jellegű háttérismeretet követel az olvasótól. A következőkben bemutatjuk a főbb fogalmakat, egyben előkészítjük néhány fontos eredmény megfogalmazását.

II.2.1. Rangsorolási problémák és megoldásuk

II.1. *Jelölés.* $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ a nullvektor.

$\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ a csupa 1-esből álló vektor.

$O \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a nullmátrix.

$I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ az egységmátrix, melynek főátlójában 1-esek, azon kívül pedig 0-k vannak.

$J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a csupa 1-esből álló mátrix.

II.1. Definíció. *Rangsorolási probléma* (ranking problem): $(N, A, M) \in \mathcal{R}^n$ az $(N, \mathbf{R})$ preferenciaprofilhoz tartozó *rangsorolási probléma*, ahol

- $N = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ az *objektumok halmaza*;
- $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a szimmetrikus ($M^\top = M$) *mérkőzésmátrix*;
- $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a ferdén szimmetrikus ($A^\top = -A$) *eredménymátrix*, ahol $a_{ij} \in [-m_{ij}, m_{ij}]$ minden $X_i, X_j \in N$-re.

Az A eredménymátrix azonos a Saaty-féle páros összehasonlítás mátrixszal (Saaty, 1980), ha az utóbbi elemenkénti logaritmusait vesszük (Csató, 2012b).

II.2. *Jelölés.* A rangsorolási problémák halmaza $\mathcal{R}$. Az N halmazon értelmezett, vagyis n objektumot tartalmazó rangsorolási problémák halmaza $\mathcal{R}^n$.

II.2. Definíció. *Összehasonlítások száma*: Legyen $(N, A, M) \in \mathcal{R}^n$ egy rangsorolási probléma. Ekkor

- az $X_i \in N$ objektum *összehasonlításainak száma*: $d_i = \sum_{X_j \in N} m_{ij}$;
- a *mérkőzések maximális száma*: $m = \max\{m_{ij} : X_i, X_j \in N\}$;
- az *összehasonlítások maximális száma*: $\mathfrak{d} = \max\{d_i : X_i \in N\}$.

II.3. Definíció. A $G = (N, E)$ pár egy *gráf*, ahol N a *csúcsok*, E pedig az *élek* halmaza.
G *multigráf* (multigraph), ha többszörös éleket is tartalmazhat.
$D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a fokszámokból képzett diagonális mátrix.
A $G = (N, E)$ multigráf *szomszédsági mátrix*a $T = (t_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ahol t_{ij} az $(X_i, X_j) \in E$ élek száma.
A $G = (N, E)$ multigráf *Laplace-mátrix*a $L = (\ell_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ahol $L = D - T$.

II.4. Definíció. *Összehasonlítási multigráf* (comparison multigraph): Az irányítatlan $G := (N, E)$ multigráf az $(N, A, M) \in \mathcal{R}^n$ rangsorolási problémához tartozó *összehasonlítási multigráf*, ahol az N csúcshalmaz az objektumok halmaza és az $(X_i, X_j) \in E$ élek száma m_{ij}.

II.5. Definíció. *Összefüggő rangsorolási probléma* (connected ranking problem): Egy $(N, A, M) \in \mathcal{R}^n$ rangsorolási probléma *összefüggő*, ha a hozzá tartozó $G = (N, E)$ összehasonlítási multigráf összefüggő.

II.3. *Jelölés.* Az összefüggő rangsorolási problémák halmaza $\mathcal{R}_O$.

II.6. Definíció. *Pontozási eljárás* (scoring procedure): Egy $f : \mathcal{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény *pontozási eljárás.*

Az értekezésben három pontozási eljárást, a pontszámot, az általánosított sorösszeget (egy paraméteres módszercsaládot), és a legkisebb négyzetek módszerét vizsgáljuk.

II.7. Definíció. *Pontszám módszer* (score method) (Borda, 1781): $\mathbf{s} : \mathcal{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ahol $\mathbf{s}(N, A, M) = A\mathbf{e}$ minden $(N, A, M) \in \mathcal{R}^n$-re.

II.8. Definíció. *Általánosított sorösszeg módszer* (generalised row sum method, *GRS*) (Chebotarev, 1989): $\mathbf{x}(\varepsilon) : \mathcal{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ahol $\varepsilon > 0$ egy paraméter és $(I + \varepsilon L)\mathbf{x}(\varepsilon)(N, A, M) = (1 + \varepsilon mn)\mathbf{s}$ minden $(N, A, M) \in \mathcal{R}^n$-re.

II.1. Állítás. *A pontszám és az általánosított sorösszeg módszereknek tetszőleges $(N, A, M) \in \mathcal{R}^n$ rangsorolási probléma mellett egyértelmű megoldása létezik.*

II.9. Definíció. *Legkisebb négyzetek módszere* (least squares method, *LS*): $\mathbf{q} : \mathcal{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ahol $L\mathbf{q} = \mathbf{s}$ és $\mathbf{e}^\top \mathbf{q} = 0$ minden $(N, A, M) \in \mathcal{R}^n$-re.

II.2. Állítás. *Az általánosított sorösszeg a pontszám és a legkisebb négyzetek módszere „között” helyezkedik el:* $\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{x}(\varepsilon) = \mathbf{s}$ *és* $\lim_{\varepsilon \to \infty} \mathbf{x}(\varepsilon) = mn\mathbf{q}$.

II.3. Állítás. *A legkisebb négyzetek módszerének* $\mathbf{q}$ *értékelővektora akkor és csak akkor egyértelmű, ha a G összehasonlítási multigráf összefüggő, $(N, A, M) \in \mathcal{R}^n_O$.*

II.2.2. Az általánosított Buchholz módszer

A 4. fejezet legfontosabb eredményeinek kimondásához szükségesek az alábbiak.

II.4. *Jelölés.* $C = \mathfrak{d}I - L$.

II.5. *Jelölés.* $P = (1/\mathfrak{d})C$.

A 4.2. Tétel alapján a legkisebb négyzetek módszere általánosítható a $\delta > \mathfrak{d}$ paraméter bevezetésével.

II.10. Definíció. *Általánosított Buchholz módszer* (generalised Buchholz method): $\mathbf{w}(\delta) : \mathcal{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ahol

$$\mathbf{w}(\delta) = \frac{1}{\mathfrak{d}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\delta} C \right)^k \mathbf{s} = \frac{1}{\mathfrak{d}} \left[\mathbf{s} + \frac{1}{\delta} C\mathbf{s} + \left(\frac{1}{\delta} C \right)^2 \mathbf{s} + \left(\frac{1}{\delta} C \right)^3 \mathbf{s} + \dots \right]$$

tetszőleges $(N, A, M) \in \mathcal{R}^n$ rangsorolási probléma esetén.

II.2.3. Pontozási eljárásokra vonatkozó axiómák

Az 5. és 6. fejezetben a pontozási eljárások tulajdonságaival foglalkozunk, többek között az alábbiakkal.

II.11. Definíció. *Lineáris rendezés* (linear order): Az N objektumhalmazon értelmezett irreflexív, tranzitív, és teljes $\succ_{(N,A,M)}$ bináris reláció *lineáris rendezés.*

II.6. *Jelölés.* Az n objektumot tartalmazó lineáris rendezések halmaza $\mathcal{L}^n$.

II.12. Definíció. *Objektumok lineáris rendezésének létezése* (existence of a linear order of the objects): Legyen $(N, A, M) \in \mathcal{R}^n$ egy rangsorolási probléma. Ebben *létezik az objektumok lineáris rendezése*, ha

$$\min_{L \in \mathcal{L}^n} \sum_{X_i, X_j \in N} (0{,}5\, a_{ji} + 0{,}5\, m_{ji} : X_i \prec X_j) = 0.$$

II.13. Definíció. *Lineáris rendezés megőrzése* (linear order preservation, LOP): Legyen $(N, A, M) \in \mathcal{R}^n$ egy rangsorolási probléma, melyben létezik az objektumok $L \in \mathcal{L}^n$ lineáris rendezése. Egy $f : \mathcal{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás *megőrzi a lineáris rendezést*, ha $X_i \succ^{L}_{(N,A,M)} X_j \Rightarrow f_i(N, A, M) \geq f_j(N, A, M)$.

II.14. Definíció. *Semlegesség* (neutrality, NEU) (Young, 1974): Legyen $(N, A, M) \in \mathcal{R}^n$ egy rangsorolási probléma és $\sigma : \{X_1, X_2, \dots, X_n\} \to \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ az objektumok egy permutációja. Jelölje $\sigma(N, A, M) \in \mathcal{R}^n$ a permutáció végrehajtásával, az A eredmény- és az M mérkőzésmátrixok sorainak és oszlopainak felcserélésével kapott rangsorolási problémát. Egy $f : \mathcal{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás *semleges*, ha minden $X_i, X_j \in N$-re $f_i(N, A, M) \geq f_j(N, A, M) \Leftrightarrow f_{\sigma i}[\sigma(N, A, M)] \geq f_{\sigma j}[\sigma(N, A, M)]$.

II.15. Definíció. *Konzisztencia* (consistency, CS) (Young, 1974): Legyen $(N, A, M), (N, A', M') \in \mathcal{R}^n$ két rangsorolási probléma, $X_i, X_j \in N$ két objektum, és $f : \mathcal{R}^n \to \mathbb{R}^n$ egy pontozási eljárás, amire $f_i(N, A, M) \geq f_j(N, A, M)$ és $f_i(N, A', M') \geq f_j(N, A', M')$. f *konzisztens*, ha $f_i(N, A + A', M + M') \geq f_j(N, A + A', M + M')$, sőt, $f_i(N, A + A', M + M') > f_j(N, A + A', M + M')$, ha $f_i(N, A, M) > f_j(N, A, M)$ vagy $f_i(N, A', M') > f_j(N, A', M')$.

II.16. Definíció. *Szimmetria* (symmetry, SYM) (González-Díaz et al., 2014): Legyen az $(N, A, M) \in \mathcal{R}^n$ rangsorolási problémára $A = O$. Egy $f : \mathcal{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás *szimmetrikus*, ha $f_i(N, A, M) = f_j(N, A, M)$ minden $X_i, X_j \in N$-re.

II.17. Definíció. *Függetlenség az irreleváns mérkőzésektől* (independence of irrelevant matches, IIM) (González-Díaz et al., 2014): Legyen $(N, A, M) \in \mathcal{R}^n$ egy rangsorolási probléma, $X_i, X_j, X_k, X_\ell \in N$ négy különböző objektum, és $f : \mathcal{R}^n \to$

$\mathbb{R}^n$ egy pontozási eljárás, amire $f_i(N,A,M) \geq f_j(N,A,M)$. Legyen $(N,A',M') \in \in \mathcal{R}^n$ egy olyan rangsorolási probléma, ami azonos (N,A,M)-mel, de $a'_{k\ell} \neq a_{k\ell}$ és $m'_{k\ell} \in \mathbb{N}$ tetszőleges. f *független az irreleváns mérkőzésektől*, ha $f_i(N,A',M') \geq \geq f_j(N,A',M')$.

II.2.4. Svájci rendszerű sakk csapatversenyek

A 7. fejezet gyakorlati alkalmazásának elméleti megalapozásához szintén szükségünk lesz néhány fogalomra.

II.7. *Jelölés.* **mp** és **gp** a mérkőzés- és táblapontok vektora. $2t$ az egy mérkőzésen játszó csapattagok száma.

II.8. *Jelölés.* MP_{ij}, illetve BP_{ij} az $X_i \in N$ csapat által az $X_j \in N$ csapat elleni mérkőzésen elért mérkőzés-, illetve táblapontok száma.

II.18. Definíció. *Mérkőzéspont alapú eredménymátrix* (match points based results matrix): Az $(N,A^{MP},M) \in \mathcal{R}^n$ rangsorolási probléma eredménymátrixa *mérkőzéspont alapú*, ha $a_{ij}^{MP} = MP_{ij} - 1$ minden $X_i, X_j \in N$-re.

II.19. Definíció. *Táblapont alapú eredménymátrix* (board points based results matrix): Az $(N,A^{BP},M) \in \mathcal{R}^n$ rangsorolási probléma eredménymátrixa *táblapont alapú*, ha $a_{ij}^{BP} = (BP_{ij} - t)/t$ minden $X_i, X_j \in N$-re.

II.20. Definíció. *Általánosított eredménymátrix* (generalised results matrix): Az $(N,A^P(\lambda),M) \in \mathcal{R}^n$ rangsorolási probléma eredménymátrixa *általánosított*, ha $a_{ij}^P(\lambda) = (1-\lambda)(MP_{ij} - 1) + \lambda(BP_{ij} - t)/t$ minden $X_i, X_j \in N$-re, ahol $\lambda \in (0{,}1)$ egy paraméter.

III. Az értekezés fontosabb eredményei

Az alábbiakban fejezetenként ismertetjük az értekezés hozzájárulását a páros összehasonlításokon alapuló rangsorolás irodalmához.

1. Bevezetés

Ez a szakasz felvázolja a kutatási kérdéseket, a téma szakmai hátterét, az értekezés tervezetét, a főbb eredményeket és az alkalmazott jelöléseket. Lényeges saját hozzájárulást nem tartalmaz.

2. A páros összehasonlításon alapuló rangsorolás modellje

A fejezetben ugyan nem kerül megfogalmazásra komolyabb önálló eredmény, az eredmény- és mérkőzésmátrixok bevezetését mégis jelentősnek tartjuk a szakirodalom egységes keretben történő elhelyezése, a gráf reprezentáció felépítése, és az axiomatikus vizsgálat szempontjából. Ezenkívül a különböző területeken javasolt eljárások és karakterizációk ismertetése tekinthető újdonságnak.

3. Pontozási eljárások

A mi hozzájárulásunk a legkisebb négyzetek és az $LLSM$ módszer ekvivalenciájának megmutatása, mely lehetővé teszi a páros összehasonlításokra ismert axiomatikus eredmények alkalmazását az AHP módszertanban. Szintén saját eredmény a megoldhatóságra vonatkozó feltételek tárgyalása.

4. A legkisebb négyzetek módszerének gráf interpretációja

Itt a legkisebb négyzetek módszere (4.2. Tétel), majd ennek alapján az általánosított sorösszeg gráf interpretációjának (4.3. Tétel) megmutatása tűnik a legfontosabbnak, de – különösen a pozíciós erő tekintetében – lényegesnek tartjuk az irodalomban ismert módszerekkel történő összevetést is. A levezetésekhez többnyire jól ismert matematikai állításokat használunk, ezek összegyűjtése és megfelelő keretbe rendezése azonban nem kis feladatot jelentett.

4.1. Tétel. *Legyen $(N, A, M) \in \mathcal{R}^n_O$ egy összefüggő rangsorolási probléma. A legkisebb négyzetek módszerének egyértelmű megoldása*

$$\mathbf{q} = [L + (1/n)J]^{-1}\,\mathbf{s}.$$

4.2. Tétel. *Legyen* $(N, A, M) \in \mathcal{R}^n_O$ *egy összefüggő rangsorolási probléma nem reguláris páros*[1] G *összehasonlítási multigráffal. A legkisebb négyzetek módszerének egyértelmű megoldása*

$$\mathbf{q} = \frac{1}{\mathfrak{d}} \sum_{k=0}^{\infty} P^k \mathbf{s} = \frac{1}{\mathfrak{d}} \left(\mathbf{s} + P\mathbf{s} + P^2\mathbf{s} + P^3\mathbf{s} + \dots \right).$$

Az általánosított sorösszeg a legkisebb négyzetek módszere gráf interpretációjának kiterjesztése.

4.3. Tétel. *Legyen* $(N, A, M) \in \mathcal{R}^n$ *egy rangsorolási probléma. Az általánosított Buchholz és az általánosított sorösszeg módszer arányos, a* $\mathbf{w}(\delta)$ *és* $\mathbf{x}(\varepsilon)$ *vektorok megfelelő* δ *és* ε *paraméterválasztással egymás pozitív konstansszorosai:*

$$\mathbf{x}(\varepsilon) = \left(1 + \frac{mn}{\delta - \mathfrak{d}} \right) \frac{\delta}{\mathfrak{d}(\delta - \mathfrak{d})} \mathbf{w}(\delta) \qquad \textit{ha } \varepsilon = 1/\left(\delta - \mathfrak{d}\right), \textit{ és}$$

$$\mathbf{w}(\delta) = \frac{1}{1 + \varepsilon mn} \frac{\mathfrak{d}}{1 + \varepsilon \mathfrak{d}} \mathbf{x}(\varepsilon) \qquad \textit{ha } \delta = 1/\varepsilon + \mathfrak{d}.$$

A 4.1. és a 4.2. Tétel Csató (2014a) fő eredménye.

5. A pontozási eljárások néhány tulajdonsága

A fejezetben adott axiomatikus tárgyalás jelentősebb eredményei:

- Az általánosított sorösszeg változó, a mérkőzésszámtól megfelelő mértékben függő ε paraméterrel történő alkalmazásának belátása a homogenitás és az eredmény konzisztencia tulajdonságok révén;
- A skála invariancia bevezetése, melynek megkövetelésével egyes pontozási eljárások esetén bővíthető az egyértelmű megoldásra vezető rangsorolási problémák halmaza;
- A konzisztencia megsértésének belátása az általánosított sorösszeg módszer esetén;
- Az eredmény konzisztencia definíciója és vizsgálata;
- A szimmetria és a megfordíthatóság kapcsolatának részletes elemzése;
- A pontozási eljárások és a rangsorolási probléma lineáris rendezéssel közelítése között kapcsolatot teremtő lineáris rendezés megőrzése axióma bevezetése és megsértésének bizonyítása (5.1. Tétel, Rónyai Lajossal közösen);

[1] A *nem reguláris páros* kifejezés jelentése, hogy a gráf nem lehet egyszerre reguláris és páros.

- A függetlenség az irreleváns eredményektől tulajdonság definíciója, valamint az irreleváns mérkőzésektől (eredményektől) való függetlenség összekapcsolása a(z eredmény) konzisztenciával a tárgyalt általános esetben (5.2. Tétel);

- A függetlenség a döntetlenektől axióma bevezetése és vizsgálata.

5.1. Tétel. *(Rónyai Lajossal közösen) A legkisebb négyzetek módszere nem teljesíti az LOP tulajdonságot.*

Az első látásra meglepő eredményre $n = 8$ esetén adódik – az összehasonlított objektumok számában mérve legegyszerűbb – ellenpélda. Belátható, hogy n tetszőlegesen növelhető. Egy másik fő állítás az axiómák kapcsolatára vonatkozik.

5.2. Tétel. *Ha egy $f : \mathcal{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás kielégíti a NEU, az SYM és a CS tulajdonságokat, akkor az IIM-et is teljesíti.*

González-Díaz et al. (2014, 165. o.) a pontszám módszer hibájaként rója fel, hogy hiányos és többszörös összehasonlítások jelenlétében is független az irreleváns mérkőzésektől, tehát az általános esetben az IIM egy nemkívánatos tulajdonság. Ekkor az 5.2. Tétel értelmében, mivel a semlegesség és a szimmetria aligha vitatható, a konzisztencia fennállása könnyen támadható.

6. Kapcsolat a pontszám módszerrel

Ezen fejezet főbb axiomatikus eredményei:

- Bouyssou (1992) pontszám módszerre adott karakterizációja érvénytelenségének belátása az értelmezési tartomány bővítése esetén;

- Az általános esetben adott axiomatizációk kritikai elemzése;

- Az ellenfelek homogén kezelése tulajdonság bevezetése és vizsgálata.

Axiomatikus tárgyalásunk összefoglalása az 1. táblázatban látható. Az elemzés során összegyűjtöttük az irodalomban definiált tulajdonságokat (bizonyos esetekben apróbb módosításokkal, kiegészítésekkel), emellett hat új követelményt vezettünk be: ezek a skála invariancia (SI), az eredmény konzisztencia (RCS), a lineáris rendezés megőrzése (LOP), a függetlenség az irreleváns eredményektől (IIR), a függetlenség a döntetlenektől (ID), és az ellenfelek homogén kezelése (HTO). A pontszám az LOP tulajdonság kivételével ugyan mindegyiket kielégíti, azonban hiányzó és többszörös összehasonlítások jelenlétében az irreleváns mérkőzésektől való függetlenség (IIM) teljesülése nem kívánatos. Egyik fontos állításunk szerint ez lényegében kizárja az összeadhatóság fennállását is, indokolva az eredmény konzisztencia bevezetését, az eredmény- és mérkőzésmátrixok megkülönböztetését.

1. táblázat. Pontozási eljárások axiomatikus összehasonlítása

Tulajdonság	Név	Egyenlő	Pontszám†	Ált. sorösszeg‡	Legkisebb négyzetek
(ANO)	✔	✔	(✔)	(✔)	(✔)
(NEU)	✗	✔	(✔)	(✔)	(✔)
(CNT)	✗	✔	(✔)	(✔)	(✔)
($LRCR$)	✗	✔	✔	(✔)	✔
(HOM)	✔	✔	(✔)	(✔)✗*	(✔)
SI	✔	✔	✔	✔	✔
(CS)	✔	✗	(✔)	(✗)	(✗)
(FP)	✔	✔	(✔)	(✔)	(✔)
RCS	✔	✗	✔	✔✗*	✔
(SYM)	✗	✔	(✔)	(✔)	(✔)
(INV)	✗	✔	(✔)	(✔)	(✔)
LOP	✗	✗	✗	✗	✗
(IIM)	✔	✔	(✔)	(✗)	(✗)
IIR	✔	✔	✔	✗	✗
ID◊	✔	✔	✔	✔	✔
(SM)	✗	✗	(✔)	(✔)	(✗)
(CSM)	✗	✗	(✔)	(✔)	(✗)
(IC)	✔	✔	(✔)	✔	✔
(SCC)	✗	✗	(✔)	(✔)	(✔)
(HTV)	✗	✗	(✔)	(✔)	(✔)
HTO	✗	✗	✔	✔	✔

Zárójelben a korábban bevezetett axiómák és elért eredmények, a többi saját hozzájárulás

† González-Díaz et al. (2014) tőlünk eltérően definiálja a pontszám módszert; az ott belátottak zárójelben szerepelnek

‡ Általánosított sorösszeg: González-Díaz et al. (2014) csak az $\bar{\varepsilon} = [1/m(n-2)]$ esetet vizsgálja; az ott belátottak zárójelben szerepelnek

* Az ε paraméter megválasztásától függ

◊ Chebotarev (1994, Property 14) dinamikus monotonitás (2) feltételének kiterjesztése

Az általánosított sorösszeg használata változó, a mérkőzésszámtól függő paraméter mellett ajánlott. Ekkor a legkisebb négyzetek módszerétől elsősorban a monotonitás (SM és CSM axiómák) tekintetében különbözik. A vizsgált pontozási eljárások egyike sem őrzi meg a lineáris rendezést, ami nagy valószínűséggel azok sokkal szélesebb körére (akár az összesre?) is érvényes.

7. Rangsorolás svájci rendszerű sakk csapatversenyekben

A fejezet egésze saját hozzájárulás. Bár korábban is születtek javaslatok rekurzív alapú módszerek használatára svájci rendszerű sakkversenyeken (Brozos-Vázquez et al., 2010), ez tekinthető az első, axiomatikus megközelítésű gyakorlati vizsgálatnak. Lezárjuk a sakk csapatversenyek rangsorolási problémaként való modellezésének kérdését (7.1. Tétel), és jelentős lépést teszünk a megfelelő pontozási eljárás kiválasztása felé. Az alkalmazást bemutató rész szintén tartalmaz innovatív elemeket: a súlyozott távolság számítása nagy valószínűséggel Can (2014) javaslatának első gyakorlati alkalmazása, és – egy korábbi cikkünktől (Csató, 2013a) eltekintve – a sokdimenziós skálázást sem használták hasonló rangsorok összehasonlítására. Emellett kiemelnénk a stabilitás bevezetését a svájci rendszerű versenyek rangsorolásának értékelésére.

Az elemzés a következő állításból indul ki.

7.1. Tétel. *Legyen $(N, A, M) \in \mathcal{R}_R^n$ egy körmérkőzéses rangsorolási probléma. Az általánosított sorösszeg és a legkisebb négyzetek módszere A^{MP} esetén a mérkőzéspontok, míg A^{BP} mellett a táblapontok vektorával azonos rangsort eredményez.*

Tehát az általánosított sorösszeg és a legkisebb négyzetek módszere a hivatalos rangsorok svájci rendszerre való kiterjesztéseként is felfoghatók.

Eredményeink megalapozhatják a legkisebb módszerének alkalmazását a rangsorolásra hasonló versenyek esetén:

- Egyetlen módszer, köztük a hivatalos sorrend sem jobb előrejelző a csapatok *a priori* értékelését tükröző rangsornál, akkor sem, ha csak a következő forduló eredményeit kell megbecsülni;
- A mintailleszkedés, a korábbi eredmények visszaadásának képessége az ε paraméter, az ellenfelek szerepének növekedésével javul, a legkisebb négyzetek kismértékben jobb a hivatalosnál;
- A verseny egyes köreinek lejátszása után kapott rangsorok az ε paraméter, az ellenfelek fontosságának emelkedésével stabilabbá válnak, a legkisebb négyzetek módszere robusztusabb a hivatalos eljárásnál.

A mérkőzéspontok felé hajló általánosított eredménymátrix (alacsony, 0-hoz közeli λ) használata minél több táblapont gyűjtésére ösztönöz, azokhoz képest mégis a mérkőzéspontokat preferálja. Természetesen a két példából levont tapasztalatok nem feltétlenül általános érvényűek, a megfogalmazott ajánlások alátámasztása további – megfigyeléseken vagy szimuláción alapuló – vizsgálatokat igényelhet. Mindazonáltal javaslatunk elméleti megfontolásokkal is indokolható.

Az elemzés lényegében Csató (2013a) továbbfejlesztése a javasolt módszerek alkalmazásának axiomatikus alátámasztásával, a rangsorok távolságának elfogadhatóbb mérésével és a három értékelési szempont (előrejelző képesség, mintailleszkedés, stabilitás) bevezetésével.

8. A páros összehasonlítások további alkalmazásai

Ez a fejezet, a korábbiakkal ellentétben, nem módszertani jellegű. Ennek egyik oka, hogy más – részben társszerzős – munkáinkban (Csató, 2012a,b, 2013a; Temesi et al., 2012; Csató, 2013c, 2014c) már többször vizsgáltunk hasonló problémákat.

Itt lényegesnek tartjuk az alkalmazási területek összegyűjtését, tudomásunk szerint eddig sehol sem jelent meg a páros összehasonlítások statisztikai felhasználása. A megfogalmazott ajánlások nagymértékben segíthetik a gyakorlati felhasználók munkáját. Ennek illusztrálására felhívjuk az olvasó figyelmét a Közgazdasági Szemlében megjelent Telcs et al. (2013a) cikkre, erre adott reakciónkra (Csató, 2013c), és a viszontválaszra (Telcs et al., 2013b).

9. Összefoglalás

A disszertáció ezen fejezete ismét rávilágít az axiomatikus tárgyalás fontosságára, egyfajta felülnézetből ismerteti azt. Emellett néhány új kutatási irányt fogalmaztunk meg. Jelentős saját hozzájárulást nem tartalmaz, részben azok áttekintését adja.

Értékelés

A 4. és a 7. fejezetek teljes egészében önálló eredményeket tartalmaznak, emellett jelentős saját hozzájárulás található az 5. és a 6. részben. Ezek publikálása részben már megtörtént (Csató, 2014a), részben – korábbi kutatásaink folytatásaként (Csató, 2012a,b, 2013a) – folyamatban van (Csató, 2014b,c).

Összességében úgy véljük, a mindkét kitűzött cél kapcsán sikerült lényeges hozzájárulásokkal gazdagítani a rendelkezésre álló ismereteket. A disszertációban nem kívántunk állást foglalni ezek fontossága, egymáshoz való viszonya tekintetében, ezt talán helyesebb az olvasóra bízni. Ugyanakkor későbbi kutatásaink során megfontolandónak tartjuk az alkalmazásokból, problémákból kiindulva, azok segítségével megfogalmazni a feladatot, kiválasztani a megfelelő módszereket. Ez bizonyos mértékben megoldást kínálhat a hiányzó karakterizációk okozta nehézségekre is.

IV. Saját publikációk

Idegen nyelvű

Referált szakmai folyóirat

1) Csató, L. [2013a]: Ranking by pairwise comparisons for Swiss-system tournaments. *Central European Journal of Operations Research*, 21(4):783–803.
DOI: `http://dx.doi.org/10.1007/s10100-012-0261-8`.

2) Csató, L. [2014a]: A graph interpretation of the least squares ranking method. *Social Choice and Welfare*. Megjelenés alatt.
DOI: `http://dx.doi.org/10.1007/s00355-014-0820-0`.

Tudományos könyvfejezet

3) Csató, L. [2012a]: A pairwise comparison approach to ranking in chess team championships. In Fülöp P. (szerk.): *Tavaszi Szél 2012 Konferenciakötet*. Doktoranduszok Országos Szövetsége, Budapest, 514–519. o.

Konferencia tanulmány, műhelytanulmány

4) Csató, L. [2012b]: A paired comparisons ranking and Swiss-system chess team tournaments. Magyar Közgazdaságtudományi Egyesület VI. éves konferencia.
URL: `http://media.coauthors.net/konferencia/conferences/7/LLSM_Buch_ranking__.pdf`.

5) Csató, L. [2014b]: Additive and multiplicative properties of scoring methods for preference aggregation. Corvinus Economics Working Papers 3/2014, Corvinus University of Budapest, Budapest.
URL: `http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/1562/`.

Egyéb

6) Bozóki, S., Csató, L., Rónyai, L. és Tapolcai, J. [2014]: Robust peer review decision process. Kézirat.

Magyar nyelvű

Referált szakmai folyóirat

7) Csató L. [2013c]: Rangsorolás páros összehasonlításokkal. Kiegészítések a felvételizői preferencia-sorrendek módszertanához. *Közgazdasági Szemle*, LX(12): 1333–1353.
URL: http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/1395/.

8) Csató L. [2013d]: Páros összehasonlításokon alapuló rangsorolási módszerek. *Szigma*, XLIV(3-4):155–198.
URL: http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/1645/.

Tudományos könyvfejezet

9) Temesi J., Csató L. és Bozóki S. [2012]: Mai és régi idők tenisze. A nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok egy alkalmazása. In Solymosi T. és Temesi J. (szerk.): *Egyensúly és optimum. Tanulmányok Forgó Ferenc 70. születésnapjára.* Aula Kiadó, Budapest, 213–245. o.
URL: http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/892/.

10) Bozóki S., Csató L. és Temesi J. [2013]: A Condorcet-paradoxon intranzitív dobókockákkal. In *Matematikai közgazdaságtan: elmélet, modellezés, oktatás. Tanulmányok Zalai Ernőnek.* Műszaki Kiadó, Magyar Minőség Társaság, Budapest, 41–53. o.

Konferencia tanulmány, műhelytanulmány

11) Csató L. [2011b]: Döntési módszerek és alternatív sakkeredmények. Magyar Közgazdaságtudományi Egyesület V. éves konferencia.
URL: http://media.coauthors.net/konferencia/conferences/5/MKE_sakk.pdf.

12) Csató L. [2013b]: Páros összehasonlításon alapuló pontozási eljárások monotonitása: önkonzisztencia és önkonzisztens monotonitás. Adalékok a pontozási eljárások axiomatikus tárgyalásához. Műhelytanulmány (working paper), Budapesti Corvinus Egyetem, Budapest.
URL: http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/1399/.

13) Csató L. [2013e]: Páros összehasonlításon alapuló pontozási eljárások szerkezeti tulajdonságai. Adalékok a pontozási eljárások axiomatikus tárgyalásához. Magyar Közgazdaságtudományi Egyesület VII. éves konferencia.

14) Csató L. [2014c]: Svájci rendszerű sakk csapatversenyek rangsorolása. Műhelytanulmány (working paper), Budapesti Corvinus Egyetem, Budapest.
URL: `http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/1604/`.

TDK dolgozat, szakdolgozat

15) Csató L. [2009]: Külső egyensúlytalanságok a Baltikumban. BSc szakdolgozat, Budapesti Corvinus Egyetem, Közgazdaságtudományi Kar, Matematikai Közgazdaságtan és Gazdaságelemzés Tanszék.
URL: `http://szd.lib.uni-corvinus.hu/3244/`.

16) Csató L. [2010]: Tényleg csak matematika?: A korlátlan tengeralattjáró-háború szimulációs vizsgálata. TDK dolgozat, Budapesti Corvinus Egyetem, Gazdaságelemzés és gazdaságmodellezés II. szekció.
URL: `http://szd.lib.uni-corvinus.hu/3014/`.

17) Csató L. [2011a]: Döntési módszerek és alternatív sakkeredmények. TDK dolgozat, Budapesti Corvinus Egyetem, Gazdaságelemzés és gazdaságmodellezés szekció.
URL: `http://szd.lib.uni-corvinus.hu/3256/`.

18) Csató L. [2011c]: Globalizáció, jövedelemelosztás és input-output modellezés. MSc szakdolgozat, Budapesti Corvinus Egyetem, Közgazdaságtudományi Kar, Matematikai Közgazdaságtan és Gazdaságelemzés Tanszék.
URL: `http://szd.lib.uni-corvinus.hu/3776/`.

Egyéb

19) Csató L. [2006]: Cardano és a valószínűség. *Természet Világa*, 137(6):CII–CIV.

Hivatkozások

Altman, A. és Tennenholtz, M. [2008]: Axiomatic foundations for ranking systems. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 31(1):473–495. DOI: `http://dx.doi.org/10.1613/jair.2306`.

Borda, M. de [1781]: Mémoire sur les élections au scrutin. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*. URL: `http://gerardgreco.free.fr/IMG/pdf/MA_c_moire-Borda-1781.pdf`.

Bouyssou, D. [1992]: Ranking methods based on valued preference relations: a characterization of the net flow method. *European Journal of Operational Research*, 60(1):61–67. DOI: `http://dx.doi.org/10.1016/0377-2217(92)90333-5`.

Bouyssou, D. [2004]: Monotonicity of 'ranking by choosing': a progress report. *Social Choice and Welfare*, 23(2):249–273. DOI: `http://dx.doi.org/10.1007/s00355-003-0250-x`.

Brozos-Vázquez, M., Campo-Cabana, M. A., Díaz-Ramos, J. C. és González-Díaz, J. [2010]: Recursive tie-breaks for chess tournaments. URL: `http://eio.usc.es/pub/julio/Desempate/Performance_Recursiva_en.htm`.

Can, B. [2014]: Weighted distances between preferences. *Journal of Mathematical Economics*, 51:109–115. DOI: `http://dx.doi.org/10.1016/j.jmateco.2014.01.002`.

Chebotarev, P. [1989] An extension of the method of string sums for incomplete pairwise comparisons (oroszul). *Avtomatika i Telemekhanika*, 50(8):125–137. URL: `http://mi.mathnet.ru/eng/at6388`.

Chebotarev, P. [1994]: Aggregation of preferences by the generalized row sum method. *Mathematical Social Sciences*, 27(3):293–320. DOI: `http://dx.doi.org/10.1016/0165-4896(93)00740-L`.

Chebotarev, P. és Shamis, E. [1998]: Characterizations of scoring methods for preference aggregation. *Annals of Operations Research*, 80:299–332. DOI: `http://dx.doi.org/10.1023/A:1018928301345`.

Chebotarev, P. és Shamis, E. [1999]: Preference fusion when the number of alternatives exceeds two: indirect scoring procedures. *Journal of the Franklin Institute*, 336(2):205–226. DOI: `http://dx.doi.org/10.1016/S0016-0032(98)00017-9`.

Csató, L. [2012a]: A pairwise comparison approach to ranking in chess team championships. In Fülöp P. (szerk.): *Tavaszi Szél 2012 Konferenciakötet*. Doktoranduszok Országos Szövetsége, Budapest, 514–519. o.

Csató, L. [2012b]: A paired comparisons ranking and Swiss-system chess team tournaments. Magyar Közgazdaságtudományi Egyesület VI. éves konferencia. URL: http://media.coauthors.net/konferencia/conferences/7/LLSM_Buch_ranking__.pdf.

Csató, L. [2013a]: Ranking by pairwise comparisons for Swiss-system tournaments. *Central European Journal of Operations Research*, 21(4):783–803. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s10100-012-0261-8.

Csató L. [2013b]: Páros összehasonlításon alapuló pontozási eljárások monotonitása: önkonzisztencia és önkonzisztens monotonitás. Adalékok a pontozási eljárások axiomatikus tárgyalásához. Műhelytanulmány (working paper), Budapesti Corvinus Egyetem, Budapest. URL: http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/1399/.

Csató L. [2013c]: Rangsorolás páros összehasonlításokkal. Kiegészítések a felvételizői preferencia-sorrendek módszertanához. *Közgazdasági Szemle*, LX(12):1333–1353. URL: http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/1395/.

Csató L. [2013d]: Páros összehasonlításokon alapuló rangsorolási módszerek. *Szigma*, XLIV(3-4):155–198. URL: http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/1645/.

Csató, L. [2014a]: A graph interpretation of the least squares ranking method. *Social Choice and Welfare*. Megjelenés alatt. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s00355-014-0820-0.

Csató, L. [2014b]: Additive and multiplicative properties of scoring methods for preference aggregation. Corvinus Economics Working Papers 3/2014, Corvinus University of Budapest, Budapest. URL: http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/1562/.

Csató L. [2014c]: Svájci rendszerű sakk csapatversenyek rangsorolása. Műhelytanulmány (working paper), Budapesti Corvinus Egyetem, Budapest. URL: http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/1604/.

González-Díaz, J., Hendrickx, R. és Lohmann, E. [2014]: Paired comparisons analysis: an axiomatic approach to ranking methods. *Social Choice and Welfare*, 42 (1):139–169. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s00355-013-0726-2.

Herings, P. J.-J., van der Laan, G. és Talman, D. [2005]: The positional power of nodes in digraphs. *Social Choice and Welfare*, 24(3):439–454. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s00355-003-0308-9.

Horváth Á., Kőrösi G. és Schepp Z. [2013]: Doktoranduszhallgatók Nyári Műhelye: MKE-PTE KTK, Pécs, 2013. június 28-29. *Közgazdasági Szemle*, LX(7-8):903–911. URL: http://epa.oszk.hu/00000/00017/00205/pdf/EPA00017_kozgazdasagi_szemle_2013_07-08_903-911.pdf.

Jiang, X., Lim, L.-H., Yao, Y. és Ye, Y. [2011]: Statistical ranking and combinatorial Hodge theory. *Mathematical Programming*, 127(1):203–244. DOI: 10.1007/s10107-010-0419-x.

Laslier, J.-F. [1997]: *Tournament solutions and majority voting.* Springer, Berlin. URL: http://books.google.hu/books/about/Tournament_Solutions_and_Majority_Voting.html?id=vYbGAAAAIAAJ&redir_esc=y.

Saaty, T. L. [1980]: *The Analytic Hierarchy Process: planning, priority setting, resource allocation.* McGraw-Hill, New York. URL: http://books.google.hu/books/about/The_Analytic_Hierarchy_Process.html?id=Xxi7AAAAIAAJ&redir_esc=y.

Slikker, M., Borm, P. és van den Brink, R. [2012]: Internal slackening scoring methods. *Theory and Decision*, 72(4):445–462. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s11238-011-9281-4.

Telcs A., Kosztyán Zs. T. és Török Á. [2013a]: Hallgatói preferencia-sorrendek készítése az egyetemi jelentkezések alapján. *Közgazdasági Szemle*, LX (3):290–317. URL: http://epa.oszk.hu/00000/00017/00201/pdf/EPA00017_kozgazdasagi_szemle_2013_03_290-317.pdf.

Telcs A., Kosztyán Zs. T. és Török Á. [2013b]: Reflexiók Csató László vitairatára. *Közgazdasági Szemle*, LX(12):1354–1356. URL: http://epa.oszk.hu/00000/00017/00209/pdf/EPA00017_kozgazdasagi_szemle_2013_12_1354-1356.pdf.

Temesi J., Csató L. és Bozóki S. [2012]: Mai és régi idők tenisze. A nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok egy alkalmazása. In Solymosi T. és Temesi J. (szerk.): *Egyensúly és optimum. Tanulmányok Forgó Ferenc 70. születésnapjára.* Aula Kiadó, Budapest, 213–245. o. URL: http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/892/.

Young, H. P. [1974]: An axiomatization of Borda's rule. *Journal of Economic Theory*, 9(1):43–52. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/0022-0531(74)90073-8.