

5. Fejezet

A Kiyotaki-Wright modell

A most következő és a további két fejezetben bemutatjuk, hogy az előző fejezetekben ismertett szimulációs módszertan hogyan épült be a modern közgazdaság-elméleti modellezés gyakorlatába. Ebben a fejezetben a pénz szerepének modellezésére alkalmazott Kiyotaki-Wright modellel foglalkozunk.¹

A közgazdasági modellek legtöbbször a pénzt olyan *speciális jószágnak* tekintik, amelyre érvényesülnek a hagyományos jószágfogalmak (készlet, hasznosság, stb.), de ezek mellett meghatározott speciális funkciókkal is rendelkeznek. Ezek:

- Elszámolási egység funkció (ármérce),
- Csereeszköz funkció (fizetési eszköz),
- Felhalmozási funkció (értékőrző eszköz).

Számos közgazdász foglalkozik azzal, hogy egzakt matematikai bizonyítás segítségével megmutassa, általános egyensúlyelméleti keretek között törvényszerű egy olyan eszköz kialakulása, amely a fenti funkciókat kielégíti. Egyelőre azonban csak részeredmények vannak, amelyben a pénz a fentiek közül csak egy-egy funkció megvalósítását képes ellátni.

A Walras-i általános egyensúlyelméleti modell a jószágok gazdasági egyensúly melletti cseréinek problémájával foglalkozik. Erről a gazdaságról feltételezzük, hogy részben centralizált, és egy központi árverező képes úgy alakítani az árakat, hogy minden piaci szereplő – határhaszon-elemzés alapján számított – összkereslete és kínálata minden részpiacon megegyezzen. Az eredeti modell nem tartalmazott pénzt, másfelől tetszőleges jószágot választhatunk ármércének, azaz elszámoló egységnek. Próbáljuk meg bevezetni ebbe a modellbe a pénzt! A pénz ekkor, mint egy belső érték nélküli jószág, ugyanolyan szerepet tölt be a modellben, mint a többi árucikk. A cél az, hogy a pénzmennyiség tartásáról is a határhaszon elemzés alapján döntsünk, azaz a monetáris elmélet beágyazható legyen az értékelméletbe, a választások általános elméletébe. A szereplőknek azonban semmi okuk sincs arra, hogy egy valójában barter gazdaságként működő rendszerben ezt a jószágot tartsák. Ebben a modellben a szerepeltetett pénzjószág pusztán elszámoló eszköz funkcióval rendelkezik, hiszen nem is lehet egyéb szerepe egy idődimenzió nélküli centralizált gazdaságban. Hahn [1965] egzakt elemzést

¹ A fejezetben Megyeri Krisztinával és Sarlós Tamással végzett közös kutatásra, Benedek és Megyeri [2000]-re, Megyeri [2001]-re és Sarlós [2001]-re építünk.

ad arra, hogy egy ilyen környezetben miért nem fognak a szereplők egyensúlyban pénzt tartani.

Ahhoz, hogy a pénz csereeszköz funkcióját megragadjuk, el kell vetnünk a centralizált és statikus modellvilágot. A cserék tehát nem egyidejűleg minden piacon, minden szereplő között, egyetlen központi kikiáltó segítségével történnek, hanem bilaterálisan és időben eltolódva. Egy ilyen gazdaságban a szereplők közti cserének két oka lehet:

- A csere folytán mindkét fél a számára belső használati értékkel rendelkező jószágot szerzi meg keresletének közvetlen kielégítése céljából. Jevons [1875] szerint ez – a csereszándékok kölcsönös megegyezése – nem túl gyakori eset, még akkor sem, ha egyensúlyi árak mellett minden vevőhöz található eladni szándékozó szereplő.
- A csere során – legalább – az egyik fél olyan jószágot fogad el, amelyet ugyan nem képes hasznosítani közvetlen keresletének kielégítésére, de feltételezi, hogy ezen jószág birtokában nagyobb eséllyel lesz képes egy következő cserében egy számára hasznos jószághoz hozzájutni.

Úgy tűnik, mintha a második cseretípus tovább növelné a problémát, hiszen itt már legalább két tranzakcióra van szükség egy kívánatos jószág megszerzéséhez. A pénz, mint csereeszköz megjelenítésével megoldhatóvá válik a szándékok egyezésekor fellépő kettős véletlen problémája. A fenti követelményeknek megfelelő, a pénz csereeszköz funkciójának megragadására alkalmas modellt javasolt Kiyotaki és Wright [1989].

A továbbiakban először ezt a modellt mutatjuk be röviden. A második alfejezetben bemutatjuk az analitikusan meghatározható eredményeket. A harmadik alfejezetben szimulációs eljárásokat alkalmazunk, és megmutatjuk, hogy „kellően intelligens” gazdasági szereplők saját és környezetük viselkedésén okulva képesek megtanulni az optimális viselkedési szabályokat és elérni az analitikusan meghatározott egyensúlyi állapotot. A negyedik alfejezetben a Kiyotaki-Wright modell olyan kiterjesztéseivel foglalkozunk, amelynek analitikus megoldása nem lehetséges, viszont a szimulációs megoldások számos érdekes jelenségre hívják fel a figyelmet ezekben a modellekben.

5.1. A modell

Képzeljünk el egy olyan gazdaságot, amely végtelen sok, örökéletű szereplőből áll, és végtelen sok diszkrét időszakon keresztül működik. A jószágtér véges dimenziós, maguk a jószágok pedig oszthatatlan egységekből állnak. Minden jószág termelhető, fogyasztható és raktározható. A szereplők $T \in \mathbb{N}$ különböző típusba sorolhatók aszerint, hogy mely jószágot fogyasztják.

5.1. Definíció: Az i típusú szereplők az i jószágot fogyasztják, ennek hasznossága számukra U_i , és az $f(i) \neq i$ típusú jószágot termelik, melynek költsége számukra D_i . Így a fogyasztás nettó haszna az i típusú szereplők számára $u_i = U_i - D_i$.

Egy periódusban az egyes szereplők egyetlen jószág tárolására képesek.

5.2. Definíció: j típusú jószág *tárolási költsége* egy i típusú szereplő számára c_{ij} .

5.3. Definíció: A szereplők egy közös $\beta \in (0,1)$ *diszkontfaktoral* rendelkeznek.

Mindezekből következik, hogy egy i típusú szereplő intertemporális hasznossági függvénye

$$U^{int} = E \left(\sum_t \beta^t (c_j R(t, j) + C(t) u_i) \right), \quad (5.1)$$

ahol $C(t)$ a t periódusbeli fogyasztási indikátora, azaz olyan függvény, amely akkor és csak akkor veszi fel az 1-es értéket, ha az adott szereplő a számára megfelelő jószágot fogyasztja, különben 0. Az $R(t, j)$ függvény akkor és csak akkor 1, ha a t periódusban a szereplő a j jószágot tárolja, különben ez is 0. $E(\cdot)$ a várható értéket jelöli.

Minden egyes időpillanatban a szereplők véletlenszerű párokban találkoznak egymással. Mindketten döntenek, hogy számukra a partner jószága kívánatosabb-e a sajáténál, és kölcsönösen pozitív szándékok esetén jószágot cserélnek egymással, egyéb esetben nem jön létre csere.

A fenti modell még számtalan eltérő tulajdonságú gazdaság leírását foglalja magában. Kiyotaki és Wright alapmodelljükben további megkötéseket tettek:

5.4. Definíció: „A” típusú gazdaságnak nevezzük a következő tulajdonsággal megadott modelleket:

1. A szereplőtípusok száma 3 ($T=3$). (Ez a lehető legkisebb típusmennyiség, amely mellett egy közvetítő jószágnak szerepe lehet.)
2. Minden típus azonos arányban van jelen a gazdaságban.
3. A tárolási költségek nagyságának sorrendje típustól függetlenül azonos, azaz $c_{i1} < c_{i2} < c_{i3}$, $i=1, 2, 3$.
4. u_i elegendően nagy ahhoz, hogy a szereplők nem akarnak kimaradni a gazdaságból: racionális i típusú szereplők bármit hajlandóak elcserélni az i

(hasznosan fogyasztható) jószágért, és ha szert tesznek rá, azt azonnal el is fogyasztják, majd egy új $f(i)$ jószágot termelnek. Így a szereplők minden pillanatban pontosan egy jószágot tárolnak. Belátható, hogy az u_i értékének nagyságára elégséges feltétel az $u_i > (c_{ij(i)} - c_{i1})/(1-\beta)$.

5. Végül a termelt jószágot meghatározó $f(i)$ függvény minden i típusú szereplő esetében az $f(i) = (i \bmod 3) + 1$ típusú jószágot² termeli, azaz az 1. típusú szereplők a 2. jószágot, 2. típusúak a 3. jószágot, a 3. típusúak pedig az 1. jószágot termelik.

Megjegyezzük, hogy létezik egy „B” modell, amely mindenben megegyezik az „A”-val, csupán a termelési függvény különböző, amennyiben az $f(i) = ((i+1) \bmod 3) + 1$, azaz 1. típusú szereplők a 3. jószágot, a 2. típusúak az 1. jószágot, végül a 3. típusúak a 2. jószágot termelik. Analitikusan az „A” modellt vizsgáljuk a továbbiakban, de rendkívül érdekes, hogy egy ilyen apró – és szimmetrikus – eltérés jelentősen megváltoztathatja a modell viselkedését. Ezért a „B” modellre a szimulációk bemutatása során még visszatérünk.

A gazdaság állapotát a raktározott javak eloszlásával jellemezzük.

5.5. Definíció: Legyen $\mathbf{p}(t) \in \mathcal{R}^{T \times T}$, ahol $p_{ij}(t)$ annak a valószínűsége, hogy a t periódusban egy véletlenszerűen kiválasztott szereplő i típusú szereplő, és az általa raktározott árú j típusú.

5.1. Következmény: *Minthogy a fogyasztott jószág azonnal fogyasztásra kerül, és így sohasem tárolódik, $p(t)_{ii} = 0$ adódik. Nyilvánvalóan*

$$\sum_j p_{ij}(t) = \frac{1}{T} = \frac{1}{3} \quad (5.2)$$

is fennáll minden i, t -re.

Racionális szereplők olyan csere-stratégiát választanak maguknak, ami a várható diszkontált jövőbeli hasznosságukat (U^{jt}) maximalizálja. Ez a várható hasznosság a saját és partner jószága melletti döntési stratégia, a $\mathbf{p}(t)$ raktározási eloszlás és a többiek stratégiájának függvénye.

5.6. Definíció: *Állandósult vagy egyensúlyi állapotnak* nevezzük a csere-stratégiák és a raktározott javak eloszlásának együttesét abban az esetben, ha ezekre igaz a

² A *mod* függvénnyel a maradékképzés (modulo) függvényt jelöltük, ahol $x \bmod z$ nem más, mint x -nek z -vel történő osztása után vett egész értékű maradéka.

- *maximalizálás*: azaz minden szereplő maximalizálja a saját jövőbeli hasznosságát, a többi szereplő adott csere- és fogyasztási stratégiája, és adott $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}^*$ raktározási eloszlás mellett, továbbá a
- *raciónalis várakozás*: azaz a haszonmaximalizáló cserestratégiák eredménye pontosan a $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}^*$ raktározási eloszlás.

Mivel tehát az állandósult állapotban $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}^*$ minden t -re, így egy szereplő döntése csak a saját és a partner jószágán múlik. Egy i típusú szereplő tiszta stratégiája leírható egy $\mathbf{S}_i \in \{0,1\}^{T \times T}$ cseremátrixszal, mégpedig $S_i(j,k)$ pontosan akkor 1, ha a szereplő a saját j típusú jószágát felajánlja cserére a partner k típusú jószágával szemben.

Hasznosságmaximalizáló szereplők stratégiájáról az általánosság megsértése nélkül feltehető, hogy $S_i(j,j) = 0$, mivel azonos jószágok cseréje nem változtat semmelyik fél helyzetén sem, valamint, hogy $S_i(j,k) = 1 - S_i(k,j)$, minden $k, j \neq i$ esetén, mivel ha egy csere előnyös, akkor a visszacserelés nem lehet az. Ha u_i elég nagy, akkor a fogyasztott jószág elfogadása domináns stratégia, amiből $k \neq i$ esetén $S_i(k,i) = 1$ adódik. $S_i(i,k)$ valójában érdektelen, mivel az i típusú szereplő sohasem birtokol i jószágot cserehelyzetben, tekintsük a továbbiakban 0-nak.

Eddigi megfigyeléseinket összegezve, egy i típusú szereplő egyetlen nem triviális döntése az, hogy a termelt $i^* = (i \bmod 3) + 1$ jószágot hajlandó-e elcserélni a harmadik, nem fogyasztott, nem termelt $i^{**} = ((i+1) \bmod 3) + 1$ jószágra. Jelöljük a típusonként egyetlen nem triviális $S_i(\min\{i^*, i^{**}\}, \max\{i^*, i^{**}\})$ elemet s_i -vel. Így az 1., 2. és 3. típusú szereplők stratégiamátrixai a következők:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & s_1 \\ 1 & 1-s_1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-s_2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} 0 & s_3 & 1 \\ 1-s_3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.7. Definíció: Egy stratégiát *fundamentálisnak* nevezünk akkor, ha a szereplő nem triviális döntését a jószágok tárolási költsége alapján hozza meg, mégpedig akkor és csak akkor hajlandó a cserére, ha a partner jószága olcsóbban tárolható. Minthogy $c_{i1} < c_{i2} < c_{i3}$ ez pontosan $s_i = 0$ -val egyenértékű minden szereplőre. A fundamentális stratégia ellentéte a *spekulatív* ($s_i = 1$) stratégia, amikor nem triviális esetben a szereplő a drágábban tárolható jószágot preferálja, mert azt piacképesebbnek ítéli meg. Arra számít ugyanis, hogy a drágábban tárolható jószágot képes hamarabb a fogyasztott jószágára cserélni, és így a gyakoribb fogyasztás és a rövidebb tárolási idő ellentételezi a magasabb fajlagos tárolási költséget.

5.2. Analitikus eredmények

5.8. Definíció: Jelölje $V_i^S(j)$ állapotértékelő függvény egy rögzített S stratégia-együttes mellett egy i típusú szereplő által a jövőben várható hasznosságok diszkontált értékét, feltéve, hogy a szereplő pillanatnyilag egy j típusú jószággal rendelkezik.

5.2. Következmény: Stratégiától függetlenül $V_i(i) = u_i + V_i(f(i))$, hiszen az i típusú szereplők azonnal elfogyasztják az i jószágot majd egy új $f(i)$ jószágot termelnek helyette. Ha $j \neq i$, akkor

$$V_i^S(j) = -c_{ij} + \beta E[V_i^S(j') | j] \quad (5.4)$$

Azaz a jószágot egy perióduson át tárolni kell ($-c_{ij}$), majd – feltéve, hogy most egy j típusú jószággal rendelkezik – a következő csere után valamilyen valószínűséggel egy j' típusú jószággal fog rendelkezni az adott szereplő. Ennek a feltételes j' „állapotnak” kell a várható hasznosságát kiszámítani, majd β segítségével a jelenértékre diszkontálni.

Jelöljük egy állapot értékét az optimális stratégia mellett $V_i(j)$ -vel. Ekkor fennállnak a dinamikus programozás *Bellman-egyenletei*:

$$V_i(j) = -c_{ij} + \max_{S_i} \beta E[V_i(j') | j], \quad i \neq j, \quad (5.5)$$

ahol a maximalizálás a stratégiák halmaza felett értendő.

5.1. Tétel. (Barto, Sutton [1998]): Egy stratégia pontosan akkor optimális, ha a hozzá tartozó állapotértékelő függvény kielégíti a Bellman-egyenletet.

5.3. Következmény: Optimális tiszta stratégia szükségszerűen konzisztens az állapot értékelő függvényével: $S_i(j,k) = 1 \Leftrightarrow V_i(k) > V_i(j)$. Azaz pontosan akkor cserél egy szereplő, ha a partner jószága várhatóan nagyobb diszkontált hasznosságot nyújt. Ebből adódóan azonos típusú szereplők sohasem cserélnek jószágokat egymást közt.

A Bellman-egyenletek jobb oldalának felírásához definiáljuk az alábbi függvényeket: A B függvény jelzi, hogy ha egy t_1 típusú g_1 jószággal rendelkező és egy t_2 típusú g_2 jószággal rendelkező szereplő találkozik, akkor cserélnek-e:

$$B(t_1, g_1, t_2, g_2) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t_1 = t_2 \\ S_{t_1}(g_1, g_2) S_{t_2}(g_2, g_1) & \text{ha } t_1 \neq t_2 \end{cases} \quad (5.6)$$

Ellentéte a:

$$\bar{B}(t_1, g_1, t_2, g_2) = 1 - B(t_1, g_1, t_2, g_2). \quad (5.7)$$

Így

$$V_i(j) = -c_{ij} + \max_{s_i} \beta \sum_l \sum_k p_{lk} (B(i, j, l, k) V_i(k) + \bar{B}(i, j, l, k) V_i(j)), \quad (5.8)$$

$i \neq j.$

A *Bellman-egyenlet* megoldásai az optimális stratégiára pontosan a konzisztencia feltételeket adják.

Ezután a feladat olyan (s_1, s_2, s_3) stratégiák meghatározása, melyek az általuk indukált \mathbf{p} eloszlás mellett konzisztensek az állapotértékelő függvényeikkel. Ez $2^3 = 8$ lehetőség megvizsgálását jelenti. A hat $(\cdot, 1, \cdot)$ illetve $(\cdot, \cdot, 1)$ alakú stratégiakombinációról igazolható, hogy nem lehet egyensúly. Belátható, hogy az 1. típusú szereplők bármely stratégiája mellett, a 2. és 3. típus számára mindig a *fundamentális* stratégia a legjobb válasz, ha a másik (2. illetve 3. típus) fundamentálisan játszik. Vagyis a $(\cdot, 0, 0)$ egyensúly, ha az 1. típus számára az. A 2. és 3. típus fundamentális stratégiája mellett igazolható, hogy $V_1(2) > V_1(3) \Leftrightarrow (c_{13} - c_{12}) > (p_{31} - p_{21})\beta u_1$. Következésképp ha $(c_{13} - c_{12}) > (p_{31} - p_{21})\beta u_1$, akkor az 1. típus fundamentális stratégiája legjobb válasz, és így a $(0, 0, 0)$ egyensúly, míg ha $(c_{13} - c_{12}) < (p_{31} - p_{21})\beta u_1$, akkor az 1. típus spekulál és az $(1, 0, 0)$ egyensúly.

5.9. Definíció: A kialakuló eloszlás meghatározásához vezessük be az M függvényt, amely egy t_1 típusú g_1 jószággal rendelkező és egy t_2 típusú g_2 jószággal rendelkező szereplő találkozási valószínűségét jelöli:

$$M(t_1, g_1, t_2, g_2) = p_{t_1 g_1} p_{t_2 g_2}. \quad (5.9)$$

5.4. Következmény: *Egyik periódusról a következőre a \mathbf{p} eloszlás az alábbiak szerint változik. A nem termelt, nem fogyasztott jószágra*

$$p'_{ik} = \sum_l \sum_j M(i, j, l, k) B(i, j, l, k) + \sum_l \sum_j M(i, k, l, j) \bar{B}(i, k, l, j), \quad (5.10)$$

ahol $k = ((i + 1) \bmod 3) + 1$. Felhasználva, hogy

$$p'_{ij} = \frac{1}{3} - p'_{ik}, \text{ feltéve ha} \quad (5.11)$$

$j = (i \bmod 3) + 1$ és $k = ((i + 1) \bmod 3) + 1$, továbbá $p'_{ii} = 0$ mindig igaz, így $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$ mellett egy (s_1, s_2, s_3) paraméterű nemlineáris egyenlet-rendszert kapunk. $(s_1, 0, 0)$ esetén \mathbf{p} -re azt kapjuk, hogy

$$p_{32} = 0, p_{13} = \frac{6p_{21} - 1}{9p_{21}}, p_{21} = \begin{cases} \frac{s_1 + 1 - \sqrt{s_1 + 1}}{3s_1} & \text{ha } s_1 \neq 0 \\ \frac{1}{6} & \text{ha } s_1 = 0 \end{cases}. \quad (5.12)$$

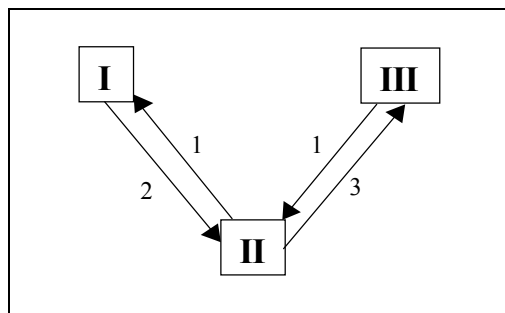
Fundamentális egyensúlyban tehát

$$p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

Ebből adódik a következő tétel.

5.2. Tétel: Fundamentális egyensúly alakul ki, ha $(c_{13} - c_{12}) > \frac{1}{6} \beta u_1$.

Ekkor a szereplők közti cserék diagrammja:



5.1. ábra: Cserék fundamentális egyensúlyban

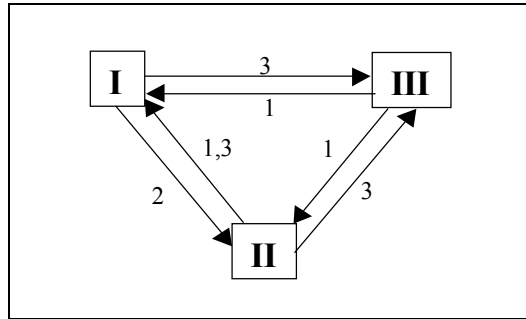
Ezek szerint a 2. típusú szereplők közvetítőként működnek a legolcsóbb tárolású 1. jószágot csereeszközként használva.

Spekulatív egyensúlyban

$$p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2-\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2-\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{2}-1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

5.3. Tétel: *Spekulatív egyensúly alakul ki, ha $(c_{13} - c_{12}) < \frac{\sqrt{2}-1}{3} \beta u_1$.*

Ekkor a szereplők közti cserék diagrammja:



5.2. ábra: Cserék spekulatív egyensúlyban

A 2. típus változatlan szerepe mellett, most már az 1. típus is közvetít 2. és 3. típus között, de a drágább 3. jószágot használva csereeszközként. Érdekes módon egyszerre két különböző csereeszköz van jelen a gazdaságban.

Mint azt Kiyotaki és Wright (Kiyotaki-Wright [1989]) említi: abban az esetben, hogyha $c_3 - c_2 \in \left(\frac{(\sqrt{2}-1)}{3} \beta u_1, \frac{1}{6} \beta u_1 \right)$, nincs tiszta egyensúlya a játéknak, de részletek nélkül

közlik, hogy kevert egyensúly ekkor is létezik. A továbbiakban ezt a kevert egyensúlyt határozzuk meg. Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a 2. és 3. típusú szereplők továbbra is fundamentálisan játszanak, de az 1. típus keverten is válaszolhat.

5.10. Definíció: Az s_1 kevert stratégiát értelmezhetjük úgy, hogy az 1. típus egyedei s_1 -ed része tiszta spekulatív, $(1 - s_1)$ -ed része pedig tiszta fundamentális stratégiát játszik.

A 2. és 3. típusú szereplők részéről a legjobb válasz a fundamentális stratégia, bármit játsszon is az 1. típus. Következésképpen $0 < s_1 < 1$ esetén is a fundamentális a legjobb válasz a 2. és 3. típus részéről. Így $(s_1, 0, 0)$ továbbra is egyensúly, ha az 1. típusnak az.

Leggyorsabban az egyensúlyt Kiyotaki és Wright elemzésének folytatásával kaphatjuk meg. Feltehető, hogy azonos típusú szereplők továbbra sem cserélnek egymással. Tekintsük egy darab (ebből adódóan tiszta stratégiájúnak tekinthető) 1. típusú szereplő legjobb választ a többiek rögzített stratégiáira. Ha $V_1(2) > V_1(3)$, akkor az egyén számára fundamentális a legjobb válasz, de ekkor a többi 1. típusú szereplő is így vélekedik, tehát kevert stratégia nem lehet egyensúly. Hasonlóan, ha $V_1(2) < V_1(3)$, akkor tiszta spekulatív az egyensúly. Következésképp kevert egyensúly csak akkor lehet, ha $V_1(2) = V_1(3)$. Ekkor viszont egyensúly is a kevert stratégia, mivel a mind a fundamentálisan, mind a spekulatíván játszóknak a legjobban választolnak.

5.5. Következmény: *Kevert egyensúly pontosan akkor alakul ki, ha az indukált \mathbf{p} eloszlás mellett $(c_{13} - c_{12}) = (p_{31} - p_{21})\beta u_1$.*

Felhasználva képleteinket \mathbf{p} -re, kapjuk, hogy

$$s_1 = \frac{\beta u_1 (\beta u_1 - 6(c_{13} - c_{12}))}{9(c_{13} - c_{12})^2}. \quad (5.15)$$

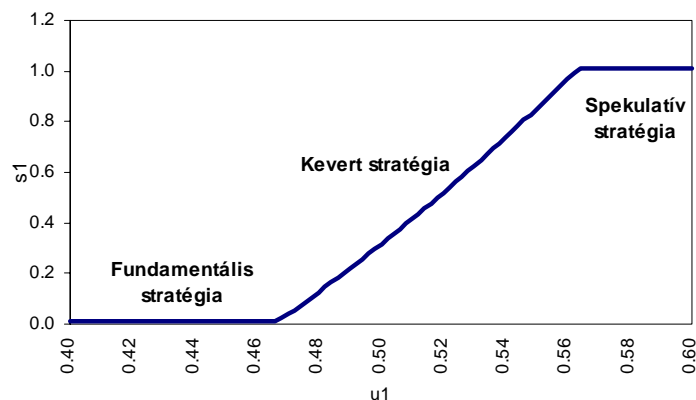
Persze szükséges, hogy $s_1 \in (0,1)$ legyen. Könnyen látható, hogy

$$s_1 < 0 \Leftrightarrow (c_{13} - c_{12}) > \frac{1}{6} \beta u_1, \text{ illetve } s_1 > 1 \Leftrightarrow (c_{13} - c_{12}) < \frac{\sqrt{2} - 1}{3} \beta u_1, \quad (5.16)$$

teljes összhangban az eddigiekkel. Összefoglalva: egyensúlyban az 1. típusú szereplők stratégiája:

$$s_1 = \begin{cases} 0 & \text{ha } (c_{13} - c_{12}) > \frac{1}{6} \beta u_1 \\ \frac{\beta u_1 (\beta u_1 - 6(c_{13} - c_{12}))}{9(c_{13} - c_{12})^2} & \text{ha } \frac{\sqrt{2}-1}{3} \beta u_1 < (c_{13} - c_{12}) < \frac{1}{6} \beta u_1 \\ 1 & \text{ha } (c_{13} - c_{12}) < \frac{\sqrt{2}-1}{3} \beta u_1 \end{cases} \quad (5.17)$$

A kevert stratégia folyamatos átmenetet jelent a fundamentális és a spekulatív stratégiák közt. Az 5.1. ábrán s_1 értékét rögzített c_{13} , c_{12} , β (pl. $c_{13} = 0.1$, $c_{12} = 0.03$, $\beta = 0.9$) mellett u_1 függvényében ábrázoljuk.



5.3. ábra: Átmenet a fundamentális és spekulatív stratégiák között

5.3. Szimulációs eredmények

A Kiyotaki–Wright modell publikálása után számos cikk jelent meg arról, hogy hogyan lehetne a kevert egyensúlyi helyzetet meghatározni, illetve a modellt kiterjeszteni, bonyolultabb esetekre alkalmazni. A kutatásban szinte mindenki alkalmazott szimulációs módszereket. Szimuláció esetén pedig természetesnek tűnt, hogy első lépésként reprodukálni lehessen a már meglévő analitikus eredményeket. Az egyik legjelentősebb publikáció egy évvel a Kiyotaki–Wright cikk megjelenése után bemutatta, hogy az általa használt mesterséges intelligenciával rendelkező gazdasági szereplők segítségével szimulációt alkalmazva is adódik a fundamentális egyensúlyi helyzet (Marimon et al [1990]). Az általuk használt tanítási mechanizmus az ún. *klasszifikáló rendszer* volt. A spekulatív egyensúlyt azonban nem sikerült egyértelműen reprodukálni, ugyanis a szimulációs modell – futtatási időtől függetlenül – hol spekulatív, hol fundamentális stratégiák választása mellett fejeződött be. Úgy tűnt, hogy a spekulatív viselkedést roppant nehezen és hosszú idő alatt képesek csak a mesterséges

intelligenciával rendelkező szereplők megtanulni, mivel a spekulatív viselkedés nagyon instabil. Emiatt a kilencvenes évek elején eleve kudarcra volt ítélve az az elhatározás, hogy az analitikusan még meg nem határozott kevert stratégiákat szimulációs modell segítségével lehessen megadni.

1993-ban Kehoenek és az eredeti modell szerzőtársainak sikerült analitikusan meghatározni a kevert egyensúlyi megoldást (Kehoe et al [1993]). Ennek ellenére továbbra is fontos maradt az analitikus eszközök mellett a szimuláció alkalmazása. 1999-ben a Marimon-féle modell kis módosításával (, de pontosan ugyanazt a klasszifikáló rendszer mechanizmust követő intelligens szereplőkkel) sikerült nagy mértékben javítani a spekulatív egyensúlyi stratégia elérésének valószínűségét (Basci [1999]). Az 1000 periódus hosszúságú szimulációs futtatások közül az esetek 89%-ban sikerült a spekulatív egyensúlyi helyzetet visszakapni. A tanulási algoritmust megváltoztatva, *tiszta genetikus algoritmust* alkalmazva Staudinger [1998] hasonlóan jó eredményeket kapott, sőt bizonyos paraméterek mellett minden futtatása eljutott a spekulatív egyensúlyba 5000 iterációs lépés alatt.

A spekulációs magatartás megtanulása tehát hosszú időt és kellően sok résztvevőt igényel. Ugyanakkor Duffy [2001] megkísérli valóságos szereplőkkel, laboratóriumi körülmények között reprodukálni a fundamentális és spekulatív egyensúlyt. Amíg az előző egyensúly ebben az esetben is könnyen adódik, addig a spekulatív egyensúly valós szereplők esetében is gondot okoz. Ráadásul a laboratóriumi körülményeket figyelembe véve sem a nagy szereplőszámra, sem pedig a hosszú tanulási időszakra nincs lehetőség. Duffy ekkor szimulációs módszerekkel³ olyan egyszerűsítő feltételeket és paramétereket keresett, amelyek segítségével a mesterséges intelligenciával rendelkező számítógépes szereplők rövidebb idő alatt voltak képesek megtalálni a spekulatív stratégiát. Ezeket a feltételeket aztán a laboratóriumi kísérletekben alkalmazva a valós szereplők is hamarabb jutottak el a spekulatív egyensúlyba.

A Kiyotaki-Wright modell tanulmányozása során elkészítettük mind a Marimon et al [1990], mind a Staudinger [1998] által javasolt tanulási módszereket, illetve elkértük a szerzőtől a Duffy [2001] publikációban használt szimulációs programot, és reprodukáltuk a szerzők által adott eredményeket. A kevert egyensúlyi megoldások előállítására terén ezekkel az algoritmusokkal nem jártunk sikerrel, ezért két új módszerrel bővítettük a mesterséges ügynökök tanulásának eszköztárát. Az első módszer egy döntési fa algoritmus segítségével (Benedek-Megyeri [2000], Megyeri [2001]), a második pedig a megerősítéses tanulás segítségével (Sarlós [2001]) éri el, hogy a szereplők az optimális stratégia felé módosítsák viselkedésüket. Mindkét modell képes volt arra, hogy a spekulációs egyensúly eredményeit reprodukálja, így felmerült annak a

³ Duffy szintén a Marimon-féle klasszifikáló rendszert használja.

lehetősége, hogy a kevert egyensúlyi megoldás is meghatározható a segítségével. Ez végül az utóbbi szimuláció Duffy által javasolt módosításával sikerült, így elsőként állítottunk elő olyan szimulációt, amely tetszőleges paraméterek mellett képes a kevert eloszlás eredményeit reprodukálni.

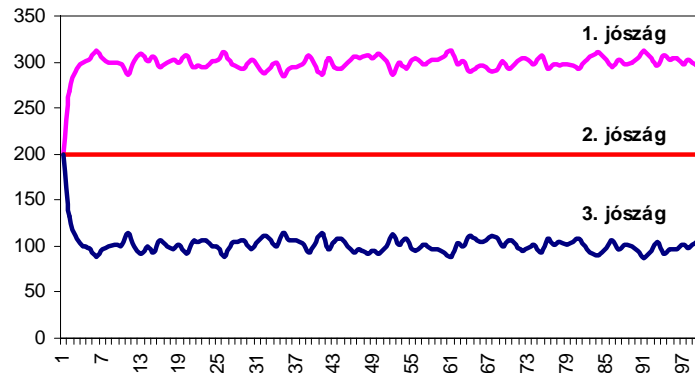
Szimuláció. Ahhoz, hogy a Kiyotaki-Wright modellt szimulációs módszerekkel vizsgálhassuk, számos változtatást kell azon tennünk. Ezek a módosítások azonban nem befolyásol(hat)ják a modell minőségi tulajdonságait és a szimulációs és analitikus eredmények megegyeznek. Az eredeti modell végtelen sok örökéletű szereplővel végtelen hosszú ideig működik. A szimulációs modell esetében a szereplők száma véges, viszonylag kisszámú (60-150), de vizsgáltuk az igen nagy létszámú (3000) variációkat is. Az időhorizont általában 1000 periódus hosszúságú, de találkoztunk ennél rövidebb (Duffy, [2001]) és hosszabb (Staudinger, [1998]) szimulációkkal is. A szimulációs modellek esetében a paramétereket is konkrétan meg kell határozni, erre mutatunk néhány példát az 5.1. táblázatban. A legtöbb esetben a paraméterek minden szereplőre azonosak, ezért a raktározási költségek szereplőindexét a továbbiakban mellőzzük.

Forrás	c_1	c_2	c_3	u_i	β	Egyensúly
Marimon et al [1990]	0.1	1	20	100	1.0	Fundamentális
Marimon et al [1990]	0.1	1	20	500	1.0	Spekulatív
Duffy [2001]	0.01	0.04	0.09	1	0.9	Spekulatív
Benedek-Megyeri [2000]	0.01	0.03	0.10	0.40	0.99	Fundamentális
Benedek-Megyeri [2000]	0.01	0.08	0.10	0.40	0.99	Spekulatív
Sarlós [2001]	0.01	0.03	0.10	.	0.9	Kevert

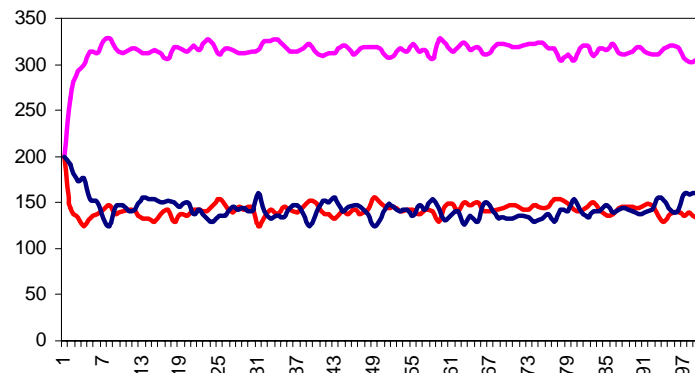
5.1. táblázat: Szimulációs modellek paraméterei

A szimulációs modellek alkalmazása esetén maga a lejátás nem túlságosan bonyolult folyamat. Először generálni kell a virtuális szereplőket és el kell látni őket a nekik megfelelő endogén paraméterekkel és döntési szabályokkal. Az endogén paraméterek jelölik azt, hogy az illető milyen jószágot fogyaszt, milyen jószágot termel és milyen indulókészletekkel rendelkezik. Szabályokon pedig azt értjük, hogy adott szituációban hogyan fog viselkedni (adott jószágot elfogyasztja-e, illetve adott jószágot egy másik felkínált jószágért hajlandó-e elcserélni). Második lépés a véletlen találkozások „megszervezése”, amelyre a 2.5 fejezetben mutattunk hatékony eljárást. Ezután lezajlanak a cserék, illetve ezt követően a fogyasztások és termelések. A találkozás-csere-fogyasztás-termelés sorozat addig folytatódik, amekkorára a szimulációs időszakot választottuk. Végül kiértékeljük az eredményeket. Az 5.4. és 5.5. ábrákon bemutatjuk, hogy hogyan éri el az egyensúlyi állapotot (, illetve mennyire ingadozik az egyensúlyi állapot körül) egy 600 szereplőből álló szimulációs modell abban az esetben, ha a szereplők a saját maguk által termelt jószággal, mint indulókészlettel rendelkeznek, és csak a fundamentális, illetve csak a spekulatív stratégiát játszhatják. Figyeljük meg,

hogy ebben az esetben mennyire gyors a konvergencia (5-7. periódus), illetve a jószágmennyiségek és az (5.13) és (5.14) valószínűségek mennyire összezsengenek. (Ld.: 5.4. és 5.5. ábra.)



5.4. ábra: Termékeloszlás fundamentális egyensúlyban



5.5. ábra: Termékeloszlás spekulatív egyensúlyban

Az indulókészletek változtatása nem indukált változást az egyensúlyi értékek kialakulásában, sem a konvergencia sebességében. Az egyensúly körüli rezgéseket az okozza, hogy a véletlen találkozások során számos találkozási kombináció elképzelhető. A szereplők (és ennek megfelelően a termékek) számának növelésével ennek a rezgésnek a súlya jelentéktelenné válik. Ezekből az egyszerű szimulációkból két érdekes megfigyelést tettünk. Egyrészt megfigyeltük, hogy a spekulatív egyensúlyhoz is ugyanolyan gyorsan konvergál a modell, mint a fundamentálishoz. Ugyanakkor a spekulatív egyensúlyi stratégiákat a szereplők jóval nehezebben képesek megtanulni. Ebből az következik, hogy nem a konvergencia lassúsága nehezíti a tanuló algoritmusok dolgát. A másik megfigyelés az, hogy fundamentális egyensúlyban a 2. jószág

mennyisége állandó, azaz nem hat rá a találkozások véletlenszerűsége. A megfigyelés hatására megfogalmaztunk egy sejtést, amit eddig még nem sikerült bizonyítanunk.

5.1. Sejtés. *Fundamentális stratégiák esetén a második jöszágból tartott mennyiség minden periódusban független a találkozási hierarchiától és valószínűségektől. Szintjét az induló készletek határozzák meg.*

A szimulációs modellezés nehézségét a gazdasági szereplők tanítása jelenti. Az eddigi futtatások során ugyanis feltettük, hogy már minden játékos a számára optimális – fundamentális vagy spekulatív – stratégiát alkalmazza, illetve a számára hasznossággal bíró egyetlen terméket fogyasztja. A tanulás azt jelenti, hogy a szereplők képesek egy teljesen véletlen fogyasztási és cserélési szabályrendszerből kiindulva – a különböző hasznosságot eredményező cserék és fogyasztások hatására – egy optimális szabályrendszerhez eljutni. A tanulás azért nehéz, mert egy-egy szabály megváltoztatásának hatása nem azonnal, hanem csak néhány periódust követően mutatkozik meg. A gyakorlatban két módszert alkalmazhatunk a tanítás megvalósítására. Az egyik lehetőség, hogy elvégzünk egy meghatározott hosszúságú szimulációt anélkül, hogy bármelyik szereplő kezdeti stratégiáját módosítottuk volna. Ezután kiértékeljük a szereplők hasznosságát, és valamilyen módon összefüggéseket próbálunk keresni a teljesítmény és az alkalmazott szabályok között. A szereplőknek ezután lehetőségük van magatartási szabályaik módosítására, és a következő futtatásnál már ezt alkalmazhatják. Ezt a módszert *szakaszos tanulási eljárásnak* nevezzük a továbbiakban. A *folyamatos tanulási eljárás* esetén egyetlen – hosszú – futtatást hajtunk végre, de a szereplőknek bármikor lehetőségük van a szabályok módosítására. Felmerül azonban a probléma, hogy véges hosszú futtatások hogyan egyeztetethetők össze a végtelen sokáig tartó elméleti modellel. Elképzelhető módszer az, hogy minden periódus β valószínűséggel folytatódik, és ezzel egyidejűleg megoldottuk a diszkontfaktor kezelésének problémáját is. Ebben az esetben rövid futtatásokra számíthatunk, például $\beta = 0.9$ esetén átlagosan 10 periódusból fog állni egy futtatás. Ez tehát a szakaszos tanításnak kedvez és sokan használják ezt a módszert. A gond az, hogy az utolsó periódusnál birtokba kerülő jöszág (fogyasztás után) nulla hasznossággal kerül be az értékelésbe. Ez nem jelent nehézséget akkor, ha 1000 periódusból az utolsó kimarad, de probléma lehet akkor, amikor csak 10 volt. A spekulatív egyensúly megtanulásánál különösen nagy gondot jelent ez, és a korábbi szimulációs modellek ezért tudnak csak olyan gyengén teljesíteni.

A továbbiakban részletesen bemutatjuk a szakirodalomban alkalmazott és saját módszereinket:

- klasszifikáló rendszer (Marimon et al [1990], Duffy, [2001]),
- tiszta genetikai algoritmus (Staudinger [1998]),
- döntési fa algoritmus (Benedek-Megyeri [2000]),
- megerősítéssel tanulás (Sarlós [2001]).

Klasszifikáló rendszer. A modell szereplőinek tanítására alkalmazott klasszifikáció rendszer két alrendszerből áll, a cserélési viselkedést tanító és a fogyasztási viselkedést tanító rendszerből. Első lépésként a cserét meghatározó klasszifikáció rendszer minden egyes szereplő esetén input adatokat kap a csere előtti állapotról. Ennek segítségével a rendszer meghatározza a cserére vonatkozó döntést. Az összes szereplő cseredöntésének meghatározása után megtörténnek a tranzakciók és sor kerül a második klasszifikáció rendszer alkalmazására. Input adat a csere utáni állapot, amely segítségével a rendszer meghatározza a fogyasztási döntést. A két rendszer mindig egymást követően lép akcióba, de a visszacsatolás szempontjából közösen kell jutalmazni, illetve büntetni a két alrendszer döntéseit.

Egy általános klasszifikáló rendszer a következő objektumokból áll:

1. *Azonosítók:* hármas számrendszerű sorozatok (*sztringek*) halmaza. A hármas számrendszer elemeinek jelölésére a 0, 1 és # szimbólumokat használjuk.
2. *Dekódoló rendszer:* leképzés, amely megteremti a kapcsolatot az azonosítók és a szereplők lehetséges állapotai és döntései között. Az azonosító első része a szereplő állapotára vonatkozik, a második része pedig egy meghatározott, általa megvalósítható cselekvésre. Így egy azonosító önmagában nem más, mint egy szereplő lehetséges (állapot, cselekvés) párja. Egyetlen állapotot több azonosító is reprezentálhat.
3. *Súlyok:* minden időpontban, minden egyes szereplő, minden azonosítója rendelkezik egy súlyértékkel.
4. *Állapotazonosító rendszer:* képes lefordítani az input adatokat az azonosító által alkalmazott kódra, és kiválasztja az összes olyan azonosítót, ahol az állapotok megfelelnek az inputnak. Itt még több azonosító is szerepelhet, különböző cselekvéskóddal.
5. *Árverező rendszer:* az állapotazonosító rendszer által kiválasztott azonosítók közül a súlyokat felhasználva határoz meg egyet. A meghatározás lehet determinisztikus (legnagyobb súly győz), vagy sztochasztikus (súlyoknak megfelelő valószínűséggel győz).
6. *Könyvelő rendszer:* az állapotokhoz tartozó súlyok frissítése, annak alapján, hogy az azonosító által javasolt döntés mekkora hasznosságot hozott.
7. *Genetikus algoritmus:* felelős új azonosítók beviteléért és régiék megszüntetéséért. Elvileg lehetőség van az összes lehetséges azonosító szerepeltetésére, amit teljes leszámplálásnak nevezünk. Ekkor nincs szükség a genetikus algoritmusra.

Nézzük a Kiyotaki–Wright modellben alkalmazott klasszifikáló rendszert. A jószágok kódolása a következő módon történik:

Kód			Jelentés
1	0	0	1. jászág
0	1	0	2. jászág
0	0	1	3. jászág
0	#	#	Nem az 1. jászág
#	0	#	Nem a 2. jászág
#	#	0	Nem a 3. jászág

5.2. táblázat: Dekódoló rendszer

Az állapotok azonosításánál az 1 érték a jászág meglétét, a 0 a nemlétét, a # pedig indifferens voltát jelenti. A cselekvések azonosítása esetén a csere klasszifikáció alrendszer esetén az 1 a csere akarását, a 0 a csere tagadását jelenti, míg a fogyasztási alrendszerben az 1 a jászág fogyasztását, a 0 a jászág tárolását jelenti. Vizsgáljuk először a csere alrendszert. Néhány lehetséges azonosítót mutatunk az 5.3. táblázatban.

Saját jászág			Cserepartner jászága			Csere döntés
1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	#	#	0	0

5.3. táblázat: Csere alrendszer

Az első azonosító azt jelenti, hogy a szereplő, aki egy 1. típusú jászággal rendelkezik, találkozik egy olyan szereplővel, akinél a 3. típusú jászág van, az kezdeményezzen cserét. A második azonosító pedig a csere visszautasítását jelenti akkor, ha az 1. jászágért a cserepartner nem a 3. jászágot kínálja fel. A csere klasszifikáció alrendszer minden a szereplőre egy ehhez hasonló listát ad. Az összes elképzelhető azonosító száma $3^3 \cdot 3^3 \cdot 2 = 1458$. Az azonosítók nagy része azonban redundáns, könnyű belátni, hogy $6 \cdot 6 \cdot 2 = 72$ azonosító elegendő. Ha a szűkebb számú azonosító-halmazzal dolgozunk, akkor lehetőség van az összes halmaz szerepeltetésére, azaz végezhetünk teljes leszámítást. Ha minden lehetséges azonosítónak szeretnénk megadni az esélyt, akkor a klasszifikáció rendszert ki kell egészíteni a 7. pontnak megfelelő genetikussal algoritlussal.

Jelöljük az azonosítók halmazát e -vel, ahol $e \in \{1, 2, \dots, E_a\}$. Ekkor a rendszerhez tartozó súlyok jelölése $S_e^a(t)$. A súlyok feltöltése kezdetben véletlen vagy determinisztikus lehet (pl. minden súly 1). A súlyok újraszámításáért a könyvelési rendszer a felelős.

A fogyasztási alrendszer lehetséges azonosítóit mutatja az 5.4. táblázat. Az első azonosító azt jelenti, hogy a szereplő 1. típusú jászág csere utáni birtoklása esetén azt fogyassza el. A második azonosító a termék tartalékolását írja elő akkor, ha az nem a 3.

jószág. A lehetséges variációk száma most $3^3 \cdot 2 = 54$, a relevánsak száma 12. Az azonosítók jelölésére az előzőekkel teljesen összhangban a $c \in \{1, 2, \dots, C_a\}$ változót vezetjük be, a súlyokhoz pedig az $S^a_c(t)$ -t.

Saját jószág			Fogyasztási döntés
1	0	0	1
#	#	0	0

5.4. táblázat: Fogyasztás alrendszer

A könyvelési rendszer ismertetésére nem térünk ki, de az részletesen megtalálható Marimon et al, [1990] cikkében. Nézzük ugyanennek a cikknek az eredményeit!

Kezdjük a fundamentális egyensúllyal (paramétereket ld. az 5.1. táblázatban). Ebben az esetben az elméleti jószágeloszlási valószínűség az (5.13), az ehhez tartozó csereszabályok pedig az 5.1. ábrában láthatóak. A szimulációs modell nagyon hamar (már az 500. periódusban) konvergált ehhez az eredményhez (5.18), és nem is tért el attól a későbbi periódusok során sem.

$$\bar{p}_{500} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{0.502}{3} & 0 & \frac{0.498}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Vizsgáljuk meg a legmagasabb súlyértéket kapott azonosítókat is az 500. periódus végén (5.5. táblázat). Azt tapasztaljuk, hogy minden szereplő megtanulta a számára hasznos hozó egyetlen termék fogyasztását és a fundamentális egyensúlyhoz tartozó cseréket. Megjegyezzük, hogy ezt az eredményt akkor kaptuk, amikor a teljes leszámolás módszerét alkalmaztuk. Genetikus algoritmus esetén a konvergencia valamivel lassabb, a 2000. periódus után kezd beállni az egyensúly. Mindez azt igazolja, hogy a klasszifikáció rendszer tanítás jól működik fundamentális egyensúly esetén.

I. szereplő csere klasszifikáció rendszere							$S^a_e(t)$
0	#	#	1	0	0	1	11.22
0	#	#	0	1	0	0	-0.08
#	#	0	0	0	1	0	-0.08
I. szereplő fogyasztási klasszifikáció rendszere							$S^a_c(t)$
1		0		0		1	45.80
#		#		0		0	-0.47
0		#		#		1	-9.16
II. szereplő csere klasszifikáció rendszere							$S^a_e(t)$
0	#	#	0	1	0	1	12.72
#	#	0	#	#	0	1	4.86
#	#	0	#	0	#	0	0.02
II. szereplő fogyasztási klasszifikáció rendszere							$S^a_c(t)$
0		1		0		1	49.04
1		0		0		0	0.01
#		0		#		0	-10.90
III. szereplő csere klasszifikáció rendszere							$S^a_e(t)$
#	0	#	0	0	1	1	7.78
#	0	#	0	1	0	0	-0.01
#	0	#	#	0	#	1	-0.01
III. szereplő fogyasztási klasszifikáció rendszere							$S^a_c(t)$
0		0		1		1	31.62
#		#		0		0	-0.41
#		0		#		0	-0.02

5.5. táblázat: Fundamentális egyensúly

Vizsgáljuk most a spekulatív egyensúlyt! Az jószágeloszlás elméleti értéke (5.14)-ben szerepel, a megfelelő cserehajlandóságok pedig az 5.2. ábrán láthatók. Az alkalmazott klasszifikációs rendszer azonban nem volt képes elhagyni a fundamentális egyensúlyi értékeket (5.19), és még a 2000. periódus után sem mutatott semmilyen reményt arra, hogy az (5.14)-nek megfelelő spekulatív egyensúlyba érkezen. Marimon et al [1990] cikkének eredményeit reprodukáltuk és arra a megállapításra jutottunk, hogy a klasszifikáció rendszer azért nem képes a spekulatív egyensúly elérésére, mert a modell egy rendkívül fontos elemét, a diszkontrátát egyáltalán nem vették figyelembe a

könyvelési rendszer kialakításakor. Márpedig ha a diszkontráta alacsony, akkor az 5.1. táblázat spekulatív egyensúlyi paramétereit mellett is fundamentális stratégia adódik.

$$\bar{P}_{2000} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{0.466}{3} & 0 & \frac{0.534}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

A Marimon et al [1990] féle klasszifikáló rendszert sikeresen alkalmazta Duffy [2001] a spekulatív egyensúly megtalálására. Duffy kikerülte a könyvelési rendszer problémáját azzal, hogy szakaszos tanítási eljárást alkalmazott, mégpedig úgy, hogy a rövid futtatások periódus-számát sztochasztikusan alakította. Minden periódust követően $1-\beta$ valószínűséggel befejeződik, és β valószínűséggel folytatódik a játék. A könyvelési rendszer a teljes rövid futtatás alatt generálódott hasznosságot (azonos mértékben súlyozva) felhasználhatja, ugyanakkor a β diszkontrátának megfelelő Kiyotaki-Wright modellt adódik. Duffy viszonylag jó eredményeket kap (5.20), és további módosításokat is végez a konvergencia sebességének és a biztos spekulatív stratégia megtanulásának érdekében, de még így sem tudja garantálni az egyensúly elérését. Ennek az az oka, hogy a β valószínűséggel folytatódó játékok periódus-hossza nagyon rövid ($\beta = 0.9$ esetén átlagosan 10). Így az utolsó periódusban a szereplőnél maradó jószág hasznossága és költsége igen nagy arányt képvisel a teljes hasznosságból. Ugyanakkor a spekulatív stratégia pontosan attól spekulatív, hogy érdemes a magas raktározási költségű terméket tartani, mivel várhatóan annak jobb a piaci kilátásai. Annak az esélye, hogy egy III. típusú szereplővel találkozzon (aki hajlandó elfogadni a 3. jószágot) csak $\frac{1}{3}$. Így nem csoda, hogy a tanulás során nehezen derül ki, hogy a spekulatív a legjobb stratégia.

$$\bar{P}_{100} = \begin{bmatrix} 0 & 0.30 & 0.04 \\ 0.15 & 0 & 0.18 \\ 0.32 & 0.01 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

A klasszifikáció rendszer alkalmazásának tapasztalatai arra a következtetésre vezettek, hogy ez a tanulási módszer nem alkalmas a kevert stratégiák meghatározására. A továbbiakban ezért más módszerekkel kell próbálkozni. Ennek ellenére nagyon fontos lépés volt a klasszifikáció rendszer tanulmányozása. Egyrészt azért, mert a Kiyotaki-Wright modell kiterjesztésének tanulmányozása során kapott eredményeink összevethetőek lesznek a Marimon et al [1990] cikk hasonló eredményeivel. Másrészt a

további tanító modellek kódolása majdnem megegyezik a klasszifikáció rendszer azonosítóival.

Genetikus algoritmus. A tiszta genetikus algoritmus alkalmazása kézenfekvőnek tűnik, hiszen minden olyan feltétel, amelyről a 3. fejezet szólt adott. Elvileg elképzelhető a szakaszos tanulás megvalósítása is, de mivel a klasszifikáció rendszer esetében negatív tapasztalataink voltak, ezért a folyamatos tanulást választottuk. A tanulási algoritmust pontosan a 3. fejezetben foglaltak alapján építettük fel, ezért csak az alábbiakról beszélünk röviden:

- Reprezentáció
- Kezdeti populáció
- Genetikus műveletek
- Túlélési valószínűségek
- Leállási kritérium

A reprezentáció csak bináris (0; 1) szabályokat tartalmaz, mégpedig úgy, hogy az 1-es értéke igenleges, a 0 értéke pedig nemleges válaszreakciót eredményez.

1→1	1→2	1→3	2→1	2→2	2→3	3→1	3→2	3→3	I	II	III
0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0

5.6. táblázat: A genetikus algoritmus reprezentációja

Az 5.6. táblázat két szereplő egy-egy lehetséges magatartását reprezentálja. Az első egy olyan viselkedés, amely hajlandó egy 1. típusú jószágot egy 2. típusúra, illetve egy 3. típusú jószágot egy 1. vagy egy 2. típusú jószágra cserélni. Fogyasztani csak a 2. típusú jószágot fogja. A második viselkedés redundáns, amennyiben csak abban különbözik az előzőtől, hogy lehetőséget biztosít az azonos típusú jószágok cseréjének, ami nem változtat érdemben a megoldáson.⁴

A kezdeti populáció abból áll, hogy minden szereplőhöz rendelünk egy viselkedési szabályt. Ezt a szabályt véletlenszerűen töltjük fel 0-kal és 1-esekkel. A genetikus műveletek közül mind a keresztezést (egy ponton, 3.9. ábra), mind a mutációt (3.13. ábra), mind pedig az invertálást (3.14. ábra) alkalmaztuk. Figyeljük meg, hogy a klasszifikáció rendszerrel ellentétben itt egy szereplőhöz csak egyetlen szabály tartozik, ugyanakkor egy új szabály bekerülésével egy új szereplő kerül a rendszerbe, egy szabály

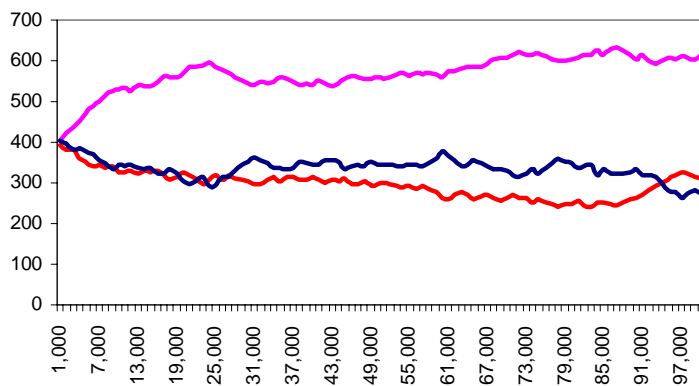
⁴ A későbbiekben a konvergencia gyorsítása érdekében kiszedtük a közömbös elemeket, de a kezdetben kíváncsiak voltunk arra, hogy vajon a genetikus algoritmus felfedezi-e az közömbös elemekkel bővített sémát.

elavulása pedig egy szereplő kikerülését jelenti. Ettől függetlenül a szereplők számát mindvégig azonosnak kell tartani, ezért a genetikus műveletek mindig szereplő típuson belül értendők (pl. keresztezés esetén mindkét szülő azonos típusú kell, hogy legyen, és ugyanilyen típusúak lesznek a születendő utódok is).

Legnehezebb feladat a túlélési valószínűségek meghatározása. Itt ugyanazzal a problémával állunk szemben, mint a klasszifikáló rendszer esetében. Végül úgy döntöttünk, hogy az összes hasznot és költséget diszkontáltan adjuk össze mindaddig, amíg a szereplő él. Az újonnan bekerülő szereplők pedig indulóértéknek az azonos típusú szereplők átlagos túlélési valószínűségeit kapják. Ez az egyetlen olyan lépés, amely lényegesen különbözik a szakirodalomban használtaktól (Marimon et al [1990]).

Leállási kritériumnak fix periódusszámot választottunk.

A Staudinger [1998] által alkalmazott tiszta genetikus algoritmus jól teljesített, és amennyiben elég erős volt a spekulatív egyensúlyhoz való tartozás motivációja ($c_3 - c_2$ relatív kicsi), akkor a tanulási folyamat végül a spekulatív egyensúlyi állapotba konvergál. Ehhez azonban egy 150 fős (típusonként 50) populációnak kell 5000 generáción (perióduson) keresztül működni.



5.6. ábra: Tiszta genetikus algoritmus spekulatív egyensúlyban

Az általunk készített algoritmus kiállta a próbát, és képes volt mind a fundamentális, mind a spekulatív, mind pedig a kevert egyensúly meghatározására. Sajnos azonban kis populációszám esetén rendkívül érzékeny volt az indulóértékekre, ezért 1200 fős populációt alkalmaztunk. Még így is szükség volt néha 100 000 perióduson keresztül futtatni a tanulást ahhoz, hogy az egyensúlyi helyzet stabilan előálljon. (Az 5.6. ábrán láthatjuk a spekulatív stratégiához történő konvergálást). Egy ilyen szimuláció egyetlen paraméter beállítás esetén is több napi futási időt igényel. Ez azt jelenti, hogy sikerült ugyan egy olyan eljárást találni, amely képes az egyensúly meghatározására, de

számítási költsége nagyon magas, ezért nem alkalmazható a kevert stratégiák átmeneti függvényének meghatározására (ld.: 5.3. ábra), sem pedig egy lényegesen megnövelt paraméterű modellkiterjesztésre.

Döntési fa. Az előző két tanítási módszer tapasztalatain okulva olyan eljárást szerettünk volna találni, amelyik szakaszos módon tanul, de ezek a diszkrét időszakok relatíve hosszúak, hogy ne jelentsen problémát az utolsó periódusban raktáron maradó jószág hasznosságának kihagyása. Ugyanakkor ha hosszúak az ilyen ciklusok, akkor nem lehet több ezer generáción keresztül tanítani, valami olyan módszer kell, ami hamar eljut az optimumba. Ehhez az adatabányászat egyik igen gyakran alkalmazott módszerét, a döntési fa algoritmust használtuk. A *döntési fa* egy olyan eljárás, amely képes több magyarázó és egyetlen eredményváltozó közti kapcsolatot *ha-akkor* típusú szabályokkal megadni. Feltétele, hogy az eredményváltozó kategóriaváltozó legyen, és leginkább akkor képes a jó modellalkotásra, ha minden változója bináris. Az általunk alkalmazott döntési fa esetében pontosan ez a helyzet. A döntési fa tanulása nagyon hasonlít a 3. fejezetben bemutatott neurális hálózathoz, ugyanúgy egy tanító adatabázis segítségével alakul ki a végleges fastruktúra. (A döntési fáról részletesen Russel és Norvig [2000] könyvében olvashatunk.) Az általunk használt eljárás a következő lépésekből állt:

- Szabályok megadása
- Modellfuttatás (hosszú időtáv)
- Eredménykiértékelés (kategorizálás)
- Szabálygenerálás (döntési fa)

A szereplők magatartásformájának leírására pontosan ugyanazt a reprezentációt használtuk, mint amit a genetikus algoritmus esetében (ld.: 5.6. táblázat). Nevezzük ezt a reprezentációt r_a -nak. A modellben típusonként 200 gazdasági szereplőt használtunk. Az első lépésben mindegyik szereplő szabályát véletlen módon határoztuk meg. Ezután futtattuk a szimulációt úgy, hogy közben a szereplők nem változtathatták kiinduláskor megkapott szabályaikat. A futásidő 1000 periódus volt. A szimuláció végére minden szereplő elér egy végső „profitot”, amely a periódusokon keresztüli fogyasztások hasznosságából és a kifizetett raktározási költségekből származik, természetesen diszkontáltan összegezve: Π_a . Ez azt jelenti, hogy mindegyik szabályhoz egyértelműen tartozik egy profitérték: $r_a \rightarrow \Pi_a$. A döntési fának azonban kategória típusú eredményváltozóra van szüksége, úgyhogy a profitokat valamilyen módon ketté kell választani. Ezt a szétválasztást az összes azonos típusú szereplő profiteloszlásának vizsgálata alapján *kézzel* végeztük, azaz az eloszlás grafikonját elemezve minden típushoz meghatároztunk egy kritikus profitértéket, amely felett a profit a *magas* ($\Pi'_a = 1$), alatta pedig az *alacsony* ($\Pi'_a = 0$) kategóriába esik. A szabály-hozzárendelés továbbra is egyértelmű.

típus	1→2	1→3	2→1	2→3	3→1	3→2	I	II	III	Profit
1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
2	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0

5.7. táblázat: A döntési fa tanuló adatbázisa

Így a futtatás és elemzés után összeállt egy olyan adatbázis (ld.: 5.7. táblázat), amely minden egyes szereplőre megmondja a szereplő típusát, az általa alkalmazott szabályt és a szereplő relatív sikerességét (magas vagy alacsony profit). Ezután már a döntési fa feladata az, hogy megtalálja azokat a szempontokat, amelyek a magas profithoz vezetnek.⁵ Egy tipikus döntési fa eredményt mutatunk az 5.7. ábrán, amely a következőt jelenti. Ha egy I. típusú szereplő szabálya azt jelöli ki a szereplő számára, hogy az 1. jószágot fogyassza, ugyanakkor a 2. jószágot ne fogyassza, annak a profitja várhatóan magas lesz. Ez a szabály nem biztos szabály, de a múlt adatai alapján az ide kerülő esetek 93%-ára a magas profit volt a jellemző. Az adatbázisban ennek a kritériumnak eleget tevő szereplő 35 db volt. Ha azonban egy I. típusú szereplő fogyasztja ugyan az 1. jószágot, de mellette a 2. jószágot is, akkor valószínűleg (57%) alacsony lesz a profitja. Ha pedig egyáltalán nem fogyasztja az 1. jószágot, akkor nagy valószínűséggel (95%) alacsony lesz a profitja.

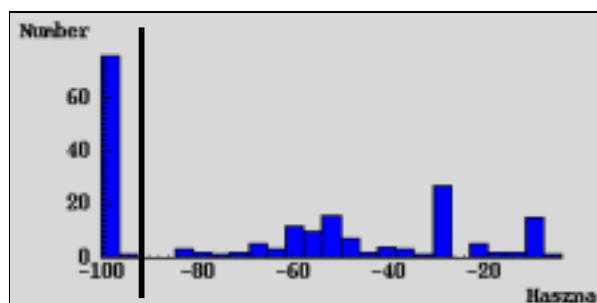
- Ha *típus* = 1 és ...
 - I = 1 és ...
 - II = 0 akkor *Profit* = 1 (35, 93%)
 - II = 1 akkor *Profit* = 0 (41, 57%)
 - I = 0 akkor *Profit* = 0 (124, 95%)
- Ha *típus* = 2 és ...
- ...

5.7. ábra: Döntési fa részlet

A döntési fa kiértékelése abból áll, hogy minden szereplő típushoz meghatározzuk a sikerhez vezető legfontosabb szabályokat. Nem várhatjuk azt, hogy már az első kiértékeléskor az egyensúlyi stratégiákat megkapjuk, hiszen ekkor még nagyon sok lehetséges variáció közül kell válogatnunk. Szűkítsük le tehát a variációk számát a döntési fa szabályainak alkalmazásával! Ehhez indítanunk kell egy újabb szimulációt. Az induló szabályoknál azonban már nem csak a véletlen feltöltést alkalmazzuk.

⁵ Döntési fa eljárást nem fejlesztettünk ki, rendelkezésre állt azonban az SPSS Clementine 5.2 adatbányász szoftver, amely az elemzési adatbázis megadása után automatikus generálja az összefüggéseket biztosító döntési fát.

Azokban az esetekben, amelyekben a döntési fa sikeres stratégiát határozott meg, azt a döntési részt fixen tartjuk (a döntésnek megfelelően). A többi esetben ismét véletlen feltöltéssel határozzuk meg a szabályokat. A szimulációt újravégzük és újra kiértékeljük. A Kiyotaki–Wright modell esetén a fundamentális egyensúlyt már a második döntési fa, a spekulatív egyensúlyt pedig a harmadik döntési fa megtalálta. (Paramétereket ld. az 5.1. táblázatban, Benedek–Megyeri [1989].) A következő néhány ábra a fundamentális egyensúly megtalálását ábrázolja.



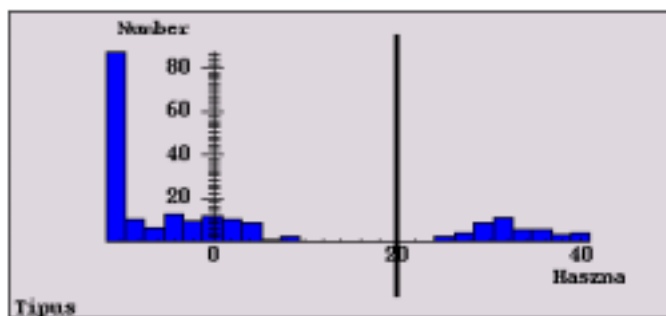
5.8. ábra: Profitok a véletlen feltöltés után

Az első futtatás utáni profitmegoszlást láthatjuk az I. szereplőtípus esetén. A kategorizáláshoz a -90 küszöbértéket választottuk. Ezután a döntési fa a következő szabályokat határozta meg (csak a pozitív szabályokat mutatjuk).

- Ha *típus* = 1 és ...
 - I = 1 és ...
 - $2 \rightarrow 1 = 1$ akkor *Profit* = 1 (29, 97%)
- Ha *típus* = 2 és ...
 - II = 1 és I = 0 és ...
 - $3 \rightarrow 1 = 1$ és
 - $1 \rightarrow 3 = 0$ akkor *Profit* = 1 (25, 96%)
- Ha *típus* = 3 és ...
 - III = 1 és ...
 - $1 \rightarrow 3 = 1$ akkor *Profit* = 1 (45, 93%)

5.9. ábra: Első döntési fa

Látható, hogy az első döntési fa által adott szabályok még nem elégségesek az egyensúlyi állapot eléréséhez. Ezekkel a fix szabályokkal azonban újra futtattuk a szimulációt.



5.10. ábra: Profitok az első döntési fa után

Látható, hogy az új szabályok bevezetésével a szereplők szignifikánsan jobban teljesítenek. Az új kategorizálás küszöbértéke 20. A kiértékelést követő döntési fa már pontosan a fundamentális egyensúly stratégiáit adja.

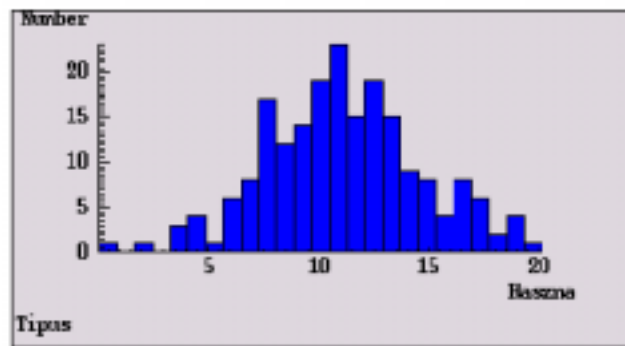
- Ha *típus* = 1 és ...
 - *I* = 1 és ...
 - 2→1 = 1 és ...
 - 2→3 = 0 akkor *Profit* = 1 (85, 97%)
- Ha *típus* = 2 és ...
 - *II* = 1 és *I* = 0 és ...
 - 3→1 = 1 és
 - 1→3 = 0 és
 - 1→2 = 1 és
 - 3→2 = 1 akkor *Profit* = 1 (73, 96%)
- Ha *típus* = 3 és ...
 - *III* = 1 és ...
 - 1→3 = 1
 - 1→2 = 0 akkor *Profit* = 1 (91, 99%)

5.11. ábra: Második döntési fa

A második döntési fa eredményeit természetesen megint visszahelyeztük a szimulációs modellbe. Így ismét kaptunk egy profiteloszlást (5.12. ábra), amelyet ismételten lehetett kategorizálni. Hogy biztosan egyensúlyi állapotba kerültünk, azt a döntési fa úgy jelezte, hogy nem tudott szignifikáns döntési szabályokat generálni az adathalmazra.

Összefoglalva, a döntési fa nagyon jó eredményeket adott. A legfontosabb különbség az előző tanítási módszerekkel szemben az, hogy az új módszer az összes szereplő tapasztalatát egyszerre próbálja meg felhasználni annak érdekében, hogy a legjobb

viselkedési szabályt meghatározza. Egy kialakult szabály azonban „beégetődik” a szereplők magatartásába, ez már nem tud onnan kikerülni. Ezért fontos, hogy csak a nagyon erős szabályok épüljenek be a következő futtatásokba. A döntési fa mind a fundamentális, mind a spekulatív esetekben sokkal gyorsabban és pontosabban adott eredményt, mint a korábbi tanítási modellek. Sajnos a módszer azonban a kevert eloszlás meghatározásához ebben a formában nem használható. Annyiban kellene módosítani a reprezentációt, hogy a magatartási változók ne csak diszkrét (0 és 1) értékeket vehessenek fel, hanem folytonosak legyenek az egységintervallumon. Ekkor például a $2 \rightarrow 1 = 0.5$ azt jelentené, hogy a 2. jószágot 50%-os valószínűséggel cserélje el a szereplő az 1. jószágra. Egyelőre ezt a kutatási ágat felfüggesztettük, ugyanis a tanulási eljárást (a döntési fa generálását) nem tudtuk automatizálni.⁶



5.12. ábra: Profitok a második döntési fa után

Megerősítéses tanulás. Az gazdasági szereplők döntési problémájának megoldására utolsóként a megerősítéses tanulás (*reinforcement learning*) módszereit alkalmaztuk. A megerősítéses tanulás erősen épít a dinamikus programozás elméletére: mindkettő *Markov-folyamatok* optimális szabályozását keresi. A megerősítéses tanulás központjában is V^S állapotértékelő függvény és becslése áll. Míg a dinamikus programozás a környezet dinamikájának ismeretében próbálja meg V^S értékeit és az optimális S stratégiát meghatározni, addig a megerősítéses tanulás a dinamika ismerete nélkül a sztochasztikus környezettel interakcióba lépve egyszerre próbálja meg V^S -t megbecsülni – részben korábbi becslésekre támaszkodva – és S -et az optimális stratégia felé közelíteni. Az alapötletet kifejező egyenlet V becslésére a következő. Legyen egy rögzített stratégia mellett $V(x)$ az állapotértékelő függvény becslése x állapotban. Ha az S stratégia szerint cselekszünk és a környezettel interakcióba lépve y állapotba kerülünk, akkor $V(x)$ értékét módosítani kell, mégpedig $V(x) + \alpha[r + \beta V(y) - V(x)]$ értékre, ahol r a kapott jutalom, $1 \geq \alpha > 0$ pedig a tanulás konvergencia-sebességét meghatározó

⁶ Az ehhez szükséges fejlesztések nagyon időigényesek, de ennek ellenére nem vetettük el teljesen ezt az irányt.

paraméter. Így $V(x) = E[r + \beta V(y)]$, ugyanis $r + \beta V(y)$ értéke elfogadható becslése a várhatóértéknek, mivel ha a számított érték a „helyes” $V(x)$ -től eltér, akkor módosítjuk a megfelelő irányába.

5.11. Definíció: A $V_i^S(j, k)$ állapotértékelő függvény azt jelenti, hogy egy i típusú szereplő S stratégia követése mellett várhatóan mekkora jövőbeni diszkontált hasznosságra számíthat, ha most éppen j jószággal rendelkezik és esetleges csere előtt áll, amikor is partnerének k jószága van.

Térjünk át a cselekedet kiválasztásának kérdésére.

5.12. Definíció: Jelöljük A akció választásának preferenciáját x állapotban $pref(x, A)$ függvénnyel.

A preferenciák alapján történő akció választásra egy lehetséges mód a *softmax* illetve a *hardmax* (csak a legjobbat) döntési szabály.

5.13. Definíció: A *softmax* döntési szabály Gibbs vagy Boltzmann eloszlás alapján (Sutton és Barto [1998]) a következő:

$$\Pr(x, A) = \frac{e^{pref(x, A)}}{\sum_B e^{pref(x, B)}}. \quad (5.21)$$

Azért nem használunk *hardmax* akció kiválasztást, mivel szükség van arra, hogy a szereplők tapasztaljanak is, felfedezzék a környezet és ne csak eddigi (esetleges) tudásuk alapján legjobb dolgot cselekedjék, megrekedve egy szuboptimális stratégiával.

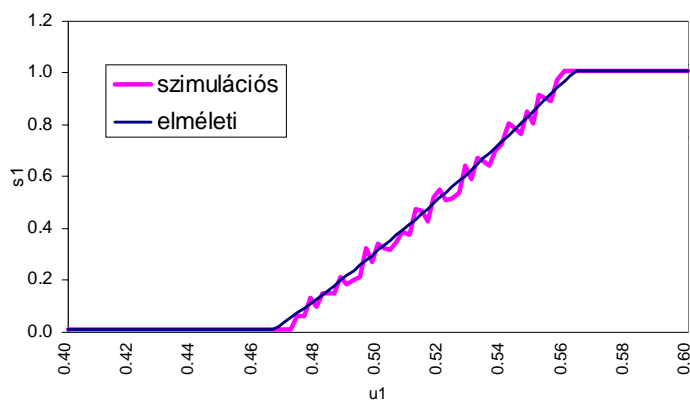
A kritikus rész a V állapotértékelő függvényt becsli a fenti módon, és ha az elért közvetlen jutalom, valamint állapot diszkontált értéke kedvezőbb a számítottnál, akkor növeli az akció preferenciáját, ellenkező esetben csökkenti. Azaz, ha A akciót választottuk x állapotban, akkor a tanulás folyamata a következővé egészül ki:

$$\begin{aligned} V_{ij}(x) &= V_{régi}(x) + \alpha(r + \beta V(y) - V(x)) \\ pref_{ij}(x, A) &= pref_{régi}(x, A) + \alpha(r + \beta V(y) - V(x)) \end{aligned} \quad (5.22)$$

Esetünkben tudjuk, hogy a stratégia független az állapottól. Jelölje $pref(j, k)$, hogy a szereplő mennyire kedveli azt a cserét, amikor ő ad j jószágot és k jószágot kap cserébe. Így ha a szereplőnél j , a partnerénél k jószág van, $pref(j, k)$ jelenti a felajánlás, $pref(k, j)$ az elutasítás preferenciáját.

A szimulációs megvalósításban a szereplők felfedező cselekedeteinek támogatására a szereplők ε valószínűséggel a preferenciák alapján választott akció ellentétét cselekszik. Feltételezzük, hogy egy meghatározott periódustól kezdődően nincs szükség további tanulásra, ezért attól a periódustól kezdve ε értékét exponenciálisan közelítjük a 0-hoz. Továbbá a jobb tanulás érdekében, nem csak a közvetlenül megelőző állapot és az utolsó akció preferencia értékét módosítják a tanuló szabályok, hanem az összesét.

A futtatásokhoz a Sarlós [1989] paramétereit (ld. 5.1. táblázat) használtuk. 300 szereplővel, 250 000 perióduson keresztül, $\varepsilon = 0.05$ értékkel, majd a 200 000. periódus után ezt exponenciálisan csökkentve végeztük a szimulációt. Az eredmények azt mutatták, hogy a megerősítéses tanulás módszerével sikerült a szereplőket megtanítani a fundamentális mellett mind a spekulatív, mind pedig a kevert egyensúlyi stratégiák alkalmazására is. Ennek illusztrálására megismételjük az 5.3. ábrát úgy, hogy most már az elméleti értékek mellett a szimulációs értékeket is szerepeltetjük. (Összesen 100 különböző $0.6 \geq u_1 > 0.4$ értékre végeztük el a szimulációt, s_1 értékét pedig az utolsó 1000 periódus átlagából nyertük.)



5.13. ábra: A megerősítéses tanulás eredményei

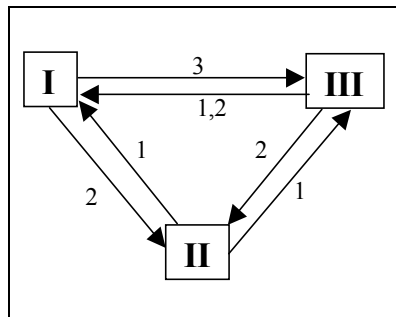
5.4. A Kiyotaki-Wright modell kiterjesztései

Úgy tűnik, az alkalmazott tanító eljárások képesek bonyolult egyensúlyi helyzetek meghatározására. Most számos olyan problémát vizsgálunk, amely eltér az eredeti modelltől. Távlati célunk az, hogy egy teljesen általános gazdaságban modellezni tudjuk a pénz, mint csereeszköz kialakulását. Ehhez azonban egyelőre csak a kezdeti lépéseket tudjuk megtenni, mert algoritmusaink még mindig nem elég gyorsak és pontosak ahhoz, hogy egy nagy gazdasági modellt vizsgálhassunk velük. A kibővített modellek vizsgálata azonban biztató jeleket mutat. Nézzük, hogy milyen módosításokat fogunk vizsgálni:

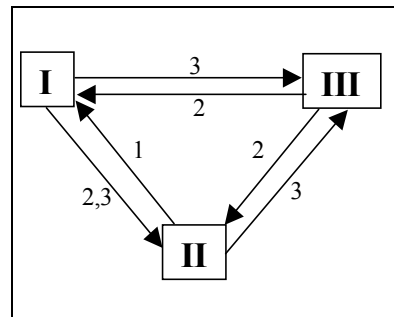
- „B” gazdaság
- Pénzzel kiegészített gazdaság
- 5-szereplős gazdaság

A modellek egy része megtalálható Marimon et al [1990] cikkben, innen vettük paramétereiket is. A megoldáshoz mind a négy tanítási algoritmust alkalmaztuk, a részletes ismertetésüktől eltekintünk, mivel az 5.3. alfejezet alapján könnyű reprodukálni.

B gazdaság. Ez a gazdaság csak annyiban tér el az A gazdaságtól, hogy a termelés (f) pontosan fordított irányú (ld.: 5.4. Definíció). Bármennyire szimmetrikusnak tűnik is ez a gazdaság az „A”-val, ebben két egyensúly létezik egyszerre, egy fundamentális (5.14. ábra) és egy spekulatív (5.15. ábra). A két egyensúlyi helyzethez tartozó termékeloszlásokat az (5.23) mutatja.



5.14. ábra: Fundamentális egyensúly



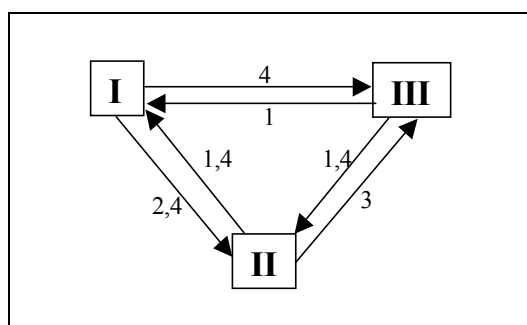
5.15. ábra: Spekulatív egyensúly

$$\mathbf{p}_{fund} = \begin{bmatrix} 0 & 0.098 & 0.236 \\ 0.333 & 0 & 0 \\ 0.195 & 0.138 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_{spek} = \begin{bmatrix} 0 & 0.195 & 0.138 \\ 0.236 & 0 & 0.098 \\ 0 & 0.333 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

A következő paraméterekkel számoltunk: $c_1 = 1$, $c_2 = 4$, $c_3 = 9$, $u_i = 100$ és $\beta = 0.99$. Marimon et al [1990] cikkében megmutatja, hogy a klasszifikáció rendszer felváltva konvergál hol a spekulatív, hol pedig a fundamentális egyensúlyhoz. Az általunk készített szimulációk ezt nem voltak képesek reprodukálni. Kivétel nélkül mind a fundamentális egyensúlyhoz konvergált, ami azt az érzést keltette (ellentmondva Marimon et al [1990] eredményeinek), hogy a B gazdaságban a fundamentális egyensúly stabil, a spekulatív pedig instabil. Különösen érdekes volt, hogy abban az esetben, ha a spekulatív stratégiát játszó állapotból indítottuk a szereplőket, akkor is a legtöbbször a fundamentális egyensúlyhoz tartott a gazdaság. Kivételt képezett a döntési

fa módszer, amely sajátosságából fakadóan csak nagyon nehezen képes elmozdulni egy egyensúlyi helyzetből.

Pénzzel kiegészített gazdaság. Itt arról van szó, hogy az A modell feltételei mellett bevezetünk egy 4. jószágot, a pénzt. Ennek a jószágnak a raktározási költsége zérus. A jószágot mesterségesen rakjuk a rendszerbe (indulókészlet formájában) és nem engedjük meg a fogyasztását, így nem kerülhet ki a rendszerből. Paraméterek: $c_1 = 1$, $c_2 = 20$, $c_3 = 70$, $c_4 = 0$, $u_i = 100$ és $\beta = 0.99$. Ebben az esetben fundamentális egyensúly valósul meg, mint az az 5.16. ábrából és az (5.24)-ből kiderül.



5.16. ábra: Fundamentális egyensúly

$$\mathbf{p}_{fund} = \begin{bmatrix} 0 & 0.087 & 0.206 \\ 0.247 & 0 & 0 \\ 0 & 0.140 & 0 \\ 0.087 & 0.107 & 0.126 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

A termékeloszlás természetesen függ attól, hogy kezdetben mennyi 4. jószágot helyeztünk a rendszerbe. Megérzésünk az, hogy ebben a gazdaságban is előállhat spekulatív egyensúly, hiszen ha egyre kevesebb 4. jószággal indítjuk a szimulációt, úgy egyre közelebb kerülünk az eredeti A modellhez. Olyan esetben azonban, amikor számottevő mennyiségben vittünk pénzt a gazdaságba, nem tudtunk olyan paraméter-beállítást adni, hogy egy spekulatív egyensúlyba érkezzen a gazdaság.

A tanulóeljárások közül a klasszifikáló rendszer nem járt sikerrel, a döntési fa pedig mindig konvergált. A tiszta genetikus algoritmus az esetek 90%-ában az egyensúlyi megoldást adta. A megerősítéses tanulás még ennél is sikeresebb volt, de lényegesen nagy volt a futási időigénye.

5-szereplős gazdaság. Távlati célunk az, hogy egy olyan modellt építsünk fel, amelyben törvényszerűen jelenik meg és válik fizetőeszközzé a pénz, nem pedig egy kívülről

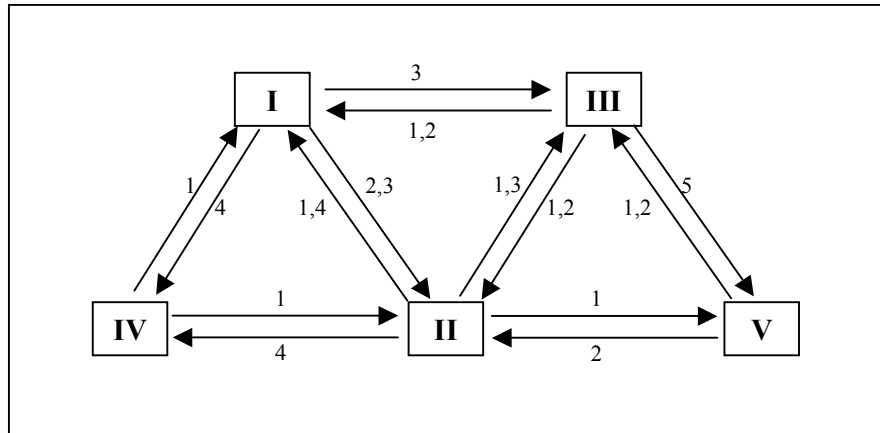
modellbe erőszakolt jószágot nevezünk csereeszköznek. Ehhez az első lépés egy összetettebb gazdaság szimulálása. Ebben a modellben öt típus és öt jószág szerepel. A szereplők itt is csak egyetlen jószágot szeretnek fogyasztani és egyetlen terméket képesek termelni, mégpedig az I. szereplő a 3. jószágot, a II. szereplő a 4. jószágot, a III. az 5-öst, a IV. az 1-est és az V. a 2-est. Paraméterek: $c_1 = 1$, $c_2 = 4$, $c_3 = 9$, $c_4 = 20$, $c_5 = 30$, $u_i = 200$ és $\beta = 0.99$.

$$\bar{\mathbf{p}}_{500} = \begin{bmatrix} 0 & 0.067 & 0.125 & 0.006 & 0.001 \\ 0.064 & 0 & 0.008 & 0.123 & 0.005 \\ 0.024 & 0.036 & 0 & 0.011 & 0.130 \\ 0.184 & 0.009 & 0 & 0 & 0.006 \\ 0.042 & 0.144 & 0.008 & 0.006 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

$$\bar{\mathbf{p}}_{2000} = \begin{bmatrix} 0 & 0.166 & 0.032 & 0.001 & 0.001 \\ 0.019 & 0 & 0.001 & 0.174 & 0.006 \\ 0.009 & 0.084 & 0 & 0.010 & 0.096 \\ 0.198 & 0.002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.195 & 0.005 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

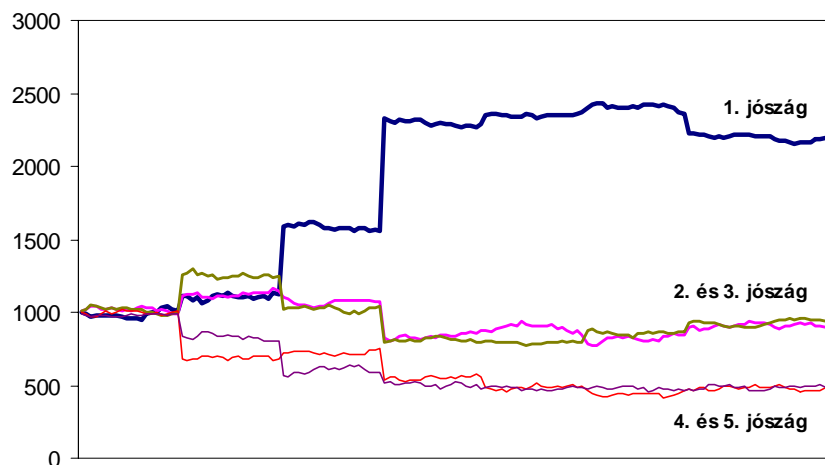
A klasszifikáció rendszer alkalmazása során nem sikerült egyensúlyi állapotot elérni, mint azt az (5.25) és (5.26) mutatják. A tiszta genetikus algoritmus a rendkívül hosszú futási idő miatt nem bizonyult használhatónak. A döntési fa és a megerősítéses tanulás viszont azonos eredményeket adtak, amely szerint az 5 szereplős gazdaság egyensúlyi állapota a megadott paraméterek mellett egy majdnem fundamentális egyensúly, tiszta stratégiákkal. A megoldás jószágeloszlását az (5.27), a cseréket pedig az 5.17. ábra mutatja.

$$\bar{\mathbf{p}}_{750} = \begin{bmatrix} 0 & 0.035 & 0.122 & 0.043 & 0 \\ 0.082 & 0 & 0.064 & 0.054 & 0 \\ 0.064 & 0.039 & 0 & 0 & 0.097 \\ 0.200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.091 & 0.109 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$



5.17. ábra: Az 5-szereplős gazdaság egyensúlyi cseréi

Az 5-szereplős gazdaságot ebben a munkánkban nem vizsgáljuk részletesebben, csupán azt hangsúlyozzuk ki, hogy ebben a gazdaságban a pénz (1. jószág) domináns fizetőeszközzé tudott válni. Minden szereplő egységesen hajlandó elfogadni. Ezért a mennyisége kiemelkedően magas szintre tudott emelkedni (20%-ról 44%-ra). A 4. és az 5. jószág speciális módon alakult, ezeket csak a jószágok fogyasztója hajlandó elfogadni. Kivételt egyedül az I. típusú játékos képez, aki spekulatív módon elfogadja a 4. jószág termelőjétől a 4. jószágot és azt továbbadja a IV. típusú szereplőnek. Ez a két jószág azonban így is teljesen hasonló képet mutat, és egyensúlyban 10-10%-ot érnek el. A 2. és 3. jószág szintén közel azonos szintre (18-18%) áll be, ezek átmenetet képeznek a pénz és a nem-pénz jószágok között. (A jószágok részesedésének alakulását a döntési fa tanítás mellett az 5.17. ábrán ábrázoltuk.)



5.18. ábra: Az 5-szereplős gazdaság jószágeloszlásának alakulása

6. Fejezet

A sokszereplős modellek kommunikáció-struktúrái

Az előző fejezetekben megmutattuk, hogy a szimulációs módszertan segítségével fel tudunk építeni és meg tudunk figyelni olyan gazdasági modelleket, amelyekben heterogén szereplők meghatározott külső és belső szabályozó erők hatására cselekszenek. Az evolúciós elmélet pedig olyan módszereket biztosított, melyek segítségével az elkülönült gazdasági szereplők egymáshoz és környezetükhöz való alkalmazkodása megvalósítható. Ebben a fejezetben ezt az eszköztárat szeretnénk felhasználni egy olyan probléma kezeléséhez, amelyet analitikus módszerekkel rendkívül nehéz lenne megoldani.

A cseremodelleknek a cserepartnerekkel történő találkozására vonatkozó feltételezést kívánjuk módosítani. A legtöbb modellben – így pl. a Kiyotaki-Wright modellben is – minden szereplőnek lehetőséget adunk bármely másik szereplővel való találkozásra (*random match*). Egy ilyen modell kommunikációs struktúráját úgy képzelhetjük el, mint egy csomópontokból és élekből felépített gráfot, ahol a csomópontok jelentik az egyes szereplőket, az őket összekötő élek pedig a lehetséges találkozásokat. Mivel bárki bárkivel találkozhat, ezért ebben a struktúrában minden pont minden másik ponttal össze van kötve. Továbbá az azonos találkozási valószínűség folytán a pontokat összekötő élek súlya azonos.

Ha egy modell kommunikációs struktúráját megváltoztatjuk, megváltozik (megváltozhat) az egész modell minőségi tulajdonsága. Ha feltételezzük, hogy a különböző gráfokban az élek továbbra is azonos találkozási valószínűségeket reprezentálnak, de lehetőség van egy-egy szereplő közötti él megszüntetésére, akkor a lehetséges struktúrák száma a szereplők számával exponenciális ütemben nő. Ha hozzávesszük a súlyok változásának lehetőségét, akkor végtelen számú lehetséges kommunikációs struktúra adódik.

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy létezik néhány olyan kommunikációs struktúra, amely különösképpen jellemző a gazdasági-társadalmi rendszerekre, és így ezek modellezése fontos eredményekkel bővítheti eddigi kutatásainkat. A gráf-struktúrák keresésében és elemzésében az egyik legfontosabb lépés egy vállalati kutatás volt,¹ így ez a fejezet nagymértékben támaszkodik az ottani tapasztalatokra, részletesen pedig a második és harmadik alfejezetben tárgyaljuk. Ezt megelőzi egy rövid elméleti bevezető, amely elsősorban Watts [1999] munkájára épít. A negyedik alfejezet röviden vizsgálja a kommunikációs struktúrák egyensúlyelméleti vonatkozásait.

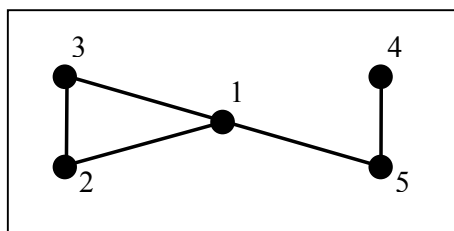
¹ Az Axelero vállalatnál Vida Péterrel közösen végzett SNoW projekt.

6.1. Elmélet

Ahhoz, hogy az információstruktúrákat gráfelméleti módszerekkel kezeljük, szükséges az alapvető definíciókat megadni. Ez a pont azonban nem tekinthető gráfelméleti bevezetésnek, mivel csak azokat a jellemzőket tárgyalja, amelyek a későbbiek során mindenképpen szükségesek, így rengeteg, a gráfelméletben alapvető definíció és bizonyítás kimarad.

6.1. Definíció. *Gráfnak* nevezünk egy *csomópontokból* és *élekből* álló halmazt. Jelöljük a gráfot G -vel. Ekkor a csomópontok (vagy pontok) halmaza $V(G)$, az élek halmaza (listája) pedig $E(G)$. Ha $v, w \in V(G)$ csomópontok, és $vw \in E(G)$ egy él, akkor azt mondjuk, hogy v és w össze vannak kötve.

A továbbiakban a definíciók szemléltetéséhez a 6.1. ábrán látható G^0 gráfot használjuk.



6.1. ábra: A G^0 gráf

6.2. Definíció. A csomópontok számát a gráf *rendjének* nevezzük, jelölése $n = \#V(G)$. A gráf *méretének* nevezzük az élek számát, jelölése $M = \#E(G)$.

A G^0 gráf rendje és mérete 5. A 6.1. definícióval számtalan különböző tulajdonságú gráf megadható. Nézzünk néhány szűkítést, amelyet a későbbiek során alkalmazni fogunk.

6.3. Definíció. Adott egy n rendű, M méretű G mátrix. Ekkor a gráf

- F1. Irányítatlan*, ha minden él szimmetrikus viszonyt testesít meg az általa összekötött két pont között, azaz ha $vw \in E(G)$, akkor $wv \in E(G)$.
- F2. Súlyozatlan*, ha két pont közötti kapcsolat csak kétféle lehet: létezik vagy nem létezik. (*Súlyozott*, ha létezik olyan f függvény, hogy $f(vw) \in R$.)
- F3. Egyszerű*, ha egy pont önmagával nem lehet összekötve, illetve egy másik ponttal csak egyszer lehet összekötve.
- F4. Ritka*, ha mérete a lehetséges maximális mérethez képest kicsi. A maximális méretű gráfokat *teljesnek*, vagy *teljesen összekötöttnek* nevezzük.
- F5. Összefüggő*, ha két tetszőleges csomópontot véges számú él összeköt.

A G^0 gráf irányítatlan, súlyozatlan, egyszerű és összefüggő. Egyszerű, irányítatlan gráfok esetén a maximális méret kifejezhető n segítségével, mégpedig $M_{\max} = n(n-1)/2$. A ritkaság formálisan azt jelenti, hogy $M \ll n(n-1)/2$.

A kommunikációs struktúrák vizsgálata és gazdasági modellekben történő alkalmazásánál általában az F1-F5 tulajdonságoknak megfelelő gráfokat fogunk használni. Ugyanakkor számos modell esetében szükséges lehet ezek feloldása.

A gráfok numerikus ábrázolásához mátrixokat alkalmazhatunk. Ehhez vezessük be a szomszédossági mátrix fogalmát.

6.4. Definíció. Egy G gráf csomópontjait jelöljük pozitív egész számokkal. Ekkor $\mathbf{M}(G)$ szomszédossági mátrixnak nevezzük azt az $n \times n$ -es négyzetes mátrixot, amelynek M_{ij} eleme megmutatja, hogy milyen kapcsolat áll fenn a gráf i és j csomópontja között.

Irányítatlan, súlyozatlan, egyszerű gráfok esetében $M_{ii} = 0$ és M_{ij} vagy 0 vagy 1, valamint \mathbf{M} szimmetrikus. G^0 szomszédossági mátrixa (6.1).

$$\mathbf{M}(G^0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

A mátrixrepresentáció azért nagyon előnyös, mert a matematikai közgazdaságtan számos definíciót, tételt és technikát alkalmaz ezen mátrixok jellemzésére és megismerésére. (Részletesen ld. Zalai [2000], Móczár [1980].) Ezeket a gráfelméleti alkalmazás során könnyű lesz felismerni és alkalmazni. Erre példa az alábbi egyszerű állítás.

6.1. Tétel. Egy G gráf akkor és csak akkor összefüggő, ha szomszédossági mátrixa irreducibilis.

6.5. Definíció. Legyen $v \in V(G)$. Ekkor v fokának nevezzük a v -ből kiinduló élek számát. Jelölése k_v . Ezek átlagát nevezzük a gráf átlagos fokának, melyet jelöljön k . Azt a gráfot, amelynek minden csomópontja pontosan k csomóponttal van összekötve, k -reguláris gráfnak nevezzük.

Nyilvánvalóan $M = nk/2$. Ezért a ritkaság megfogalmazható úgy is, hogy $k \ll n$. A példánkban szereplő G^0 gráf átlagos foka 2.

6.6. Definíció. *Karakterisztikus úthossznak* nevezzük a gráf minden pontjából kiinduló minden egyéb pontba eljutó legrövidebb utak átlagának a mediánját. Jelölése L . Legyen G összefüggő, és $v, w \in V(G)$. Ekkor $d(v, w)$ a két pontot legkevesebb él segítségével összekötő út éleinek száma. Legyen a v -ből kiinduló legrövidebb utak átlaga:

$$\bar{d}_v = \frac{\sum_{j \in V(G), j \neq v} d(v, j)}{\#V(G) - 1}. \quad (6.1)$$

L tehát nem más, mint ennek a sorozatnak mediánja.

A példánkban szereplő G^0 gráf esetében például $d(2, 5) = 2$. A legrövidebb távolságok átlaga rendre 1.25, 1.75, 1.75, 2.25 és 1.50, L értéke tehát 1.75. Felmerül a kérdés, hogy miért nem az átlagok átlagát nevezzük karakterisztikus úthossznak. Ennek praktikus oka van, mégpedig az, hogy vizsgálatainkat igen nagy gráfokra végezzük. Ilyen esetben sokszor a teljes gráfot a gráfból vett minta segítségével jellemezzük. A mediánt azért használjuk, mert mintatulajdonságai kedvezőbbek, mint az átlagé, ahogy azt a következő tétel mutatja. (Bizonyítás megtalálható Huber [1996] cikkben.)

6.2. Tétel. *Vegyük a következő mintavételes eljárást L meghatározásához.*

- 1) *Vegyünk egy $s < n$ elemű véletlen mintát a G gráfból.*
- 2) *Határozzuk meg a mediánt. Nevezzük $M_{(q)}$ q -mediánnak, ha qn számú kisebb elem és $(1 - q)n$ ennél nagyobb elem szerepel.*
- 3) *Legyen $L_{(q, \delta)}$ (q, δ) -medián, ha a számoknak $qn(1 - \delta)$ része kisebb, és $(1 - q)n(1 - \delta)$ része nagyobb, mint $L_{(q, \delta)}$. Létezik olyan q' , hogy $L_{(q, \delta)} = M_{(q')}$, és ekkor $(1 - \delta)q \leq q' \leq (1 + \delta)q$.*

Ennek az algoritmusnak a segítségével egy s minta $L_{(q, \delta)}$ értéke a helyes karakterisztikus úthosszt $1 - \varepsilon$ pontossággal becsüli, ahol $s = (2/q^2) \ln(2/\varepsilon) / (\delta / (1 - \delta))^2$.

A karakterisztikus úthossz számításának sebessége nem csak azért fontos, hogy egy adott gráf esetében gyors becslést lehessen adni ennek értékére, hanem azért is, mert sokszor egy gráf struktúráját a karakterisztikus úthossz n , illetve k függvényében történő változása, az L -skálázhatóság képes jól jellemezni.

6.7. Definíció. Egy v csomópont *környezetének* nevezzük azokat a v -től különböző csomópontokat, amelyekkel v össze van kötve. Jelölése $\Gamma(v)$, és $\Gamma(v) \subseteq V(G)$. Hasonlóan definiálható $\Gamma(S)$, ahol $S \subseteq V(G)$, és $\Gamma(S) \subseteq V(G) \setminus S$. $\Gamma(S)$ tehát olyan csomópontokból áll, amelyek össze vannak kötve legalább egy S -beli csomóponttal.

A definíció alapján G^0 gráf 1-es csomópontjának környezete $\Gamma(1) = \{2, 3, 5\}$. Ugyanakkor $\Gamma(\Gamma(1)) = \Gamma^2(1) = \{4\}$. Megállapodás szerint $\Gamma^0(v) = v$.

6.8. Definíció. Egy gráf v eloszlási sorozatának nevezzük a következő mennyiséget:

$$\Lambda_j(v) = \sum_{i=0}^j \#\Gamma^i(v), \quad 0 \leq j \leq j_{\max}. \quad (6.2)$$

Nyilvánvaló, hogy minden v esetén $\Lambda_{j_{\max}}(v) = \#V(G)$. A csomópontok eloszlási értékeinek átlagát G eloszlási sorozatának nevezzük, jelölése $\Lambda_j(G)$. Egy gráf D átmérőjének nevezzük annak az úthossznak az éleinek számát, amely a két egymástól legnagyobb távolságra lévő pontját köti össze, azaz $D = \max_v(j_{\max}(v))$.

A G^0 gráf átmérője 3. Egy gráf átmérője önmagában nem hordoz sok információt, de kiegészítve a rendjével és méretével már sok következtetést levonhatunk a gráfról. Az utolsó bevezetendő gráf-statisztikai mérőszám a koncentrátság lesz.

6.9. Definíció. Egy v csomópont koncentrátsága azt mutatja, hogy v szomszédjai mennyire szomszédjai egymásnak. Pontosabban

$$\gamma_v = \frac{\#E(\Gamma(v))}{\frac{1}{2}k_v(k_v - 1)}, \quad k_v = \#\Gamma(v). \quad (6.3)$$

Egy G gráf koncentrátsága nem más, mint az összes csomópont koncentrátságának számtani átlaga.

A G^0 gráf 1 csomópontjának koncentrátsága 0.33, míg a teljes gráf koncentrátsága 0.466. A definíciók közvetlen következménye, hogy a koncentrátsági koefficiens értéke mindig 0 és 1 között mozog. A $\gamma = 1$ azt jelenti, hogy a gráf $n/(k+1)$ különálló, de önmagában teljesen összefüggő részgráfból áll. Ezeket *klikkeknek* is nevezik. Ezzel szemben a $\gamma = 0$ esetén egyetlen csomópont szomszédjai sincsenek egymással kapcsolatban. Ilyen például a *fa* gráf.

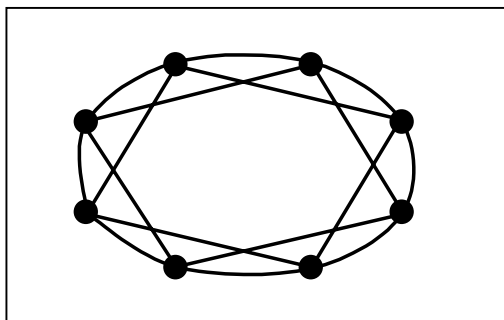
Nyilvánvalóan számos egyéb változót definiálhatunk ahhoz, hogy egy általános gráfot (a gráf megadása nélkül) pontosan jellemezni tudjunk. A további vizsgálódáshoz azonban a fenti mérőszámok elegendőek lesznek. Segítségükkel három különböző „világot” fogunk megismerni és felismerni, a rács-gráfokat, a véletlen gráfokat és a kisvilág gráfokat.

6.10. Definíció. Egy G gráfot d -rács- (vagy d dimenziós rács-) gráfnak nevezünk akkor, ha irányítatlan, súlyozatlan, egyszerű és minden v csomópont össze van kötve azokkal az u_i w_i szomszédokkal, amelyekre igaz, hogy

$$\begin{aligned} u_i &= (v - i^{d'} + n) \bmod n, \\ w_i &= (v + i^{d'}) \bmod n, \end{aligned} \quad (6.4)$$

ahol $1 \leq i \leq k/2$, $1 \leq d' \leq d$, és $k \geq 2d$.

A definícióból következik, hogy egy $k = 2$ fokú 1-dimenziós rács-gráf egy gyűrű, míg egy $k = 4$ fokú 2-dimenziós rács-gráf egy négyzetrács. A 6.2. ábrán szemléltetésül egy 1 dimenziós rács-gráfot mutatunk $k = 4$ esetén.



6.2. ábra: Rács-gráf ($d = 1$, $k = 4$)

A rács-gráfok nagyon szabályos kapcsolatokat testesítenek meg. Pontosán ez a szabályosság teszi azonban lehetővé azt, hogy tulajdonságaikat könnyen meghatározhassuk. Könnyű belátni, hogy a karakterisztikus úthossz és a koncentrálttság analitikusan is meghatározható.

6.3. Tétel. Legyen G gráf n méretű és k fokú 1-dimenziós rács-gráf. Ekkor $k \geq 2$ esetén

$$\begin{aligned} L(G) &= \frac{n(n+k-2)}{2k(n-1)}, \\ \gamma(G) &= \frac{3(k-2)}{4(k-1)}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

A rács-gráfokat azért választottuk az információstruktúrák jellemzésére, mert szabályosságokból fakadóan könnyű rájuk állításokat megfogalmazni. A gráfok egy másik formájára azért lehet általános tételeket megfogalmazni, mert szabálytalanok.

6.11. Definíció. Egy $G(n,M)$ gráfot *véletlen gráfnak* nevezünk, ha n csomópontból áll és azokat M számú függetlenül és véletlenszerűen kiválasztott él köti össze. A véletlen gráfok másik megadási módja $G(n,p)$, ahol annak a valószínűsége, hogy egy lehetséges él ténylegesen szerepel a gráfban, azonosan p .

A véletlen gráfok tanulmányozása során számos eredmény született (pl.: Erdős és Rényi [1959], Bollobás [1985]). Általában egy bizonyos Q tulajdonság létezése után kutatnak véletlen gráfok esetében, mégpedig úgy hogy egy kritikus küszöbértéket meghatározzanak arra vonatkozóan, hogy mekkora M vagy p (, illetve ezekkel ekvivalens k) esetén teljesül ez a tulajdonság (*fázisátmenet*). Az egyik legtöbbet tanulmányozott ilyen Q tulajdonság az összefüggőség, vagyis legalább hány élhez van ahhoz szükség, hogy egy véletlen gráf összefüggő legyen. Erdős és Rényi [1959] cikkében megmutatta, hogy $k \geq \ln(n)$ esetén majdnem minden véletlen gráf összefüggő. A további kutatásunk során a legtöbb véletlen gráffal kapcsolatos tételre nem lesz szükségünk, tanulmányozásuknál a numerikus módszerekkel megelégszünk.

Nézzük, hogy az általunk bevezetett két tulajdonság, a karakterisztikus úthossz és a koncentrálttság hogyan alakul a véletlen gráfok esetén. Numerikus megfigyeléseink alapján a következőket állítjuk:

6.1. Sejtés. *Adott egy $G(n,k)$ véletlen gráf. Ekkor a gráf koncentrálttsága kicsi és a karakterisztikus úthossz rövid. Megfigyeléseink szerint*

$$L \approx \frac{\ln n}{\ln k}, \quad \gamma \approx \frac{k}{n}. \quad (6.6)$$

Nézzük, mit jelenthet mindez akkor, ha a bevezetett két gráf-típust társadalmi csoportok struktúrájának jellemzésére használjuk, ahol egy él két személy közti ismeretséget reprezentál. Ha egy csoportra rács-gráf struktúra jellemző, akkor az azt jelenti, hogy egy személy ismerősei egymást is nagy valószínűséggel ismerik (magas γ), ugyanakkor két véletlenszerűen kiválasztott személy nagy valószínűséggel csak egymás ismerősének az ismerősének stb. ismerőse (nagy L). Ugyanakkor egy véletlen gráf típusú csoport esetében két véletlenül kiválasztott személy között kicsi az ismerősökön keresztüli távolság (kicsi L). Ugyanakkor egy személy ismerősei valószínűleg nem ismerik egymást (alacsony γ). Vegyünk példának egy $n = 100$, $k = 10$ paraméterekkel megadott csoportot. Ha ez egy 1-dimenziós rács-gráf, akkor $L = 5.5$ és $\gamma = 0.7$. Ha azonban véletlen gráf, akkor $L = 2$ és $\gamma = 0.1$.

A valóságban ugyanakkor azt tapasztaljuk, hogy léteznek olyan társadalmi struktúrák, ahol magas a koncentrálttság, majdnem mindenkinek van olyan ismerőse, aki egy

tetszőleges másik személyt ismer. Ilyen az, amikor egy társaságban egy idegen emberrel beszélgetve pillanatok alatt szóba kerül egy közös ismerős, és megjegyezzük: „*Milyen kicsi a világ?*”.

6.12. Definíció. Egy n és k paraméterekkel rendelkező gráfot *kisvilág gráfnak* nevezünk akkor, ha koncentrálttsága a hasonló paraméterekkel megadott rács-gráfok koncentrálttságához van közel, míg karakterisztikus úthossz értéke a hasonló paraméterű véletlen gráfokéhoz közelít.

6.2. Gráf-struktúrák kimutatása

A kisvilág gráfok definíciója után kérdések merülnek fel: Vajon léteznek-e egyáltalán kisvilágok? Ha léteznek, bonyolultak vagy egyszerűek, állíthatjuk-e róluk, hogy félúton helyezkednek el a teljesen szabályos és a teljesen véletlen világok között? Okozhat-e bármilyen minőségi változást a közgazdasági modellekben az, ha kisvilágoknak tekintjük a szereplők világát? Ha igen, akkor lehet-e analitikusan foglalkozni ezekkel a struktúrákkal, vagy a szimuláció elkerülhetetlen?

A fejezet további részeiben az első kérdésről lesz szó, megmutatjuk, hogy számos helyen léteznek kisvilágok. A további kérdések megválaszolásához visszanyúlunk a Kiyotaki-Wright modellhez, és a következő fejezetben részletezzük az eredményeket.

A szakirodalom szerint a következő területek szolgálnak bizonyítékul annak, hogy kisvilágok léteznek:

- *Együtműködési*: Vegyünk egy tevékenységet, amelyet általában több személy valósít meg. (Ilyen lehet egy mozifilmben történő szereplés vagy a tudományos publikáció.) Képezzünk egy olyan gráfot, amelynek csomópontjai a résztvevő személyek, és két személy között akkor van él, ha az adott tevékenységet közösen végezték. (Volt olyan film, amelyben mindketten játszottak, vagy volt közös publikációjuk.) Az így kapott *együtműködési gráf* általában rendelkezik a kisvilág gráfok tulajdonságaival.²

² Együtműködési gráfra jó példa a közismert az *Erdős-gráf*. Erdős Pál a huszadik század egyik legtermékenyebb matematikusa volt, több mint 1400 publikációja jelent meg. Számos (472) szerzőtársa volt. Ezeknek a kutatóknak az *Erdős-száma* legyen 1, mivel volt közös publikációjuk Erdős Pállal. Vegyük e 472 kutató további szerzőtársait. Az ő *Erdős-számuk* 2, és így tovább. A meglepő az, hogy ha valakinek van véges nagyságú *Erdős-száma*, akkor az igen kicsi lesz. Részletet ld.: Grossman és Ion [1995].

- *Tudományos citálás*: Egy tudományos cikk legyen egy csomópont, és két cikk akkor van éllel összekötve, ha az egyikben hivatkoznak a másikra. Egy ilyen gráf jól mutathatja a tudományos ötletek fejlődését, és nagy valószínűséggel kisvilág tulajdonságokat mutat.
- *Szervezeti hálózatok*: A csomópontok személyek, az élek a személyek közötti kapcsolatot, az információáramlás lehetőségét testesítik meg. (Telefonálási struktúrák, e-mailezési partnerek, banki tranzakciók, stb.)
- *Szó asszociáció*: Képzeljünk el egy olyan gráfot, amelynek csomópontjai a szavak, élei pedig szóasszociációkat (vagy hasonló hangalakot, jelentést stb.) mutatnak. Az így konstruált gráfokat nyelvészek használják a nyelv bizonyos tulajdonságainak tanulmányozására, megértésére. Számos esetben kisvilágok készülnek.
- *Világháló*: A csomópontok az Internet oldalak, míg az élek két oldalt összekötő hyper-hivatkozások. Bár napjainkban ez egy több millió csomópontból álló gráf, elfogadhatjuk, hogy meglehetősen ritka. Becslések szerint egy tetszőlegesen kiválasztott oldalról nagy valószínűséggel 10 kattintáson belül elérhető bármelyik másik tetszőlegesen kiválasztott oldal.

Watts [1999] munkájában három speciális gráfot elemez. A *Kevin Bacon gráfot* (KBG), amely a filmszereplők együttjátszását reprezentálja, a *Nyugati Államok erőmű gráfiát* (NyÁEG), amely az USA nyugati államaiban található erőművek közötti nagyfeszültségű vezetékes összeköttetést mutatja, és végül a *C. elegans gráfot* (CEG), amely nem más, mint a *Caenorhabditis elegans* nevű féreg idegrendszerének (neuronhálózatának) reprezentációja. Mindhárom gráf kisvilág, részletek helyett a 6.1. táblázatban foglaljuk össze a legfontosabb paramétereket.

Paraméterek	KBG	NyÁEG	CEG
n	225226	4941	282
k	61	2.67	14
L	3.65	18.7	2.65
γ	0.79	0.08	0.28
L (véletlen)	3	9	2
γ (véletlen)	0.00027	0.0005	0.05
L (rács)	1800	926	11
γ (rács)	0.74	0.3	0.69

6.1. táblázat: Kisvilág gráfok

Vegyünk most egy közgazdasági problémát, ahol a kommunikáció-struktúrára vonatkozó elemzéseket elsőként végeztük el. Ezt az elemzést egy hazai Internet szolgáltatónál hajtottuk végre, a kutatás központjában az ügyfelek e-mailezési szokásai, és az e-mailen terjedő információ áramlása állt. Elsődleges célunk az volt, hogy

azonosítsuk, vajon kisvilág gráf tulajdonságot mutat-e a csoport, másodlagos célunk pedig ennek a struktúrának a 2, esetleg 3-dimenziós megjelenítése volt.

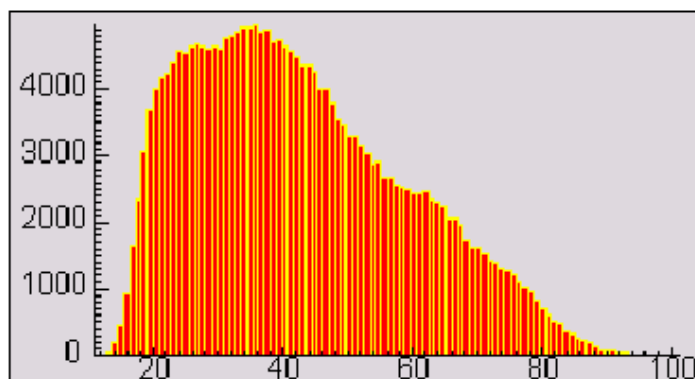
Kisvilág tulajdonság. Az elemzéshez egy úgynevezett *mail log* adatbázis állt rendelkezésünkre. Ez összesen négy mezőt tartalmazott, mégpedig a levél küldőjének e-mail azonosítóját (A), az e-mail fogadójának azonosítóját (B), egy összes darabszámot (DB), ami azt jelölte, hogy a vizsgálati időszak alatt (3 hónap) A hány e-mailt küldött B részére, és az összes forgalmat (KB), ami az összes levél méretét jelenti kilobyte-ban megadva. (Egy tipikus sor ennek az adatbázisnak az: Alfa@mail.hu ; Beta@mail.hu ; 5 ; 1250, ami azt jelenti, hogy a vizsgált időszak alatt az Alfa@mail.hu azonosítóval rendelkező felhasználó összesen 5 darab levelet küldött Beta@mail.hu részére, és a levelek méretének összege 1250Kb volt.) Ebben az adatbázisban összesen $n = 513\,412$ darab e-mail azonosító (A és B kód) szerepelt, és ezek között $M = 1\,723\,069$ kapcsolat állt fenn. Az elképzelt gráf szomszédossági mátrixát úgy képzelhetjük el, hogy $m_{AB} = 1$, ha A küldött legalább egy levelet B-nek, vagy B küldött legalább 1 levelet A-nak, ellenkező esetben $m_{AB} = 0$. Figyeljük meg, hogy az így kapott gráf kielégíti az F1-F4 tulajdonságokat, ugyanakkor az összefüggőség (F5) nem biztosított. Ennek a megállapításához külön algoritmust kellett készíteni. Egy olyan eljárást készítettünk, amely képes volt a *mail log* adatbázist felhasználva összefüggő részgráfokra bontani a sokaságot.³ Ekkor meglepődve tapasztaltuk, hogy a gráf majdnem összefüggő. Pontosabban szólva összesen 11 502 részgráfból áll, de ebből a legnagyobb összesen 489 451 e-mail azonosítót fed le, míg a második legnagyobb összesen 21 darabot. Ezek szerint a felhasználók nagy része összefüggő gráfot alkot. A kis gráfokkal a továbbiakban nem foglalkoztunk. Vizsgáljuk most a megmaradt nagy összefüggő gráfot. Itt tehát $n = 489\,451$, $M = 1\,713\,078$, ebből következően $k = 7.0$. A karakterisztikus távolság kiszámításához teljes gráf-elemzést végeztünk, azaz nem használtunk becsléseket, $L = 7.6$. Végül a koncentráltóság $\gamma = 0.52$ mérete arra utalt, hogy ez a gráf kisvilág struktúrát mutat.

Megjelenítés. Nem elégedtünk meg ezzel, látni akartuk, milyen ez az elképzelt-valóságos világ. Természetesen nincs lehetőség arra, hogy egy olyan grafikont mutassunk, ahol az élek is szerepelnek. Ehelyett olyan megoldásra törekedtünk, hogy két ügyfél kommunikációs valószínűségét a köztük lévő távolság mutassa. Ehhez fel kellett oldani a súlyozatlanság feltételt és szükség volt egy jó távolságdefinícióra:

³ Az algoritmus működését nem részletezzük, ugyanakkor megjegyezzük, hogy számítás-technikailag igen komoly problémát vetettünk fel. Egy ilyen nagy méretű gráf esetén gyors és hatékony eljárást készíteni meglehetősen bonyolult feladat. Mi a legegyszerűbb eljárást használtuk, mivel nagy erejű számítókapacitás állt rendelkezésre.

$$m_{AB} = a + \frac{b}{(DB_{AB} + e)(DB_{BA} + e) + c}, \quad (6.7)$$

ha $A \neq B$. Látható, hogy a távolság szimmetrikus, minimális értéke a körül van, amihez akkor közelít, ha nagy e-mail forgalom van a két ügyfél között, maximális értéke pedig $a + b / (e^2 + c)$. Kutatásaink során meghatároztuk a leginkább megfelelőnek tűnő értékeket, mégpedig $a = 2$, $b = 800$, $c = 7$ és $e = 1$. A gráf m_{AB} távolságainak eloszlását mutatja a 6.3. ábra. Nevezzük \mathbf{D} távolságmátrixnak azt a mátrixot, ahol $d_{ij} = m_{AB}$, ha $i = A$ és $j = B$, továbbá A és B között legalább egy levélváltás történt, különben $d_{ij} = 0$.



6.3. ábra: Távolság eloszlás

A feladat az, hogy \mathbf{D} mátrix segítségével állítsunk elő egy olyan \mathbf{R} mátrixot, amely az ügyfelek elhelyezkedését adja meg egy l dimenziós vektortérben, mégpedig úgy, hogy $r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{il}$ az i ügyfél 1., 2., ... l -edik koordinátája. Elemzéseinkben az $l = 2$ és $l = 3$ esetet vizsgáltuk. Két kérdés merül fel: milyen \mathbf{D} -re vonatkozó feltételek mellett létezik \mathbf{R} , és létezik-e egzakt mód \mathbf{R} meghatározására. Ezek megválaszolásához vegyük a következő példát:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.8)$$

vagyis egy olyan, három csúcspontból álló gráfot, ahol a csúcsok egymástól egységnyi távolságra vannak. Nyilván ábrázolható ez a struktúra, pl.:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Látható, hogy a problémát akkor tudjuk megoldani, ha igaz a háromszög egyenlőtlenség. Ezt a feltételt a (6.7) képlet nem garantálja. Ráadásul ez önmagában még kevés is. Képzeljük el ugyanis, hogy az eddigi pontokhoz hozzáveszünk még egyet, amely mind a három másik ponttól azonosan 0.55 távolságra van. Ekkor nincs olyan \mathbf{R} , amely megfelelné, ugyanakkor a háromszög egyenlőtlenség teljesül. Ezek alapján az a megérzésünk, hogy az általunk készített távolságmátrix szintén nem lesz megfelelő.

Induljunk ki most abból, hogy adottak a pontok koordinátái, alkossunk belőlük egy \mathbf{R}' mátrixot. Ebből kiszámíthatjuk \mathbf{D}' aktuális távolságmátrixot a (6.10) képlet segítségével. A feladat az, hogy \mathbf{R}' mátrixot úgy módosítsuk, hogy $\mathbf{D}' = \mathbf{D}$. Ha az egyezőség helyett a két mátrix közötti eltérést kívánjuk minimalizálni, akkor már tetszőleges \mathbf{D} mellett megkapjuk \mathbf{R} -t, még hozzá ha végül a minimális eltérés zérus, akkor azt is tudjuk, hogy az eredetileg kitűzött probléma is megoldódott.

$$d'_{ij} = \sqrt{\sum_l (r'_{il} - r'_{jl})^2}. \quad (6.10)$$

A feladat tehát a következő:

$$L = \sum_i \sum_j (d_{ij} - d'_{ij})^2 \rightarrow \min. \quad (6.11)$$

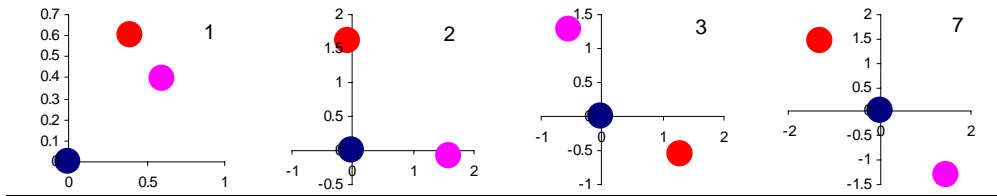
A megoldást a *Lagrange-egyenletek* adják:

$$\frac{\partial L}{\partial r'_{il}} = -c \sum_j \left((d_{ij} - d'_{ij}) \frac{r'_{il} - r'_{jl}}{d'_{ij}} \right). \quad (6.12)$$

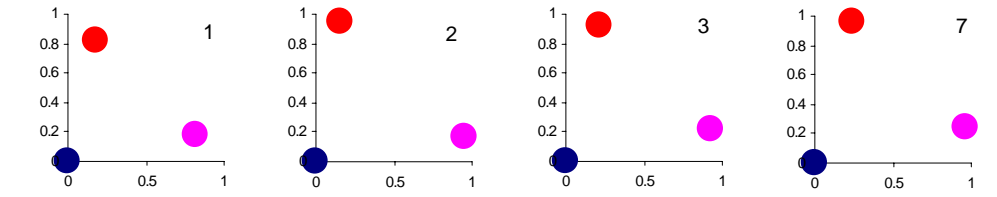
Ennek az egyenletrendszernek már $l = 2$ esetében sincs analitikus megoldása. Numerikus megoldást azonban könnyen adhatunk ha visszatekintünk a 3.2. fejezetben ismerttetett *gradiens módszerekre* és a (3.3) megoldásra. A (6.8) példánál maradván induljunk ki a (6.13) lehetséges induló koordináta mátrixból. Három lehetséges λ érték függvényében vizsgáltuk a gradiens módszer teljesítményét, éspedig $\lambda = 0.34$, $\lambda = 0.15$, és $\lambda = 0.01$.

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

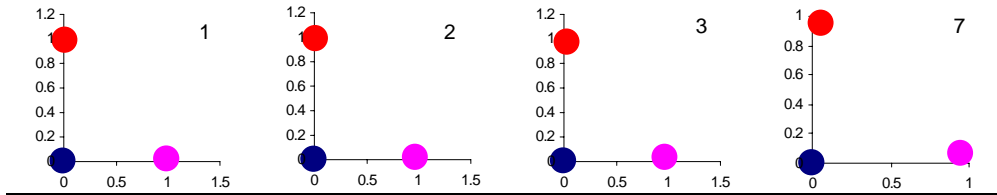
Ebből kiszámítható az aktuális távolság mátrix és az összes hiba is, amely $L = 0.17$. A legnagyobb λ érték esetén az eljárás divergált (6.4. ábra), a középső érték esetén gyorsan konvergált (6.5. ábra), végül a legkisebb érték esetén lassan konvergált (6.6. ábra).



6.4. ábra: Divergencia



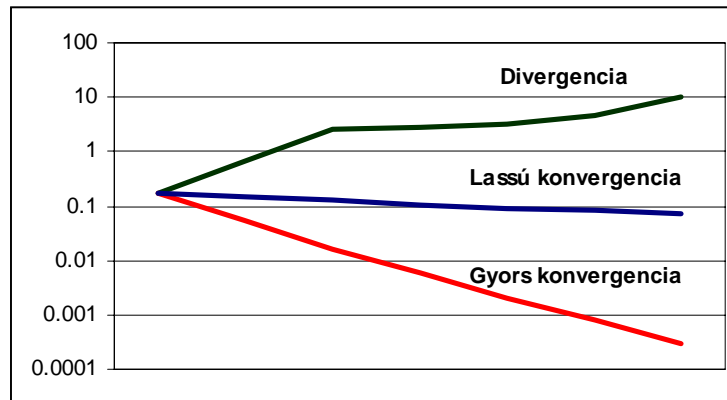
6.5. ábra: Gyors konvergencia



6.6. ábra: Lassú konvergencia

A 6.7. ábrán a konvergencia sebességek láthatók, ahol a függőleges tengelyen L értékei láthatók logaritmikusan skálázva. Ennél a feladatnál biztosak lehetünk az optimum megtalálásában, hiszen L végső értéke zérus lett. Jól nagyobb szabadságfokú problémákon ellenőriztük a gradiens módszert, és azt tapasztaltuk, hogy bár a konvergencia igen lassú lehet, az optimális $L = 0$ értéket mindig elérte. Ekkor visszatértünk az eredeti problémához. Egyetlen nehézséget a megfelelő λ megtalálása jelentette. Úgy módosítottuk az algoritmust, hogy minden iterációban megvizsgáltuk, hogyan változott L értéke. Divergenciára utaló jel esetén csökkentettünk, lassuló konvergencia esetén pedig növeltük λ értékét. Ennek ellenére a számítások közel egy

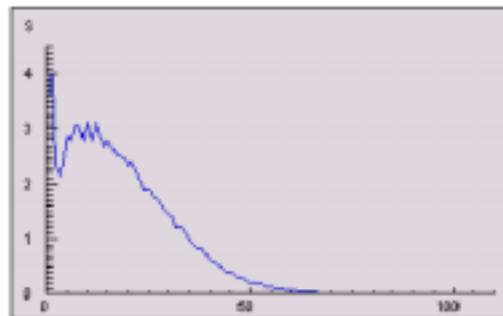
hetet vettek igénybe, de ezen nem csodálkozhatunk, hiszen a 3-dimenziós probléma esetén a szabad változók száma közel másfél millió volt!



6.7. ábra: L értékei az iterációk során

A koordináták indulóértékei véletlen értékből indultak -100 és 100 között. Így az indulás egy 200 egység oldalú egyenletes sűrűségű kocka volt. Indításkor L értéke 10^{11} nagyságrendű volt, az algoritmus leállításánál már csak 10^6 . Ami azt jelenti, hogy élenként kevesebb mint 1 egység hibát vétettünk. Ezek alapján elfogadtuk, hogy sikerült egy a gráfot jól reprezentáló koordináta mátrixot létrehozunk.

Végül a csomópontokat a háromdimenziós térben ábrázoltuk. Az eredmény roppant érdekes és meglepő volt. A kezdeti egyenletes sűrűségű kockából egy olyan gömb lett, amely a gömbközpontban rendkívül sűrű, majd az 5 egység rádiuszig fokozatosan csökkenő sűrűségű, aztán az 5 és 15 egységnyi rádiusz között megint magasabb sűrűségű, végül a 100 rádiuszig exponenciálisan lecsengő sűrűségű. (Ld.: 6.8. ábra)



6.8. ábra: Ügyfclsűrűség a gömbközponttól mért távolság (rádiusz) függvényében

Sikerült tehát megjelenítenünk egy igen sok ügyfélből álló kisvilág struktúráját. Ezek után számos megfigyelést és elemzést hajtottunk végre, például megállapítottuk, hogy a gömb közepén elhelyezkedő ügyfelek a legaktívabbak, a szélén szereplő ügyfelek pedig a legpasszívabbak. Egy információ (pl. új akció) elterjedésének a legérzékenyebb területe az 5-15 rádiuszig eső sáv bizonyult.⁴

6.3. Gyakorlati alkalmazás

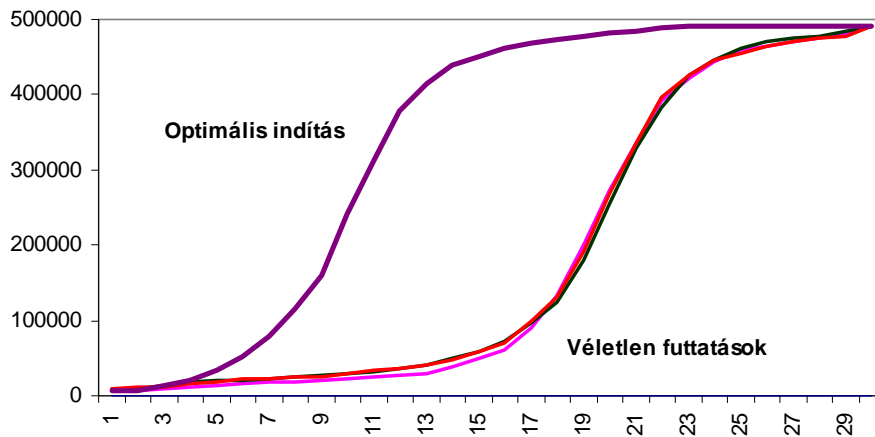
A kommunikációs gráf-struktúrákat számos közgazdasági (vállalati) elemzés és kutatás során sikerült alkalmazni. Az egyik legérdekesebb ilyen alkalmazás azt kutatta, hogy hogyan terjed el egy bizonyos információ vagy hatás az ügyfelek között, és kik azok, akik egy kezdőinformációt a leghatékonyabb módon szét tudnak teríteni a társaságban. Ez a módszer nagyon hasonlít a fertőzésemélettel foglalkozó populációdinamikai alkalmazásokhoz.

Az alkalmazás bemutatásához a 6.2. fejezetben bemutatott példát folytatjuk. Tegyük fel, hogy arra vagyunk kíváncsiak, hogyan távoznak az ügyfelek a vállalattól. Feltételezzük azt, hogy az egymással szoros kapcsolatban állók közül ha egy távozik, akkor a többiek távozási valószínűsége megnő. Ezt a hipotézist elemzések segítségével (nem utolsósorban a megjelenítési technika bevezetésével) igazoltuk. Ezután arra volt szükség, hogy a meghatározott gráfon definiáljunk egy „fertőzési dinamikát”, azaz egy olyan mechanizmust, amely megadja, hogy egy fertőzött (távozó) ügyfél hogyan képes másokat is megfertőzni (távozásra bírni). Az általunk használt dinamika sztochasztikus volt, mégpedig úgy működött, hogy minden egyes periódusban minden fertőző ügyfél p valószínűséggel továbbadta minden vele kapcsolatban lévő személynek a fertőzést. Ez a valószínűség annál magasabb, minél szorosabb a kontaktus a két ügyfél között. A periódusok addig folytatódnak, ameddig a teljes sokaság meg nem fertőződik. (Egy összefüggő gráfban $p > 0$ esetén ez véges időn belül realizálódik.) Példánkban a sokcsúcsú összefüggő gráffal dolgoztunk. Természetesen kérdés még az, hogy kezdetben kik fertőzöttek. Feladatunk az volt, hogy ha feltesszük, hogy induló esetben az ügyfelek h -ad része fertőzött, akkor kik azok az ügyfelek, akik a legrövidebb idő alatt képesek megfertőzni az egész csoportot, avagy egy meghatározott t időn belül a legtöbb fertőzést okozzák. A vállalat számára ezek az ügyfelek különlegesen fontosak. Ha a vállalat célja az ügyfélmegtartás, akkor ezeket az ügyfeleket kell leginkább lojalításra bírni. Ha egy új termék vagy szolgáltatás bevezetése a cél, akkor ezeket az ügyfeleket érdemes leghamarabb informálni és meggyőzni, a többi már a maga útján terjed. Mindkét esetben feltételezhető, hogy az adott célkitűzés megvalósításához a vállalat az ügyfeleinek h -ad részének elérésére elegendő költségvetéssel rendelkezik.

⁴ Gráfok többdimenziós ábrázolásával kapcsolatban lásd pl.: Munzner [1997].

A továbbiakban feltettük, hogy $h = 0.01$, azaz kezdetben mindössze 5000 fertőző ügyfelünk van. A minimális fertőzési valószínűség 1%, a maximális 25% volt. (Ez persze azt jelenti, ha egy ügyfélnek 2 nagyon szoros kapcsolata van 2 fertőzöttel, annak az ügyfélnek a fertőződési valószínűsége 44%.) Számos véletlen kiválasztás mellett végeztünk futtatásokat, amelyből az derült ki, hogy egy kritikus szintig lassan emelkedik a fertőzöttek száma, majd e szint felett hirtelen megugrik az arány és rendkívül rövid idő alatt majdnem mindenki megfertőződik. Az utolsó néhány fertőzés megint elhúzódik egy kicsit. (A görbe alakja természetesen nagyon erősen függ h és p értékeitől, ezen a gráfon azonban ez a terjedési folyamat általánosnak mondható. Részletesen azonban csak a fenti értékekkel számoltunk.)

A feladat tehát az, hogy találjuk meg azt az 5000 ügyfelet, akik a legrövidebb idő alatt képesek megfertőzni az ügyfelek 90%-át. Ez nyilvánvalóan egy kombinatorikus probléma, hiszen egy ügyfél az induló fertőzöttek között vagy szerepel, vagy nem. A teljes leszámolásához összesen több mint 10^{20000} lehetséges esetet kellene megvizsgálni, ráadásul a dinamika sztochasztikusságából fakadóan nem is elegendő egyetlen futtatás. Erre nem vállalkoztunk, viszont a 3.3. fejezet alapján bizalommal fordulhattunk a genetikus algoritmusokhoz. A megvalósítást most nem részletezzük, hiszen a 3.3 fejezet alapján a módszert könnyen alkalmazni lehet erre a problémára. Az eredmények igen érdekesen alakultak. Kiderült, hogy a „megfelelő” 5000 ügyfél kiválasztásával fele annyi idő alatt terjed el a fertőzés, mint a véletlen kijelölés esetében. A 6.9. ábrán szemléltjük az elmondottakat.



6.9. ábra: Fertőződés elterjedése

6.4. Kommunikációs struktúrák és az egyensúlyelmélet

A 6.2. fejezetben empirikusan igazoltuk a kisvilág struktúra megjelenését egy gazdasági rendszerben, a 6.3. fejezetben pedig bemutattuk, hogy hogyan lehet ezeket a tapasztalatokat a korábban ismertetett eszköztár segítségével aktuális vállalati, gazdasági problémák megoldásához alkalmazni. Felmerül a kérdés, hogy van-e lehetőség arra, hogy ezt az igen összetett modellezési módszertant fel lehessen használni elméleti közgazdaságtani problémák kezelésére. Valójában az általános egyensúlyelméletben is felhasználtunk gráf-struktúrákat. A mindent tudó árvezető-kikiáltó modell kommunikációs szempontból egy csillagstruktúrát alkot, ahol a kikiáltóval mindenki kapcsolatban áll, egymással pedig senki. Ennek ellentéte a koalíciókba szerveződő játékelméleti modell, ahol mindenki mindenkivel kapcsolatban áll.

A témáról jó áttekintést ad Kirman [1999]. Ebből kiderül, hogy mi a gond azokkal a modellekkel, ahol az információ egyedüli közvetítője az ár, ugyanakkor miért nem megfelelő a játékelméleti módszertan sem, amely ugyan lehetőséget biztosít a részletesebb információ áramlásnak (csereszándék, kommunikáció, tanulás), de feltételezi, hogy minden szereplő minden részletet ismer a többi szereplő cselekvéséről, és ezt felhasználja döntései meghozatalakor. Kirman [1999] bemutatja, hogy a kilencvenes évektől megjelennek olyan modellek, amelyek képesek bonyolultabb kommunikációs struktúrákat figyelembe venni, sőt empirikus megfigyelések támasztják alá ezeket az észrevételeket. (Ld. részletesen Herdler és Kirman [1994] marseillei halpiac működéséről írt tanulmányát.) Ezek a gráf-reprezentációk gyakorlatilag megegyeznek a fejezetben ismertetett rács-gráf és véletlen gráf struktúrákkal.

Ezzel a két struktúrával azonban nagyon meglepő elméleti eredményeket nem lehetett elérni. Ennek az az oka, hogy a rács-gráf struktúra, szabályossága miatt, eleve magában hordozza az egyáltalán megvalósulható állapotokat. A véletlen gráfok számos érdekes jelenség bemutatására voltak képesek, de túlságosan érzékenyen viselkedtek. Kisvilág struktúrákkal eddig nem folytak kísérletek. Úgy érezzük, hogy számos egyensúlyelméleti kérdés megválaszolásában segíthet az, ha meg tudjuk valósítani ugyanannak a kísérletnek (modellnek) a rács-gráf, kisvilág gráf és véletlen gráf kommunikáció reprezentációját. A következő fejezetben ezért visszatérünk pénzügyelméleti modellünkhöz, a Kiyotaki–Wright modellhez.

6.5. Összefoglalás

Ebben a fejezetben megmutattuk, hogy a sokszereplős közgazdasági modellek egyik igen fontos (gyakran egyedüli sztochasztikát tartalmazó) eleme a kommunikációs struktúra. Ez a legtöbb modell esetében a véletlen találkozások lehetőségét jelenti, ugyanakkor nem nehéz olyan modelleket készíteni, amelyekben számos interakció valósulhat meg a szereplők között (csere, termelés, tanulás, stb.), és ezekhez mind különböző kommunikációs gráf tartozhat. Bemutattunk három elképzelhető és viselkedésében különböző struktúrát (gráfot), a rács-gráfokat, a véletlen gráfokat és a kisvilág gráfokat. Közgazdasági, biológiai, társadalmi modelleket elemeztünk és megállapítottuk, hogy a kisvilág struktúra megvalósulása elképzelhető, majd egy valós közgazdasági alkalmazás segítségével beláttuk, hogy egy ilyen struktúra gyökeresen megváltoztathatja az adott modell minőségi viselkedését. Feltételeztük azt, hogy ehhez hasonló minőségi jellegű változást olyan elméleti közgazdasági modellekben is létre tudunk hozni, mint a Kiyotaki–Wright modell.

7. Fejezet

Kisvilágok pénzmodellje

Ebben a fejezetben az eddig ismertett összes módszertani és modellezési eszközeinket és eredményeinket felhasználjuk. Keretrendszerünk a szimulációs környezet lesz, analitikus számításokat most egyáltalán nem végzünk. Heterogén gazdasági szereplők világát vizsgáljuk, ahol a szereplők viselkedését a 3. fejezetben megismert evolúciós módszerek szabályozzák. Modellünk az 5. fejezetben megismert Kiyotaki–Wright modell, ennek is két verziója, a háromjóságos A modell és az ötjóságos kiterjesztett verzió. A szereplők kommunikáció struktúráját a 6. fejezet gráf-reprezentációi alapján három különböző eset mellett vizsgáljuk, rács-gráf, véletlen gráf és kisvilág gráf struktúra mellett.

A fejezet célja, hogy bemutassa, milyen minőségi változások adódhatnak abból, ha megváltozik a szereplők közti kommunikációs szabály. Ugyanakkor a Kiyotaki–Wright modell ilyen módszerekkel történő megoldása egyszersmind előrevetíti annak a lehetőségét, hogy általánosabb modelleket vizsgáljunk, és olyan társadalmi és gazdasági jelenségeket legyünk képesek magyarázni, amelyek eddig komoly nehézséget okoztak (árigazodás, kereskedelem kialakulása, monopóliumok, pénz megjelenése, stb).

A fejezet felépítése a következő. Az első alfejezetben röviden bemutatjuk, hogy milyen módosításokat végeztünk az eredeti modellhez képest, és milyen paraméter beállításokkal fogjuk végezni a szimulációt. A második alfejezetben olyan módszereket ismertetünk, amely segítségével numerikus kísérletekhez lehet adott paraméterekkel rendelkező kisvilág struktúrájú gráfokat generálni. Ez azért nagyon fontos, mert az előző fejezetben megmutattuk, hogy léteznek kisvilág struktúrák, de konstruktív módszert nem adtunk az előállításukra. A fejezetnek ez az alpontja jól alkalmazható bármilyen más modellezés esetén, amikor kisvilág gráfot kell előállítani, de fontos megjegyeznünk, hogy az alfejezet rövideje miatt nincs lehetőségünk az eljárások részletes tárgyalására. Az utolsó alfejezetben futtatásokat hajtunk végre és értelmezzük az eredményeket.

7.1. A modell

Két modellt vizsgálunk, a 3-jóságos eredeti Kiyotaki–Wright modellt és az 5-jóságos kiterjesztést. A modelleket számos tekintetben nem változtattuk, így az analitikus értékek és az 5. fejezet numerikus megoldásai viszonyítási alapot jelenthetnek. A legfontosabb eltérést a modellek kommunikáció struktúrája jelenti.

7.1. Definíció. A Kiyotaki-Wright modell szereplőinek kommunikáció struktúráját egy G gráf segítségével határozzuk meg. Minden szereplő (típustól függetlenül) egy csomópontnak felel meg a G gráfban. A gráf élei lehetséges találkozási irányokat jelentenek, azaz ha egy i és egy j szereplő között van él, akkor a véletlen találkozások során a két szereplő találkozhat egymással, ha nincs, akkor pedig nem.

A kommunikációs gráfra megkötések tettünk, mégpedig irányítatlanságot, súlyozatlanságot, egyszerűséget és összefüggőséget követeltünk meg. Természetesen lehetőség van ezek feloldására, sőt igen érdekes kutatási irány a súlyozott gráf vizsgálata, ahol a súlyok ráadásul változhatnak a periódusok alatt.¹ Feltételezzük, hogy a megadott gráf a szimuláció során nem változik. Figyelembe véve a megkötések az 5. fejezetben vizsgált modellek kommunikációs gráfjai mind teljes gráfok voltak.²

A találkozások kialakításánál felmerül a kérdés, hogy mi történik azzal a szereplővel, aki egy adott periódusban nem tud senkivel sem találkozni, mert az összes lehetséges partneréhez már hozzárendeltünk valakit. Ez a probléma akkor jelentkezik, ha az összes szereplő számához képest (n) az átlagos kapcsolatok száma, azaz a gráf foka (k) relatíve kicsi. A problémát úgy kezeltük, hogy ebben az esetben az adott szereplő nem találkozik senkivel, ugyanakkor a raktározási költség „kifizetése” alól nem mentesül. Ennek ellenére arra törekedtünk, hogy olyan paraméter-értékeket állítsunk be, ahol a „kimaradásnak” kicsi az esélye. (Megjegyezzük, hogy az eredeti modell esetén is felmerül ez a probléma, ha a szereplők száma páratlan.) A korlátozott véletlen találkozások generálásához a 2.5. fejezetben ismertetett eljárást használjuk.

A másik lényeges változtatás az volt, hogy az 5.1. definícióban ugyan részleteztük, hogy egy szereplő u hasznossága a fogyasztás U hasznának és a termelt jószág D előállításának költségének különbsége, de a későbbiekben mindig csak u -ról beszéltünk. Ugyanakkor vegyük észre, hogy ha egy szereplő nem a saját jószágát fogyasztja, akkor u értéke nem zérus, hanem $-D$. Vegyük figyelembe azt is, hogy van olyan D érték, amely mellett egy szereplőnek érdemes elfogyasztani a nemkívánatos jószágot azért, hogy az általa termelt alacsony raktározási költségű vagy jó piaci megítélésű termékkel rendelkezzen. Sőt, van olyan kommunikáció struktúra és diszkonttényező, amely mellett nincs olyan nagy (véges) D termelési költség, hogy egy szereplőnek ne érje meg a nemkívánatos terméket elfogyasztani. Itt ismételt az a kérdés, hogy egy szereplő elegendően sok és különböző típusú szereplővel képes-e találkozni. Ezt általában megköveteltük, de nem

¹ Egy ilyen modell közgazdasági tartalma az, hogy azok között a szereplők között, akik sikeresen képesek egymással kereskedni, szoros kommunikációs kapcsolat alakul ki, míg a hosszú távon sikertelen cserepartnerekkel a kapcsolat gyengül, megszűnik. Tovább bonyolódik a helyzet, ha a kapcsolatok kialakítását szintén a szereplők irányítják, tanulják.

² Ne tévesszen meg bennünket, hogy az egyensúlyban nem minden szereplő kereskedik egymással. Ettől a találkozás lehetősége – a kommunikáció – még fennáll.

csodálkozhatunk, ha egy-egy szereplőre ilyen látszólag ellentmondó eredmények jönnek ki.

Nézzük, milyen gráfokkal végeztük a szimulációt. Mivel nagyon sok futtatást végeztünk, ezért korlátoznunk kellett a szereplők számát. Mindkét modellben egy típust 100 szereplő képviselt, ezért az első modellben $n = 300$, a másodikban $n = 500$. Az összefüggőség biztosításának minimális k értéke 2, maximális pedig $n - 1$. A két szélsőséges érték szélsőséges megoldásokat ad, mivel $k = 2$ esetén igen korlátozott a cserelehetőség, $k = n - 1$ mellett pedig az eredeti modellt kapjuk vissza. Kíváncsiak voltunk azonban az eredményekre k függvényében. Természetesen a legfontosabb kérdés az volt, hogy azonos n és k mellett lesz-e különbség a rács-gráfok, a véletlen gráfok és a kisvilág gráfok között. Továbbmenve, a 7.2. fejezetből ki fog derülni, hogy az ezek közötti átmenetet is modellezni tudtuk.

Fontos megjegyezni azt, hogy a gráfok kialakításánál a csomópontokat a szereplő-típusoknak megfelelő sorrendben hagytuk. Azaz egy gyűrű esetén ($d = 1$, $k = 2$) először az 1. típusú szereplők vannak összekötve, majd az utolsó 1. típusú szereplő 50% eséllyel találkozhat az első 2. típusú szereplővel, stb. Rács-gráfok esetén ez igen korlátozott cserélési lehetőségekhez vezet, de ha nem élünk ezzel a szabályossággal, hanem véletlenszerűen számozzuk a szereplőket, akkor nem lett volna drasztikus különbség a rács-gráf és a véletlen gráf struktúra között.

Végül a szereplők a *megerősítéses tanulás* segítségével optimalizálták cselekvéseiket. A *döntési fa* és a *tiszta genetikus algoritmus* itt azért nem működik, mert az azonos típusú szereplők számára nem biztos, hogy azonos stratégia optimális a kommunikáció struktúra miatt.

7.2. Kisvilág struktúra alkotás

Két algoritmust mutatunk be a kisvilág típusú gráfok előállításához. Mindkét algoritmusnak van egy szabad paramétere, az elsőnek α , a másodiknak β . Mindkét modell esetében a paramétereknek csupán egy kis szakaszában adódik kisvilág struktúra. Ezeket az értékeket kell meghatároznunk. Mivel a struktúra sztochasztikusan áll elő, ezért a későbbi reprodukcióknál minden esetben ellenőriztük a kisvilág tulajdonságot. A most ismertetésre kerülő eljárásokból származó gráfokat érdemes részletesen megvizsgálni, elemezni, és a két különböző modell eltéréseit megállapítani. Erre most nem vállalkozunk, sőt a szakirodalomból sem ismerünk kellően részletes áttekintést. A Kiyotaki-Wright modell kommunikáció struktúrájának vizsgálatához azonban elegendőek lesznek azok a megállapítások, amelyeket ebben az alfejezetben teszünk.

α -gráfok. Legyen adott n és k . Feladat egy olyan irányítatlan, súlyozatlan, egyszerű gráf generálása, amely a megadott paraméterekkel rendelkezik. Az eljárás a következő:

1. Válasszunk ki véletlenszerűen egy i csomópontot.
2. Minden más j csomópontra számítsuk ki az R_{ij} értéket a (7.1)-nek megfelelően, kiegészítve azzal a feltétellel, hogy $R_{ij} = 0$, ha i és j már össze vannak kötve.
3. Normáljuk le R_{ij} változót, azaz $P_{ij} = R_{ij} / \sum_{l \neq i} R_{il}$. Legyen tehát P_{ij} az a valószínűség, amellyel ebben a periódusban i csomópontot j -vel összekötjük.
4. A 2.6. tétel segítségével határozzuk meg azt a j^* csomópontot, amellyel i -t összekötjük, és kössük őket össze.
5. Folytassuk addig, amíg a kívánt $M = n \cdot k / 2$ értéket el nem értük.

$$R_{ij} = \begin{cases} 1, & m_{ij} \geq k \\ \left(\frac{m_{ij}}{k}\right)^\alpha (1-p) + p, & k > m_{ij} > 0 \\ p, & m_{ij} = 0, \end{cases} \quad (7.1)$$

ahol: R_{ij} = két csomópont közötti összeköttetés súlya (zérus ha össze vannak kötve),
 m_{ij} = i és j szomszédjainak összege,
 k = a gráf átlagos foka,
 p = két tetszőleges csomópont közötti él meglétének valószínűsége,
 α = generálási paraméter, $0 \leq \alpha < \infty$.

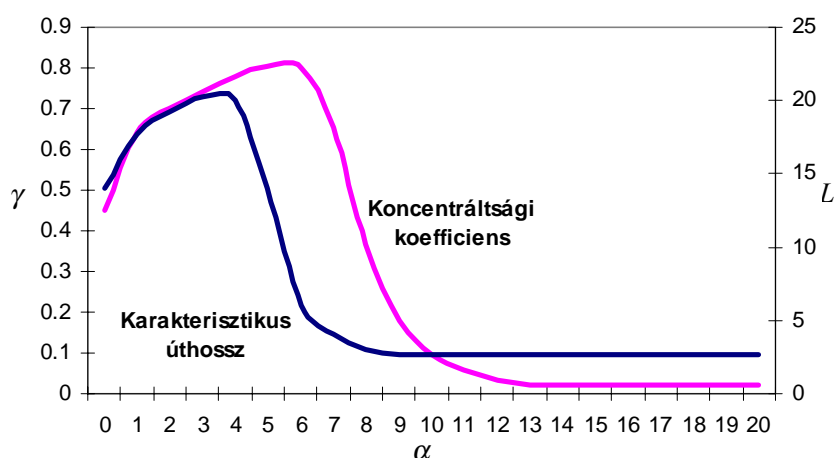
Az eljárásnál egyedül arra kell vigyáznunk, hogy az 1. pontban véletlenszerűen kiválasztott i csomópontot addig nem választhatjuk újra, míg az összes többi j csomópontot egyszer nem választottuk ki indulópontnak.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen struktúrák adódhatnak α változtatásával. Általánosságban elmondható, hogy különböző n és k értékek esetén nagyon eltérő változatokat kaphatunk. Mostani alkalmazásunk során azonban olyan gráfokat keresünk, amelyeknél nagy valószínűséggel garantálható az összefüggőség, ugyanakkor a gráf ritka, vagyis $1 \ll k \ll n$.

Kezdjük az $\alpha = 0$ eset vizsgálatával. Ekkor egy már fennálló összeköttetés (struktúra) nagyon erősen befolyásolja a struktúra további alakulását. Ennek következtében ha az induló gráfnak egyetlen éle sincs, nagy valószínűséggel α kis értéke esetén nem kapunk összefüggő gráfot. Számos numerikus kísérletet végezve azt tapasztaltuk, hogy például $n = 500$, $k = 10$ esetén $\alpha < 5$ mellett nem kapunk összefüggő gráfot. Mivel nem összefüggő gráfokat összefüggő gráfokkal összehasonlítani igen nehéz, ezért érdemes úgy módosítani az eljárást, hogy mindenképpen garantálni tudjuk az összefüggőséget.

Ezt két módon tehetjük meg. Egyrészt elképzelhető, hogy az eljárás után meghatározzuk azt a minimális számú él összeköttetést, amely összefüggővé tenné a gráfot, és véletlenszerűen kiválasztunk ugyanennyi „felesleges”, tehát az összefüggőséget nem befolyásoló élt. Ezeket megcserélve összefüggő gráfot kapunk. Ez egy nagy gráf esetén roppant időigényes eljárás. A másik lehetőség, hogy eleve egy összefüggő állapotból indulunk. Fontos, hogy ez az alapállapot úgy legyen összefüggő, hogy a minimális k fokú legyen, ugyanakkor ne legyen benne megkülönböztetett szerepű csomópont. Ennek egyetlen gráf, a *gyűrű* felel meg.³ (Ami nem más, mint egy $d = 1$, $k = 2$ típusú rács-gráf.)

Nézzük most a másik szélsőséges esetet, amikor $\alpha = \infty$. Ekkor nyilván $P_{ij} = p$, (ha nincs i és j összekötve,) amiből az következik, hogy így egy $G(n,p)$ véletlen gráfot kapunk. Az összefüggőség biztosításához nyilván nem kell az induló állapot, hiszen elegendően nagy k esetén ez biztosított. (Ld.: Erdős és Rényi [1959].) Ugyanakkor ha egy gyűrűből kiindulva alkalmazzuk $\alpha = \infty$ mellett az eljárást, akkor a véletlen gráfoktól eltérő tulajdonságú, majdnem véletlen gráfot kapunk. Annak a valószínűsége ugyanis, hogy egy véletlen gráfban alacsony p mellett megjelenik egy minden pontot összekötő gyűrű zérus. Ennek ellenére számos szimulációban meghagytuk a gyűrűt kiindulásként, mivel a megfigyelt tulajdonságokat nem befolyásolta nagy mértékben. Tapasztalataink azt mutatták, hogy $\alpha > 10$ esetén már a véletlen gráf tulajdonságok dominálnak.



7.1. ábra: Az α -gráf jellemző statisztikái

Vizsgáljuk most a két szélsőséges érték közötti tartományt. A megfigyelt változók legyenek a karakterisztikus úthossz (L) és a koncentráltási koefficiens (γ). Minden esetben $n = 500$, $k = 10$ és a kiinduló struktúra egy gyűrű volt. Azt tapasztaljuk, hogy

³ Megjegyezzük, hogy néha a gyűrű helyett bonyolultabb rács-gráfokból, esetleg fákból is ki lehet indulni. Ezeket nem vizsgáltuk, a továbbiakban mindig gyűrű alapra építkeztünk.

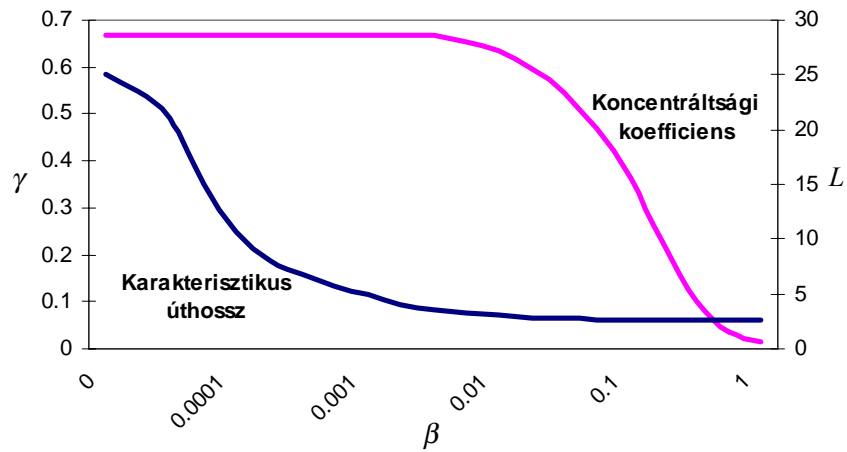
létezik egy olyan tartomány, ahol a kialakult gráfra kisvilág struktúra jellemző, hiszen a nagy koncentrátság mellett kicsi a karakterisztikus úthossz (7.1. ábra).

β -gráfok. Az α -gráfok segítségével sikerült kisvilág struktúrát létrehozni. Ugyanakkor az α paraméter változtatásával nem a tökéletes rács-gráf és véletlen gráf világ között mozgunk, mivel mindkettőt erőteljesen befolyásolja az induló struktúra. Olyan módszert kellene megadni, amelynek a két extrém paraméter-beállítása pontosan rács-gráf és véletlen gráf struktúrát ad, továbbá nem merül fel probléma az összefüggőséggel kapcsolatban. Ezt valósítja meg a következő eljárás, amely ismét egy $G(n,k)$ gráfot állít elő:

1. Induljunk ki egy 1 dimenziós rács-gráfból, amelynek mérete a kívánt n , foka pedig a megadott k érték. A következő lépésekben véletlenszerűen újrakötünk bizonyos pontokat.
2. Minden körben véletlenszerűen választunk egy i csomópontot. Kiválasztjuk hozzá az óramutató járása szerinti első szomszédját ($i, i + 1$).
3. Ezután β valószínűséggel kitöröljük ezt az ($i, i + 1$) élt, és helyette létrehozunk egy új (i, j) élt, amire teljesülnie kell, hogy (i, j) még nem létezett, illetve $i \neq j$. A feltételnek eleget tevő j -k közül azonos valószínűséggel választunk Ugyanakkor $1 - \beta$ valószínűséggel nem történik semmi változtatás.
4. Ha minden i csomópontot kiválasztottunk a körben, akkor újrakezdjük az eljárást a 2. ponttól, azzal a különbséggel hogy immár a második szomszédokat ($i, i + 2$) vizsgáljuk, stb.
5. Összesen $k / 2$ kör alatt minden élre sor kerül egyszer, ezzel befejeződik az eljárás.

Figyeljük meg, hogy ezzel a módszerrel $\beta = 0$ esetben nem történik semmi, azaz egy tökéletes 1-dimenziós rács-gráfot kapunk n, k paraméterekkel. Ha viszont $\beta = 1$, akkor egy véletlen gráfot kapunk. Sajnos ez a véletlen gráf sem teljesen szabályos $G(n,p)$, ugyanis minden csomópont garantáltan rendelkezik legalább $k / 2$ éllel. Ez azonban nem fogja befolyásolni későbbi számításainkat, és az általunk vizsgált statisztikák tükrében nem mutatkozik különbség a $\beta = 1$ gráf és a véletlen gráfok között.

Nézzük mi a helyzet a $0 < \beta < 1$ értékek esetén. Csakúgy, mint az α -gráfok tanulmányozása során, most is $n = 500, k = 10$. Az ábrázoláshoz β értékeit logaritmikusan skáláztuk, mivel a lényeges változások β alacsony értékeinél történtek, és $\beta > 0.1$ esetén már a véletlen gráf tulajdonságok dominálnak. Ismét találunk egy olyan intervallumot, ahol elmondható, hogy a generált gráf kisvilág tulajdonságú. (Ld.: 7.2. ábra.)



7.1. ábra: A β -gráf jellemző statisztikái

7.3. Kísérletek és következtetések

Utolsó feladatunk az, hogy a szimulációs módszertan segítségével megvizsgáljuk, okoz-e különbséget a kommunikációs struktúrák bevezetése a modellek viselkedésében. A vizsgálatokat mind az α , mind a β típusú gráfoknál elvégeztük, az eredmények nagyon hasonlók voltak, de a β -gráfok kedvező rács-gráf struktúrája miatt az eredményeket csak a β -gráfokra mutatjuk be. Fontos volt még a k paraméter függvényében való vizsgálódás is, hiszen tudjuk, hogy e tekintetben is két fontos extrém kísérlet között helyezkedünk el. Ugyanis a $k = n - 1$ eset a teljes gráfot jelenti, azaz az eredeti Kiyotaki-Wright modellt, a $k = M = 0$ viszont a csere nélküli gazdaságot, amelyben a kiinduló jószágeloszlás $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ nem változik. A további paramétereket a 7.1. táblázat tartalmazza:

Paraméterek	Fundamentális	Spekulatív
n	300	300
c_1	0.1	0.1
c_2	1	1
c_3	20	20
U	600	1000
D	500	500
β	0.99	0.99

7.1. táblázat: A szimulációs modellek paraméterei

A háromjóságos modell esetén azt tapasztaltuk, hogy alacsony k értékekre a modellben nem zajlik le csere. Ahogy azonban növeljük k értékét, úgy lesznek egyre aktívabbak a szereplők. Amikor rács-gráf struktúrát választottunk, sokáig nem történt változás, majd k viszonylag magas értékétől fogva lassan, eljutott a gazdaság az eredeti egyensúlyi állapotba. Fontos azonban azt észrevenni, hogy hiába növeljük k értékét, még a $k = n - 2$ esetén is kismértékű, de szignifikáns különbség tapasztalható. A rács-gráf struktúra nem volt különösebben érzékeny a két különböző típusú egyensúly megtalálására, azaz hasonló sikerrel alakult ki spekulatív megoldás, mint fundamentális.

Amikor $\beta = 1$, tehát majdnem véletlen gráfokkal modelleztünk, azt tapasztaltuk, hogy már viszonylag alacsony k értékek esetén beindul a gazdaságban a csere. Sok esetben kialakulnak a megfelelő stratégiák, de arra figyeltünk fel, hogy a kialakuló egyensúlyok igen érzékenyek. Egy-egy újabb szimuláció más-más eredményeket adott a végső eloszlást tekintve. Ahogy tovább növeltük k értékét, úgy csökkent egyre jobban ez a véletlen ingadozás. Igen érdekesnek mondható, hogy amíg a fundamentális egyensúlyt könnyen megtalálták a szereplők viszonylag alacsony k esetén is, addig a spekulatív egyensúly megtalálása kizárólag a teljes gráf esetén ($k = n - 1$) sikerült.

A legérdekesebb eredményeket akkor kaptuk, amikor kisvilág gráfokat alkalmaztunk, méghozzá $\beta = 0.005$ érték mellett. Alacsony k értékek mellett nem jött létre kereskedés. Egy meghatározott érték után ($k = 6$) robbanásszerű változás következett be. Hirtelen megindultak a cserék és a gazdaság könnyedén eljutott a megfelelő egyensúlyi állapotba. Alig valamivel magasabb k értéknél már az volt a jellemző, hogy stabil eloszlások alakulnak ki, nem úgy mint az igen érzékeny véletlen gráf modellek esetében. Jellemző volt még az is, hogy nem túl magas k értékek esetén már nem csak a fundamentális, hanem a spekulatív egyensúlyt is sikerült megtalálni.

A tanulás szempontjából is igen érdekes következtetéseket lehet levonni. Általánosságban elmondható, hogy minél több lehetséges cserepartnerre akad egy szereplőnek, annál nehezebb a tanulás, azaz annál tovább tart az egyensúlyhoz való konvergencia. Azonos k értékek mellett a leggyorsabban a rács-gráf struktúra tanult, ezt követte nem nagy lemaradással a kisvilág struktúra. Végül általában igen hosszú konvergenciával került egyensúlyi állapotba a véletlen gráf modell.

Válasszunk ki egy a ritkaság feltételnek megfelelő, és közgazdaságilag is indokolható fokszámot, legyen $k = 10$. Hasonlítsuk össze az eredményeket még egyszer. Amennyiben rács-gráf típusú a kommunikációs struktúra, úgy nem alakul ki mindent átfogó cserekereskedelem. Lesznek elszigetelt szereplők, akik nem képesek a számukra szükséges jószághoz hozzájutni. Így a velük szomszédos szereplők esélyeit is rontják. Nem alakul ki egyértelmű csereeszköz, és a társadalom összhasznossága is jelentősen kevesebb, mint az eredeti modell esetén. Kisvilág gráf esetén az átlagos 10 cserepartner

biztosítja, hogy majdnem mindig az eredeti modellnek megfelelő eredmény alakuljon ki. Ráadásul könnyebbé válik a tanulás, gyorsabb a konvergencia. Néha azonban előfordul, hogy egy spekulatív modell keverék eloszlást mutat, ahol egyes szereplők nem tudják megtanulni a spekulatív viselkedést. (Ebben az esetben inkább az feltételezhető, hogy a véletlen partnerek aránya olyan, hogy az adott szereplőnek mégis a fundamentális stratégia a kedvezőbb.) Végül a véletlen gráf típusú kommunikációs struktúra jelentősen ingadozó, lassan konvergáló és a spekulatív egyensúlyt soha el nem érő eredményt adott.

8. Fejezet

Összefoglalás

Az értekezés megírásakor kitűzött legfontosabb cél az volt, hogy bemutassuk, hogyan lehet analitikusan nehezen kezelhető közgazdasági problémákat és modelleket a szimulációs módszertan segítségével megoldani, illetve a megoldáshoz vezető utat megtalálni. A cél megvalósításához a legegyszerűbben járható utat használtuk, azaz az értekezés első részében részleteztük a szimulációs és egyéb numerikusan alkalmazható módszereket, a másik részében pedig kiválasztottunk egy közgazdasági modellt, és megmutattuk a módszertan alkalmazásának lehetőségeit.

Annak ellenére, hogy az értekezés legfontosabb érdeme, hogy elsőként tárgyalja a hazai szakirodalomban a modern közgazdasági-szimulációs elméletet, majdnem minden fejezetben található olyan rész, amely a szerző önálló új eredménye, és amelyek valamilyen formában publikálásra kerültek, vagy publikálva lesznek. Adott helyen ezeket részleteztük, most az összefoglalásban ezért részletesebb hivatkozás nélkül soroljuk fel.

A második fejezet a szimulációs módszertant ismerteti. Ez egy olyan terület, ahol nagyon nehéz új eredményeket produkálni, hiszen magát a módszertant gyakorlatilag a számítógép megjelenése óta alkalmazzák és fejlesztik a legkülönbözőbb tudományterületek kutatói. Eredmények:

- a módszertan közgazdasági problémák megoldásához való alkalmazása, a definíciók és a legfontosabb eljárások tisztázása és bemutatása,
- a normális eloszlás generálásával kapcsolatos gyors konvergenciát adó módszer (2.9. Tétel) bizonyítása,
- a kontrollváltozós módszer kiterjesztett alkalmazása torzítatlanságának bizonyítása (2.12. Tétel).

A harmadik fejezet az evolúciós módszertanról szól. Ezen a területen nincsenek a szerzőnek saját bizonyításai, viszont a hazai szakirodalomban számos a témát bemutató és népszerűsítő publikációja jelent meg. Saját eredménynek tekinthető emellett:

- az evolúciós eszközök alkalmazási feltételeinek megadása (ajánlása).

A negyedik fejezet a szimulációs és evolúciós módszerek összekapcsolását és közgazdaság elméleti alkalmazását megvalósító ACE módszertanról szól. Erre a rövid fejezetre azért volt szükség, hogy meggyőződjünk ennek a tudományterületnek az

újdonságáról, valamint a nemzetközi közgazdasági irányzatok között betöltött szerepéről.

Az ötödik fejezettel a Kiyotaki-Wright modell bemutatása található. Saját eredmények:

- a fundamentális stratégiákról állított sejtés (5.1. Sejtés),
- a döntési fa módszer kidolgozása a Kiyotaki-Wright modell szereplői magatartásának optimalizálására,
- a fundamentális és spekulatív egyensúlyok között elhelyezkedő kevert egyensúlyi stratégiák numerikus meghatározása,
- a kiterjesztett Kiyotaki-Wright modellek egyensúlyi állapotának numerikus meghatározása különböző tanulási eljárások alkalmazásával.

A hatodik fejezet a gráfelmélet segítségével vizsgálja a sokszereplős közgazdasági modellek kommunikáció struktúráit. A Szerző ezen a területen empirikus kutatásokat végzett, illetve szimulációs futtatások segítségével megerősítette a szakirodalom által ajánlott statisztikai mérőszámokat bizonyos véletlen gráfok esetében. Eredmények:

- a kisvilág tulajdonság igazolása egy hazai Internet szolgáltató ügyfeleinek gráfján,
- a nagyméretű gráf n -dimenziós megjelenítését megvalósító algoritmus megadása és az algoritmus helyességének bizonyítása,
- egy fertőzési probléma megfogalmazása és megoldása nagy méretű gráfokon.

Végül a hetedik fejezetben gyakorlatilag felhasználjuk az összes korábbi fejezet állításait és tapasztalatait azért, hogy egy különleges kommunikáció struktúrájú Kiyotaki-Wright típusú közgazdasági modell megoldásait megkapjuk. Ez a fejezet teljes egészében a Szerző saját eredményének tekinthető.

Irodalomjegyzék

Alchian, A. A. (1950): Uncertainty, evolution, and economic theory, *Journal of Political Economy*, 58., pp 211-222.

Anderson, T. W. (1958): *Multivariate Statistical Analysis*, Wiley.

Avramidis, A. N. – Wilson, J. R. (1996): Integrated Variance Reduction Strategies for Simulation, *Operation Research*, Vol. 44. No. 2., márc-ápr., pp327-346.

Axelrod, R. (1997a): Advancing the Art of Simulation in the Social Sciences, in R. Conte, R. Hegselmann and P. Terna (eds.), *Simulating Social Phenomena* (Berlin: Springer) pp. 21-40.

Axelrod, R. (1997b): *The complexity of cooperation: agent-based models of competition and collaboration*, Princeton University Press, New Jersey.

Baker, J. E., (1985): Adaptive selection methods for genetic algorithms, *Proc. 1st Int. Conf. on Genetic Algorithms and their Applications*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ.

Balla K., Benedek G., (1999): Riccati Extended Forms, *6th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations*, aug.

Barto A. G., Sutton R. S. (1998): *Reinforcement Learning: An Introduction*, MIT Press, Cambridge, MA.

Basci, E. (1999): Learning by imitation, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 23, pp. 1569-1585.

Berry, M. J. A., Linoff, G. S. (2000): *Mastering Data Mining*, John Wiley & Son, Inc., New York.

Benedek G., (1998): *Opcióárazás tranzakciós költségek mellett*, Diplomamunka, Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem, Budapest.

Benedek G. (1999a): Opcióárazás numerikus módszerekkel, *Közgazdasági Szemle*, október, 905-929.

Benedek G., (1999b): Mesterséges intelligencia az üzleti életben – Marketing akciók hatékonyságának vizsgálata statisztikai és Data Mining módszerekkel, *Vezetéstudomány*, november.

Benedek G. (2000): Evolúciós alkalmazások előrejelzési modellekben – I., *Közgazdasági Szemle*, december, 988-1007.

Benedek G. (2001): Evolúciós alkalmazások előrejelzési modellekben – II., *Közgazdasági Szemle*, január, 18-30.

Benedek G., Megyeri K. (2000): Egy dinamikus pénzmodell, Gazdaságmodellező Konferencia ???.

Benedek G., Molnár I. (1996): *Sorban állási rendszerek vizsgálata szimulációval*, Multimédia CD-Rom.

Benedek G., Kóbor Á., Pataki A. (2001): Multivariate Eliptic VaR, elkészülőben. (Rövidebb, magyar nyelvű változat: Benedek G., Kóbor Á., Pataki A. (2002): A kapcsolat-szorosság mérése m-dimenziós kopulákkal és értékpapírportfólió-alkalmazások, *Közgazdasági Szemle*, február, 105-125.)

Bigus, J. P. (1996): *Data mining with neural networks: solving business problems*, McGraw-Hill, New York.

Black, F., Scholes, M. (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81. May, pp. 637-654.

Blum, A. L., Rivest, R. L. (1992): Training a 3node neural network is NP-complete, *Neural Networks*, 5 (1), pp. 117-127.

Bollobás B. (1985): *Random Graphs*, Academic, London.

Boyle, P., Broadie, M., Glasserman, P. (1997): Monte Carlo methods for security pricing, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 21., 1267-1321o.

Bratley, P., Fox, B., Schrage, L. (1987): *A Guide to Simulation*, Second Edition, Springer-Verlag, New York.

Cho, H. J., Cho, Y. K. (1997): *DEVS-C++ Reference Guide*, Department of Electrical and Computer Engineering, University of Arizona.

- Cox, J., Ross, S. (1976): The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes, *Journal of Financial Economics*, Vol. 3. March, pp. 145-166.
- Cox, J., Rubinstein, M., Ross, S. (1979): Option Pricing: A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics*, Vol. 7. August, pp. 229-263.
- Cybenko, G. (1989): Approximation by superpositions of a sigmoid function, *Mathematics of Controls, Signals, and Systems*, 2, pp303-314.
- Cybenko, G. (1988): *Continues valued neural networks with two hidden layers are sufficient*, Technical report, Department of Computer Science, Tufts University, Medford, Massachusetts.
- Davis, L., (1991): *Handbook of Genetic Algorithms*, Van Nostrand Reinhold, New York, NY.
- Duffy, J. (2001): Learning to speculate: Experiments with artificial and real agents, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25, pp. 295-319.
- Eaton, M., Griffith, N., (2000): *Artificial Intelligence*, Course Notes, University of Limerick.
- Erdős P, Rényi A. (1959): On random graphs, *Publicationes Mathematicae*, Debrecen.
- Fletcher, R., (1980): *Practical Methods of Optimization*, Wiley, New York.
- Fogarty, T. C., (1989): Varying the probability of mutation in the genetic algorithms, *Proc. 3rd Int. Conf. on Genetic Algorithms and their Applications*, George Mason University.
- Fu, L., (1994): *Neural networks in computer intelligence*, McGraw-Hill, Inc., USA.
- Grefenstette, J. J., (1986): Optimisation of control parameters for genetic algorithms, *IEEE Trans. On Systems, Man and Cybernetics*, Vol. SMC-16, No. 1.
- Grossman, J. W., Ion, P. D. F. (1995): On a portion of the well-known collaboration graph, *Congressus Numeratum*, 108.
- Hahn F.H. (1965): On Some Problems of Providing the Existence of an Equilibrium in a Monetary Economy, In Clower ed.: *Monetary Theory*. Penguin Modern Economics Readings, 1970. Harmondsworth, Penguin.

- Hayek, F. A. (1948): *Individualism and Economic Order*, University of Chicago Press, Chicago.
- Hebb, D. O. (1949): *The Organization of Behavior*, Wiley, New York.
- Herdle W., Kirman A. (1994): Non classical demand: a modell-free examination of price quantity relation in the Marseille fish market, *Journal of Econometrics*.
- Himanen, V., (1998): *Neural networks in transport applications* / edited by V. Himanen, Ashgate, Aldershot.
- Hofstadter, D. R. (1998): *Gödel, Escher, Bach: Egybefont Gondolatok Birodalma*, Typotex Kiadó, Budapest.
- Holland, J. H. (1992): *Adaption in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Application to Biology, Control, and Artificial Intelligence*, 2nd Edition, MIT Press, Bradford Books, Cambridge, MA.
- Holland, J. H., (1975): *Adaptation in natural and artificial systems*, University of Michigan Press, Ann Arbor, MI.
- Holmes, J. N., (1993): *Speech synthesis and recognition*, Chapman and Hall, London.
- Huber, M. (1996): Estimating the average shortest path length in a graph, *Technical report*, Cornell University.
- Hull, J. C. (1993): *Options, Futures, and other Derivative Securities*, Second edition, Prentice-Hall International, Inc., Engle Wood Cliffs, New Jersey.
- Hull, J. C., White, A. (1987): The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities, *The Journal of Finance*, July, 281-300.
- Hull, J., White, A. (1988): The Use of the Control Variate Technique in Option Pricing, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 23, No. 3., Sept., 237-251o.
- Hunyadi L., Vita L. (1991): *Statisztika I-II*, Aula, Budapest.
- Institute of Electrical an., (1989): *Neural network based speech recognition systems*, Piscataway, N.J. : I.E.E.E. (Technical tutorial seminar).

- Jevons, W. S., (1875): *Money and the Mechanism of Exchange*, London, Appleton.
- Judd, J. S. (1990): *Neural Network Design and the Complexity of Learning*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Káta I. (1981): *Szimulációs módszerek*, ELTE Tankönyvkiadó, Budapest.
- Kehoe T. J, Kiyotaki N., Wright R. (1993): More on money as a medium of exchange, *Economic Theory* 3, pp. 297-314.
- Kirman, A. (1999): Some Observations in Interaction in Economics, *Working Paper*, Institut Universitaire de France, Marseille.
- Kiyotaki, N., Wright R. (1989): On money as a medium of exchange. *Journal of Political Economy*, 97, pp. 924-954.
- Knuth, D. E. (1987): *A számítógép-programozás művészete 1.: Alapvető algoritmusok*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
- Knuth, D. E. (1987): *A számítógép-programozás művészete 2.: Szeminumerikus algoritmusok*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
- Leader I., (2001): Friends and Strangers, *+Plus*, Issue 16., <http://pass.maths.org.uk/issue16/features/ramsey>, letöltve 2001. okt. 3.
- Lehmer, D. H. (1951): *1. Proc. 2nd Symp on Large-Scale Digital Calculating Machinery*, Harvaed University Press, Cambridge, 141-146. o.
- Marimon, R., McGrattan, E., Sargent, T. J. (1990): Money as a medium of exchange in an economy with artificially intelligent agents, *Journal of Dynamics and Control* 14, 329-373.
- Megyeri K. (2001): A pénz mint általános csereeszköz modellezése, *Közgazdasági Szemle*,
- Merton, R. (1973): Theory of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4., 141-183. o.
- Michalewicz, Z., (1992): *Genetic algorithms + Data structures = Evolution programs*, Springer-Verlag, New York, NY.

- Minsky, M. L., Papert, S. (1988): *Perceptrons: An Introduction to Computational Geometry* (expanded edition). MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Minsky, M. L., Papert, S. (1969): *Perceptrons: An Introduction to Computational Geometry* (first edition). MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Móczár J. (1980): Indekompozálhatóság kiterjesztése a gazdaság lineáris modelljeiben, *Sigma*, 1-2. sz.
- Molnár I. (1990): *Differenciálegyenletek numerikus megoldásáról*, Egyetemi jegyzet, BKE.
- Móry F. T., Székely G. (szerk.) (1986): *Többváltozós statisztikai analízis*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
- Munzner, T. (1997): Laying Out Large Directed Graphs in 3D Hyperbolic Space, *Working Paper*, Stanford University. (Letölthető: <http://graphics.stanford.edu/papers/h3/html.nosplit/h3.html>)
- Nelson, B. L. (1990): Control Variate Remedies; *Operations Research*, Vol. 38. No. 6., nov-dec., pp974-992.
- Pataki A. (2001): *A többváltozós Saphiro-Wilk tesztek vizsgálata*, Ph.D. disszertáció, BKÁE, Budapest.
- Pham, D. T., Karaboga, D., (1998): *Intelligent optimisation Techniques*, Springer-Verlag, London.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P. (1992): *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press.
- Quandt, R., (1983): Computational Problems and Methods, in Griliches, Z., Inrigator, M., eds., *Handbook of Econometrics*, North-Holland, Amsterdam.
- Rényi A. (1973): *Valószínűségszámítás*, Tankönyvkiadó, Budapest.
- Rumelhart, D. E., Hinton, G. E., Williams, R. J., (1986): Learning internal representations by error propagation, *Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructures of Cognition*, Vol. 1., Cambridge, MA: MIT Press, pp318-362.

Russell, S. J., Norvig, P., (2000): *Mesterséges intelligencia modern megközelítésben*, Panem, Budapest.

Sarlós T. (2001): A Kiyotaki-Wright modell, Évfolyam dolgozat, Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem.

Schaffer, J. D., Caruana, R. A., Eshelman, L. J., Das, R., (1989): A study of control parameters affecting on-line performance of genetic algorithms for function optimisation, *Proc. 3rd Int. Conf. on Genetic Algorithms and their Applications*, George Mason University.

Schumpeter, J. A. (1942): *Capitalism, Socialism, and Democracy*, Harper and Row, New York.

Sefton, J. A. (2000): A solution method for consumption decisions in a dynamic stochastic general equilibrium model, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 24., 1097-1119 o.

Simonovits A., (1998): *Matematikai módszerek a dinamikus közgazdaságtanban*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

Smith, A. (1937): *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations*, Cannan Edition, American Modern Library Series, New York.

Staudinger, S. (1998): Money as a medium of exchange: An analysis with genetic algorithms, Working paper, Technical University, Viena.

Tesfatsion, L. (2001): Introduction to the special issue on agent-based computational economics, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25, pp. 281-293.

Watts, D. J. (1999): *Small Worlds: The Dynamics of Networks between Order and Randomness*, Princeton University Press, New Jersey.

Whitely, D., Hanson, T., (1989): Optimising neural networks using faster, more accurate genetic search, *Proc. 3rd Int. Conf. on Genetic Algorithms and their Applications*, George Mason University.

Zalai E. (2000): *Matematikai közgazdaságtan*, KJK-Kerszöv, Budapest.