A HOZAMGÖRBE TANULÁSI HIPOTÉZISE

Romhányi Balázs

PÉNZÜGYTAN TANSZÉK

Témavezető: Király Júlia

Bírálóbizottság:

Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem

Közgazdasági szakosítású doktori program

A HOZAMGÖRBE TANULÁSI HIPOTÉZISE

Ph.D. értekezés

Romhányi Balázs

Budapest 2001

A HOZAMGÖRBE TANULÁSI HIPOTÉZISE

Romhányi Balázs

2001

KIVONAT

A hozamgörbe várakozási hipotézisének tapasztalati kudarca szükségszerűen azt jelenti, hogy a sztochasztikus diszkonttényező valószínűségi eloszlására vonatkozó várakozások időben változnak. E várakozásokat olyan tényezők is befolyásolhatják, amelyek nem szerepelnek a jegybanki reakciófüggvényben, tehát nem hatnak közvetlenül a rövid lejáratú kamatlábra. Feladva a pénzügytan affin és piaci kamatláb-modelljeinek azt a feltételezését, hogy a kamatlábak és a sztochasztikus diszkonttényező innovációinak valószínűségi eloszlása normális, levezetünk egy általános faktor-modellt, melyben a várakozási hipotézis szerepét az arbitrázsmentesség egzakt feltétele veszi át. Ezáltal a kamatlábak modellezésének problémája a várakozások modellezésének problémájává alakul, melyben jelentős szerephez juthat a racionális tanulás folyamata. Bemutatjuk, hogy a várakozási hipotézist cáfoló empirikus teszt-eredmények hogyan vezethetők le e modell következményeiként.

(*JEL* E43 E52 F31)

Kulcsszavak: kamatlábak, hozamgörbe, monetáris politika

Romhányi Balázs
Pénzügyminisztérium
Cím: Győri út 2/a
1123 Budapest
Tel: (361)-3751507 (otthon)
(361)-3275996 (munkahely)
Fax: (361)-327-5656
e-mail:balazs.romhanyi@pm.gov.hu

Tartalomjegyzék

A monetáris politika a fejlett országok többségében egy rövid lejáratú kamatláb segítségével, a transzmissziós mechanizmuson keresztül befolyásolja a gazdaság működését. A transzmissziós mechanizmus első fázisa a rövid lejáratú kamatláb hatása a hosszabb lejáratú kamatlábakra, azaz a hozamgörbére. A rövid és hosszú lejáratú kamatlábak közti kapcsolat hagyományos megfogalmazása a várakozási hipotézis, amely szerint a hosszú lejáratú kamatlábak a pillanatnyi és várt rövid lejáratú kamatlábak átlagaként adódnak. Ha a monetáris hatóság az eszközként használt kamatlábat valamiféle szabály szerint alakítja makrogazasági mutatók függvényében, akkor e makromutatók előrejelzése alapján a piac a rövidlejáratú kamatláb várható alakulását is becsülheti. Ez a becslés szolgálhat a hosszú lejáratú kamatlábakba foglalt piaci várakozások alapjául. Ha viszont a hozamgörbe tartalmazza a piac várakozásait a makromutatók vonatkozásában, akkor a jegybank, aki igyekszik a makrogazdasági folyamatokat megelőzve – mintegy előre tekintve – alakítani politikáját, megkísérelheti kinyerni a makromutatókra vonatkozó várakozásokat a hozamgörbéből.

A probléma ezzel a gondolatmentettel kapcsolatban többrétű. Egyrészt problémát okoz, hogy a várakozási hipotézis a gyakorlatban egyáltalán nem látszik igazolódni, tehát a transzmissziós mechanizmus első láncszeme már gyenge. Másrészt problémát okoz, hogy nincs semmiféle konszenzus a gazdaság működését megfelelően leíró modell, következésképp a hosszú lejáratú kamatlábaknak a gazdaságra kifejtett hatását illetően sem. Ez részben annak is tulajdonítható, hogy még nem állnak rendelkezésre kellően hosszú makrogazdasági idősorok, ahhoz képest például, hogy milyen ritkán fordulnak elő jelentős, rendkívüli események, melyek valószínűségét emiatt csak igen nagy bizonytalansággal becsülheti a piac. Harmadrészt probléma, hogy a piac várakozása nem feltétlenül helyes, mivel az információhiány teret engedhet utóbb (vagy legalábbis a vizsgált időszakban) nem beigazolódó piaci várakozásoknak, peso-problémáknak is.

A pénzügytan szokásos affin és piaci kamatláb modelljei – első sorban matematikai kezelhetőségi megfontolásokból – feltételezik, hogy a kamatlábakat alakító sokkok normális eloszlásúak. Ez a megszorítás a tapasztalatokkal nem feltétlenül van teljes összhangban, viszont nem is nélkülözhetetlen.

E dolgozatban egy olyan általános többváltozós faktor-modellt mutatunk be, amely

1. a teljes hozamgörbét modellezi,

2. lehetőséget ad a jegybanki reakciófüggvényben megjelenő makrováltozók figyelembe vételére
3. lehetőséget ad a piaci várakozások fundamentális okokkal nem magyarázható részét megragadó látens változók figyelembe vételére
4. nem tételezi fel az egyes faktorok valószínűségi eloszlásának normalitását és
5. alkalmas több, a várakozási hipotézist cáfoló empirikus teszt eredményeinek interpretálására.

A dolgozat 1. részében elméleti áttekintést adunk a pénzügyi, ökonometriai és makroökonómiai szakirodalom elmúlt 25 évének témánk szempontjából legfontosabb részterületeiről. A 2. részben tömören összefoglalunk az amerikai hozamgörbére vonatkozó empirikus tanulmányokat – a teljesség igénye nélkül, de törekedve a legfontosabb gondolatok megjelenítésére. A 3. részben vezetjük le saját modellünket, elemezzük és vetjük össze a tapasztalati eredményekkel. A 4. rész következtetéseket von le és további lehetséges kutatási irányokat jelöl meg.

1 Elméleti bevezetés

Ezen elméleti bevezetőben néhány olyan témát kívánok röviden bemutatni, amely szükséges a dolgozatban szereplő modell megértéséhez és döntően az elmúlt 25 évben fejlődött ki a közgazdaságtanban. Természetesen a teljesség igénye nélkül, mindössze a dolgozat célja szempontjából feltétlenül szükséges elemekre szorítkozunk. A témák 3 fő területhez tartoznak: pénzügytan, ökonometria és monetáris makroökonómia.

1.1 Pénzügytan

A pénzügytan alapproblémája a pénzügyi eszközök árazása. A modern pénzügytan az eszközárazást az eszközárazás alapegyenletéből kiindulva tárgyalja. Az alapegyenlet lényege, hogy az ár megegyezik a sztochasztikus kifizetések és a sztochasztikus diszkonttényező szorzatának várható értékével. Ez nem más, mint a determinisztikus jelenértékszámítás általánosítása sztochasztikus esetre. Mivel kockázatmentes eszközök esetén a kifizetés nem sztochasztikus (hiszen konstans), ezért a kockázatmentes eszközök árazásának problémája valójában a sztochasztikus diszkonttényező meghatározásának problémája.

1.1.1 A sztochasztikus diszkonttényező[1]

Tekintsünk egy diszkrét Arrow-Debreu gazdaságot, melyben $s = 1...S$ a lehetséges világállapotok száma, $i = 1...N$ pedig a rendelkezésre álló pénzügyi eszközök (továbbiakban: eszközök) indexe. Definíció szerint legyen az *i*-dik eszköz ára p_i, $\mathbf{p}$ pedig jelölje az eszközárak $N \times 1$ vektorát. Az *i*-dik eszköz az *s* világállapotban x_{si} kifizetést teljesít, mely kifizetéseket összefoglalóan az $S \times N$ méretű $\mathbf{X}$ mátrix tartalmazza

Definiáljuk az $S \times 1$ méretű $\mathbf{q}$ vektort, melynek tipikus eleme q_s. A $\mathbf{q}$ vektort állapotár-vektornak mondjuk, ha igaz, hogy $\mathbf{X'q} = \mathbf{p}$. Minden eszköz felfogható úgy, mint állapotfüggő kifizetések egy kötege. A $\mathbf{q}$ vektor *s*-dik eleme megadja az *s*-dik világállapotban kifizetett egy dollár árát és mi minden eszköz árát úgy reprezentáljuk, mint az ő állapotfüggő kifizetéseinek és a megfelelő állapotáraknak a szorzatösszege:

$$(1)\ p_i = \sum_s q_s x_{si}$$

[1] Fontosabb szakirodalom: Cochrane (2001), Campbell, Lo, MacKinlay (1997), Duffie (1996),

Fontos eredmény, hogy akkor és csak akkor létezik legalább egy pozitív állapotár-vektor, ha nincsenek arbitrázs lehetőségek (azaz nem létezik olyan eszköz, vagy eszköz-kombináció, amelynek nincs pozitív költsége ma, nincsenek negatív kifizetései holnap és legalább egy világállapotban van pozitív kifizetése). Bizonyításának lényege, hogy ellenkező esetben megfelelő eszközkombinációval szintetizálható olyan, nulla kölségű portfólió, amelynek kifizetése egyik világállapotban sem negatív és legalább egy világállapotban pozitív, ami maga az arbitrázs-lehetőség.

Definiáljuk az $M_s = q_s / \pi_s$ hányadost, ahol π_s az *s*-dik világállapot bekövetkeztének valószínűsége. Bármely *i* eszközre következik, hogy

(2) $$p_i = \sum_{s=1}^{S} q_s X_{si} = \sum_{s=1}^{S} \pi_s M_s x_{si} = E\{Mx_i\}$$

M_s az *s*-dik világállapot állapotárának és valószínűségének hányadosa, tehát pozitív, mivel mind az állapotárak, mind pedig a valószínűségek pozitívak. Ebből következik, hogy akkor és csak akkor találunk olyan M valószínűségi változót, amelyre fennáll a (2) összefüggés, ha létezik pozitív állapotár-vektor.

Az M valószínűségi változót a továbbiakban sztochasztikus diszkonttényezőnek, fogjuk hívni. Kiterjesztve a modellt több időszakra, definiálhatjuk a *t* és *t+n* közötti időszakra érvényes sztochasztikus diszkonttényezőt is az alábbi egyenlet alapján:

(3) $$p_{i,t} = E_t\{M_{n,t+n} x_{i,t+n}\}$$

ahol E_t a *t* időpontban rendelkezésre álló információra vonatkozó feltételes várható értéket jelöli.[2] A legáltalánosabb felírás szerint

(4) $$p = E\{Mx\}$$

mely egyenletet a továbbiakban az eszközárazás alapegyenletének nevezzük.

[2] A sztochasztikus folyamatok elméletében pl. ezzel egyenértékű az $E\{.|\mathbf{\Omega}_t\}$ jelölés, ahol $\mathbf{\Omega}_t$ az információs halmaz.

A sztochasztikus diszkonttényező létezésének – mint fent igazoltuk – szükséges és elégséges feltétele a pozitív állapotárak létezése, ez azonban nem garantálja a sztochasztikus diszkonttényező egyértelműségét. Az egyértelműség feltétele a piacok teljessége (bármely állapotfüggő kifizetés előállítható a rendelkezésre álló eszközök kombinációjaként.)

Külön figyelmet érdemel az ún. kockázatmentes befektetések árának és hozamának meghatározása. Kockázatmentesnek mondjuk a befektetést, ha minden világállapotban ugyanazt a kifizetést teljesíti. A (2) egyenlet alapján

(5) $$p_i = \sum_s q_s x_{si} = \sum_s q_s x_i = x_i \sum_s q_s = x_i E\{M\}$$

melyből következik, hogy a kockázatmentes befektetés hozamtényezője, amelyet a kifizetés és az ár hányadosaként definiálunk:

(6) $$R^f = \frac{x_i}{p_i} = \frac{1}{\sum_s q_s} = \frac{1}{E\{M\}}$$

Szavakban tehát a kockázatmentes befektetés hozamtényezője nem más, mint a sztochasztikus diszkonttényező várhatóértékének reciproka.

Kockázatsemlegesnek mondunk egy befektetőt, ha úgy értékeli az eszközöket, mintha a sztochasztikus diszkonttényező azonos lenne minden világállapotban, tehát $M_s = E\{M\}$. Ebben az esetben az eszköz értéke nem más, mint az állapotfüggő kifizetéseknek a valószínűségekkel súlyozott átlaga:

(7) $$p = E\{M\} \sum_{s=1}^{S} \pi_s x_s = \frac{E\{x\}}{R^f}$$

A $p = E\{Mx\}$ egyenlet egy közkeletű transzformációja ún. "kockázatsemleges" valószínűségeket eredményez. Definiáljuk a

(8) $$\pi_s^* \equiv R^f M_s \pi_s = R^f q_s$$
ahol
$$R^f \equiv 1 \Big/ \sum q_s = 1 / E\{M\}$$

A π_s^* hányadosok pozitívak, 1-nél nem nagyobbak és 1-re összegződnek, tehát jogos valószínűségeknek tekinteni őket. Ezáltal az eszközárazás alapegyenlete az alábbi formában írható:

$$(9) \qquad p(x) = \sum_s q_s x_s = \frac{1}{R^f} \sum_s \pi_s^* x_s = \frac{E^*\{x\}}{R^f}$$

Az E^* jelölés arra utal, hogy a várható érték számításakor a *kockázatsemleges valószínűségek* használandók.

Ennek következtében eszközárazáskor feltételezhetjük, hogy minden befektető kockázatsemleges, de a π^* valószínűségekkel, a valóságos π valószínűségek helyett.

A transzformáció, amely a tényleges valószínűségeket a kockázatsemleges valószínűségekbe viszi át az alábbi formában adott:

$$(10) \qquad \pi_s^* = \frac{M_s}{E\{M\}} \pi_s$$

Ezért az $\frac{M_s}{E\{M\}}$ tényezőt tekinthetjük deriváltnak is, avagy mértékcserének a valódi valószínűségekből a szubjektív valószínűségekbe. A két mérték $(\pi_s^* \text{ és } \pi_s)$ ekvivalens, mivel pontosan ugyanazokhoz a világállapotokhoz társítanak nulla valószínűséget. Ez abból következik, hogy – amint azt fentebb kimondtuk - az arbitrázsmentesség miatt az M_s sztochasztikus diszkonttényező értéke minden nem nulla valószínűségű világállapotban pozitív, tehát várható értéke is pozitív, következésképp az $\frac{M_s}{E\{M\}}$ szorzó értéke is mindig pozitív. Az eszközárazás kockázatsemleges valószínűségekkel történő reprezentálása igen elterjedt, különösen a származékos termékek árazásánál, amikor az eredmény független a kockázati kiigazítástól, valamint folytonos idejű modellek alkalmazásakor. Folytonos modellek esetén a szummák természetesen integrálokba mennek át, ezért a diszkonttényezőt szokás árazási magnak is hívni.

Az egy ár törvénye a pénzpiacokon kimondja, hogy egyenértékű portfoliók (befektetési stratégiák) ára egyenlő kell, legyen. Tekintsük pl. az alábbi két stratégiát. Az első esetben megvásároljuk az *i*-dik értékpapírt, amely x_{t+n} egységnyi kifizetést teljesít a *t+n* időszakban. Ára $E_t\{M_{n,t+n}x_{t+n}\}$. A második stratégiában megvásároljuk azt a *j*-dik értékpapírt a *t* időpontban, amelyik a *t+m* időpontban éppen az *i* értékpapír akkori árát fizeti, majd a *t+m* időpontban megvásároljuk magát az *i* értékpapírt. Az *i* értékpapír ára a *t+m* időpontban $E_{t+m}\{M_{n-m,t+n}x_{t+n}\}$ lesz. A *t+m* időpontban ezzel egyenlő kifizetést teljesítő *j* értékpapír ára a *t* időpontban $E_t\{M_{m,t+m}E_{t+m}\{M_{n-m,t+n}x_{t+n}\}\}$ kell, legyen. A többszörös feltételes várható érték feloldása után adódik, hogy

$$(11)\quad E_t\{M_{n,t+n}x_{t+n}\}=E_t\{M_{m,t+m}M_{n-m,t+n}x_{t+n}\}$$

Mivel ennek igaznak kell lennie bármely x_{t+n} kifizetési profilra, következik, hogy

$$(12)\quad M_{n,t+n}=M_{m,t+m}M_{n-m,t+n}$$

Ismételt behelyettesítéssel adódik, hogy

$$(13)\quad M_{n,t+n}=\prod_{j=1}^{n}M_{1,t+j}$$

vagy logaritmusban kifejezve

$$(14)\quad m_{n,t+n}=\sum_{j=1}^{n}m_{1,t+j}$$

ahol $m_{n,t+n}\equiv\ln(M_{n,t+n})$. Ebből következik, hogy ha definiáltuk az egy időszakra vonatkozó diszkonttényező alakulását leíró sztochasztikus folyamatot, akkor ezzel megadtuk bármely időszakra vonatkozó diszkonttényező alakulását is.

1.1.2 Véletlen bolyongás és időben változó várható hozamok

Eddig a különféle eszközök árának és várható hozamának viselkedésére összpontosítottunk. Érdemes figyelmet szentelnünk egyetlen eszköz árának vagy hozamának (y_t) viselkedésére is az idő függvényében.

Kiindulásként tisztázni szükséges néhány alapfogalmat.

A véletlen bolyongásnak három – nem egyenértékű – megfogalmazása létezik.

Az 1. típusú véletlen bolyongás megköveteli, hogy a változások (a differencia) függetlenek és azonos eloszlásúak legyenek[3]:

$$y_{t+1} - y_t = \varepsilon_{t+1} \quad \text{ahol} \quad \varepsilon_{t+1} \sim iid\left(\mu, \sigma^2\right) \tag{15}$$

Tulajdonképpen nem szükséges, hogy ε_{t+1} eloszlása két paraméterrel (várható érték és szórás) megadható legyen, de így terjedt el a jelölés, mivel a közgazdasági és ökonometriai gyakorlatban leginkább előforduló eloszlások legfeljebb két paraméteresek. Ebben az esetben y_{t+k} legjobb (lineáris, vagy nem lineáris) becslése a sodrást (μ) veszi figyelembe:

$$E_t\left\{y_{t+k}\right\} = y_t + k\mu \tag{16}$$

A 2. típusú véletlen bolyongás továbbra is megköveteli, hogy a változások (a differencia) függetlenek legyenek, de már nem követelmény az azonos eloszlás:

$$y_{t+1} - y_t = \varepsilon_{t+1} \quad \text{ahol} \quad \varepsilon_{t+1} \sim id\left(\mu_t, \sigma_t^2\right) \tag{17}$$

---

[3] Az *iid* rövidítés az angol „independently and identically distributed”, azaz „független, azonos eloszlású” kifejezést jelöli. Az *id* az angol „independently distributed”, azaz „független eloszlású” kifejezés rövidítése. Ezen kívül szokás néha használni az *nid* rövidítést, ami az *iid* feltételen túl

A lényeg, hogy ε_t minden paramétere szabadon változhat, de csakis független módon (természetesen a konstans függetlennek minősül).

A szokásos definíció szerint martingálnak mondunk egy y_t folyamatot, ha következő időszaki értékének legjobb pontbecslése megegyezik jelenlegi értékével, tehát

(18) $$E\{y_{t+1} | y_t, y_{t-1}, \ldots\} = y_t$$

Ebből a definícióból az is következik, hogy martingál folyamatok differenciája múltbeli értékeik *semmiféle* függvényeként nem előrejelezhető:

(19) $$E\{y_{t+1} - y_t | y_t, y_{t-1}, \ldots\} = 0$$

Ha y_t pl. egy játék kumulált nyereségét, avagy a vagyont jelöli a *t* időpontban, akkor fair játék esetén a következő lépés utáni vagyon várható értéke megegyezik a vagyon jelenlegi értékével, ami azzal egyenértékű, hogy a következő lépésben várható nyereség értéke nulla. Pénzügyi eszközök áraira alkalmazva, a martingál feltétel kimondja, hogy nem átfedő időszakok árváltozásai függetlenek és külön-külön nulla várható értékűek. Ez a feltétel képletekbe foglalva a következő alakot ölti:

(20) $$\begin{aligned} &y_{t+1} - y_t = \varepsilon_{t+1} \\ &\text{ahol} \\ &\varepsilon_{t+1} \sim id\left(0, \sigma_{t+1}^2\right) \end{aligned}$$

Fontos kiemelnünk, hogy az ε_t valószínűségi változóknak mindössze a várható értéke kötött (nulla), minden egyéb paramétere szabadon változhat, de természetesen csakis úgy, hogy az a várható értéket ne befolyásolja (ne segítsen az előrejelzésben). Összehasonlítva a (17) és (20) definíciókat, láthatjuk, hogy martingál minden olyan 2. típusú véletlen bolyongás, ahol a sodrás nulla. Fordítva ez nem igaz, mivel van

normalitást is jelent. Megjegyezzük, hogy léteznek azonos eloszlású, de nem független növekményű folyamatok is, de ezek inkább csak a szemléletet alakítják.

olyan martingál, amely nem független növekményű. A leggyakrabban említett ilyen példa az ARCH-modellek esete.[4]

A <u>3. típusú véletlen bolyongás</u> feladja a differenciák függetlenségének követelményét és mindössze a korrelálatlanságot írja elő:

$$y_{t+1} - y_t = \varepsilon_{t+1}$$
ahol
$$\varepsilon_{t+1} \sim \left(\mu_t, \sigma_{t+1}^2\right) \qquad (21)$$
és
$$\mathrm{Cov}\left(\varepsilon_{t+i}, \varepsilon_{t+j}\right) = 0 \quad \forall i \neq j$$

Ez fontos enyhítés, mivel lehetővé teszi pl., hogy a differenciák szórása autokorrelált legyen, sőt a szórás függhet bárrmilyen más változótól is, beleértve az alapfolyamatot. A martingál tulajdonság ez utóbbit nem teszi lehetővé, mivel ezáltal a szórás ismerete alapján jósolhatóbbá válik a folyamat.

Ezek után visszatérhetünk az eszközárazás problémájához. Ha az értékpapír nem fizet osztalékot *t* és *t+1* között, és rövidtávon, amikor a sztochasztikus diszkonttényező közel van az 1-hez, az alapegyenlet az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$p_t = E_t\left\{p_{t+1}\right\} \qquad (22)$$

Ezzel egyenértékű állítás, hogy az árak, mint idősor az alábbi típusú folyamatot követnek:

$$p_{t+1} = p_t + \varepsilon_{t+1} \qquad (23)$$

Ha a $\sigma_t^2\left(\varepsilon_{t+1}\right)$ variancia állandó, az árak 1. típusú véletlen bolyongási folyamatot követnek. Általánosabb esetben, amikor a variancia nem állandó, az árak martingál folyamatot követnek. Lényegében, ha az ár ma sokkal alatta van annak, mint amit a befektető holnapra vár, akkor az emberek igyekezni fognak vásárolni az értékpapírból. De ez az igyekezetük felnyomja az értékpapír árát mindaddig, amíg az

[4] AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity. Részletes bemutatása megtalálható pl. Hamilton (1994), pénzügyi alkalmazásai pedig Bollerslev, Chou és Kroner (1992).

ár el nem éri a holnapra várt árat. Ugyanezt az állítást kifejezhetjük másként is: nem szabad, hogy a hozamok előrejelezhetők legyenek; p_t-vel osztva, a várható hozam $E_t\left\{p_{t+1}/p_t\right\}=1$ állandó kell, hogy legyen. Úgy is mondhatjuk, hogy a hozam olyan kell legyen, mint az érmedobálás.

Általánosabb esetben az árak akkor követnek martingál folyamatot, ha figyelembe vesszük az esetleges osztalékot és skálázzuk őket a sztochasztikus diszkonttényezővel.[5]

Ez a gondolat ellentétben áll azzal a népszerű nézettel, miszerint vannak olyan "rendszerek" vagy "technikai elemzések", melyek által bármely napon megjósolható, hogy a részvényárak merre fognak elmozdulni. Több évtizednyi adatbányászat és népszerű televízió és rádióriportok ellenére, melyek igyekeznek elmagyarázni, hogy merre tartanak a piacok, egyelőre nem sikerült hitelt érdemlően bebizonyítani semmilyen kereskedési szabályról, hogy a tranzakciós költségeket is túléli, anélkül, hogy a befektetőre implicit kockázatot hárítana.

Ugyanakkor újabban gyűlik a bizonyíték, hogy

1. hosszú távon a többlethozamok jósolhatók
2. a többlethozamok varianciája változik, de jelentősen autokorrelált

E két tény bizonyos mértékig azt mutatja, hogy az eszközök hozamának közgazdasági magyarázata hézagos. Matematikai szempontból az a levonható következtetés, hogy a martingál feltételezés két okból is túl szigorú. Egyrészt kizárja a nem nulla várható értékű növekményeket (bár megfelelő transzformációval ezen lehet segíteni), másrészt feleslegesen megköveteli a differenciák függetlenségét, holott a gyakorlatban elegendő – sőt kifejezetten hasznos – a puszta korrelálatlanság.

---

[5] Mivel a martingáloknak hasznos matematikai tulajdonságai vannak és mivel a kockázatsemlegesség egy igen egyszerű közgazdasági környezet, sok eszközárazási eredmény könnyen levezethető, ha az árakat és osztalékokat először átskálázzuk, majd használjuk a "kockázat-semleges" képleteket és közgazdasági érveket.

1.1.3 A kamatlábak modellezésének alapfogalmai[6]

A "kötvény" megnevezés a továbbiakban lefed minden hitelviszonyt megtestesítő pénzügyi eszközt (angolul debt instrument), legyen az akár kötvény, kincstárjegy, kereskedelmi váltó, vagy más hasonló eszköz, függetlenül attól, hogy nominális (pénz), vagy reál (áru, vagy áruindex) egységekben van-e denominálva.

A kötvény előre meghatározott fizetési sorozatra szóló követelést testesít meg. A kibocsátás és az utolsó kifizetés közötti időkülönbséget nevezzük lejáratnak. Két gyakori típusa ismert a fizetési sorozatoknak. Az ún. elemi kötvények fizetési sorozata egyetlen elemből áll, következésképp csak lejáratkor fizetnek, mégpedig – az egyszerűség kedvéért - 1 egységet. Az ún. kuponkötvények, ezzel szemben, rendszeres időközönkénti egyenletes fizetést ígérnek. Az egyes fizetési elemeket, az utolsó kivételével, kuponoknak hívjuk. Az utolsó fizetési elem, melyet a kötvény lejáratkor fizet, 1 egységgel nagyobb, mint a többi, mivel ilyenkor törleszti az adós a tőkét is. A kuponkötvények tekinthetők olyan, elemi kötvényekből képzett portfolióknak is, melyekben az egyes elemi kötvény típusok az egyes kuponfizetési időpontokban járnak le, és az egyes típusokból éppen az aktuális fizetésnek megfelelő összegű van a portfolióban. Mivel ilyen módon a kuponkötvények értékelése visszavezethető elemi kötvények és azokból képzett portfoliók értékelésére, ezért az eszközértékelési elmélet a elemi kötvényekre összpontosít.

A kötvények lehetnek kockázatosak, vagy kockázatmentesek. Amennyiben a kifizetések összege függ az esedékességkori világállapottól (beleértve a világállapotok addigi történetét is), akkor a kötvény kockázatos. Ez természetesen nem mond ellent annak, hogy a kifizetések összege előre rögzített. Elképzelhető, pl. egy olyan kötvény, amely a kibocsátástól számított egy év múlva 1 dollárt fizet, ha aznap esik az eső, különben semmit. Ezeket az angol szaknyelv state contingent debt-nek hívja. A magyar nyelvben jó példa erre a biztosítási kötvény megnevezés, ugyanis a biztosítási kötvény is csak akkor fizet, ha pl. leégett a biztosított ház. A kockázatos kötvények leggyakoribb fajtája a vállalati kötvény, mivel az csak akkor fizeti ki az előre meghatározott összeget, ha a kifizetés napján az adott vállalat

[6] Fontosabb szakirodalom: Shiller (1990), James, Webber (2000), Cochrane (2001)

eszközeinek értéke nem kevesebb, mint a csőd rangsorban az illető kötvénynél nem hátrább sorolt kötelezettségeinek összege (ez is egy világállapot). Ha a kifizetés összege az előre meghatározott időpontokban nem függ a világállapottól, akkor a kötvényt kockázatmentesnek mondjuk.

A továbbiakban kizárólag kockázatmentes elemi kötvényekkel foglalkozunk.

A elemi kötvények - szokásos jegyzésük szerint - lejáratkor fizetnek egy egységet (ezt nevezzük névértéknek), következésképp kibocsátáskori áruk egynél kisebb.[7] Ebből adódóan egységnyi pénzért (pl. 1 dollárért) 1 egységnél nagyobb névértékű elemi kötvényt vásárolhatunk. Az egy egységnyi pénzért vásárolható elemi kötvény mennyiség névértékét kamattényezőnek hívjuk. Hogy könnyebb legyen összehasonlítani a különféle lejáratú kötvényeket, bevezetjük a lejáratig számított hozam fogalmát. A lejáratig számított hozam (ismét hangsúlyozom, hogy kizárólag elemi kötvényekről van szó) az az $R_{n,t}$ szám, amelyre igaz, hogy

(24) $$p_{n,t} \equiv e^{-nR_{n,t}}$$

ahol $p_{n,t}$ a $t+n$ időpontban lejáró elemi kötvény ára a t időpontban, e pedig a természetes alapú logaritmus alapszáma. Egyszerű átalakítással a lejáratig számított hozam is kifejezhető:

(25) $$R_{n,t} \equiv -\frac{1}{n}\ln\left(p_{n,t}\right)$$

A továbbiakban - követve az általános gyakorlatot - a kamatláb kifejezést is a (25) szerinti definíció értelmében használom.

Ha egy $t+n$ időpontban lejáró kötvényt megvásárolunk t időpontban, de aztán $t+m<$ $t+n$ időpontban mégis eladjuk, akkor arra az időre, amíg birtokunkban volt a

[7] Csak igen kivételes esetekben fordul elő, hogy a kibocsátáskori ár meghaladja a lejáratkor kifizetett összeget, hiszen akkor érdemesebb a pénzt otthon tartani. Ezekben a kivételes esetekben is csak akkora lehet az eltérés a két összeg között, ami nem nagyobb az otthontartás - elsősorban kockázati (tolvajoktól való félelem) és tranzakciós (automatikus banki átutalás helyett minden egyes csekkel sétálhatunk a postára) - költségeinél.

kötvény, tartási periódusra számított hozamot kalkulálhatunk. Mindössze arra kell figyelnünk, hogy *t* időpontban még egy *n* lejáratú kötvényt vásárolunk, viszont *t+m* időpontban már csak egy *n-m* lejáratú kötvényt adunk el. A vásárláskori ár $p_{n,t}$, az eladáskori ár viszont $p_{n-m,t+m}$. Így a kamattényező $\frac{p_{n-m,t+m}}{p_{n,t}}$, a hozam pedig

$$(26) \quad hpr_{n,m,t} = \frac{1}{m}\ln\left(\frac{p_{n-m,t+m}}{p_{n,t}}\right) = \frac{\ln(p_{n-m,t+m}) - \ln(p_{n,t})}{m} = \frac{nR_{n,t} - (n-m)R_{n-m,t+m}}{m}$$

Kötvényt vásárolni nemcsak azonnali fizetés ellenében lehet. Igen elterjedtek az olyan ügyletek, amelyekben a kötvény vásárlója a vételárat egy későbbi időpontban fizeti ki - vagy másik oldalról tekintve, a kötvényt csak később - egy a szerződéskötés utáni időpontban - bocsátják ki és így a kibocsátó csak később jut hozzá a kölcsönkérendő összeghez. Az ilyen ügyletekben a tényleges kibocsátás (tehát nem a szerződés megkötésének pillanata) és a törlesztés közötti időtartamon számított hozamot nevezzük határidős kamatlábnak. Ha ma kötünk egy szerződést arról, hogy két év múlva kölcsön fogunk kérni egy befektetőtől 1 dollárt és mához három évre visszafizetünk neki 1 dollár 10 centet, akkor azt mondjuk, hogy a két éves horizonton az 1 éves lejáratú határidős kamatláb 10 százalék. Ha *t* időpontban megszületik egy szerződés arról, hogy az adós *t+m* időpontban kölcsönkér $p^f_{n-m,m,t}$ dollárt, majd *t+n* időpontban visszafizet a hitelezőnek 1 dollárt, akkor azt mondjuk, hogy a *t* időpontban a *m* időszak horizonton az *n-m* lejáratú határidős kamatláb[8]

$$(27) \quad R^f_{n-m,m,t} = -\frac{1}{n-m}\ln\left(p^f_{n-m,m,t}\right)$$

Néha szokás a határidős kamatlábaktól való világos megkülönböztetés kedvéért a (25) szerint definiált kamatlábakra az azonnali kamatláb megnevezés használata is.

Egy határidős kamatlábra vonatkozó ügylettel azonos pénzáramlást eredményező megoldás, ha két ellentétes irányú azonnali kamatláb ügyletet kötünk különböző

[8] Az itt megjelenő f a felső indexben nem összetévesztendő a korábban bevezetett, kockázatmentes kamatláb R^f felső indexével.

lejáratokra. Ha például ma kölcsönkérünk valakitől 1 dollárt két évvel későbbi törlesztéssel és ugyanakkor az így szerzett egy dollárt kölcsönadjuk más valakinek egy évvel későbbi törlesztéssel, akkor összességében ma éppen se nem fizetünk, sem nem kapunk pénzt, viszont egy év múlva kapunk valamennyi pénzt, két év múlva pedig mi fizetünk. A kérdés már csak az, hogy mikor mennyit. Ha 1 dollár névértékű egyéves lejáratú elemi kötvény mai ára, pl. $p_{1,0}$, 1 dollár névértékű kétéves lejáratú elemi kötvény mai ára pedig $p_{2,0}$, akkor $1/p_{1,0}$ névértékű egyéves lejáratú és $1/p_{2,0}$ névértékű kétéves lejáratú elemi kötvény ér ma 1 dollárt. Tehát egy év múlva kapunk $1/p_{1,0}$ dollárt, két év múlva pedig kifizetünk $1/p_{2,0}$ dollárt. Ebben az összetett ügyletben benne foglaltatik egy 1 éves horizontú egy éves lejáratú határidős kamatláb ügylet $1/p_{2,0}$ dollár névértékkel. Ha $1/p_{2,0}$ dollár névértékű határidős ügylet ára $1/p_{1,0}$ dollár, akkor 1 dollár névértékű ügylet ára $p_{2,0}/p_{1,0}$ dollár. Akkor zárhatjuk ki az arbitrázs lehetőségét, ha az egy éves horizontú egy éves lejáratú határidős kamatláb $[-\ln(p_{1,1})]$ éppen megegyezik a fenti összetett ügylet által meghatározott $-\ln(p_{2,0}/p_{1,0})$ ún. implicit határidős kamatlábbal. Általánosabban megfogalmazva matematikai formában:

$$(28)\quad R^f_{n-m,m,t} = -\frac{\ln(p_{n,t}) - \ln(p_{m,t})}{n-m} = \frac{nR_{n,t} - mR_{m,t}}{n-m}$$

Ha a kibocsátás és a törlesztés időpontját elkezdjük közelíteni egymáshoz, azaz a lejáratot elkezdjük közelíteni a nullához, akkor a lejáratig számított hozam egy határértékhez tart. Bár zéró lejáratú ügylet a valóságban nem létezik, elemzési szempontból igen fontos, mivel sok, a kamatlábakkal foglalkozó elmélet ennek az ún. pillanati kamatlábnak (r_t) a viselkedéséből indul ki. Matematikai formában

$$(29)\quad r_t = -\lim_{n\to 0}\left[\frac{1}{n}\ln(p_{n,t})\right]$$

Teljesen hasonló módon definiálhatjuk a határidős pillanati kamatlábat is:

$$(30)\quad r^f_{m,t} = -\lim_{n\to m}\left[\frac{1}{n-m}\ln(p^f_{n-m,m,t})\right]$$

1.1.4 A hozamgörbe várakozási elmélete

Ha a különféle lejáratokhoz tartozó kamatlábakat felrajzoljuk a lejárat függvényében, akkor az ún. hozamgörbéhez jutunk. A tapasztalatok szerint a hozamgörbe igen sűrített formában tartalmaz rengeteg információt a gazdaság pillanatnyi és várható állapotáról. Évtizedek óta, az utóbbi években pedig különösen a közgazdasági kutatás központi témái közé tartozik a kérdés, hogy hogyan lehet ezeket az információkat a tapasztalt hozamgörbékből kinyerni.

Az egyik legrégebbi (John Hickstől származó[9]) elmélet szerint a rövid és a hosszú lejáratú kamatlábakat a rövid lejáratú kamatlábak alakulására vonatkozó várakozások kapcsolják össze.

A tiszta várakozási hipotézis a hozamgörbe alakjára vonatkozó három (csak bizonyos feltételek teljesülése esetén egyenértékű) állítás,

1. Az n periódus lejárathoz tartozó hozam megegyezik a következő n darab 1 periódus lejárathoz tartozó hozam várható átlagával.

$$(31)\quad R_{n,t} = \frac{1}{n} E_t \left\{ R_{1,t} + R_{1,t+1} + R_{1,t+2} + \ldots + R_{1,t+n-1} \right\}$$

2. A határidős kamatláb egyenlő a várható azonnali kamatlábbal.

$$(32)\quad R^f_{1,t+n,t} = E_t \left\{ R_{1,t+n} \right\}$$

3. Az azonos tartási periódusra számított várható hozam minden lejáratú kötvényen azonos.

$$(33)\quad E_t \left\{ hpr_{n,m,t} \right\} = R_{m,t} \qquad \forall n \geq m$$

Látható, hogy a várakozási hipotézis hogyan magyarázza a hozamgörbe alakját. Ha a hozamgörbe emelkedő - a hosszú lejáratú kötvények hozama magasabb, mint a rövid lejáratúaké - akkor a várakozási hipotézis szerint ez azért van, mert a rövid lejáratú kamatlábak várhatóan emelkedni fognak.

[9] Hicks (1939), megjelent magyarul: Hicks, J. Érték és Tőke, KJK 1978

Mindhárom iménti felírás esetében kibővíthető az egyenlet egy kockázati felár taggal. Mindhárom felírásban az egyenlet egyik oldala magasabb kockázatú ügyletet jelent, mint a másik. Például a második esetben a határidős kamatláb a jelenben is ismert, míg a várható azonnali kamatláb még bizonytalan. Ha ez a kockázati felár tetszőleges lehet, akkor az egész egyenlet nem mond semmit. A várakozási hipotézis tiszta formája az a feltételezés, hogy a kockázati felár nulla. A várakozási hipotézis gyenge formája ezzel szemben csak annyit tételez fel, hogy a kockázati felár időben állandó.

Régen felvetett kérdés, hogy jósolhatók-e a hosszú lejáratú kamatlábak, avagy martingálként viselkednek-e. A várakozási hipotézis szerint pontosan akkor jósolhatók a hosszú lejáratú kamatlábak, ha a rövid lejáratú kamatlábak is jósolhatók. Ezt a következőképpen vezethetjük le: a hosszú lejáratú kamatlábak a rövid lejáratú kamatlábak várt átlagaként adódik, tehát:

$$(34) \quad R_{n,t} = \tfrac{1}{n}\left[r_t + E_t\{r_{t+1}\} + E_t\{r_{t+2}\} \ldots + E_t\{r_{t+n-1}\}\right] + T_{n,t}$$

ahol $T_{n,t}$ az n lejáratú kötvény lejárati prémiuma. Most írjuk fel a (34) egyenletet 1 időszakkal későbbre.

$$(35) \quad R_{n,t+1} = \tfrac{1}{n}\left[r_{t+1} + E_t\{r_{t+2}\} + E_t\{r_{t+3}\} \ldots + E_t\{r_{t+n}\}\right] + T_{n,t+1}$$

A két egyenlet különbségeként adódik a hosszú lejáratú kamatláb változása:

$$(36) \quad \begin{aligned} R_{n,t+1} - R_{n,t} = {} & \tfrac{1}{n}\left[r_{t+1} - E_t\{r_{t+1}\}\right] + \\ & + \tfrac{1}{n}\left[E_{t+1}\{r_{t+2}\} - E_t\{r_{t+2}\}\right] + \\ & + \tfrac{1}{n}\left[E_{t+1}\{r_{t+3}\} - E_t\{r_{t+3}\}\right] + \\ & \quad \vdots \\ & + \tfrac{1}{n}\left[E_{t+1}\{r_{t+n}\} - E_t\{r_{t+n}\}\right] + \\ & + \tfrac{1}{n}\left[E_t\{r_{t+n}\} - r_t\right] + \\ & + \left[T_{n,t+1} - T_{n,t}\right] \end{aligned}$$

A jobb oldal első tagja a következő időszaki kamatláb előrejelzési hibája, ami racionális várakozásokat feltételezve definíció szerint martingál különbség. A következő (n-1) tag adott időszaki kamatlábakra vonatkozó várakozások megváltozása, tehát – hasonlóan az első taghoz – definíció szerint megint csak martingál különbségek. Az utolsó tag a lejárati prémium megváltozása. Erről még a várakozási hipotézis gyenge formája is felteszi, hogy nulla. Marad az utolsó előtti tag, ami nem más, mint a rövid lejáratú kamatláb várt változása. Ha a rövid lejáratú kamatláb martingál, akkor ez a tag eltűnik, tehát (36) alapján a martingál-tulajdonság átöröklődik a hosszú lejáratú kamatlábakra is.

A várakozási hipotézis gyenge formája új megvilágításba kerül, ha az eszközárazás modern fogalmait használjuk.

Írjuk fel a (26) alatti egyenlet segítségével a (33) szerinti formát és szorozzunk át a nevezővel.

$$(37)\quad nR_{n,t} = mR_{m,t} + (n-m)E_t\{R_{n-m,t+m}\}$$

A (2) és (25) egyenletek alapján megteremthetjük a közvetlen kapcsolatot a hozamok és a diszkonttényezők között:

$$(38)\quad -kR_{k,t} = \ln(p_{k,t}) = \ln(E_t\{M_{k,t+k}\})$$

ahol a (2) egyenlet alkalmazásakor felhasználtuk, hogy az elemi kötvény lejáratkor kockázatmentes 1 egységnyi kifizetést teljesít. Behelyettesítve a (38) egyenletet a (37) egyenletbe és megszorozva (-1)-gyel:

$$(39)\quad \ln(E_t\{M_{n,t+n}\}) = \ln(E_t\{M_{m,t+m}\}) + \ln(E_t\{M_{n-m,t+n}\})$$

Ezt állítja tehát a hozamgörbe tiszta várakozási hipotézise (gyenge formában kibővítve egy konstanssal). Most vegyük a sztochasztikus diszkonttényezőre vonatkozó (12) alatti egyenlet logaritmusát mindkét oldalon, majd számítsunk feltételes várható értéket:

$$(40)\quad E_t\{\ln(M_{n,t+n})\} = E_t\{\ln(M_{m,t+m})\} + E_t\{\ln(M_{n-m,t+n})\}$$

Ez tehát igaz, ha a piacon nincs arbitrázslehetőség. A (39) egyenlet tehát csak akkor lehet igaz bármilyen *n* és *m* lejárat-kombinációkra, ha legfeljebb egy konstansban tér el a (40) egyenlettől. Ez pedig csak akkor igaz, ha minden lejáratra külön-külön igaz, hogy

$$(41) \quad \ln\left(E_t\{M_{n,t+n}\}\right) - E_t\{\ln(M_{n,t+n})\} = const.$$

Bekaert és Hodrick (2001) levezetését követve térjünk át a diszkonttényező logaritmusára és fejtsük Taylor-sorba az $\exp(m_{n,t+n})$ kifejezést az átlaga körül:

$$(42) \quad \exp(m_{n,t+n}) = \exp\left(E_t\{m_{n,t+n}\}\right)\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(m_{n,t+n} - E_t\{m_{n,t+n}\}\right)^k}{k!}\right]$$

Ebből következik, hogy

$$(43) \quad E_t\{\exp(m_{n,t+n})\} = \exp\left(E_t\{m_{n,t+n}\}\right)\left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\nu_{n,t}(k)}{k!}\right]$$

ahol $\nu_{n,t}(k)$ jelöli $m_{n,t+n}$ k-dik feltételes centrális momentumát (másodszor azért indul az index 2-től, mivel az első centrális momentum természetesen nulla). Visszatérve most a diszkontfaktor-jelölésre és véve az egyenlet logaritmusát, azt kaptuk tehát, hogy

$$(44) \quad \ln\left(E_t\{M_{n,t+n}\}\right) - E_t\{\ln(M_{n,t+n})\} = \ln\left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\nu_{n,t}(k)}{k!}\right)$$

A bal oldal két tagja közti különbség a Jensen-egyenlőtlenségből fakad. Mivel a logaritmus képzés nem lineáris művelet, ezért nem felcserélhető a (lineáris) várhatóérték képzéssel. A felcserélés eltérésre vezet. Minél nagyobb mértékben szór $M_{n,t+n}$ a várható értéke körül („minél kevésbé konstans”) annál erősebb ez a hatás.

A hozamgörbe várakozási hipotézisének gyenge formája akkor igaz, ha a sztochasztikus diszkontfaktor logaritmusának összes feltételes centrális momentuma (létezik és) időben állandó, azaz feltételes eloszlásfüggvénye változatlan. Ha az eloszlásfüggvényt két paraméter határozza meg (megfelelő transzformációval az átlag és a szórás), akkor szükséges és elégséges feltétel a homoszkedaszticitás.

1.1.5 Alternatív eszközárazási modellek[10]

A sztochasztikus diszkonttényező értelmezéséhez egy másik oldalról visz közelebb, ha – kiindulva a (2) szerinti várható érték alakból - az árnak a kifizetés szerinti deriváltjával értelmezzük:

$$(45)\quad \frac{\partial p_i}{\partial x_{si}} = \pi_s M_s$$

E felírás szerint két tényezőtől függ, hogy adott világállapotban teljesítendő kifizetés milyen arányban hat az értékpapír árára. Az egyik az adott világállapot bekövetkezésének (tényleges) valószínűsége, a másik az ahhoz a világállapothoz tartozó sztochasztikus diszkonttényező értéke. Tartalmilag a sztochasztikus diszkonttényező ebben az esetben nem más, mint egy árnyékár: az adott világállapotban teljesítendő egységnyi kifizetés „értéke" a befektető számára. Az, hogy a befektető mi alapján értékeli az adott világállapotban teljesítendő kifizetést, nem elengedhetetlen része a modellnek. Erre vonatkozóan lehet külön modelleket építeni, vagy lehet egyszerű „technikai" feltételezésekkel élni. A lényeg, hogy *minden* eszközárazási modell valójában a sztochasztikus diszkonttényező modellezése.

Megkerülhető („átugorható") a sztochasztikus diszkonttényező modellezésének problémája, ha a (10) szerinti definíciót követve a

$$(46)\quad \frac{\partial p_i}{\partial x_{si}} = \frac{1}{E\{M\}}\pi_s^*$$

Eszerint az állapotfüggő kifizetés hozzájárulása az árhoz a kockázatsemleges valószínűségtől és a sztochasztikus diszkonttényező várható értékének reciprokától, azaz a kockázatmentes kamatlábtól függ.

Technikainak tekinthető pl. ha – ad absurdum - feltesszük, hogy a sztochasztikus diszkonttényező értéke páratlan sorszámú világállapotokban 1, párosokban 2 (más

[10] E fejezetben erősen támaszkodom Cochrane (2001) könyvére. Ezen túlmenően fontosabb szakirodalom: Campbell, Lo, MacKinlay (1997), Duffie (1996), Sargent (1987)

kérdés, hogy az ez alapján adódó eszközárak mennyire lesznek összhangban a megfigyelésekkel). Ehhez hasonlóan technikainak tekinthető az a feltételezés is, hogy a sztochasztikus diszkonttényező értéke minden világállapotban 1 (vagy legalábbis azonos), ami a fent definiált kockázatsemlegesség esete.

A manapság leggyakrabban alkalmazott tartalmi megközelítés szerint a sztochasztikus diszkonttényezőt kizárólag a fogyasztók határozzák meg, amennyiben az adott világállapotban megvalósuló fogyasztásuk határhaszna szerint értékelik az esetleges többletjövedelmet. Az alábbiakban különféle eszközárazási módszereket, ill. modelleket mutatunk be.

1.1.5.1 Arbitrázs-árazás

A $p = E\{Mx\}$ reprezentáció puszta létezése és a sztochasztikus diszkonttényező pozitivitása gyakran elegendő ahhoz, hogy egyes eszközök árát ki tudjuk fejezni más eszközök árának arányában. A Black-Scholes opcióárazási formula épp ezt valósítja meg: mivel egy opció kifizetése előállítható részvényből és kötvényből összeállított portfolió kifizetéseként is, ezért minden olyan sztochasztikus diszkonttényező, amellyel meghatározható a kötvény és a részvény ára, egyben megadja az opció árát is.

1.1.5.2 Faktormodellek

Az ún. faktormodellek feltételezik, hogy a sztochasztikus diszkonttényező affin függvénye valamiféle egyéb faktoroknak:

$$(47) \quad M_{t+1} = a + b_A f_{t+1}^A + b_B f_{t+1}^B + \dots$$

ahol f^i jelöli az egyes faktorokat, a és b_i pedig paraméterek. Többek között ebbe a családba tartozik a CAPM-modell, melyben

$$(48) \quad M_{t+1} = a + bR_{t+1}^W$$

ahol R^W a teljes vagyon („világvagyon”) hozama, melyet általában egy kellően nagy és diverzifikált portfolióval szokás közelíteni.

Természetesen még nagyon sok más lehetőség is adódik, de a hozamgörbe modellezése szempontjából most számunkra két modellcsalád különösen fontos, az affin modellek és a piaci modellek.

Az affin kamatlábmodellek feltételezik, hogy a sztochasztikus diszkonttényezőt néhány – általában a hozamgörbéhez kötődő - változó (rövid lejáratú kamatláb, a hozamgörbe meredeksége, görbülete, stb.) határozza meg.

A piaci kamatlábmodellek feltételezik, hogy a hozamgörbe egésze (végtelen számú faktor) szükséges a sztochasztikus diszkonttényező alakulásának leírására.

Affin modellek

Az affin modellek általános elméletét Duffie és Kan (1996) dolgozta ki. Diszkrét idejű felírásban, k-dimenziós állapotvektort véve, három egyenlet definiálja a modellt:

1. Az állapotváltozók mozgásegyenlete:

(49) $$(\mathbf{z}_{t+1} - \theta) = \mathbf{A}(\mathbf{z}_t - \theta) + \mathbf{V}(\mathbf{z}_t)^{1/2} \boldsymbol{\epsilon}_{\tau+1}$$

ahol $\mathbf{z}_t$ az állapotváltozók vektora, $\{\boldsymbol{\epsilon}_{\tau+1}\} \sim NID(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, $\mathbf{A}$ stabil mátrix, átlójában pozitív elemekkel, θ konstans vektor, $V(\mathbf{z}_t)$ pedig $\boldsymbol{\epsilon}_{\tau+1}$-gyel kompatibilis mátrix.

2. A sztochasztikus diszkonttényező egyenlete:

(50) $$-\ln(M_{t+1}) = \delta + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{z}_t + \boldsymbol{\lambda}'\mathbf{V}(\mathbf{z}_t)^{1/2} \boldsymbol{\epsilon}_{t+1}$$

ahol δ konstans skalár, $\boldsymbol{\mu}$ és $\boldsymbol{\lambda}$ pedig konstans vektorok.

3. A kamatláb egyenlete

(51) $$R_{n,t} = g(n) + \boldsymbol{\gamma}'(n)\mathbf{z}_t$$

ahol $g(n)$ a lejárat skalárfüggvénye, $\boldsymbol{\gamma}'(n)$ pedig a lejárat vektorértékű függvénye.

A megoldás menete a következő lépésekből áll:

Felírjuk az eszközárazás alapegyenletét a n periódus lejáratú elemi kötvényre

(52) $p_{n+1}(\mathbf{z}_t) = E_t\{M_{t+1} p_n(\mathbf{z}_{t+1})\}$

Áttérve logaritmusokra, elhagyva az állapotváltozók jelölését és a kötvényárak helyett kamatlábakat írva:

(53) $-(n+1)R_{n+1,t} = \ln\left[E_t\left\{\exp\left(\ln M_{t+1} - nR_{n,t+1}\right)\right\}\right]$

Behelyettesítve először a (51) egyenletből a kamatlábat, majd a *t+1* időszaki állapotváltozókat kiváltva a (49) egyenlet szerinti mozgásegyenlettel kapjuk, hogy

(54)
$$\begin{aligned}&\ln M_{t+1} - nR_{n,t+1} = \\ &= -\left[\delta + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{z}_t + \boldsymbol{\lambda}'\mathbf{V}(\mathbf{z}_t)^{1/2}\boldsymbol{\epsilon}_{t+1}\right] - \left\{ng(n) + n\boldsymbol{\gamma}'(n)\left[(\mathbf{I}-\mathbf{A})\boldsymbol{\theta} + \mathbf{A}\mathbf{z}_t + \mathbf{V}(\mathbf{z}_t)^{1/2}\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{\tau}+\mathbf{1}}\right]\right\}\end{aligned}$$

Összerendezve a tagokat kiszámítjuk e változó várható értékét és varianciáját:

(55)
$$\begin{aligned}&E_t\left\{\ln M_{t+1} - nR_{n,t+1}\right\} = -\left[\delta + ng(n) + n\boldsymbol{\gamma}'(n)(\mathbf{I}-\mathbf{A})\boldsymbol{\theta}\right] - \left[\boldsymbol{\mu}' + n\boldsymbol{\gamma}'(n)\mathbf{A}\right]\mathbf{z}_t \\ &Var_t\left\{\ln M_{t+1} - nR_{n,t+1}\right\} = \left[\boldsymbol{\lambda}' + n\boldsymbol{\gamma}'(n)\right]\mathbf{V}(\mathbf{z}_t)\left[\boldsymbol{\lambda} + n\boldsymbol{\gamma}(n)\right]\end{aligned}$$

Ezen a ponton következik a modellcsalád egy kulcsfontosságú feltételezése, éspedig, hogy $\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{\tau}+\mathbf{1}}$ normális eloszlású, melyből következően mindkét jobboldali változó (tehát összegük is) normális eloszlású. Felhasználhatjuk azt a valószínűségszámítási eredményt, hogy ha a ξ valószínűségi változó normális eloszlású μ várható értékkel és σ szórással, akkor a $E\{\exp(\xi)\} = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)$. Figyelemmel a kiszámított momentumokra és a kötvényárakra vonatkozó affin függvényformára, az (53) alatti egyenlet az alábbi rekurzív szabályra vezet:

(56)
$$\begin{aligned}&-(n+1)R_{n+1,t} = -\left[\delta + ng(n) + n\boldsymbol{\gamma}'(n)(\mathbf{I}-\mathbf{A})\boldsymbol{\theta}\right] - \left[\boldsymbol{\mu}' + n\boldsymbol{\gamma}'(n)\mathbf{A}\right]\mathbf{z}_t + \\ &+ \tfrac{1}{2}\left[\boldsymbol{\lambda}' + n\boldsymbol{\gamma}'(n)\right]\mathbf{V}(\mathbf{z}_t)\left[\boldsymbol{\lambda} + n\boldsymbol{\gamma}(n)\right]\end{aligned}$$

Amint azt Duffie és Kan (1996) levezette, a kamatlábak akkor lehetnek affin függvényei az állapotváltozóknak, ha a $V(\mathbf{z}_t)$ mátrix diagonális és a diagonális elemek

(57) $v_i(\mathbf{z}_t) = \alpha_i + \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\iota}}'\mathbf{z}_t$

alakúak, ahol α_i konstans skalár, $\boldsymbol{\beta}'_i$ pedig konstans vektor, akkor ugyanis az (56) szerinti rekurzió szétesik két részre:

$$(58)\quad \begin{aligned} (n+1)g(n+1) &= [\delta + ng(n) + n\boldsymbol{\gamma}'(n)(\mathbf{I}-\mathbf{A})\theta] - \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\left[\boldsymbol{\lambda}_j + n\boldsymbol{\gamma}(n)_j\right]^2 \alpha_j \\ (n+1)\boldsymbol{\gamma}'(n+1) &= [\boldsymbol{\mu}' + n\boldsymbol{\gamma}'(n)\mathbf{A}] - \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\left[\boldsymbol{\lambda}_j + n\boldsymbol{\gamma}(n)_j\right]^2 \boldsymbol{\beta}'_j \end{aligned}$$

ahol $\boldsymbol{\gamma}(n)_j$ a $\boldsymbol{\gamma}(n)$ vektor j-dik elemét jelöli. Kiindulva az $\lim_{n\to 0} ng(n) = 0$ és $\lim_{n\to 0} n\boldsymbol{\gamma}'(n) = \mathbf{0}$ feltételekből (lejáratkor a kötvény 1 egységet fizet, aminek logaritmusa 0) a rekurziók előre megoldhatók. Először a $\boldsymbol{\gamma}'(n)$ sorozat, mivel az autonóm, majd az eredmény felhasználásával az $g(n)$ sorozat.

Az állapotváltozók mozgásegyenlete megkívánja, hogy a $v_i(\ )$ volatilitás-függvények értéke minden megengedett állapotvektor mellett pozitív legyen. Ennek elégséges feltételeit, mint a paraméterekre vonatkozó megszorításokat folytonos idejű modellekre Duffie és Kan (1996) vezette le. Eredményüket diszkrét idejű modellekre Backus, Foresi és Telmer (1996) írta át.

A $\mathbf{z}_t$ állapotvektor a $D = \{\mathbf{z} | v_i(\mathbf{z}) \geq 0 \quad \forall i\}$ tartományban marad, ha az állapotváltozók mozgásegyenlete kielégíti az alábbi két feltételt:

1. $\forall \mathbf{z} \in D$ állapotvektorra, melyre $v_i(\mathbf{z}) = 0$ (a pozitivitás korlátja effektív) a sodrás kellően pozitív: $\boldsymbol{\beta}'_j(\mathbf{I}-\mathbf{A})(\theta - \mathbf{z}) > \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}'_j\boldsymbol{\beta}_j$ és

2. ha a $\boldsymbol{\beta}'_j$ vektor *i*-dik eleme $i \neq j$ esetben különbözik nullától, akkor $v_i(\mathbf{z})$ és $v_j(\mathbf{z})$ arányosak (hányadosuk egy pozitív konstans).

A különféle affin kamatláb-modellek a paraméterválasztásban térnek el egymástól. A leghíresebbek ezek közül Vasicek (1977) és Cox, Ingersoll és Ross (1985) modellje.

A Vasicek-modell állapotváltozói (egyváltozós esetben maga a pillanati kamatláb) korrelálatlanok és első rendű, stacioner, homoszkedasztikus autoregresszív folyamatot követnek. A Cox-Ingersoll-Ross modell lazítja a homoszkedaszticitás feltételét, az egyes állapotváltozók szórása az adott állapotváltozó értékének lineáris függvénye. E két modell, tehát a két határeset az általános affin modellben, ugyanis a szórás az állapotváltozó értékének affin függvénye lehet.

Piaci modellek[11]

Ho és Lee (1986) nagy változásokat hozott a pénzügyi modellezés „iparában". A korábbi modellek néhány paraméter megfelelő megválasztásával igyekeztek közelíteni a hozamgörbe átlagos viselkedését. Gyakorlati alkalmazásokra ez nem megfelelő. Pl. az egyváltozós Vasicek és CIR modellek 4 paramétere a hozamgörbe 5 pontjának illesztését teszi lehetővé, de ez nem elegendő pontosság azon piaci szereplők számára, akik a teljes hozamgörbét szeretnék közelíteni. Ho és Lee azt javasolta, hogy ezeket a modelleket ki kell egészíteni időfüggő tényezőkkel, melyek segítségével „hangolhatóvá" válik a görbe. Ho és Lee ezt a megközelítést binomiális modellre dolgozta ki, de az ötlet általánosabb. Ők az árazási mag logaritmusának egyenletében a (δ)sodrást tették időfüggővé, mások ezt a megoldást kiterjesztették további paraméterekre. Ezek közül a legfontosabb Black, Derman és Toy (1990), akik a volatilitás kötöttségét oldották fel. Ez az általánosítás nagy előrelépést jelentett a kamatláb-opciók árazásában, amelyben központi paraméter a – tapasztalatok szerint nagyon is változó - volatilitás.

Heath, Jarrow és Morton (1992) a Ho és Lee által megkezdett úton haladt, de új irányban. Ők a határidős kamatlábakra koncentráltak. A módszer illusztrálására lineáris, egy-dimenziós esetet veszünk[12]. Tegyük fel, hogy a határidős hozamgörbe az alábbi módon alakul:

(59) $$R^f_{n-1,t+1} = R^f_{n,t} + \alpha_{n,t} + \sigma_{n,t}\varepsilon_{t+1}$$

ahol $\{\varepsilon_t\}$ független, azonosan sztenderd normál eloszlású valószínűségi változó.

Az egyenlet tartalma, hogy folyamatosan kiszámítjuk határidős kamatlábat a *t+n* és *t+n+1* közti időszakra. A *t* időpontban ez az $R^f_{n,t} = (n+1)R_{n+1,t} - nR_{n,t}$ összefüggés,

[11] Ezeket a modelleket szokás „teljes hozamgörbe", vagy „arbitrázsmentes" modelleknek is hívni.

[12] A levezetés forrása Backus, Foresi, Telmer (1998)

míg a *t+1* időpontban az $R^f_{n-1,t+1} = nR_{n,t+1} - (n-1)R_{n-1,t+1}$ összefüggés alapján számítható. Ahogy haladunk egyre közelebb a kiválasztott időszakhoz, úgy változik a számított határidős kamatláb is. Ezt a változást írja le az (59) alatti egyenlet.

A kérdés, hogy milyen megszorításokat kell tenni az $\{\alpha_{n,t}, \sigma_{n,t}\}$ paraméterekre, hogy a határidős kamatlábak változása ne adjon lehetőséget arbitrázsra. Ha igaz, hogy a hosszabb lejáratú kamatlábak a rövid lejáratú kamatlábakból adódnak össze, akkor a hosszabb lejáratú kötvényeken realizálható hozam két tényezőből tevődik össze: az azonnali egyidőszakos kamatlábból és a további időszakokra számított határidős kamatlábak változásából.

$$\begin{aligned} \ln R_{t+1} \equiv nR_{n,t} - (n-1)R_{n-1,t+1} &= r_t - \sum_{j=1}^{n}\left(R^f_{j-1,t+1} - R^f_{j,t}\right) = \\ &= r_t - \sum_{j=1}^{n}\alpha_{n,t} - \sum_{j=1}^{n}\sigma_{n,t}\varepsilon_{t+1} = \\ &= r_t - A_{n,t} - S_{n,t}\varepsilon_{t+1} \end{aligned} \quad (60)$$

ahol $A_{n,t}$ és $S_{n,t}$ definíciója adódik az egyenletből és $r_t = R_{1,t}$.

Ezen a ponton két lehetséges irányban lehet továbblépni. Az eredeti szerzők (HJM) az első megoldást követték:

1. megoldás: A hozam logaritmusának várható értéke $r_t - A_{n,t}$, szórása $S_{n,t}$, varianciája pedig $S^2_{n,t}$. A normális eloszlású valószínűségi változókra alkalmazható, jól bevált módszer szerint tehát

$$\log\left(E_t\{R_{t+1}\}\right) = r_t - A_{n,t} + \tfrac{1}{2}S^2_{n,t} \quad (61)$$

HJM felteszi, hogy az egyes lejáratokhoz tartozó várható többlethozam arányos a megfelelő szórással (egyfajta CAPM logika szerint):

$$-A_{\tau,t} + \tfrac{1}{2}S^2_{\tau,t} = \gamma_t S_{\tau,t} \quad (62)$$

HJM a γ_t paramétert a kockázat piaci áraként értelmezi. Az arbitrázsmentesség feltétele ezek után megfelelő megszorításokat jelent a paraméterekre nézve.

2. megoldás: Tegyük fel, hogy az diszkonttényező logaritmusa az alábbi egyenlet szerint alakul:

(63) $-m_{t+1} = \delta_t + \lambda_t \varepsilon_{t+1}$

Alkalmazva az eszközárazás alapegyenletének hozamokra felírt formáját

(64) $1 = E_t\{M_{t+1}R_{t+1}\}$

a (60) szerinti hozamra kapjuk, hogy

(65) $r_t = \delta_t + A_{n,t} - \frac{1}{2}(\lambda_t + S_{n,t})^2$

Ha felírjuk ezt az egyenletet az $n = 0$ és $n = \tau$ esetekre, majd a két egyenletet kivonjuk egymásból, megkapjuk az arbitrázsmentesség két feltételét:

(66) $A_{\tau,t} - \lambda_t S_{\tau,t} - \frac{1}{2} S_{\tau,t}^2 = 0$

és

(67) $\delta_t = r_t + \frac{1}{2}\lambda_t^2$

Ez utóbbi egyenlet analóg a CAPM-modell alapegyenletével, ahol a sztochasztikus diszkonttényező mozgását a piaci portfólió határozza meg.

Ha összehasonlítjuk a két megoldást, látható, hogy egyenértékűek a $\gamma_t = \lambda_t$ feltétel mellett.

1.1.5.3 Fogyasztás alapú eszközárazási modellek

A fogyasztás-alapú eszközárazási modellek feltételezése, hogy a sztochasztikus diszkonttényezőt a fogyasztók fogyasztásból eredő határhaszna határozza meg.

Első lépésként tekintsünk egy két-periódusos modellt. Célunk, hogy meghatározzuk a *t+1* időpontban esedékes x_{t+1} kifizetés értékét a *t* időpontban. Modellezzük a reprezentatív befektetőt egy olyan hasznossági függvénnyel, amelyet jelenlegi és jövőbeli fogyasztásán értelmezünk: $U(C_t, C_{t+1})$. Legyen a befektető exogén jövedelme az egyes időszakokban rendre e_t és e_{t+1} és álljon a befektető rendelkezésére a pénzügyi piacon egy eszköz, amely lehetőséget ad arra, hogy jövedelmet csoportosítson át egyik időszakról a másikra. Az eszköz ára a *t* időpontban legyen p_t és teljesítsen a *t+1* időpontban x_{t+1} sztochasztikus kifizetést. Mivel a kifizetés sztochasztikus, a teljes elért hasznosság is az lesz. Ezért feltesszük, hogy a befektető a teljes elért hasznosság várható értékét kívánja maximalizálni. A feladvány tehát az alábbi matematikai formát ölti:

$$\begin{aligned} &\max_{\xi} E_t\{U(C_t, C_{t+1})\} \\ &\text{úgy, hogy} \\ &C_t = e_t - p_t\xi \\ &C_{t+1} = e_{t+1} + x_{t+1}\xi \end{aligned} \tag{68}$$

ahol ξ jelöli a pénzügyi eszközből vásárolt mennyiséget. Behelyettesítve a feltételeket a célfüggvénybe és a deriváltat egyenlővé téve nullával kapjuk, hogy

$$p_t = E_t\left\{\frac{\frac{\partial U}{\partial C_{t+1}}}{\frac{\partial U}{\partial C_t}} x_{t+1}\right\} \tag{69}$$

Összevetve az eszközárazás alapegyenletével, eredményünket úgy értelmezhetjük, hogy a sztochasztikus diszkonttényező szerepét esetünkben az egyes időszakok fogyasztása szerinti határhasznosságok hányadosa tölti be:

$$M_{t+1} = \frac{\frac{\partial U}{\partial C_{t+1}}}{\frac{\partial U}{\partial C_t}} \tag{70}$$

Példánkat most kiterjesztjük több időszakra.

Kiindulási pontunk Lucas (1978) modellje. Vegyünk egy reprezentatív befektetőt, akinek preferenciái az

$$U_t = E_t \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(C_{t+j}) \tag{71}$$

hasznossági függvénnyel jellemezhetők, ahol C_t a *t* időszaki fogyasztás. A Bernoulli-féle (egy időszakra vonatkozó) hasznossági függvényt *u* jelöli és az időbeli helyettesítés rátája β. Minden időszakban a befektető exogén módon szert tesz e_t mennyiségű romlandó jószágra. Ebben az esetben optimális döntés, ha mindig elfogyasztja a teljes e_t készletet. Most tegyük fel, hogy elérhető számára n különböző pénzügyi eszköz. Az első eszköz ára $p_{1,t}$ és 1 egységnyi kockázatmentes nominális kifizetést teljesít a *t+1* időpontban. A második eszköz ára $p_{2,t}$ és 1 egységnyi kockázatmentes nominális kifizetést teljesít a *t+2* időpontban, stb. Így tehát a befektető problémája:

$$
\begin{aligned}
& E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t) \rightarrow \max \\
\text{(72)} \quad & \text{úgy, hogy} \\
& P_t C_t + \sum_{k=1}^{n} p_{k,t} \xi_{k,t} = e_t + \sum_{k=1}^{n} \xi_{k,t-k}
\end{aligned}
$$

ahol $\xi_{k,t}$ jelöli a *k*-dik eszközből a *t* időpontban vásárolt mennyiséget és P_t a fogyasztási jószág ára a *t* időpontban. A probléma Lagrange-függvénye:

$$
\text{(73)} \quad L = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[u(C_t) + \lambda_t \left(e_t + \sum_{k=1}^{n} \xi_{k,t-k} - P_t C_t - \sum_{k=1}^{n} p_{k,t} \xi_{k,t} \right) \right]
$$

és az optimalitás elsőrendű feltételei:

$$
\text{(74)} \quad u'(C_t) = \lambda_t P_t
$$

$$
\text{(75)} \quad -\lambda_t p_{k,t} + \beta^k E_t \{\lambda_{t+k}\} = 0 \quad \forall k
$$

Behelyettesítve az első feltételt a többibe

$$
\text{(76)} \quad E_t \left\{ \beta^k \frac{u'(C_{t+k})}{u'(C_t)} \frac{P_t}{P_{t+k}} \frac{1}{p_{k,t}} \right\} = 1
$$

A $\beta^k \dfrac{u'(C_{t+k})}{u'(C_t)} \dfrac{P_t}{P_{t+k}}$ kifejezés a *k*-periódusra vonatkozó árazási mag $M_{k,t+k}$.

Az egy ár törvényének következtében – melyet a (12), ill. (14) formulák fejeznek ki - elegendő modelleznünk az egy időszakra vonatkozó árazási magot (ill. annak logaritmusát). Ellenőrzés céljából behelyettesíthetjük eredményünket az arbitrázsmentesség (12) szerinti feltételébe:

$$\left[\beta^{n}\frac{u'(C_{t+n})}{u'(C_{t})}\frac{P_{t}}{P_{t+n}}\right]=\left[\beta^{m}\frac{u'(C_{t+m})}{u'(C_{t})}\frac{P_{t}}{P_{t+m}}\right]\left[\beta^{n-m}\frac{u'(C_{t+n})}{u'(C_{t+m})}\frac{P_{t+m}}{P_{t+n}}\right] \tag{77}$$

ami nyilvánvalóan igaz. Ha feltesszük, hogy a reprezentatív befektető Bernoulli-féle hasznossági függvénye hatványfüggvény[13], akkor az árazási mag az alábbi formát ölti:

$$-m_{1,t+1}=-\ln M_{1,t+1}=-\ln\beta+\ln\left(\frac{P_{t+1}}{P_{t}}\right)+\gamma\ln\left(\frac{C_{t+1}}{C_{t}}\right) \tag{78}$$

Az árazási mag logaritmusának mozgásegyenletét tehát az infláció és (reál)fogyasztás sztochasztikus folyamata határozza meg. A tapasztalatok szerint a fogyasztás-alapú eszközárazási modellek a gyakorlatban nem teljesítenek túl jól (még közelebbről elég rosszul). Ennek több oka lehet, az egyik kézenfekvő lehetőség, hogy nem megfelelő a modellben feltételezett hasznossági függvény. Természetesen semmi akadálya (hacsak nem a matematikai kezelhetőség), hogy a modellt a fentinél bonyolultabb hasznossági függvényekre alkalmazzuk, mint pl. az időben nem szeparálható, vagy a fogyasztási szokások kialakulását is lehetővé tevő[14] hasznossági függvények.

1.1.5.4 Az általános egyensúly

Az általános egyensúlyi modellek túllépnek a szűken értelmezett fogyasztás problémáján és olyan egyensúlyi döntési szabályokat igyekeznek levezetni, amelyek a fogyasztást más változókhoz – mint pl. jövedelem, vagy beruházás – kapcsolják. Ha az eszközárazási modellben a $C_t = f(y_t, i_t, \ldots)$ szabályt alkalmazzuk, akkor az eszközárak is ezekhez a gazdasági változókhoz fognak kapcsolódni.

[13] A hasznossági függvény $u(C)=\dfrac{C^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$ alakú. A $\gamma\rightarrow 1$ határmenetben az $u(C)=\ln C$ logaritmikus hasznossági függvényhez tart.

Ezen túlmenően az igazi általános egyensúlyi modellek teljesen leírják a gazdaságot, beleértve az összes változó által követett sztochasztikus folyamatot is. Képesek megválaszolni azt a kérdést, hogy *miért* éppen annyi egy eszköz kifizetésének és a diszkonttényezőnek a kovarianciája amennyi, ahelyett, hogy ezt az értéket adottságnak tekintenék. Elvileg még olyan strukturális kérdéseket is képesek megválaszolni, mint hogy hogyan hatna az eszközök árára egy másfajta gazdaságpolitika, avagy egy új pénzügyi eszköz piaci kibocsátása. Egyik kérdés sem megválaszolható, ha pusztán a befektető számára optimális döntés első rendű feltételét vizsgáljuk.

Felmerül a kérdés, hogy milyen az oksági összefüggés a fogyasztás és az eszközárak között, illetve honnan származnak a kifizetések és határhasznok statisztikai tulajdonságai. Egyáltalán mit lehet mondani a gazdaságot terelő alapvető sokkokról? Az alapvető árazási egyenlet csak azt mondja, hogy mennyinek kell lennie az árnak, ha adottnak vesszük a fogyasztás és a kifizetések együttes eloszlását.

Semmi akadálya, hogy az alapvető árazási egyenletet átalakítva a következőt írjuk (itt most eltekintünk az árszínvonal esetleges változásától):

$$(79) \quad u'(c_t) = E_t\left\{\beta u'(c_{t+1})x_{t+1} / p_t\right\}$$

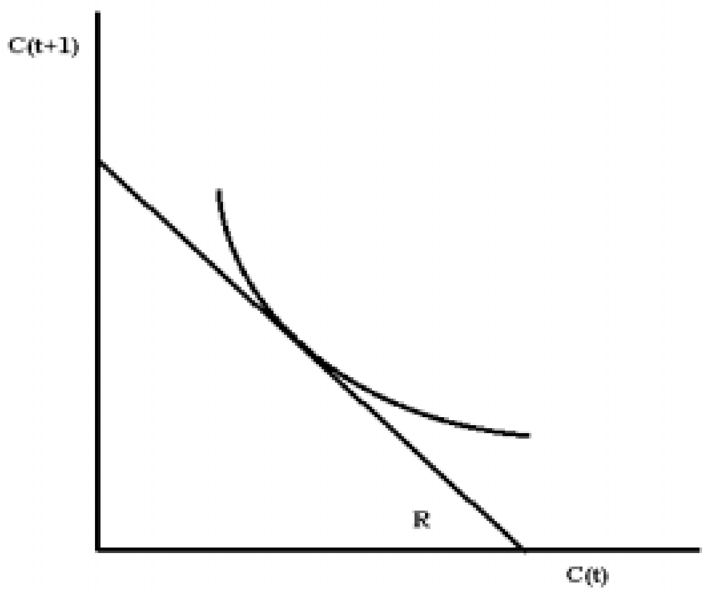
Tekinthetjük ezt az egyenletet úgy is, mint amely a mai fogyasztást határozza meg az eszközárak és kifizetések ismeretében, nem pedig a mai eszközárakat határozza meg a fogyasztás és a kifizetések függvényében. Ha így gondolkodunk az alapvető árazási egyenletről, akkor a fogyasztás permanens jövedelem modelljéhez jutunk.

Melyik a tyúk és melyik a tojás? Melyik az exogén és melyik az endogén? A válasz, hogy egyik sem, és a legtöbb alkalmazás szempontjából ez lényegtelen is. Az elsőrendű feltételek bármelyik egyensúlyt meghatározzák. Ha történetesen $E\{mx\}$-et ismerjük, akkor ebből meghatározhatjuk *p*-t; ha viszont történetesen *p*–t ismerjük, akkor ebből levezethetjük a fogyasztási és megtakarítási döntéseket.

[14] Angolul „habit formation”

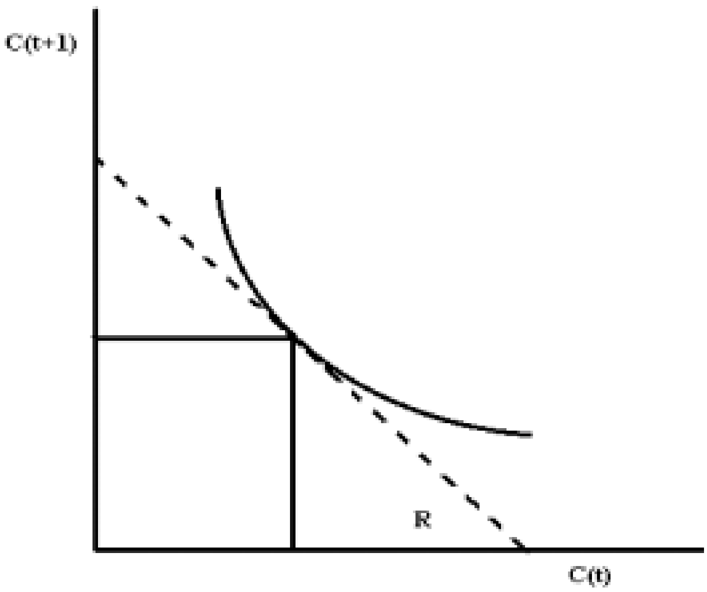
Egy nyilvánvaló továbblépési lehetőség modell-gazdaságunk teljes megoldása felé, ha mind a fogyasztást, mind az árakat valóban exogén hatások függvényében tudjuk meghatározni. Az eredmény természetesen függeni fog attól, hogy milyen a gazdaság többi része, különösen a termelés, vagy az időbeli transzformációs technológia és a piacok.

Az 1. ábra egy lehetséges általános egyensúlyt mutat. Tegyük fel, hogy a termelési technológia (a technológia, amelynek segítségével *t* időszaki fogyasztást *t+1* időszaki fogyasztássá tudunk transzformálni) lineáris, tehát a reál, fizikai hozamot (az időbeli transzformációs rátát, az ábrán látható egyenes meredekségét) nem befolyásolja a beruházás (feláldozott *t* időszaki fogyasztás) mennyisége. Ebben az esetben a fogyasztásnak alkalmazkodnia kell ehhez a technológiailag adott hozamhoz. Ha az időbeli transzformációs ráta változna, akkor a fogyasztási folyamatnak is változnia kellene. Kimondatlanul így működik a permanens jövedelem modell és még sok más pénzügyi modell. Ezek a modellek először meghatározzák a hozamok alakulását leíró folyamatot, majd megoldják a fogyasztó fogyasztási és portfolió döntéseit a hasznossági görbék segítségével (az ábrán látható görbe vonal egy lehetséges hasznossági görbét jelöl.



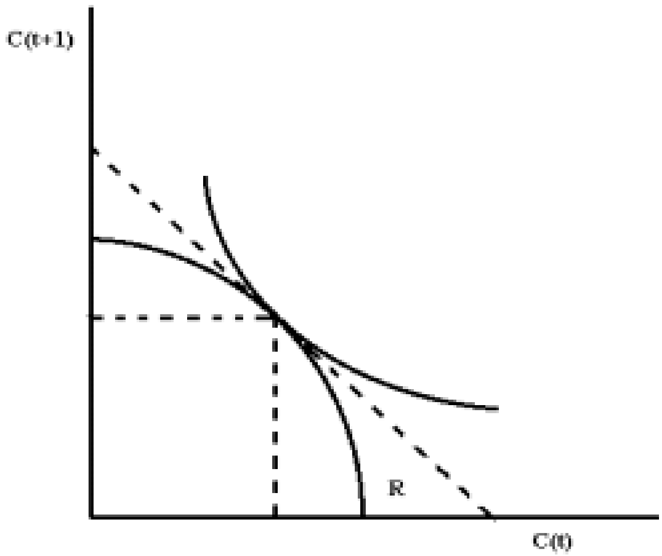
1. ábra A fogyasztás alkalmazkodik, a hozamot lineáris technológia határozza meg.

Az 2. ábra a termelési technológia egy másik szélsőséges esetét mutatja. Ez egy "készletgazdaság". Romlandó fogyasztási javak jelennek meg (termelődnek) minden időszakban. Senki sem képes megtakarítani, felhalmozni, beruházni, vagy bármi más módon jelenbeli fogyasztást jövőbeli fogyasztássá alakítani. Következésképpen az eszközáraknak kell igazodniuk mindaddig, amíg a fogyasztók nem találják optimálisnak a rendelkezésre álló aktuális készlettel megegyező fogyasztást. Ebben az esetben a fogyasztás exogén és az eszközárak alkalmazkodnak. Lucas (1978) az egyik leghíresebb példája az ilyen modellgazdaságoknak.



2. ábra Készletgazdaságban az eszközárak alkalmazkodnak a fogyasztáshoz

Melyik lehetőség a helyes ezek közül? Természetesen egyik sem. A valóságos gazdaság és minden valamirevaló általános egyensúlyi modell inkább úgy néz ki, ahogyan azt a 3. ábra mutatja: átvihető a fogyasztás egyik időpontból a másikba, de csak csökkenő arányban. A beruházások növekedtével a hozam csökken.



3. ábra Általános egyensúly. A folytonos vonalak a közömbösségi görbés és a termelési lehetőségek görbéjét jelenítik meg. Az egyenes szaggatott vonal az egyensúlyi hozamot jeleníti meg. A szaggatott téglalap egy olyan készletgazdaságot jelenít meg, amelyből ugyanez a fogyasztás-hozam párosítás következik.

Érvényteleníti-e ez mindazokat a modelleket, amelyek lineáris technológiával, vagy készletgazdasággal dolgoznak? Nem. Induljunk ki abból az egyensúlyból, amelyet a 3. ábra mutat. Tegyük fel, hogy a gazdaságot lineáris technológiával modellezzük, de történetesen éppen azt a sztochasztikus folyamatot választjuk a lineáris technológia hozamának leírására, amely az általános egyensúlyból adódna. A fogyasztás-eszközhozamok együttes folyamat pontosan ugyanaz lesz, mint ami az általános egyensúlyból adódna. Hasonlóképp, tegyük fel, hogy a gazdaságot készletgazdaságként modellezzük, de történetesen éppen azt a sztochasztikus folyamatot választjuk a fogyasztás modellezésére, amely az általános egyensúlyból adódna. Ismét, a fogyasztás-eszközhozamok együttes folyamat pontosan ugyanaz lesz, mint ami az általános egyensúlyból adódna.

Ezért nem okoz problémát, bármelyik alábbi stratégiát is választjuk empirikus munkáinkban

1. A kötvény- és részvényhozamok egy statisztikai modelljéből megoldjuk a fogyasztási és portfolióválasztási problémát, majd az egyensúlyi fogyasztási értékeket használjuk a $p = E\{mx\}$ egyenletben.
2. A fogyasztási folyamat egy statisztikai modelljéből kiindulva, közvetlenül a $p = E\{mx\}$ alapvető árazási egyenlet alapján számítjuk ki az eszközök árát és hozamát.
3. Egy teljesen helyes általános egyensúlyi modellből indulunk ki, mely tartalmazza a termelési technológiát, a hasznossági függvényt és a piac szerkezetét, majd ebből levezetjük az egyensúlyi fogyasztást és eszközárakat leíró folyamatokat. A $p = E\{mx\}$ egyenlet egyike lesz az egyensúly feltételeinek.

Ha a fogyasztást és/vagy az eszközárakat leíró statisztikai modellek helyesek, azaz egybeesnek azokkal az egyensúlyi fogyasztási vagy hozam folyamatokkal, amelyeket a valós gazdaság termel ki magából, az első két megközelítés bármelyike helyes jóslatokra fog vezetni a fogyasztás-hozam együttes folyamatot illetően.

Az 1950-es évektől az 1970-es évek elejéig kifejlesztett legtöbb pénzügyi modell kimondatlanul lineáris technológiát tételezett fel. A Lucas (1978) által bevezetett készletgazdasági megközelítés áttörés volt, mivel sokkal könnyebbnek bizonyult. Sokkal könnyebb megoldani a $p = E\{mx\}$ egyenletet rögzített m-re, mint megoldani a fogyasztás-portfolió problémát adott hozamokra, majd levezetni az egyensúlyi fogyasztási folyamatot. Ha közvetlenül a fogyasztási folyamatot modellezzük, akkor minden egyes eszközt külön-külön tekinthetünk és a számítás szinte magától értetődő. A lineáris technológia esetén minden új eszköz bevezetésekor újra meg kell oldani az egész optimalizációs feladatot.

1.1.5.5 Likviditás alapú eszközárazás

A fogyasztás-alapú eszközárazási modell különösen szigorú feltevése, hogy a vállalatok és pénzügyi közvetítők (akik általában a pénzügyi eszközök piacán a forgalom nagyobb részét generálják) semmiféle hatással nem lehetnek az áralakulásra. Nem számítanak az aszimmetrikus információs problémák, a csődtörvények, stb. Ehhez képest meglehetőst új felvetés az a közgazdasági modell, amelyben feltesszük, hogy a kifizetést aszerint értékeli a befektető (vállalat, vagy magánszemély), hogy az adott világállapotban mennyire lesz likviditás (profitábilis befektetéshez szabadon felhasználható pénz) szűkében. Ezt az alapgondolatot fejti ki – egyelőre csak alap szinten - Holmström és Tirole (2001). Bár a kutatás jelenlegi állására való tekintettel egyelőre csak érdekességként említjük meg ezt a modellt, mégis úgy gondoljuk, hogy várhatóan igen gyümölcsöző lesz ez az új kutatási területet.

1.2 Ökonometria

Az elmúlt évtized talán legtermékenyebb makroökonometriai területe a VAR-modellek fejlődése és alkalmazása volt. E terület alapfogalmait vezeti be az alfejezet első része.

Bár a matematikában már régóta kidolgozott terület, a makroökonómiában mégis csak az elmúlt évtizedben terjedt el a Markov-láncok alkalmazása. Ezek rövid bemutatása és szemléltetése következik az alfejezet második részében.

1.2.1 VAR-modellek, egységgyök folyamatok és kointegráció[15]

1.2.1.1 VAR-modellek

A XX. század középső harmadában kialakult ökonometriai gyakorlat (az ún. Cowles Commission megközelítés[16]) komoly elméleti és gyakorlati problémákat vetett fel, amikor gazdaságpolitikai elemzésre került volna sor. Az elméleti probléma klasszikus megfogalmazása az ún. Lucas-kritika (Lucas, 1976): A modell-szimuláció különféle gazdaságpolitikai rezsimek összehasonlítását jelenti. A rezsimváltás a becsült egyenletek paramétereinek megváltozását okozhatja, és ezért az alapszcenárió mellett becsült modell nem használható egy alternatív szcenárió kiértékelésekor. Lucas ebből arra a következtetésre jutott, hogy olyan modelleket kell használni, amelyek paraméterei (ún. mély paraméterek) nem változnak meg a politikai rezsimváltás hatására. Ebből az elgondolásból fejlődött ki a makroökonometria egyik nagy mai ága, amely levezeti a reprezentatív gazdasági szereplők intertemporális optimalizálási feladatának Euler-egyenleteit[17], majd ezeket

---

[15] Fontosabb szakirodalom: Hamilton (1994), Watson (1994), Hayashi (2000)

[16] E gyakorlat kifejlesztői és elterjesztői első sorban az amerikai Yale egyetemen működő Cowles Commission kutatói voltak.

[17] Ilyen Euler-egyenlet pl. az eszközárazás alapegyenlete, amikor fogyasztás-alapú modellből vezetjük le.

az Euler-egyenleteket becsüli általánosított momentum módszerrel (GMM) [18]. A Lucas-kritikára egy másik választ adott Sims (1980) és elindította a makroökonometria egy másik nagy és termékeny ágát, a Vektor AutoRegresszív modelleket (továbbiakban VAR-modellek). A VAR-megközelítés teljesen elfogadja a Lucas-kritika erejét és elismeri, hogy olyan kérdéseket, mint hogy „Hogyan kellene reagálnia a központi banknak a makrogazdasági változókat érő sokkokra?" az üzleti ciklusok kvantitatív, általános egyensúlyi modelljeinek keretében kell megválaszolni. Tehát a válasznak elméleti modellen kell alapulnia, nem pedig egy ad hoc empirikus makroökonometriai modellen. Ebben a keretben új szerephez jut az empirikus elemzés: bizonyítékokat kell gyűjtenie azokról a stilizált tényekről, amelyekkel összhangban kell lennie a gazdaságpolitikai elemzésekhez használandó elméleti modelleknek, és amelyek alapján választani lehet az egymással versengő általános egyensúlyi modellek között.

Az alábbiakban bemutatjuk a VAR-modellezés legfontosabb fogalmait.

<u>Strukturális forma</u>

Tekintsük a gazdasági változók egy $(k \times 1)$ méretű $\mathbf{y}_t$ vektorát és tegyük fel, hogy alakulásukat egy vektor autoregresszív folyamat írja le:

(80)
$$\mathbf{A}(L)\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\epsilon}_t$$
ahol
$$\mathbf{A}(L) = \mathbf{A}_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k L^k$$

ahol L a késleltetési operátor, az $\mathbf{A}$ mátrixok $(n \times n)$ méretűek, az $\boldsymbol{\epsilon}_t$-t alkotó n darab (ún. strukturális) sokk pedig sztenderdizált[19], egymástól független (vagy legalábbis

[18] E megközelítés kifejlesztésében fontos szerepet játszott többek között Lucas, Sargent, Hansen és Barro.

[19] Ezzel egyenértékű felírást lehet elérni, ha kikötjük, hogy az $\mathbf{A}_0$ mátrix valamennyi diagonális eleme 1. Itt nem tárgyalandó problémát jelent, ha ezt nem lehet elérni, mivel az $\mathbf{A}_0$ mátrix szinguláris.

korrelálatlan) és autokorrelálatlan. A strukturális VAR reprezentáció két okból előnyös. Egyrészt, ha a modell paraméterei ismertek, felhasználható az ismeretlen exogén sokkok kiszámítására megfigyelhető $\mathbf{y}_t$ változók jelenlegi és korábbi értékének függvényeként. Másrészt kényelmes keretet biztosít a modell paramétereinek becslésére: ha az $\mathbf{A}(L)$ végtelen mátrix-polinomot véges mátrix-polinommal közelítjük sztenderd szimultán becslési eljárások alkalmazhatók. Ha az $\mathbf{A}(L)$ késleltetési polinom p-ed rendű, akkor a strukturális forma az alábbi alakot ölti:

$$\text{(81)} \quad \mathbf{A}_0\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{A}_2\mathbf{y}_{t-2} + \ldots + \mathbf{A}_p\mathbf{y}_{t-p} + \boldsymbol{\epsilon}_t$$

Itt említjük meg, hogy minden véges rendű (vektor)autoregresszív folyamat felírható elsőrendű (vektor)autoregresszív folyamatként is, ha a változók késleltetett értékeit önálló változókként fogjuk fel. Példaként tekintsük az alábbi két-változós, másodrendű VAR folyamatot:

$$\text{(82)} \quad \begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{bmatrix} + \mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} y_{1,t-2} \\ y_{2,t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix}$$

Ezzel egyenértékű felírás az alábbi, ún. companion forma:

$$\text{(83)} \quad \begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \\ y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \\ y_{1,t-2} \\ y_{2,t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Redukált forma

Mivel a (81) szerinti szimultán modell nem tartalmaz exogén változókat, ezért ebben a formában nem becsülhető. A modell redukált formája

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{\Phi}_2 \mathbf{y}_{t-2} + \ldots + \mathbf{\Phi}_p \mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{e}_t$$

ahol

(84) $$\mathbf{\Phi}_i = \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{A}_i \quad \forall i = 1, \ldots, p$$

és

$$\mathbf{e}_t = \mathbf{A}_0^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_t$$

Identifikáció

Az identifikáció problémája a strukturális forma paramétereinek kiszámítása a redukált forma paramétereinek segítségével. Éppen identifikáltnak mondjuk a modellt, ha ez a számítás pontosan egyféle eredményre vezethet. Alulidentifikált a modell, ha nem lehet minden strukturális paramétert egyértelműen meghatározni és túlidentifikált a modell, ha nem létezik a problémának megoldása.

A fenti strukturális formában minden mátrix n^2 elemű, tehát összesen $(p+1)n^2$ paraméter van. A redukált formában becslést kapunk a p darab becsült mátrixra, ami pn^2 paraméter, valamint kiszámíthatjuk az $\mathbf{e}_t$ reziduumok kovariancia-mátrixát, ami viszont – szimmetrikus lévén – csak $\frac{n(n+1)}{2}$ független elemet tartalmaz. A redukált forma független paramétereinek száma tehát összesen $pn^2 + \frac{n(n+1)}{2}$. Összehasonlítva a két modell-formát azt találjuk, hogy $\frac{n(n-1)}{2}$ darabbal több független paramétere van a strukturális formának, mint ahány paraméter a redukált formában becsülhető.

Identifikáló megszorítások

Ahhoz, hogy a modell identifikálható legyen, legalább $\frac{n(n-1)}{2}$ darab további megszorítást kell tenni.

A VAR-irodalom kezdeti éveiben általában azt a kézenfekvő és ártalmatlannak tűnő (!) megszorítást volt szokás tenni, hogy az $\mathbf{A}_0$ mátrix trianguláris. Az identifikáció ebben az esetben megoldható annak a lineáris algebrai tételnek (Cholesky-felbontás) a segítségével, mely szerint bármely szimmetrikus és pozitív definit mátrix egyértelműen felbontható egy trianguláris mátrix és transzponáltjának szorzatára. Ezt a tételt alkalmazva a redukált forma reziduumainak kovariancia mátrixára

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{DD}' \quad \text{és} \quad \mathbf{A}_0^{-1} = \mathbf{D} \tag{85}$$

Természetesen ugyanezt a kovariancia mátrixot fogjuk becslési eredményként kapni, ha nem az $\mathbf{A}_0$ mátrix a strukturális forma, hanem az $\mathbf{A}_0\mathbf{U}$ mátrix, ahol $\mathbf{U}$ unitér mátrix (tehát $\mathbf{UU}' = \mathbf{I}$), sőt a tétel fordítva is igaz: minden megoldása az identifikációs problémának olyan $\widetilde{\mathbf{A}}_0$ mátrixra vezethet csak, amely az $\mathbf{A}_0$ mátrix egy elforgatása, tehát létezik olyan $\mathbf{U}$ unitér mátrix, melyre $\widetilde{\mathbf{A}}_0 = \mathbf{A}_0\mathbf{U}$.

Mint mondtam, ez a megszorítás teljesen technikainak, következésképp ártalmatlannak tűnt, azonban idővel kiderült, hogy a triangularitás nagyon is szigorú exogenitási sorrendet jelent és a modell viselkedése alapvetően változhat meg pusztán a változók sorrendjének felcserélése következtében. Ez természetesen nem elfogadható hiba. A „Cholesky-korszak” után éppen az identifikáló megszorítások megfelelő megválasztása vált a VAR-irodalom központi problémájává. A téma részletes bemutatása megtalálható pl. Favero (2000) könyvében.

Impulzus-válasz függvények

Amint Sims (1980) részletesebben is kifejti, autoregresszív rendszerek működését igen nehéz leírni, az együtthatók értelmezése problémás, mivel azok gyakran oszcillálnak az egyes késletetések között és a rendszer gyakran csak igen lassan konvergál a hosszú távú egyensúlyhoz. Ezért Sims azt javasolta, hogy a leíró elemzés a rendszernek különféle tipikus véletlen sokkokra adott válaszát vizsgálja. Ennek két fő eszköze az impulzus-válasz függvény és a variancia dekompozíció.

Wold reprezentációs tétele kimondja, hogy minden (kovariancia-)stacioner[20] y_t folyamat felírható

[20] Lásd az „Egységgyök-folyamatok és kointegráció” fejezetet.

(86) $y_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$

formában, ahol ε_t az a fehérzaj hiba, amelyet akkor követünk el, amikor y_t-t saját korábbi értékeinek lineáris függvényeként jelezzük előre, és ahol $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$, továbbá $\psi_0 = 1$. A (86) szerinti felírást szokás a folyamat MA(∞) alakjának is hívni. Ez alapján írjuk fel a (81) szerinti modell MA(∞) alakját[21]:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{C}(L)\boldsymbol{\epsilon}_t = \mathbf{A}^{-1}(L)\boldsymbol{\epsilon}_t$$

ahol

(87) $\mathbf{A}(L) = \mathbf{A}_0 - \sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}_k L^k$

és

$$\mathbf{C}(L) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{C}_k L^k$$

Az impulzus-válasz függvény egyetlen, kiválasztott strukturális sokknak a hatását mutatja egy kiválasztott változó alakulására az idő előre haladtával. A $\mathbf{C}_k$ mátrix (i, j) eleme azt adja meg, hogy mekkora hatással lesz az *i*-dik változó *k* időszakkal későbbi értékére egy mostani *j*-dik strukturális sokk:

(88) $\mathbf{C}_k(i, j) = \dfrac{\partial y_{i,t+k}}{\partial \varepsilon_j}$

Variancia dekompozíció

A variancia-dekompozíció arra keresi a választ, hogy adott időhorizonton valamely kiválasztott strukturális sokk mekkora részben járul hozzá egy kiválasztott változó varianciájához. Természetesen ez a módszer is az MA(∞) formából indul ki:

(89) $(\mathbf{y}_{t+s} - E_t\{\mathbf{y}_{t+s}\}) = \mathbf{C}_0\mathbf{v}_{t+s} + \mathbf{C}_1\mathbf{v}_{t+s-1} + \ldots + \mathbf{C}_{s-1}\mathbf{v}_{t+1}$

[21] Feltéve, hogy $\mathbf{A}(L)$ invertálható.

Ebből következően az előrejelzési hiba varianciája:

$$(90) \quad Var\left(\mathbf{y}_{t+s} - E_t\{\mathbf{y}_{t+s}\}\right) = \mathbf{C}_0\mathbf{I}\mathbf{C}_0' + \mathbf{C}_1\mathbf{I}\mathbf{C}_1' + \ldots + \mathbf{C}_{s-1}\mathbf{I}\mathbf{C}_{s-1}'$$

Csak a szemléltetés kedvéért érdemes felírni ugyanezt a (86) szerinti egy-változós esetre:

$$(91) \quad Var\left(y_{t+s} - E_t\{y_{t+s}\}\right) = \sum_{j=0}^{s-1}\psi_j^2$$

Wold reprezentációs tétele éppen ennek a varianciának a végtelenben vett határértékéről mondja ki, hogy stacioner esetben véges.

1.2.1.2 Egységgyök-folyamatok és kointegráció

A gazdasági idősorok stacioneritása, illetve integráltsága az elmúlt évtizedekben egyik központi kérdésévé vált a makroökonometriának. Az adatok olyan statisztikai tulajdonságairól van szó, amelyeknek lényeges közgazdasági (tartalmi) következményei vannak. Ezek figyelmen kívül hagyása tartalmilag inkonzisztens modelleket eredményezhet. Probléma ugyanakkor, hogy a statisztikai tesztek közel sem elég erősek ahhoz, hogy jó néhány idősort egyértelműen be tudnának sorolni egyik, vagy másik típusba. Több konkrét idősorral kapcsolatban évtizedeken keresztül jelennek meg a különféle empirikus teszt-eredmények, váltakozó végső következtetésekkel. Sarkosan fogalmazva, az elméleti modellező ebben a helyzetben nem nagyon tehet mást, mint minden egyes, általa használt idősorról eldönti, hogy milyen statisztikai tulajdonságokat tételez fel róla. Ebben a döntésében három vezérelve lehet:

1. ne mondjon ellent az empirikus eredményeknek, ahol azok egyértelműek
2. ne mondjon ellent lényeges elméleti törvényszerűségeknek
3. a felépített modell legyen konzisztens

Hogy ezeknek meg tudjon felelni, legalább elméleti szinten ismernie szükséges az alapfogalmakat és az empirikus tesztek problémáit.

Stacioneritás

A $\{\mathbf{z}_i\}$ $(i = 1,2,\ldots)$ sztochasztikus folyamat (szigorúan) stacioner, ha bármely véges r egész számra és bármely $i_1, i_2, \ldots, i_r$ index-halmazra a $(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_{i_1}, \mathbf{z}_{i_2}, \ldots, \mathbf{z}_{i_r})$ együttes eloszlása csak az $i_1 - i, i_2 - i, \ldots, i_r - i$ értékektől függ, de i értékétől nem. Például $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_5)$ együttes eloszlása megegyezik $(\mathbf{z}_{12}, \mathbf{z}_{16})$ eloszlásával.

Kovariancia (vagy gyengén) stacioner egy folyamat, ha

(i) $E\{\mathbf{z}_i\}$ nem függ i értékétől és

(ii) $Cov(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_{i-j})$ létezik, véges és csak j értékektől függ, de i értékétől nem. [Pl. $Cov(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_5) = Cov(\mathbf{z}_{12}, \mathbf{z}_{16})$]

Integráltság

I(0) folyamatnak nevezünk egy stacioner folyamatot, ha legjobb hosszú távú előrejelzési hibájának varianciája véges és pozitív.

Differencia-stacionernak mondunk egy folyamatot, ha ő maga nem stacioner, de első differenciája az. Ugyanezeket a folyamatokat szokás első fokon integrált – röviden I(1) - folyamatoknak is hívni, mivel stacioner folyamat összegzéseként állíthatók elő. Ezzel analóg módon definiálhatók a d-ed fokon integrált folyamatok, amelyek d-dik differenciája stacioner[22]. Az I(1) folyamatokat szokás egységgyök folyamatoknak is hívni az alábbi modell alapján:

(92) $(1 - \rho L) y_t = \delta + u_t$

ahol u_t nulla várható értékű I(0) folyamat. Ez egy autoregresszív folyamat esetlegesen autokorrelált zajjal, melyet u_t reprezentál. Amennyiben a ρ

[22] Utóbb kiterjesztették a fogalmat d tört értékeire is azon az elven, hogy az $(1 - L)^d y_t = \varepsilon_t$ egyenlet átírható az $y_t = (1 - L)^{-d} \varepsilon_t = \sum_{n=0}^{\infty} h_n L^n \varepsilon_t$ alakra, ahol $h_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (d + k)$ és $h_1 = 1$.

autokorrelációs együttható (autoregressziós gyök) az 1 értéket veszi fel, az y_t folyamat első differenciája válik I(0) folyamattá, tehát az $\{y_t\}$ folyamat I(1).

A közgazdasági elemzés szempontjából lényeges különbség, hogy egy folyamat stacioner I(0), avagy differencia-stacioner I(1), két okból is:

1. A folyamatot érő sokkok hatása az előrejelzési horizont növekedtével I(0) stacioner esetben nullához tart (eltűnik), míg I(1) differencia-stacioner esetben csillapítatlanul hat a végtelenségig.
2. Az idősorok stacioneritási tulajdonságai annyira alapvetők, hogy az ebből a szempontból különböző idősorok egymással való magyarázata valójában inkonzisztens modellekre vezet.

Egyes folyamatok integráltsági fokának tesztelésére több eljárás is rendelkezésre áll. Ezek a tesztek (szinte kivétel nélkül) az I(1) null-hipotézis mellett tesztelik az I(0) alternatív hipotézist (a fordított logikájú tesztek kismintás tulajdonságai kedvezőtlenek). Anélkül, hogy részletesen tárgyalnánk itt az egyes teszteket, mindenképpen megemlítendő, hogy egyikük ereje sem túl nagy a közel-egységgyök folyamatokkal szemben és nem tudnak különbséget tenni valóban I(1) folyamatok és strukturális törést szenvedő I(0) folyamatok között.

Nelson és Plosser (1982) cikke számos makrogazdasági változóról kimutatta, hogy alakulásuk nem stacioner. Az azóta végzett vizsgálatok (kiterjesztve természetesen további fontos változókra is) eredményeik egy részét megerősítették, de több esetben megváltozott, vagy „változóban van” a szakmai konszenzus.

Az integráltsági fok meghatározásának nehézségeire példaként felhozható akár az amerikai nominális kamatlábak esete, ahol az I(0)/I(1) döntés nyitott még. Az egyik legfontosabb problémát természetesen az 1979-82 időszak strukturális törése okozza (Paul Volcker Fed elnök első hivatali évei, amikor a Fed egyáltalán nem próbálta stabilizálni a kamatlábakat, hanem a kereskedelmi bankok szabad tartalékait célozta).

Az egységgyök folyamatok egy speciális – és egyben legegyszerűbb - esete a martingálok. A martingál-folyamat definíciója, hogy a folyamat későbbi értékeire vonatkozó legjobb becslés a pillanatnyi érték:

$$(93)\quad E_t\{y_{t+k}\} = y_t \quad \forall k > 0$$

Feloldva a várható értéket a modell átírható az

$$(94)\quad y_{t+1} = y_t + \varepsilon_{t+1}$$

formára, ahol ε_{t+1} nulla várható értékű és autokorrelálatlan folyamat. Éppen ezen felírás alapján az ilyen folyamatokat martingál-különbségnek is szokták nevezni, de természetesen alkalmazható véletlen bolyongás megnevezés is. Hangsúlyozandó, hogy ε_{t+1} csak autokorrelálatlan kell, legyen, a függetlenség nem feltétel. Nem kizárt pl., hogy ε_{t+1} varianciája ε_t-től, vagy annak varianciájától függjön. Éppen ebből fejlődött ki az ún. ARCH-modellcsalád.

Klasszikus példa a martingálok makroökonómiai szerepére Hall (1978) cikke, melyben kimutatta, hogy a fogyasztók optimalizálási feladatának eredményeként a fogyasztás határhaszna martingál (véletlen bolyongás) folyamatot kell, hogy kövessen, általánosan elfogadható hasznossági függvény esetén pedig maga a fogyasztás is martingál-folyamat kell, hogy legyen.

Trend-stacionernak mondunk egy folyamatot, ha stacionerré tehető azáltal, hogy levonjuk belőle az idő valamilyen (általában lineáris) determinisztikus függvényét.

A közgazdasági elemzés szempontjából lényeges különbség, hogy egy folyamat trend-stacioner, avagy differencia-stacioner, két okból is:

1. A folyamatot érő sokkok hatása az előrejelzési horizont növekedtével trend-stacioner esetben nullához tart (eltűnik), míg differencia-stacioner esetben csillapítatlanul hat a végtelenségig.
2. Statisztikai hipotézis-vizsgálatoknál lényeges kérdés az együtthatók becsléseinek határeloszlása. Trend-stacioner esetben a t-statisztika eloszlása a sztenderd normális eloszláshoz tart, míg differencia-stacioner esetben a határeloszlás nem sztenderd.

A differencia-stacioner és trend-stacioner esetek nehéz megkülönböztetésére jó példa az amerikai GNP.[23]

Kointegráció

A kointegráció fogalmát Granger (1981) vezette be az ökonometriában és azóta használata igen elterjedt mind a pénzügyi, mind a makroökonómiai empirikus vizsgálatokban.

Kointegráltnak mondjuk egyenként I(1) változók egy $\mathbf{y}_t$ vektorát, ha találunk olyan nem-nulla elemekből álló $\boldsymbol{\alpha}$ (kointegráló) vektort, melyre $\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{y}_t$ I(0) folyamat.

Visszautalva az integrált folyamatokról mondottakra, kiemeljük, hogy a kointegráció jelensége lehetővé teszi, hogy azonos modellben szerepeljenek különböző integráltsági fokú idősorok. A kointegráció egyik klasszikus példája a jövedelem és a fogyasztás modellje[24], amely azt mutatja, hogy bár (logaritmusokban számolva) mind a fogyasztás, mind a jövedelem egységgyök folyamat, hosszú távon a fogyasztás a jövedelem közel konstans része.[25]

A kointegráció tesztelése hagyományosan a becsült kointegrációs vektor alapján számított reziduum integráltsági fokának tesztelését jelentette, de manapság sokkal elterjedtebb Johansen (1988) módszere, amely lehetővé teszi a lineárisan független kointegráló vektorok számának meghatározását is.

Az e területen végbement jelentős fejlődés ellenére továbbra is problémát okoz az empirikus vizsgálatokban az egységgyök- és kointegráció-tesztek kis ereje a paraméterértékek szempontjából közeli (tartalmilag esetleg igen távoli) alternatívákkal szemben.

[23] A két lehetőség közti döntésre már számos cikk született, pl. Rudebusch (1993), vagy Cheung és Chinn (1996)

[24] Davidson, Hendry, Srba, Yeo (1978)

[25] Logaritmusokban számolva ez a két idősor különbségét jelenti.

Amint arról még később lesz szó, az eddigi vizsgálatok alapján nem egyértelmű pl, hogy a különféle lejáratú amerikai kamatlábak kointegráltak-e, azaz különbségeik (esetleg más lineáris kombinációjuk) valóban I(0) folyamatok-e.

Külön említést érdemel a kointegrált változókból alkotott VAR-modellek problémája.[26] Ha nem kointegrált I(1) folyamatokat szeretnénk vizsgálni, akkor ekvivalens átalakítás a differenciaképzés (szintek helyett differenciákra írjuk fel a VAR-modellt). Ha azonban kointegrált változókról van szó, akkor a differenciákra felírt modell kihagyott változó – maga a kointegráló vektor – miatt inkonzisztens becslésre vezet. Az ilyen kointegrált VAR-modellek leggyakrabban használt formája az ún. hibakorrekciós forma. Ennek előnye, hogy közgazdaságilag is jól értelmezhető, sőt közgazdaságilag értelmes identifikációs megszorítások levezetését is lehetővé teszi. Általános esetben az

(95) $$\mathbf{y}_t = \mathbf{\Phi}_1\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{\Phi}_2\mathbf{y}_{t-2} + \ldots + \mathbf{\Phi}_p\mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{e}_t$$

eredeti forma helyett a

(96) $$\begin{aligned} &\Delta\mathbf{y}_t = \mathbf{\Pi}\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{C}_1\Delta\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{C}_2\Delta\mathbf{y}_{t-2} + \ldots + \mathbf{C}_{p-1}\Delta\mathbf{y}_{t-p+1} + \mathbf{e}_t \\ &\text{ahol} \\ &\mathbf{C}_{p-1} = \mathbf{\Phi}_p \\ &\mathbf{C}_{j-1} = \mathbf{C}_j - \mathbf{\Phi}_j \\ &\text{és} \\ &\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Phi}_1 - \mathbf{C}_1 - \mathbf{I} \end{aligned}$$

forma használata ajánlható. Az egyszerűség kedvéért tekintsünk csak egy két-változós (y_t, x_t), elsőrendű kointegrált VAR-modellt[27]:

(97) $$\Delta\mathbf{y}_t = \mathbf{\Pi}\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{B}\boldsymbol{\epsilon}_t$$

és legyen a kointegráló vektor $[1 \quad -1]$, tehát a $\mathbf{\Pi}$ mátrix rangja 1.

---

[26] A problémakör részletes összefoglalásaként ajánlható Watson (1994)

[27] Kointegrált rendszerek elemzésével foglalkozik pl. Lütkepohl és Reimers (1992), vagy Warne (1997).

$$(98)\quad \begin{bmatrix}\Delta y_t\\ \Delta x_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{21}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{t-1}\\ x_{t-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{1,t}\\ v_{2,t}\end{bmatrix}$$

amit teljesen ekvivalens módon írhatunk át:

$$(99)\quad \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-L & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(y_t-x_t)\\ \Delta x_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & 0\\ \alpha_{21} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(y_{t-1}-x_{t-1})\\ \Delta x_{t-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{1,t}\\ v_{2,t}\end{bmatrix}$$

A rendszer kointegrációs tulajdonságai azt sugallják, hogy kétféle sokk van jelen: egy permanens (mely a két változóban közös trendhez kapcsolódik) és egy tranziens (amely a kointegráló vektorhoz kapcsolódik). Ezért aztán kézenfekvő ötlet az identifikációra az a megszorítás, hogy az egyik sokk permanens, a másik pedig tranziens kell, legyen. Mivel stacioner rendszerben vagyunk, a sokkok identifikálhatók a különféle változók különféle sokkokra adott hosszú távú válasza alapján. A (99) egyenlet alapján adódik, hogy

$$(100)\quad \left(\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-L & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\alpha_{11}L & 0\\ \alpha_{21}L & 0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}(y_t-x_t)\\ \Delta x_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{1,t}\\ v_{2,t}\end{bmatrix}$$

amiből kinyerhetők a hosszú távú válaszfüggvények, ha az $L=1$ behelyettesítést elvégezzük.

$$(101)\quad \begin{bmatrix}(y_t-x_t)\\ \Delta x_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\alpha_{11} & 1\\ -\alpha_{21} & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{1,t}\\ v_{2,t}\end{bmatrix}$$

$v_{2,t}$ tranziens sokk akkor, ha nincs hosszú távú hatása a sztochasztikus trendre. Ez akkor igaz, ha

$$(102)\quad -\alpha_{21}b_{12}+\alpha_{11}b_{22}=0$$

ami α paramétereinek ismeretében biztosítja az identifikációhoz szükséges (**B** paramétereire vonatkozó) megszorítást.

1.2.2 Rezsimváltó modellek[28]

A rezsimváltó modellek makroökonómiai alkalmazása Hamilton (1989) cikkével kezdődött[29], melyben a szerző az amerikai üzleti ciklusokat elemezte új módszerével. Az alapötlet, hogy a rendszernek, amelyet vizsgálunk több állapota lehetséges. Az egyes állapotokban különböző modellek (azonos modell-struktúra, de különböző paraméter-értékek) írják le a rendszer viselkedését, az egyes állapotok pedig bizonyos valószínűségekkel váltogatják egymást. Az egyes állapotok közti átmenet valószínűségét az ún. átmenet-mátrix tartalmazza.

1.2.2.1 Markov-láncok

N-állapotú Markov-láncnak nevezzük a rendszert, ha várható további viselkedését a rendszer jelenlegi állapota meghatározza, a korábbi állapotok azt nem befolyásolják. E definíció alapján a Markov-láncok részben hasonlítanak a véletlen bolyongásra, de annál tágabb halmazt jelölnek, amennyiben nem lineáris modelleket is képesek magukba foglalni, mint pl.

$$y_{t+1} = \frac{a}{y_t + \varepsilon_{t+1}}$$

(103) ahol

$$\varepsilon_{t+1} \sim iid\{0,1\}$$

Markov-láncokat igen tömören ábrázolhatunk és elemezhetünk, ha bevezetjük az $(N \times 1)$ méretű ξ_t valószínűségi vektorváltozót, melynek *j*-edik eleme 1, ha a rendszer a *j*-edik állapotban van, különben pedig zéró. Az átmenet-mátrixot **P**-vel jelölve definiálhatjuk a rendszert a

(104) $$\mathrm{E}\{\xi_{t+1} | \xi_t\} = \mathbf{P}\xi_t$$

[28] Fontosabb szakirodalom: Hamilton (1994), Diebold, Lee és Weinbach (1994)

[29] A probléma ökonometriai tárgyalása megjelent már a Quandt (1958) és Goldfeld és Quandt (1973) cikkében is.

első fokú vektor autoregresszív modell segítségével[30], ahol a **P** mátrix (i, j) eleme annak valószínűsége, hogy a rendszer a *j*-dik állapotból az *i*-dik állapotba megy át. Ez a felírás lehetővé teszi, hogy bármely Markov-láncot kifejezzünk a

$$(105)\quad \xi_{t+1} = \mathbf{P}\xi_t + \mathbf{v}_{t+1}$$

alakban, ahol a $\mathbf{v}_{t+1}$ innováció martingál-különbség. Ebből következően Markov-láncok előrejelzése igen egyszerű:

$$(106)\quad \xi_{t+m} = \mathbf{v}_{t+m} + \mathbf{P}\mathbf{v}_{t+m-1} + \mathbf{P}^2\mathbf{v}_{t+m-2} + \ldots + \mathbf{P}^{m-1}\mathbf{v}_{t+1} + \mathbf{P}^m\xi_t$$

a várható érték pedig

$$(107)\quad \mathrm{E}\{\xi_{t+m}|\xi_t\} = \mathbf{P}^m\xi_t$$

Ha ismerjük az induló állapotot (legyen ez az *i*-dik állapot), akkor kiszámíthatjuk a rendszer *m* időszakka későbbi állapotának valószínűségeloszlását:

$$(108)\quad \begin{bmatrix} P\{s_{t+m} = 1|s_t = i\} \\ P\{s_{t+m} = 2|s_t = i\} \\ \vdots \\ P\{s_{t+m} = N|s_t = i\} \end{bmatrix} = \mathbf{P}^m\mathbf{e}_i$$

ahol $\mathbf{e}_i$ az *i*-dik egységvektor.

<u>Reducibilis Markov-láncok</u>

Reducibilisnek mondunk egy Markov-láncot, ha létezik az egyes állapotoknak olyan sorrendje, melyben a **P** átmenet mátrix blokk-trianguláris:

$$(109)\quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

[30] Lásd a „VAR-modellek” fejezetet.

ahol **B** egy $(K \times K)$ méretű mátrix és $1 \leq K < N$. Ha a **P** mátrix blokk-trianguláris, akkor ugyanúgy blokk-trianguláris a $\mathbf{P}^m$ mátrix is, tehát ha a rendszer valamikor elér egy $j \leq K$ állapotba, akkor nincs többé lehetősége visszatérni egyetlen $i > K$ állapotba sem. Egy Markov-láncot irreducibilisnek mondunk, ha nem reducibilis. Egy két-állapotú Markov-lánc pl. irreducibilis, ha $p_{11} < 1$ és $p_{22} < 1$.

Ergodikus Markov-láncok

A (104) egyenletből következik, hogy a P mátrix minden oszlopösszege 1:

(110) $\mathbf{P}'\mathbf{1} = \mathbf{1}$

Ergodikusnak nevezünk egy Markov-láncot, ha a **P** átmenet mátrix egyik sajátértéke 1, a többi pedig az egységkörön belül található. Az 1 sajátértékhez tartozó sajátvektort az ergodikus valószínűségi vektornak mondjuk és π -vel jelöljük:

(111) $\mathbf{P}\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}$

A π vektort normalizáljuk úgy, hogy elemeinek összege 1 legyen. Igazolható, hogy ergodikus Markov-láncok esetén

(112) $\lim_{m \to \infty} \mathbf{P}^m = \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{1}'$

Két-állapotú Markov-láncok

Két-állapotú Markov-láncok reprezentálhatók egyszerű egyváltozós AR(1) folyamattal is, a következőképpen. Legyen a $\boldsymbol{\xi}_t$ vektor első eleme $\xi_{1,t}$, azaz $\xi_{1,t}$ egy olyan valószínűségi változó, amely 1 értéket vesz fel, ha $s_t = 1$ és nullát különben. A két-állapotú lánc okán a $\boldsymbol{\xi}_t$ vektor második eleme $1 - \xi_{1,t}$ kell, hogy legyen, tehát

(113) $\begin{bmatrix} \xi_{1,t+1} \\ 1 - \xi_{1,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & 1 - p_{22} \\ 1 - p_{11} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{1,t} \\ 1 - \xi_{1,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{1,t+1} \\ v_{2,t+1} \end{bmatrix}$

A mátrix alakban felírt két egyenlet tartalmilag azonos, pl. az első átírható AR(1) alakba:

(114) $\xi_{1,t+1} = (1 - p_{22}) + (-1 + p_{11} + p_{22})\xi_{1,t} + v_{1,t+1}$

melyből következik, hogy $\xi_{1,t}$ autokorrelációs együtthatója $(-1 + p_{11} + p_{22})$, feltétel nélküli várható értéke pedig

(115) $E\{\xi_{1,t}\} = \dfrac{1 - p_{22}}{2 - p_{11} - p_{22}}$

1.2.2.2 Illusztráció

Hamilton (1989) az amerikai üzleti ciklus vizsgálatára alkalmazott rezsimváltó modellt. A rendszer két állapota megfeleltethető a konjunktúrának és a recessziónak. Az átmenet-valószínűségek mátrixa megadja, hogy konjunktúrából milyen valószínűséggel vált át a gazdaság recesszióba és viszont. Kiindulási pont az amerikai reál GNP negyedéves növekedési üteme, a becsült modell pedig

(116) $y_t - \mu_{s_t^*} = \phi_1 (y_{t-1} - \mu_{s_{t-1}^*}) + \phi_2 (y_{t-2} - \mu_{s_{t-2}^*}) + \phi_3 (y_{t-3} - \mu_{s_{t-3}^*}) + \phi_4 (y_{t-4} - \mu_{s_{t-4}^*}) + \varepsilon_t$

ahol $\varepsilon_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$ és az s_t^* állapotindexek két-állapotú Markov-lánc szerint alakulnak p_{ij}^* átmenet-valószínűségekkel. A maximum likelihood becslés eredménye szerint az első állapotban a GNP évesített növekedési üteme 4,8% (ezt nevezhetjük konjunktúrának), míg a második állapotban éves szinten 1,6% a csökkenés (ezt nevezhetjük recessziónak). Annak valószínűsége, hogy expanziós negyedév után ismét expanziós negyedév következik 90%, tehát ez a rezsim átlagosan $1/(1 - p_{11}^*) = 10$ negyedévig fog fennmaradni. Annak valószínűsége, hogy kontrakciós negyedév után ismét kontrakciós negyedév következik 75%, tehát ez a rezsim átlagosan $1/(1 - p_{22}^*) = 4$ negyedévig fog fennmaradni.

Amint azt Diebold, Lee és Weinbach (1994) kimutatta, a Hamilton-féle modellben nem jogos megszorítás, hogy az átmenet-valószínűségek időben állandóak. Az ő modelljükben a rezsimváltás időben változó átmenet-valószínűségekkel megy végbe: az átmenet-valószínűségek az állapotváltozók (makrogazdasági mutatók) logisztikus függvényei. (A logisztikus függvény lényeges tulajdonsága, hogy a teljes számegyenesen értelmezett és mindenképpen 0 és 1 közti eredményt ad, tehát alkalmas arra, hogy az állapotváltozók terét valószínűségekké transzformálja.)

(117)

$$
\begin{array}{cc}
\mathbf{P}_t & \begin{array}{ccc} 1.\,\textit{állapot} & t\ \textit{idôpont} & 2.\,\textit{állapot} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1.\,\textit{állapot} \\ t-1\ \textit{idôpont} \\ 2.\,\textit{állapot} \end{array} &
\left[\begin{array}{c|c}
\begin{array}{c} p_t^{00} \\ P\left(s_t = 0 \middle| s_{t-1} = 0, x_{t-1}; \beta_0\right) \\ \dfrac{\exp\left(x'_{t-1}\beta_0\right)}{1+\exp\left(x'_{t-1}\beta_0\right)} \end{array} &
\begin{array}{c} p_t^{01} = \left(1 - p_t^{00}\right) \\ P\left(s_t = 1 \middle| s_{t-1} = 0, x_{t-1}; \beta_0\right) \\ 1 - \dfrac{\exp\left(x'_{t-1}\beta_0\right)}{1+\exp\left(x'_{t-1}\beta_0\right)} \end{array} \\
\hline
\begin{array}{c} p_t^{10} = \left(1 - p_t^{11}\right) \\ P\left(s_t = 0 \middle| s_{t-1} = 1, x_{t-1}; \beta_1\right) \\ 1 - \dfrac{\exp\left(x'_{t-1}\beta_1\right)}{1+\exp\left(x'_{t-1}\beta_1\right)} \end{array} &
\begin{array}{c} p_t^{11} \\ P\left(s_t = 1 \middle| s_{t-1} = 1, x_{t-1}; \beta_1\right) \\ \dfrac{\exp\left(x'_{t-1}\beta_1\right)}{1+\exp\left(x'_{t-1}\beta_1\right)} \end{array}
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Forrás: Diebold, Lee, Weinbach (1994) p.285

Amint az várható, az átmenet-valószínűségek változatlanságának feladása jelentősen javította a modell illeszkedését.

1.3 Monetáris makroökonómia

A közgazdasági elmélet és gyakorlat együttműködésének elmúlt 25 éve a monetáris makroökonómia területén a közgazdaságtan egyik sikertörténete. Ennek egyik alapja minden bizonnyal az volt és az marad, hogy elegendően sok szakember értette (értse) meg az együttműködés előnyeit. A kooperáció konkrét formái a közös konferenciák szervezésétől egészen a munkaerő megosztásáig (jegybanki tisztségviselők egyetemi szerepvállalása, illetve egyetemi kutatók részmunkaidős jegybanki tanácsadása) terjed. Személyes véleményem szerint e gyümölcsöző kapcsolat másik fontos alapja, hogy a gazdaságpolitika különféle területei közül talán a monetáris politika a leginkább modellezhető, mivel kevés aggregált változót vesz figyelembe, még kevesebb (általában egy-két) eszközt használ és – legalábbis szándéka szerint – hosszú távú hatásokra koncentrál. Mindez pl. a költségvetési politikáról nem mondható el. Mind e szépségek ellenére – amint látni fogjuk - bőven marad probléma a jegybankárok és akadémikusok számára.

1.3.1 A racionalitás fogalma és a peso-problémák[31]

A várakozások gazdasági szerepe az évezredek folyamán fokozatosan vált nyilvánvalóvá. A fejlődés a várakozások egyre kifinomultabb modellezésében is megnyilvánult. A közgazdaságtan manapság uralkodó felfogása a Muth (1961) által bevezetett racionális várakozásokat tekinti általánosan elfogadható feltételezésnek. A hipotézis lényege, hogy a gazdasági szereplőknek a gazdasági mutatókra és állapotváltozókra vonatkozó várakozása megegyezik e változók tényleges statisztikai várható értékével. Kimondatlanul ez azt jelenti, hogy a szereplőket úgy modellezzük, mintha pontosan ismernék a gazdaság működését és döntési helyzetben a modellt megoldva maximalizálják célfüggvényüket. Ez a feltételezés természetesen igen erős és mindenki tudná sorolni a valóságból ellesett példákat, amikor egy gazdasági szereplő várakozása nyilvánvalóan eltért a „racionálisan várhatótól", vagy amikor

[31] Felhasznált szakirodalom: Evans és Honkapohja (2001), Bossaerts (2001), Evans (1996)

kiderült, hogy az illető még a saját célfüggvényével sem volt tisztában (vagy legalábbis nem volt képes azt megfogalmazni). Az pedig végképp valóságtól elrugaszkodottnak tűnik, hogy a gazdaság hétköznapi szereplői birtokában lennének annak a gazdaságot leíró tökéletes modellnek, amelyet a teljes közgazdász szakma képtelen volt megalkotni az elmúlt évszázadokban. Mindez önmagában mégsem alap a hipotézis elvetésére, legfeljebb annak értelmezésbeli finomítására. A hipotézis korrektebb interpretációja szerint nagy számú gazdasági szereplő hosszú idő átlagában racionálisan viselkedik. Egy állítólag Abraham Lincolntól származó idézet frappánsan fogalmazza meg éppen ezt a feltételezést: „Olyan, hogy valakit mindig be lehet csapni, olyan van. Olyan, hogy egyszer mindenkit be lehet csapni, olyan is van. De olyan, hogy mindig mindenkit be lehessen csapni, olyan nincs." Ez a megközelítés már bizonyára sokkal kevésbé hat valóságidegennek. Ennek ellenére a várakozások alakulásáról alkotott elképzelések – és következésképp modellek – tovább fejlődnek és az utóbbi időkben egyre inkább terjedő felfogás szerint a gazdasági szereplők (természetesen ismét csak nagy számú gazdasági szereplő és hosszabb idő átlagában) úgy viselkedik, mint jól felkészült statisztikusok: Az éppen rendelkezésre álló információkat használják fel racionálisan. Formálisan ez azt jelenti, hogy a gazdaságról alkotott modelljük szerkezete helyes, de a modell paramétereit kénytelenek a megfigyelhető változók alapján becsülni. Ahogy telik az idő, folyamatosan halmozódnak a tapasztalatok és a paraméterek becslése egyre pontosabbá válik. Bossaerts (2001) ezt úgy fogalmazza, hogy a szereplők nem racionálisan várakoznak, hanem racionálisan tanulnak. Vegyük például a japán földrengések esetét. A Richter-skála szerinti 2-3 erősségű földrengések igen gyakoriak, ezért már azt is lehet tudni, hogy mennyire gyakoriak. A helybeliek annyira hozzászoktak, hogy éjszaka már fel sem ébrednek rá, nem hogy az újságok beszámolnának róla. Egy ilyen vidéken mindenképpen megvan a valószínűsége annak, hogy a következő egy évben háromszor is legyen 7-8 erősségű földrengés. Ennek ellenére bizonyára át kellene értékelniük tapasztalatikat a szeizmológusoknak, ha ez tényleg bekövetkezne.

A racionális várakozások fogalmához szorosan kötődik a hatékony piacok hipotézise, melynek viszont következménye, hogy – a kockázati kiigazításokat leszámítva – az árfolyamok alakulása jósolhatatlan. A racionális tanulás hipotéziséből ez nem következik, hanem csak az, hogy a konkrét előrejelző szempontjából jósolhatatlanok az árfolyamok, mivel azt sem tudhatja, hogy a következő időszakban mit fog megtanulni. Egy külső elemző számára – akinek már vannak bizonyos többlet ismeretei - ennek ellenére lehet jósolható a vizsgált árfolyam.

Egyszerűbb esetekben igazolható, hogy a tanulási folyamat eredményeként a várakozások a racionális várakozásokhoz konvergálnak. Amikor tehát a piaci szereplők gazdasági környezete stabil, racionális várakozásaikban (esetleg racionális tanulás eredményeként) olyan szubjektív valószínűség-eloszlást tulajdonítanak a gazdaságot érő sokkoknak, amely megegyezik a múltbeli folyamatokat generáló változók eloszlásával.

Instabil környezetben a szubjektív valószínűségek eltérhetnek a megelőző időszakban megfigyelhető és statisztikailag mérhető előfordulási gyakoriságoktól. Ha pl. a döntéshozók tisztában vannak vele, hogy rosszul specifikálják modelljüket, mivel a gazdaságban folyamatos (strukturális) változás van, akkor maga a tanulási folyamat is állandósulhat. Ilyenkor a szubjektív valószínűségek eltérhetnek a múltbeli adatokból statisztikailag levezethető értékektől, hiszen a szereplőknek arról már lehet tapasztalata, hogy nem optimális a múltbeli adatokra szorítkozni várakozásaik kialakításakor. Szélsőséges esetben olyan események esetleges bekövetkeztét is figyelembe vehetik, amelyek korábban soha nem fordultak elő, egyszerűen „benne vannak a pakliban". Az egyszerű statisztikai megközelítés alapján úgy tűnik, mintha a szereplők nem lennének racionálisak. Ezt a jelenséget szokás Peso-problémának nevezni. Bár a „Peso-probléma" kifejezés pontos eredete nem ismert, általában Milton Friedmannak szokás tulajdonítani, aki a mexikói peso '70-es évekbeli alakulását vizsgálta. Ebben az időszakban a peso-kamatláb jelentősen a dollár-kamatláb fölött maradt, holott az árfolyam változatlanul 0,08 peso/dollár volt. Friedman azzal érvelt, hogy a kamatláb különbözet a peso leértékelésére vonatkozó piaci várakozásokat tükrözte. Ezután, 1976 augusztusában a várakozások beigazolódtak: a rögzített árfolyam feladása nyomán a peso 46 százalékkal értékelődött le. A peso-problémát írásban először Rogoff (1980) vizsgálta. Érvelése szerint a peso azonnali és határidős árfolyamai 1974 júniusa és 1976 júniusa között alátámasztják a piac leértékelési várakozásainak hipotézisét.

A probléma formális bemutatásához legyen s_{t+1} az azonnali árfolyam logaritmusa. 1954 áprilisa és 1976 augusztusa között az árfolyam 0,08 peso/dollár értéken volt rögzítve, $s_t = s^0$. Ha $s^1\left(< s^0\right)$ az azonnali árfolyam a leértékelés után, akkor a várható azonnali árfolyam

$$\textit{(118)}\quad E\left\{s_{t+1} \middle| \mathbf{\Omega}_t\right\} = \pi_t s^1 + (1 - \pi_t) s^0$$

ahol π_t a piac becslése a leértékelés valószínűségére a következő időszakban. Amíg a peso árfolyama rögzített volt s^0 szinten, addig a tényleges és a piacon várt árfolyam közti különbség

$$\textit{(119)}\quad s^0 - E\left\{s_{t+1} \middle| \mathbf{\Omega}_t\right\} = \pi_t \left(s^0 - s^1\right)$$

volt. Tehát mindaddig, amíg a piac résztvevői úgy gondolták, hogy a leértékelés valószínűsége határozottan pozitív ($\pi_t > 0$) addig előrejelzési hibájuk szisztematikusan pozitívnak bizonyult. Ez a példa illusztrálja, hogyan befolyásolja a piaci szereplők előrejelzési hibáit olyan diszkrét események lehetősége, amelyek a vizsgált időszakban nem következtek be. Ez az elgondolás a lényege azoknak az újabb keletű modelleknek, amelyek figyelembe veszik a peso-problémák lehetőségét is. Fontos különbség e modellek és az eredeti mexikói peso-piac között, hogy a modellek általában nem egyetlen eseményre összpontosítanak, hanem ritkán megismétlődő sokkokat teteleznek fel. Ez fontos megkülönböztetés, mivel a „peso-probléma" típusú eszközárazási modellek előrejelző képessége egy-egy konkrét esemény környezetében igen csekély. Pl. a mexikói peso esetében a modell csak akkor jelent megszorítást a piaci várakozásokra, ha rögzítve van a leértékelés π_t valószínűsége és a leértékelés utáni s^1 árfolyam.

Peso-probléma fennállása esetén a piaci várakozások identifikálása nehéz feladat. Sosem kizárt, hogy a piaci várakozásokra hatással van olyan diszkrét események lehetősége, amelyek az adatokban nem megfigyelhetők. Ilyen esetben lehetetlen megkülönböztetni a peso-problémát és az irracionális várakozásokat. A mai modellek többsége elkerüli az ilyen „patologikus peso-problémákat" azáltal, hogy a piaci várakozásokat az adatokból becsülhető diszkrét eltolódásokhoz köti. A

Hamilton (1988, 1989) által kifejlesztett rezsimváltó modellek egyszerű és jól kezelhető keretet adnak az elemzéshez.

A peso-probléma egyszerűbb formája az ún. „tiszta peso-probléma”, amikor legalább a rendszer pillanatnyi állapota ismert. Az „általánosított peso-probléma” esetében a rendszer pillanatnyi (induló) állapota sem ismert. Ilyenkor a „tiszta peso-probléma” tanulással kapcsolódik össze.

1.3.2 A monetáris politika tudománya[32]

„Miután láttam a monetáris politikát mindkét oldalról, állíthatom, hogy jegybankárnak lenni a gyakorlatban legalább annyira művészet, mint tudomány. Ennek ellenére, amikor ezt a sötét művészetet gyakoroltam, mindig igen hasznosnak találtam a tudományt.”[33]

Alan S. Blinder

1.3.2.1 A monetáris politika céljai és eszközei[34]

Végső célok

A monetáris politikát gyakorló jegybankok ún. végső célját általában a törvényekben szokás meghatározni, de ez közel sem jelenti azt, hogy valami teljesen egyértelmű dologról lenne szó akár meghatározás, akár értelmezés tekintetében.

A legtöbb demokratikus országban a jegybank legalább egyik célja az árszínvonallal van kapcsolatban. A különféle megfogalmazások között találunk olyat, mint „a pénz vásárlóerejének fenntartása”, „az árszínvonal stabilitásának megőrzése”, vagy „az infláció alacsony szinten való stabilizálása”. Ezek a megfogalmazások nagyon hasonlítanak, de a gyakorlatban sokszor mégsem mindegy, hogy mi szerepel a törvényben. Amikor pl. az Európai Központi Bank megkezdte működését (kisvártatva) eldöntötte, hogy számára az alacsony infláció évi 2%-ot jelent.

[32] Fontosabb szakirodalom: McCallum (1999), Clarida, Gali, Gertler (1999), Walsh (1998)

[33] Blinder (1997) p.17.

[34] A téma könnyen olvasható összefoglalását adja Heller (1988)

Sok országban (ilyen pl. az Egyesült Államok is) az infláció leszorításával egyenrangú cél kapcsolódik a gazdasági aktivitáshoz. Ez megfogalmazható mind a kibocsátás, mind a foglalkoztatás oldaláról.

Ezeken túlmenően is lehetnek a jegybanknak további előírt céljai, mint pl. a Fed azon (törvényben megfogalmazott) célja, hogy a hosszúlejáratú kamatlábakat alacsony szinten tartsa. Ismereteim szerint a szakirodalom eddig nem nagyon foglalkozott ennek a célnak az értelmezésével, elméleti következményeivel és a másik két célhoz való viszonyával.

Ezek a végső célok sokszor egymásnak ellentmondanak. A monetáris politika, mint politika lényegéhez tartozik az egymásnak feszülő célok közötti választás. Ez a választás lehet ad hoc, vagy szabályszerű, még akkor is, ha maga a döntési szabály, amely súlyozza az egyes részcélokat, nem formalizált. Konzervatívnak szokás mondani azokat a jegybankárokat, akik – kimondva, vagy kimondatlanul – viszonylag nagy súlyt fektetnek az infláció leszorítására/alacsony szinten tartására.

<u>Eszközök</u>

A monetáris politika céljainak eléréséhez különféle eszközök állnak a jegybank rendelkezésére. Ezek két fő csoportja a piaci eszközök és a nem piaci eszközök. Nem piacinak tekinthetők azok az eszközök, amelyeket a jegybank hatósági jogainál fogva alkalmazhat. Ilyenek például a kötelező tartalékráta, a különféle hitel és kamatláb plafonok. A nem piaci eszközök használata az utóbbi évtizedekben nagyrészt visszaszorult. Piacinak tekinthetők azok az eszközök, amelyeket a jegybank, mint piaci szereplő (még ha nem is profit-szempontokat követve) alkalmaz. Ezek az eszközök a más piaci szereplőkkel (első sorban a kereskedelmi bankokkal) folytatott üzletek tudatos alkalmazását jelentik. Ide tartozik különféle hitel- és betétkonstrukciók meghirdetése akár folyamatos rendelkezésre állás, akár időszakos rendelkezésre állás, akár (mennyiségi, vagy ár) aukciók formájában, valamint az ún. nyílt piaci műveletek, amikor a jegybank eseti jelleggel aktív szereplőként jelenik meg a piacon, és árelfogadóként viselkedik. Nyílt piaci műveletek keretében a jegybank általában állampapírokkal (esetleg kereskedelmi váltókkal) és devizával kereskedik. Manapság a legjellemzőbb monetáris politikai eszköz valamely rövid lejáratú (általában 1 napos, vagy 1 hetes) kamatláb, amely mellett a jegybank a kereskedelmi bankokkal üzletet köz. Ez általában hitel-kamatlábat jelent, de lehet betéti kamatláb is, attól függően, hogy a kereskedelmi bankok átlagosan likviditás szűkében, vagy bővében vannak. Úgy is szokás mondani, hogy a jegybank az előbbi esetben az aktív, az utóbbi esetben a passzív oldalon van.

A transzmissziós mechanizmus, közbenső célok

A transzmissziós mechanizmus az a folyamat, ahogyan a monetáris politikai eszközök (még közelebbről az azokban bekövetkezett sokkok, tehát nem várt változások) kifejtik hatásukat a gazdaságban. Az utóbbi évtizedben a transzmissziós mechanizmus vizsgálata volt (és valószínűleg marad) a VAR-irodalom legfontosabb témája.[35] Az amerikai gazdaságra vonatkozó eredményeket, mint minden (amerikai adatokon végzendő) makroökonómiai elemzés empirikus megalapozását (lásd Sims megközelítését) foglalja össze Christiano, Eichenbaum és Evans (1999).

Az első és legfontosabb eredmény[36], hogy (leszámítva a fent már említett 1979-82 időszakot) az amerikai monetáris politika megfelelően reprezentálható a jegybanki kamatlábbal (Fed funds rate). Ezen túlmenően viszonylag stabil eredmény a VAR-modellek identifikáló megszorításaitól függetlenül, hogy restrikciós sokk hatására két negyedév késéssel csökkenni kezd a reál GDP és ez a csökkentő hatás egy-másfél év után éri el maximumát, majd elkezd csökkenni. A GDP deflátor (az infláció mérésére alkalmazott mutató) kb. másfél éven keresztül változatlan, majd elkezd csökkenni.

Mivel a vizsgálatok azt mutatják, hogy a transzmissziós mechanizmus lefutása viszonylag lassú (és ez nagyjából világos volt már a VAR-irodalom előtt is), kialakult az a szokás, hogy a központi bankok ún. közbenső célokat tűztek/tűznek ki. Ezek a közbenső célok olyan gazdasági adatokra vonatkoznak, amelyeket viszonylag jól képes kontrolálni a monetáris hatóság, amelyek viszonylag szorosan együtt mozognak a végső célváltozókkal, és amelyek értéke viszonylag kis késéssel

[35] A szakirodalom összehasonlító értékelését adja Bagliano és Favero (1998). Kritikai észrevételeket tesz Rudebusch (1996)

[36] Bernanke és Blinder (1992)

ismertté válik (pl. a GDP adatokat általában csak fél éves késéssel publikálják a statisztikai hivatalok). Ilyen közbenső célok szoktak lenni a pénz mennyisége, valamely hosszabb lejáratú kamatláb, vagy az árfolyam. Az utóbbi évtizedben terjed az ún. inflációs célkövetés módszere.[37] Ennek lényege, hogy a jegybank – akinek végső célja az infláció féken tartása – makroökonómiai modellje és más módszerek segítségével készít egy előrejelzést az infláció későbbi (pl. 2 évvel későbbi, attól függően, hogy a tapasztalatok szerint mennyi idő alatt zajlik le a transzmissziós mechanizmus) értékére és akkor változtat a saját eszközén (pl. a jegybanki kamatlábon), ha az előrejelzés egy adott küszöbértéknél jobban eltávolodik a kitűzött célértéktől (pl. az ECB esetében ez az a bizonyos 2%).

Operatív cél és a jegybanki reakciófüggvény

A közbenső célokat még mindig csak korlátozottan képes a jegybank befolyásolni, mind pontosság, mind gyorsaság tekintetében. Amit valóban kontrolálni tud, azok az eszközök. Egyes szerzők felvetik, hogy meg kell különböztetni az eszközöket az operatív céloktól. A Fed pl. (de sok más jegybank is) tulajdonképpen nem közvetlenül és szó szerint a jegybanki kamatlábat határozza meg, hanem ehelyett úgy végez nyílt piaci műveleteket (naponta egy megadott rövid időintervallumban), hogy a piacon meghatározódó kamatláb a megcélzott érték szűk környezetében maradjon. A Fed esetében pl. a Federal Funds rate egyes napokon akár 20-30 bázisponttal is eltérhet a meghirdetett célértéktől, de már heti átlagban számolva is csak néhány bázispont az eltérés. Ebben a működési rendben a monetáris politika eszköze a nyílt piaci műveletek, a rövid lejáratú kamatláb pedig az operatív cél, de a továbbiakban ezt a különbségtételt elhanyagoljuk és monetáris politikai eszköznek fogjuk nevezni a rövid lejáratú kamatlábat.

A jegybanki reakciófüggvény (másik nevén monetáris politikai szabály) egy olyan formula, amely meghatározza a monetáris politikai eszköz azon értékét, amellyel elérhető, hogy a célváltozók a kitűzött értékhez közel kerüljenek. Ha r_t az eszközváltozó és x_t a célváltozó, akkor a kiindulási pont lehet a szabály:

[37] Összefoglalás és továbbfejlesztés olvasható pl. Svensson (1997) cikkében.

(120) $r_t^* = f\left(x_t^*\right)$

Ez azonban nem elégséges, hiszen csak annyit mond, hogy hol kell lennie a kamatlábnak, ha a célváltozó értéke éppen a kitűzött érték, de nem mond semmit arról, hogy mi a teendő abban az esetben (gyakorlatilag állandóan), amikor a célváltozó ettől eltér. Az egyik legegyszerűbb ilyen szabály pl.

(121) $r_t = r_{t-1} + \lambda\left(x_{t-1}^* - x_{t-1}\right) \quad \lambda < 0$

ami azt mondja, hogy az eszközváltozó értékét csökkenteni kell, ha a célváltozó értéke az előző időszakban elmaradt a kitűzött értéktől.

Egyes szerzők azon az állásponton vannak, hogy egy politikai szabály akkor teljes, ha sikerült kiválasztani egy célváltozót, és sikerült meghatározni a célpályát (esetleg az elfogadási tartományt). Ezzel összefüggésben Svensson (1997) megkülönböztet „eszközszabályokat” és „célszabályokat”, mondván, ez utóbbiak – melyeket előnyben részesít – csak a célváltozót határozzák meg de a monetáris politikai eszköz értékét nem. Ennek ellenére e dolgozatban reakciófüggvényen az eszközváltozó értékét meghatározó szabályt értünk.

Mindenképpen említést érdemel – legalább példaként – az ún. Taylor-szabály, amely manapság már valamivel általánosabb fogalom, mint az eredeti Taylor (1993) cikkben.[38] Ott a szerző az amerikai infláció és kibocsátás havi adatait hasonlította össze a Fed kamatlábával a megelőző 5 évben és azt találta, hogy a Fed kamatok viselkedése igen jól közelíthető az alábbi formulával:

$$r_t^* = \alpha + \gamma_\pi\left(\pi_t - \bar{\pi}\right) + \gamma_y\left(y_t - \bar{y}_t\right)$$

(122) ahol

$$\gamma_\pi > 1,\ \gamma_y > 0$$

ahol r_t^* a kamatlábnak a szabály alapján megcélzandó értéke, π_t az infláció tényleges, $\bar{\pi}$ pedig a megcélzott értéke (pl. 2%), y_t a kibocsátás tényleges, $\bar{y}_t$ pedig

[38] Más monetáris politikai reakciófüggvényeket is elemez pl. Clarida, Gali és Gertler (1997) és McCallum (2000)

a potenciális szintje. Az infláció célértéktől való eltérése 1-nél nagyobb együtthatóval szerepel, mivel az infláció leszorításához a reálkamatlábnak kell emelkednie. Taylor becslése[39] szerint a vizsgált időszakban a két együttható értéke 1,5 és 0,5 körül volt, ami tehát azt jelenti, hogy a jegybank a reálkamatlábat alakítva egyenlő súllyal vette figyelembe az infláció és a kibocsátás eltérését a kitűzött értékektől Taylor cikke igen nagy hatást váltott ki és gyorsan teret hódított a monetáris politikai gyakorlatban is. Azóta Taylor-szabálynak szokás hívni minden olyan jegybanki reakciófüggvényt, amely az infláció és a kibocsátás valamilyen kombinált célfüggvényét valósítja meg.

Tekintettel arra, hogy a jegybanki döntések – amint azt a VAR-irodalom is igazolta – jelentős késéssel fejtik ki hatásukat a gazdaságban, nem megfelelő egy olyan jegybanki reakciófüggvény, amely a célváltozók pillanatnyi devianciájára reagál. Ezt felismerve, az utóbbi években az ún. előretekintő reakciófüggvények alkalmazása/feltételezése vált elfogadottá.[40] Ennek egy speciális esete a fent már említett inflációs célkövetés, amikor az előretekintő reakciófüggvényben csak az infláció szerepel, de teljesen analóg módon kiterjeszthető a megoldás többváltozós esetekre is. A közgazdasági elemzés szempontjából némi problémát jelent az előretekintő reakciófüggvények bevezetése, hiszen ilyenkor először meg kell oldani egy (racionális) várakozásokat is tartalmazó makromodellt, mielőtt becsülni lehet annak redukált formáját.

1.3.2.2 A monetáris politika nehézségei[41]

Azok számára, akik nem foglalkoznak monetáris, vagy makroökonómiával, meglepő lehet, hogy mennyi vita zajlik monetáris politikai szabályok körül. Bizonyára úgy szólna az érvelésük, hogy nem lehet túlságosan bonyolult megoldani az optimális kontrol problémáját, ha rendelkezésre áll a gazdaság egy megfelelő modellje, amelyben kiszámítható az optimális monetáris politikai szabály. A modellnek

[39] A monetáris politikai reakciófüggvény becslésekor a szabályt Taylor simítási hatással bővítette: $r_t = \lambda r_{t-1} + (1-\lambda) r_t^*$

[40] Lásd pl. Batini és Haldane (1999)

[41] A nehézségek közül jó néhányat bemutat Blinder (1997)

természetesen olyannak kellene lennie, amely kiállja a Lucas-kritikát, de ez sem lehet újdonság.[42]

Ami a valóságot illeti, ez az érvelés pont a lényeget felejti el, ami körül a viták döntő része zajlik: pillanatnyilag nincs olyan – elemzésre alkalmas - modellje a makrogazdaságnak, amely fölött kellő egyöntetűséggel sorakozna fel a szakma összes képviselője. Már arról is megoszlanak a vélemények, hogy az elképzelt modell mely részeiben van a probléma (pl. a pénzkereslet, vagy a monetáris és reálváltozók dinamikus kapcsolatai, esetleg a fogyasztás és beruházás modellezése, nem is beszélve a nyitott gazdasági modellekhez szükséges árfolyamokról). A „megfelelő modell" hiányának alapvető problémáját a szakma azzal igyekszik megkerülni, hogy olyan monetáris politikai szabályok után kutat, amelyek többféle modell esetén is megközelítik az optimalitást.[43] Egy ilyen – a robusztusságra alapuló – kutatási stratégia némi védelmet nyújt a Lucas-kritikával szemben is.

Ezen túlmenően, ahhoz, hogy a monetáris politika napi szintű döntéseit konzisztens módon lehessen meghozni, elengedhetetlen a végső célok teljesülésének mérése. Bár első pillantásra ez nem tűnik problémásnak, kicsit alaposabb vizsgálat után mégis kiderül, hogy már ez a terület is komoly nehézségeket rejt. Hogy csak néhányat említsünk:

1. Mint már fent példaként említettük, jó néhány makrogazdasági változóról nem eldöntött/eldönthető, hogy I(0), vagy I(1) folyamatot követ-e. Egy megfelelő makromodell ebből a szempontból következetes kell, hogy legyen. Nem mindegy például, hogy a Taylor-szabályban az egyes változók szintjükkel, avagy differenciájukkal kell, hogy szerepeljenek.[44]
2. A legtöbb gazdasági változónak van valamiféle szezonalitása, de ez a szezonalitás általában nem teljesen stabil. Elméleti szempontból probléma, ha a

[42] Ilyen típusú modell pl. Rotemberg és Woodford (1998), vagy McCallum és Nelson (1997)

[43] Lásd pl. Onatski és Stock (2000)

[44] A témáról lásd pl. a Deutsche Bundesbank (1999) cikkét.

szezontisztítást az alkalmazandó makromodelltől függetlenül végezzük, de az együttes becslés is komoly (gyakorlati) nehézséget okoz.[45]

3. A monetáris politika szempontjából releváns árindex meghatározása (pl. az olajárak változása nem feltétlenül kell, hogy befolyásolja a monetáris politikát, mivel a jegybanknak arra érdemi hatása nem lehet). A megoldás manapság ún. maginfláció számítása.[46]
4. A rendelkezésre álló ár-adatok csak korlátozottan képesek figyelembe venni a minőségi javulást. Ezt a hatást is próbálják figyelembe venni a jegybankok, amikor az inflációs célt nem 0%-ban határozzák meg.
5. A potenciális kibocsátás becslése szükséges ahhoz, hogy a monetáris hatóságnak egyáltalán esélye legyen a gazdasági ingadozások csillapítására. A rendelkezésre álló matematikai apparátus, nevezetesen a különféle szűrők alkalmazása önmagában nem ad eligazítást arra nézve, hogy a frekvencia-tartomány mely szakaszai feleltetendők meg az üzleti ciklusoknak, mivel a frekvencia-eloszlásoknak általában nincsenek jól elválasztható szakaszai. Burns és Mitchell (1946) tanulmánya óta szokás (!) elfogadni a 6-48 negyedév tartományt, mint az üzleti ciklusok jellemző hullámhossz-tartományát.[47]
6. A potenciális kibocsátás a kibocsátási rés meghatározásához szükséges. Ha a jegybanki reakciófüggvényben a gazdasági aktivitás mérőszámaként a kibocsátás helyett a (mínusz) munkanélküliséget használjuk, akkor a NAIRU[48] becslése a probléma. Az Egyesült Államokban, pl. széles volt a konszenzus a 80-as években, hogy a NAIRU valahol 5-6% körül van. A 90-es évek hosszú konjunktúrája

[45] A témáról lásd pl. Hansen és Sargent (1993) cikkét.

[46] A témáról lásd pl. Wynne (1999) összefoglalóját, továbbá Buiter (1998), Bryan és Cecchetti (1999), vagy Apel és Jansson (1999) cikkét.

[47] Az üzleti ciklusok elemzéséről lásd pl. Stock és Watson (1999) tanulmányát. A frekvencia-tartományban való filterezésről Baxter és King (1998) ír részletesen. Egyéb módszereket is bemutat és összehasonlít idősorok trendjének meghatározására Higo és Nakada (1998), továbbá Dupasquier, Guay és St.Amant (1997).

[48] Non Accelerating Inflation Rate of Unemployment, a munkanélküliség azon mértéke, amely mellett még nem gyorsul az infláció. Szokás a munkanélküliség természetes rátájának is nevezni.

inkább a 2-3% körüli értéket valószínűsíti. Egy ilyen „mérési hiba” komoly kibocsátási veszteségeket képes okozni (a potenciálishoz képest), ha a gazdaságpolitika a rossz becslésre épít. Még nagyobb nyugtalanságot kell, hogy okozzon, ha kiderül, hogy a 90ües évek elején bekövetkezett strukturális törésről van szó, hiszen akkor hasonló törés a jövőben is bekövetkezhet. Ennek ellenére Estrella és Mishkin (1999) arra a következtetésre jut, hogy a NAIRU fontos fogalom, amely használható a monetáris politikában, de nem úgy, mint egy lehetséges fix célérték (pl. 6%), hanem mivel segít a gazdaságpolitikusoknak az infláció előrejelzésében.

7. A makrogazdasági adatok jelentős része először előzetes adatként lát napvilágot, a piaci szereplők ezekre az előzetes adatokra reagálnak. A végleges adatok megjelenése már csak nagyon ritkán szokott címszalagban megjelenni, az elemzésekhez használatos modellek számszerűsítésekor viszont az addigra már ismertté vált végleges adatok használatosak. Ez az eltérés sok – utóbb nehezen értelmezhető – jelenségre is magyarázatot adhat. Orphanides (1997) azt vizsgálta, hogy milyen monetáris politikai szabályra lehet következtetni a Taylor (1993) által alkalmazott módszer alapján, ha a végleges adatokat a valós idejű adatokkal helyettesítjük. Eredményei szerint az 1987-92 időszakban előretekintő reakciófüggvénnyel jobban leírható a monetáris politika, mint a hasonló Taylor-féle specifikációval. Ezt a tényt nagyrészt elfedi, ha a vizsgálatban utólag javított adatokat használunk.

Általánosságban azt mondhatjuk, hogy a monetáris politika szinte minden pontján tele van bizonytalansággal. Még az a probléma is felmerül, hogy a jegybankárok preferenciái nem azonosíthatók a jegybank preferenciáival.[49] Az információk zajossága arra vezeti a jegybankárokat, hogy a monetáris politikai eszközök használatában óvatosak legyenek. Ez a gyakorlatban megfigyelhető viselkedés[50] elméleti modellek szerint is helyes.[51] A modell paramétereinek és a gazdaság

---

[49] E kérdést tárgyalja Sibert (2001)

[50] Sack (1998a) VAR-elemzése szerint a Federal funds rate mozgásának fokozatosságában nagyrészt a gazdasági modell paramétereinek bizonytalansága játszott szerepet.

[51] Orphanides (1998), Sack (1998b)

állapotáról alkotott képnek a bizonytalanságán túl további érvek is felhozhatók a kamatlábak simítása mellett[52]. Amato és Laubach (1999) azzal érvel, hogy a magánszektor előretekintő viselkedése miatt a simított kamatlábak mozgásának nagyobb a hatása, mivel a gazdasági szereplők arra számítanak, hogy – a simítás miatt – a változtatás tovább érvényben marad. Goodhart (1996) többek között azt állítja, hogy ha a jegybank simítás nélkül megvalósítaná azt a monetáris politikát, amit gazdasági előrejelzései diktálnak, akkor definíció szerint úgy kellene viselkednie a kamatlábnak, mint ahogyan az előrejelzést befolyásoló hírek érkeznek: teljesen random módon, ez pedig komoly kommunikációs nehézségeket okozna, mivel két kamatláb-csökkentés között egy növelés (vagy fordítva) kívülről teljesen feleslegesnek látszik.

1.3.2.3 A hozamgörbe szerepe a monetáris politikában

A hozamgörbe és a monetáris politika kapcsolata kétirányú és mindkét irányban összetett. A monetáris politika felől indulva a rövid és hosszú lejáratú kamatlábakat – legalább elméletileg – összekapcsolja a várakozási hipotézis. (Hogy ez mennyire igaz, arra a 2. fejezetben térünk ki.) Ez alapján a jegybank azt gondolhatja, hogy képes meghatározni a hosszú lejáratú kamatlábakat, amire szüksége is van a transzmissziós mechanizmus „üzemeléséhez”. Ezt a hatalmát a jegybanknak erősen relativizálja a Lucas-kritika, hiszen a hozamgörbe alakja éppen abból adódik, hogy a piacnak – elsősorban a korábbi tapasztalatok alapján – vannak elképzelései arról, hogy a jövőben hogyan fog viselkedni a jegybank. A piacok által feltételezettől eltérő viselkedés megváltoztathatja magára a viselkedésre vonatkozó várakozásokat is, minek következtében a hozamgörbe nem feltétlenül fog úgy reagálni a monetáris politika döntésére, mint azt a jegybank – a döntés előtt megfigyelhető hozamgörbe alapján – gondolta. Ha nem próbálja a jegybank meglepni a piacot, hanem tartja magát a saját – esetleg többé-kevésbé nyilvános – reakciófüggvényéhez, amelyben makrogazdasági mutatók szerepelnek, akkor a hozamgörbe hosszabb vége használhatóvá válik e makrogazdasági változók előrejelzésére (pontosabban az

[52] Egy Amerikában közkeletű szólás szerint: Ha nem tudod, mit tégy, tedd finoman.

azokra vonatkozó piaci várakozások kinyerésére), ami megkönnyítheti az előretekintő viselkedést.

A piacok felöl nézve a hozamgörbe egyrészt exogén adottság, amennyiben a jelenlegi és várt jövőbeli jegybanki döntések határozzák meg, másrészt endogén, amennyiben a jegybank viselkedésére vonatkozó várakozások a jegybanktól (a jegybankárok tényleges szándékaitól) teljesen függetlenül is alakulhatnak.

Különösen érdekes – bár nem célszerű – az a helyzet, amikor a jegybank kizárólag a hozamgörbéből nyert információk alapján hozza döntéseit. Ilyenkor – képletesen fogalmazva – nem tudni, hogy ki kit néz a tükörben. Jó példa erre a kérdés, hogy előrejelzi-e a hozamgörbe a recessziót. A valóságban recessziók általában akkor szoktak következni, amikor a jegybank szigorított a monetáris politikán, hogy leküzdje az inflációt. Egy fordított hozamgörbe ebben az esetben nem sok többletinformációt hordoz a jegybankár számára.

Ennek ellenére jól használható a hozamgörbéből nyert kibocsátás, ill. inflációs előrejelzés, ha nem a rövid lejáratú kamatlábak, hanem a lejárati prémium változására vonatkozó várakozások jeleként értelmezzük.[53]

[53] Lásd pl. Hamilton és Kim (2000)

2 A várakozási hipotézis az amerikai hozamgörbe tükrében

Az alábbiakban tömör összefoglalásokat adunk olyan cikkekről, amelyek amerikai adatokon vizsgálták a várakozási hipotézist. A cikkek jelentős része több kérdést is vizsgál, ezek közül csak a témánkhoz közvetlenül kapcsolódókra összpontosítunk. Bár igyekeztünk az idők folyamán felmerült lényeges gondolatok, vagy szempontok nagy részét megjeleníteni, ennek ellenére eleve nem tűnt realisztikusnak a teljesség igénye. Először leíró jellegű cikkeket veszünk sorra, majd olyanokat, amelyek a várakozási hipotézis elvetése mellett foglalnak állást. Végül következnek azok, amelyek különféle magyarázatokkal igyekeznek a várakozási hipotézist mégis megmenteni.

2.1 Leíró jellegű cikkek

Nippani, Liu és Schulman (2001)

1995 októbere és 1996 márciusa között vita folyt a Fehér Ház és a Kongresszus között az államadósság növelésének felső határáról, aminek következtében felmerült a Kincstár fizetésképtelenségének lehetősége. Ez abban is megnyilvánult, hogy csökkent az állampapírok (kincstárjegyek) és a kereskedelmi papírok közti kamatkülönbözet, ami az állampapírok kockázati feláraként értelmezhető. A vizsgálat szerint ennek az eseménynek nem volt tartós hatása az állampapírok hozamára, mivel a kétféle instrumentum hozamának különbsége visszatért a korábbi szintre. Összességében azt mondhatjuk, hogy az amerikai állampapírok jó közelítéssel tekinthetők kockázatmentesnek.

Ellingsen és Söderström (1998)[54]

A cikk empirikus részében a szerzők az 1988-97 időszak monetáris politikai lépeseit (47 alkalom) a Wall Street Journal-ben olvasható kommentárok alapján sorolják két kategóriába. Röviden fogalmazva, exogénnek tekintenek minden olyan lépést, amely legalább részben (mértékében) meglepetést okozott a piacon és endogénnek azokat, amelyekre a piac alapvetően számított. Ezután megvizsgálják a monetáris politikai döntések hatását a hozamgörbére és azt találják, hogy

1. az exogén és endogén változások hatása a hozamgörbére nem azonos
2. az exogén változások (sokkok) hatása a lejárat növekedtével 100%-ról fokozatosan nullára csökken

Kuttner (2001)

A cikk a Federal funds rate változásait annak alapján osztja fel várt és váratlan részre, hogy a döntés másnapján hogyan változott határidős funds rate jegyzés a chicagoi tőzsdén (ahol e határidős termékkel 1989 óta kereskednek). Megerősíti azt a

[54] A cikk az éven belüli kamatlábakra a Federal Reserve Bank of St. Louis adatait használja, míg éven túl állandó lejárathoz tartozó másodpiaci állampapír-hozamokat.

tapasztalatot, hogy 1994 óta a monetáris politika nem sok meglepetést okozott (mindössze egy alkalommal volt jelentős a nem várt rész. A döntések két alkalmat kivéve mindig az FOMC[55] ülésén születtek.) Ezután a szerző a különféle lejáratú kamatlábak változását teszteli a kétféle funds rate változás függvényében és azt találja, hogy

1. a nem várt monetáris politikai döntéseknek jelentős hatása van a piaci kamatlábakra
2. a várt döntések hatása csekély
3. a nem várt döntéseknek gyakorlatilag nincs semmi hatása a későbbi döntésekre vonatkozó várakozásokra
4. az eredmények robusztusak arra nézve, hogy a mérést az FOMC ülésének napjára időzítve végezzük, avagy havi átlagokkal számolunk

Evans és Marshall (1998)[56]

A cikk azt vizsgálja, hogy hogyan hat egy exogén monetáris politikai sokk a hozamgörbére. VAR-modell[57] keretében három különböző identifikációs stratégiát alkalmaz a sokkok meghatározására. Mindhárom módszer azonos eredményre vezet atekintetben, hogy monetáris politikai sokkok a hozamgörbe rövid végén jelentős, de rövidéletű emelkedést okoznak, a kamatlábak reakciója a lejárat növekedtével csökken, a hosszú lejáratú kamatlábak gyakorlatilag változatlanok maradnak.

---

[55] Federal Open Market Commettee, a Fed operatív monetáris politikai döntéshozó szerve, amely rendszeres időközönként ülésezik. Ritka kivételtől eltekintve ezeken az üléseken születik döntés a Fed funds rate megcélzandó értékéről.

[56] A használt adatbázis McCulloch és Kwon (1993) az 1964-1995 időszakra.

[57] A modellek minden esetben tartalmazzák a Fed funds rate-et, néhány makrogazdasági változót és egy hosszabb (néhány hónapostól több évig terjedő) lejáratú kamatlábat.

Ang és Piazzesi (2001)[58]

Az arbitrázsmentesség feltételével korlátozott VAR-modell keretében elemzi a kamatlábak és makrogazdasági változók dinamikáját, majd kibővíti a modellt látens változókkal. Az eredmények szerint mind az arbitrázsmentesség feltétele, mind a makroadatok (és késleltetettjeik) bevezetése jelentősen javítja a VAR előrejelző erejét. A variancia-dekompozíció azt mutatja, hogy a hozamgörbe változásainak 85%-át magyarázzák a makro adatok, melyek első sorban a hozamgörbe rövid és középső szakaszán hatnak, míg a hosszú végen egy látens változóé a döntő szerep (90%).

Cochrane és Piazzesi (2001)

A szerzők „váratlanul" egy olyan faktorra bukkannak, amely 45%-os R^2 erővel képes előrejelezni az egyéves kötvények lejárati prémiumát. A faktor határidős kamatlábak lineáris kombinációjaként állítható elő, ahol a súlyok „sátoralakot" követnek. Bár a faktor korrelál az üzleti ciklussal, nem jelzi előre a kibocsátást. Magyarázatuk szerint ez a faktor korábban azért nem merült fel a szakirodalomban, mert a hozamgörbe leírásában „jónak" talált modellek elfedték a lejárati prémium nagy változékonyságát az 1-éves lejárat környékén.

---

[58] A használt adatbázis: Fama CRSP (Centre for Research in Securities Prices, University of Chicago) zero coupon files, 1, 3, 12, 36, és 60 havi kamatlábak az 1952-2000 időszakra.

2.2 A várakozási hipotézis elvetései

Cochrane (1999)

Felsorolja a pénzügytan azon – mára már széles körben elfogadott - tényeit, amelyek eltérnek a 80-as évek elejéig általános nézetektől. Ezek között felsorolja azt a tényt, hogy a kötvényhozamok – mint a többi pénzpiaci hozam – előrejelezhetők: a hosszú lejáratú kötvény tartási periódusára számított hozam magasabb, mint a megfelelő időszak rövid lejáratú kamatlába. Bár ezek az előrejelzések nem jelentenek garanciát – jelentős kockázatot hordoznak – a tendencia mégis egyértelmű.

Mankiw és Miron (1986)

A várakozási hipotézist hosszú idősorokon (1890-1979) vizsgálva a cikk arra a következtetésre jut, hogy a hozamgörbe rövid végén a hozamkülönbségek magyarázó ereje a rövid kamatlábak későbbi változására nézve megváltozott 1915 körül, amikor létrejött a Fed rendszere. A hozamkülönbség és a következő változás közti 0,4 értékű korrigált R^2 mutató ettől kezdve gyakorlatilag nullára csökkent és a rövid lejáratú kamatláb mozgása közel került a véletlen bolyongáshoz.

Campbell és Shiller (1991) [59]

Ez a cikk, az egyik legfontosabb viszonyítási pont az elmúlt évtizedben, melyre a későbbi cikkek nagyrészt támaszkodnak, ill. utalnak. A cikk kifejezetten a várakozási hipotézis tesztelését tűzi ki célul, többféle lineáris regresszió segítségével, melyeket két fő csoportba sorolhatunk. Mindkét esetben kulcs szerepet játszik a hosszú és rövid lejáratú kamatlábak különbségeként definiált hozamgörbe meredekség, amit S_t-vel jelölnek.

Az első vizsgálatcsoportban a kamatlábak változását próbálják meg magyarázni a hozamgörbe meredekségének segítségével, melyre két regressziót futtatnak:

[59] A használt adatbázis McCulloch (1990) az 1952-1987 időszakra.

$$R_{n-m,t+m} - R_{n,t} = \alpha + \beta s_{n,m,t} + \varepsilon_{t+m}$$

(123) ahol

$$s_{n,m,t} \equiv \frac{m}{n-m} S_{n,m,t} \equiv \frac{m}{n-m}\left(R_{n,t} - R_{m,t}\right)$$

A második egyenlet az első egyenlet egy közelítése, amely nagy *n*-értékekre érvényes:

$$R_{n,t+m} - R_{n,t} = \alpha + \beta s_{n,m,t} + \varepsilon_{t+m}$$

(124) ha

$$R_{n,t+m} \sim R_{n-m,t+m}$$

A várakozási hipotézis szerint mindkét egyenletben a β együttható értéke 1 kell, hogy legyen (tiszta várakozási hipotézis szerint ezen felül a konstans értéke nulla). A becslési eredmények szerint, ezzel szemben az együtthatók értéke tetszőleges lejárat-kombináció mellett jelentősen az 1 érték alatt marad, sőt a lejárat növekedtével aszimptotikusan lineárisan tart a mínusz végtelenbe (kivéve az 1952-59 rész-mintaidőszakot, amikor a plusz végtelenbe).

Ezután a szerzők először kétváltozós VAR-modellt konstruálnak a rövid lejáratú kamatláb változásából (Δr_t)és a pillanatnyi hozamgörbe meredekségből. Implicite feltételezik (amit később Engsted és Tanggaard formálisan is tesztel és alátámaszt), hogy ez a két változó I(0) folyamatot követ. Ezután a VAR-modell segítségével előrejelzést készítenek a rövid lejáratú kamatláb várt változásaira, majd abból a pillanatnyi lejárati különbözet elméleti értékére $\left(S_t^*\right)$. Racionális várakozások mellett - ha igaz a hozamgörbe várakozási hipotézise – a hozamgörbe megfigyelt és elméleti meredekségének meg kell egyeznie, vagy legalábbis a számított regressziós együtthatónak 1-nek kell lennie. Ezzel szemben a teszt azt mutatja, hogy az együttható jóval 1 fölött van, tehát a megfigyelt hozamgörbe meredekség jóval ingadozóbb (volatilisebb), mint az elméleti, ami a hozamgörbe meredekség túlreagálásaként értelmezhető a kamatlábak változásakor.

Engsted és Tanggaard (1994)

Céljuk kimondottan a Campbell-Schiller (1991) tanulmány implicit feltételezésének tesztelése. Megerősítik, hogy - a feltételezésnek megfelelően – az amerikai nominális kamatlábak egyenként I(1) folyamatot követnek, de páronként kointegráltak $[1 \quad -1]$ kointegráló vektorral. Sokan vitatják ezt az eredményt arra hivatkozva, hogy a nominális kamatlábak szükségszerű pozitivitása elméletileg összeegyeztethetelen az I(1) jelleggel, és hogy az 1979-82-es időszak strukturális törése adhat magyarázatot az I(0) jelleg öknometriai elvetésére.

Bekaert, Hodrick és Marshall (1997)

Felhívja a figyelmet az autokorrelációs együtthatókkal kapcsolatos ökonometriai tesztek gyengeségére amikor a vizsgált folyamat igen közel van az egységgyökhöz. Ilyen esetben még 500-as minta elemszám is kismintának bizonyul. Kevéssé csillapodó folyamatok esetén az OLS becslés az autokorrelációs együtthatót lefelé (nullához) torzítja, ami a várakozási hipotézist tesztelő regressziókban a vizsgált együtthatót nagyobbnak (1-hez közelebbinek) mutatja a valóságosnál. Némileg meglepően a Campbell-Shiller (1991) cikkben szereplő, VAR-alapú korrelációs együttható csak nagyon kevéssé torzított és valószínűségi határértéke körül kevéssé szór. A cikk, összességében teljesen megerősíti a Campbell-Shiller-féle eredményeket.

Sutton (1998)

Megismétli a Campbell-Shiller vizsgálatot az 1970-1997 időszakra és azt találja, hogy bár a két szerző eredményei többnyire továbbra is megállják a helyüket, az adatok nem támasztják alá a korábbi cikk azon (implicit) feltételezését, hogy a hozamgörbe meredeksége elméleti és tapasztalt értékének különbségeként definiált hiba ortogonális lenne a prémium elméleti értékére, tehát a két értékből képzett regresszió becsült együtthatója torzított. Tartalmilag ez azt is jelenti, hogy a kamatlábak előrejelzésének hibája összefügg a hozamgörbe meredekségével.

2.3 A várakozási hipotézis megmentései

Rudebusch (1995)

Rudebusch, miután bemutatja, hogy a várakozási hipotézis magyarázó ereje változik a lejárattal, napi adatokon bemutatja, hogyan egyeztethető össze a tapasztalatokkal a várakozási hipotézis, ha a piacon megfigyelhető kamatláb eltér a Fed által kitűzött kamatláb-céltól.[60]

Balduzzi, Bertola és Foresi (1997)

A cikk - felhasználva a Fed által akkoriban publikált új kamatláb-cél idősort - rávilágít a kamatláb-célokban bekövetkező diszkrét változásoknak a következményeire a hozamgörbe viselkedését illetően. Elemzésük azt mutatja, hogy a rövid lejáratú kamatlábak és a Federal funds rate különbségét alapvetően a kamatláb-cél változására vonatkozó várakozások határozzák meg, nem pedig az egynapos piaci kamatlábaknak a cél körüli ingadozása. Ebből következően a várakozási hipotézis tapasztalati kudarca szerintük a monetáris politika későbbi változásainak hibás előrejelzéséből ered.

Fuhrer (1996)

Feltételezi, hogy a jegybank Taylor-szabályt használ reakciófüggvényként, de megengedi, hogy változzanak a paraméterek (az infláció és a kibocsátás súlya, valamint a hosszú távú inflációs cél). Felbontja az 1966-1994 időszakot részidőszakokra (1966-1974-1980-1986-1994), majd ezekre külön elvégzi a következő három lépést:

1. negyedéves adatokból becsül egy négyváltozós VAR-modellt, melyben az infláció, a kibocsátás (pontosabban a lineáris trendtől számított kibocsátási rés), a rövid lejáratú kamatláb és a hosszú lejáratú kamatláb szerepel

[60] Lásd a monetáris politika operatív céljáról szóló részt fentebb.

2. kiveszi a becsült redukált VAR-formából a kibocsátásra és az inflációra vonatkozó egyenletet, mellé teszi a várakozási hipotézis tiszta formáját és egy Taylor-szabályt
3. megkeresi a Taylor-szabályban alkalmazandó paraméterek értékét úgy, hogy teljesüljön a várakozási hipotézis

Az egyes részmintákra különböző paraméter-értékek adódnak.[61] Az így adódó kamatláb-előrejelzések és a hozamgörbe meredeksége már igen jól megközelítik a várakozási hipotézis által diktált értékeket.

Balduzzi, Bertola, Foresi és Klapper (1997)

A cikk először megállapítja, hogy az 1989-1996 időszakban, amikor a Fed aktívan célozta a Fed funds rate-et, az 1-3 hónapos bankközi kamatlábak rendszeresen, jelentősen, de erősen változó mértékben eltértek a célértéktől. A monetáris politika számára ez azt jelenti, hogy még a Fed funds rate szigorú kontrolja sem vonja maga után a hosszabb lejáratú kamatlábak szoros ellenőrzését. Valójában a piac tisztában van vele, hogy a célérték megváltozhat és ez a várakozás – akár helyes, akár helytelen – hatással van a hosszabb lejáratú kamatlábakra. A Fed befolyásolhatja a kamatlábakat a cél „meglepetésszerű” megváltoztatásával, de ezáltal nem kívánt volatilitást is vihet a rövid lejáratú kamatlábakba, mivel a piac a zajos információt kénytelen feldolgozni.

Lange, Sack és Whitesell (2001)

A tapasztalatok szerint a 80-as évek végétől kezdve a pénzpiacoknak a korábbinál jobban sikerült előrejelezniük az FOMC döntéseit. Ettől az időtől kezdve a hosszú lejáratú kamatlábak és a határidős kamatlábak egyre inkább tartalmazták a Fed funds rate változásait több hónapra előre. A cikk arra a következtetésre jut, hogy ez a javuló előrejelezhetőség részben a kamatláb-változások fokozatosságának és a monetáris politika transzparenciájának is tulajdonítható. Különösen fontos változásnak látszik, amikor az FOMC elkezdett a döntések bejelentésekor magyarázatot is adni a döntésre.

---

[61] Pusztán érdekesség kedvéért írjuk ki a négy egymást követő időszakra becsült hosszú távú inflációs célt: 7.4%, 5.8%, 0%, 3.9%

Campbell (1995)[62]

Esettanulmányként elemzi az 1994. február-május időszakot, amikor a Fed 4 lépésben összesen 1,25% ponttal emelte a kamatlábat. Az elemzők és gazdaságpolitikusok meglepetésére a hosszú lejáratú kamatlábak gyakorlatilag ugyanilyen mértékben emelkedtek. A hozamgörbe rövid végének alakulása még magyarázható lenne azzal, hogy a 90-es évek elején a Fedtől már megszokottá vált a fokozatosságra való törekvés, tehát egy kamatláb-emelés előrevetíti a következő emelést, de ez nem lehet magyarázat az 5-10 éves kamatlábak reakciójára, hiszen azon az időtávon már mindenképpen hatnia kell az antiinflációs politikának, ha az hihető. Campbell inkább elfogadja azt a magyarázatot, hogy a megnövekedett bizonytalanság miatt megnövekedett a hosszúlejáratú kötvények elvárt többlethozama (~kockázati prémiuma). Ezt támasztja alá az a tény is, hogy majdnem 1 százalékponttal csökkentek májusban a határidős kamatlábak az 5-10 éves horizonton, miután a Fed – a korábbi szokásoktól eltérően – sajtóközleményt bocsátott ki, melyben kifejtette, hogy a közeli jövőben nem látja szükségét további hasonló lépéseknek.

Ang és Bekaert (1998)

Rezsimváltó modell segítségével próbálják magyarázni a kamatlábak mozgását. Eredményeik szerint a rezsimváltó modellek jobban magyarázzák az adatokat, mint a hagyományos modellek. Ennek magyarázatát éppen abban látják, hogy a becslésekből adódó rezsimek viszonylag jól megfeleltethetők az üzleti ciklusoknak. Ez a nem-linearitás, ami a kamatlábak alakulására következik a rezsimváltásból, fontos szempont lehet a monetáris transzmisszió vizsgálatakor.

Lanne (1999b)

Az eurodollár kamatlábakat vizsgálja az 1983-1996 időszakban és azt találja, hogy rezsimváltó modellben összeegyeztethetők a tények a várakozási hipotézissel, ha peso-problémák is felmerülhetnek.

[62] Természetesen jó néhány egyéb kérdéssel is foglalkozik, melyeket a többi cikknél idézünk. Itt csak azt említjük meg, ami a többi cikkben nem szerepel.

Bekaert, Hodrick és Marshall (2001)[63]

A Campbell-Shiller regressziók és VAR-módszer segítségével tesztelik a várakozási hipotézist és arra a következtetésre jutnak, hogy a Campbell és Shiller által dokumentált anomáliák magyarázhatóak egyfajta általánosított peso-problémával, amikor a magas kamatlábbal jellemzett rezsimek ritkábban fordultak elő a valóságban, mint azt racionálisan várni lehetett volna. Összességében úgy találják, hogy megfelelően írja le az adatokat egy olyan modell, amely peso-problémákkal kombinálja a hozamgörbe időben változó meredekségét.

Bekaert és Hodrick (2001)

Általánosságban vizsgálja azokat az ökonometriai hipotézisvizsgáló módszereket (Wald, Likelihood-ratio és Lagrange-multiplikátor), amelyekkel VAR-modellek keretén belül tesztelhető a várakozási hipotézis. Monte Carlo szimulációkra alapozva levonja a következtetést, hogy a szakirodalomban általánosan használt Wald-tesztek utasítják el legerősebben a várakozási hipotézist, ugyanakkor ezen tesztek kismintás tulajdonságai a legrosszabbak. A másik véglet az LM-tesztek, amelyek azt inkább túl ritkán utasítják el. A tapasztalati bizonyítékok a várakozási hipotézissel szemben sokkal gyengébbek aszimptotikus esetben.

Tzavalis és Wickens (1997)[64]

Bemutatják, hogy a Campbell és Shiller által dokumentált tapasztalat – miszerint a hozamgörbe meredekség csak az irányát jósolja helyesen a hosszú lejáratú kamatlábakban később bekövetkező változásoknak, de a változás nagyságát nem – teljesen megmagyarázható pusztán azzal, ha az időben változó lejárati prémium (hosszabb lejáratú eszköz következő periódusra várt hozamának és a rövid lejáratú kamatlábnak a különbsége) korrelál a hozamgörbe meredekségével.

Evans és Lewis (1994)

Azt vizsgálják, hogy a hosszú lejáratú kamatlábaknak a görgetett rövidlejáratú kamatlábakhoz képesti többlethozama magyarázható-e pusztán stacioner kockázati

[63] A használt adatbázis a frissített McCulloch (1990) az 1972-1996 időszakra.

[64] A használt adatbázis McCulloch és Kwon (1993) az 1946-1991 időszakra.

prémiumok bevezetésével. Számukra is meglepően arra az eredményre jutnak, hogy nem, amire lehetséges magyarázatként a kockázati prémiumot érő permanens sokkok, vagy a kamatláb alakulásában racionálisan előre várt strukturális változásokat hozzák fel. Ez az eredmény ellentmondásban van Engsted és Tanggaard (1994) eredményével, amire egyrészt magyarázatot adhat az 1979-82-es strukturális törés, vagy az egységgyök-tesztek problémái.

Lanne (1999a)[65]

A Campbell-Shiller regressziók robusztusságát vizsgálja annak fényében, hogy a hozamgörbe meredekségének autoregressziós együtthatója (közelsége az egységgyök-folyamathoz) az idők folyamán változott. Becslései szerint rész-mintaidőszakokra számítva a várakozási hipotézis nem elvethető a hozamgörbe hosszú végén.

McCallum (1994)

Azzal kísérli meg megmagyarázni Campbell és Shiller (1991), Mankiw és Miron (1986), valamint mások empirikus elutasítását a várakozási hipotézissel szemben, hogy újszerű monetáris politikai reakciófüggvényt tételez fel, melyet AR(1) típusú kockázati prémiummal kombinál. Magyarázata szerint a várakozási hipotézis tapasztalati kudarcának oka, hogy a jegybank reakciófüggvényében szerepel a hozamgörbe meredeksége. A cikk levezetésében hiba van, de az alapgondolatot továbbviszi Hsu és Kugler (1997) és Kugler (1998). Dai és Singleton (2001) folytonos modellben valósítja meg ugyanezt a sztochasztikus folyamatot, azzal a különbséggel, hogy a monetáris politikai reakciófüggvény szerepét ott a kockázat piaci ára veszi át.

Favero (2001)

Az empirikus tanulmányok többsége egy egyenletben teszteli a várakozási hipotézist és ezáltal nem tud különbséget tenni a szisztematikus várakozási hibák és a kockázati prémiumban bekövetkezett változások között. Favero, ezzel szemben egy 3-változós (kibocsátás, infláció, rövid lejáratú kamatláb) előretekintő modellt becsül, majd a kapott paraméterbecslések segítségével rövid lejáratú kamatláb-pályákat

[65] A használt adatbázis McCulloch és Kwon (1993) az 1952-1991 időszakra.

szimulál és teszteli, hogy a megfigyelt hosszú lejáratú kamatlábak beleesnek-e az elméletileg várt érték körüli (95%-os) konfidencia intervallumba. Eredményei alapján a várakozási hipotézis nem elvethető.

3 A hozamgörbe egy általános piaci modellje

Az alábbiakban egy általános piaci modellt fogunk bemutatni. Piaci modell, mivel csak a hozamgörbe egészének segítségével becsülhető, mint pl. a Heath-Jarrow-Morton modell, viszont általánosabb, mivel nem tételezi fel az állapotváltozók innovációinak feltételes normalitását. Ehelyett a modellt lineáris VAR formában írjuk fel, ami lehetővé teszi, hogy összekapcsoljuk a hozamgörbe modellezését a monetáris makroökonómiában alkalmazott VAR-modellekkel.

3.1 Arbitrázsmentesség és a Jensen-faktor

Modellünk kiindulópontja a sztochasztikus diszkonttényező és a (folytonosan tőkésített) kamatláb közti különbség. Az áttekinthetőség kedvéért – ahol szükséges - megismételjük az elméleti bevezető legfontosabb egyenleteit.

Az eszközárazás alapegyenlete kimondja, hogy minden eszköz ára megegyezik a sztochasztikus kifizetések és a sztochasztikus diszkonttényező szorzatának várható értékével. Mivel kockázatmentes elemi kötvények esetén a nominális kifizetés minden világállapotban 1 egység, ezért az n periódus lejáratú elemi kötvény ára

$$(125)\quad p_{n,t} = E_t\{M_{n,t+n}\}$$

A folytonos tőkésítésű kamatláb definíció szerint

$$(126)\quad R_{n,t} \equiv -\frac{1}{n}\ln(p_{n,t})$$

E kettőből következik, hogy

$$(127)\quad nR_{n,t} \equiv -\ln(E_t\{M_{n,t+n}\})$$

Amint Bekaert és Hodrick (1997) levezette:

$$(128)\quad \ln(E_t\{M_{n,t+n}\}) - E_t\{\ln(M_{n,t+n})\} = \ln\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{v_{n,t}(k)}{k!}\right] = \ln\left[1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{v_{n,t}(k)}{k!}\right]$$

ahol $v_{n,t}(k)$ a $(t, t+n)$ időszakra vonatkozó sztochasztikus diszkonttényező logaritmusának *k*-dik centrális momentuma. A második egyenlőség abból következik, hogy tetszőleges valószínűségi változóra a nulladik centrális momentum értéke 1, az első pedig nulla.

Központi szerep jut az eszközárazásban ennek az egyenletnek, amikor a különféle modellek felteszik, hogy az árazási mag logaritmusa normális eloszlású. Áttérve az általános jelölésre bezetjük a H operátort:

$$(129)\quad H_t(\xi_{t+1}) = \ln\left[E_t\{\exp(\xi_{t+1})\}\right] - E_t\{\xi_{t+1}\} = \ln\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_t\left\{\left[\xi_{t+1} - E_t\{\xi_{t+1}\}\right]^k\right\}}{k!}\right]$$

ahol a ξ_{t+1} valószínűségi változó. Könnyen belátható, hogy az operátor konstans hozzáadására invariáns:

$$(130)\quad H_t(\xi_{t+1} + \alpha) = H_t(\xi_{t+1}) \quad \alpha \in \Re$$

tehát elegendő csak nulla várható értékű valószínűségi változókkal foglalkoznunk. Skalárral való szorzásra vonatkozóan sajnos nincs egyszerű függvénykapcsolat:

$$(131)\quad H_t(\alpha\xi_{t+1}) = \ln\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_t\left\{(\alpha\xi_{t+1})^k\right\}}{k!}\right] = \ln\left[\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \frac{E_t\left\{\xi_{t+1}{}^k\right\}}{k!}\right]$$

Egyetlen speciális esetben adható egyszerű függvénykapcsolat, éspedig a normális eloszlás esetén, ekkor ugyanis

$$(132)\quad H_t(\alpha\xi_{t+1}) = \alpha^2 H_t(\xi_{t+1}) = \tfrac{1}{2}\alpha^2\sigma_\xi^2 \quad \alpha \in \Re$$

ahol σ_ξ^2 a ξ_{t+1} valószínűségi változó varianciája. Ebből az is következik, hogy a sztenderd normális esetre az operátor értéke $\frac{1}{2}$.

Megjegyezzük, hogy kizárólag független valószínűségi változókra igaz a

$$(133)\quad H_t(\xi_{t+1} + \eta_{t+1}) = H_t(\xi_{t+1}) + H_t(\eta_{t+1})$$

összeadási szabály. Korrelálatlanság nem elegendő.

Felhasználva a H operátort, az eszközárazás alapegyenletét felírhatjuk a változók logaritmusára is:

$$(134)\quad \ln p_t = E_t\{\ln(M_{t+1}) + \ln(x_{t+1})\} + H_t\{\ln(M_{t+1}) + \ln(x_{t+1})\}$$

Mindez azért fontos, mert így áttérhetünk az árakról a kamatlábakra, valamint könnyebben számolhatunk olyan modellekkel, ahol az árazási mag logaritmusának mozgásegyenlete adott.

A továbbiakban a (128) egyenlet jobb oldalán – a Jensen-egyenlőtlenségnek tulajdonítható – kifejezést (elosztva az n lejárattal) Jensen-tagnak fogjuk nevezni és bevezetjük a

$$(135)\quad h_{n,t} \equiv \frac{1}{n}\ln\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\nu_{n,t}(k)}{k!}\right]$$

jelölést. Ezt és a kamatláb definícióját figyelembe véve a (128) egyenletet az alábbi formába írhatjuk:

$$(136)\quad E_t\{\ln(M_{n,t+n})\} = -n(R_{n,t} + h_{n,t})$$

Az arbitrázsmentesség feltétele a pénzpiacokon megköveteli, hogy igaz legyen az

$$(137)\quad M_{n,t+n} = M_{m,t+m}M_{n-m,t+n}$$

egyenlőség. Először vegyük e kifejezés logaritmusát, számítsuk ki a $t+m$ időpontra vonatkozó feltételes várható értékét és helyettesítsük be (136) egyenletet a megfelelő lejárat- és időindexszel:

$$(138)\quad E_{t+m}\{\ln(M_{n,t+n})\} = E_{t+m}\{\ln(M_{m,t+m})\} - (n-m)E_{t+m}\{R_{n-m,t+m} + h_{n-m,t+m}\}$$

Most vegyük a kapott egyenlet feltételes várható értékét a t időpontban, végezzük el a behelyettesítést és szorozzuk meg az egyenletet (-1)-gyel:

$$(139)\quad n(R_{n,t} + h_{n,t}) = m(R_{m,t} + h_{m,t}) + (n-m)E_t\{R_{n-m,t+m} + h_{n-m,t+m}\}$$

Ez az egyenlet nem más, mint a várakozási hipotézis a Jensen-taggal kiigazított kamatlábakra. Amint Bekaert és Hodrick is bemutatja, ha a Jensen-tag időben állandó, akkor visszakapjuk a várakozási hipotézis gyenge formáját. Ismételt behelyettesítéssel a rövid lejáratú (egy-időszakos, kiigazított) kamatláb várt változásaira vezethetjük vissza a hosszú lejáratú kamatlábakat:

$$(140)\quad (R_{n,t} + h_{n,t}) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}E_t\{R_{1,t+j} + h_{1,t+j}\}$$

3.2 A hozamgörbe zárt megoldása

Hogy a teljes hozamgörbe egy modelljét kapjuk, tekintsük s darab gazdasági (megfigyelhető, vagy látens) állapotváltozó egy $\mathbf{z}$ vektorát és tegyük fel, hogy ezek mozgását a

$$\text{(141)}\quad \begin{aligned} &\mathbf{z}_{t+1} - \theta = \mathbf{A}(\mathbf{z}_t - \theta) + \mathbf{u}_{t+1} \\ &\textit{ahol} \\ &\mathbf{u}_{t+1} \sim iid(\mathbf{0}, \mathbf{V}(\mathbf{z}_t)) \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{A}$ a konstans autokorrelációs együtthatók $s \times s$ méretű mátrixa, θ konstans együtthatók $s \times 1$ méretű vektora (valójában $\mathbf{z}_t$ várható értéke), $\mathbf{u}_{t+1}$ pedig a $\mathbf{z}_t$-re merőleges zaj. Az általánosság kedvéért megengedjük, hogy a reziduum kovariancia-mátrixa is függjön az állapotváltozóktól, de természetesen lehet konstans is.

Tételezzük fel, hogy a kamatláb és a Jensen-tag külön-külön affin függvényei az állapotváltozóknak:

$$\text{(142)}\quad \begin{aligned} R_{k,t} &= g(k) + \boldsymbol{\gamma}'(k)\mathbf{z}_t \\ h_{k,t} &= h(k) - \boldsymbol{\delta}'(k)\mathbf{z}_t \end{aligned}$$

ahol $g(k)$ és $h(k)$ csak a lejárattól függő skalárok, míg $\boldsymbol{\gamma}'(k)$ és $\boldsymbol{\delta}'(k)$ szintén csak a lejárattól függő, $1 \times s$ méretű konstans sorvektorok. A várakozási hipotézis kiigazított formája alapján (140)-ből az együtthatókra az alábbi megszorítás adódik:

$$\text{(143)}\quad \boldsymbol{\gamma}'(n) = \boldsymbol{\delta}'(n) + [\boldsymbol{\gamma}'(1) - \boldsymbol{\delta}'(1)]\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\mathbf{A}^j$$

$$\text{(144)}\quad g(n) = -h(n) + [g(1) + h(1)] + [\boldsymbol{\gamma}'(1) - \boldsymbol{\delta}'(1)]\theta - [\boldsymbol{\gamma}'(1) - \boldsymbol{\delta}'(1)]\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\mathbf{A}^j\right)\theta$$

További két megszorítás adódik a paraméterekre, ha első faktornak a rövid lejáratú kamatlábat választjuk, ekkor ugyanis

$$g(1)=0$$

(145) és

$$\boldsymbol{\gamma}(1)=\mathbf{e}_1$$

ahol $\mathbf{e}_1$ az első egységvektor (első eleme 1, a többi 0). Ebben az esetben az **A** mátrix első sora felfogható a jegybanki reakciófüggvény redukált formájaként is, hiszen

$$(146)\quad E_t\{r_{t+1}\}=E_t\{\mathbf{e}_1'\mathbf{z}_{t+1}\}=\mathbf{e}_1'(\mathbf{I}-\mathbf{A})\theta+(\mathbf{e}_1'\mathbf{A})\mathbf{z}_t$$

Ugyanezen az elven előre jelezhetjük a rövid lejáratú kamatlábat bármilyen távoli időhorizontra is:

$$(147)\quad E_t\{r_{t+k}\}=E_t\{\mathbf{e}_1'\mathbf{z}_{t+k}\}=\mathbf{e}_1'(\mathbf{I}-\mathbf{A}^k)\theta+(\mathbf{e}_1'\mathbf{A}^k)\mathbf{z}_t$$

3.3 Összehasonlítás a Heath-Jarrow-Morton modellel

A HJM-modell logikája három lépésben adható meg.

1. Feltételezzük, hogy a különféle lejáratú elemi kötvények tartási periódusra számított többlethozama affin függvénye az állapotváltozó(k)nak:

$$\text{(148)}\quad \ln\left(hpr_{n+1,t}\right) - r_t \equiv (n+1)R_{n+1,t} - \left[r_t + nR_{n,t+1}\right] = -\left(A_{n,t} + S_{n,t}\varepsilon_{t+1}\right)$$

Feltételezzük, hogy a sztochasztikus diszkonttényező logaritmusa affin függvénye az állapotváltozó(k)nak:

$$\text{(149)}\quad \ln\left(M_{1,t+1}\right) = -\left(\delta_t + \lambda_t\varepsilon_{t+1}\right)$$

2. Alkalmazzuk az eszközárazás alapegyenletét az arbitrázsmentesség feltételével a többlethozamokra:

$$\text{(150)}\quad \ln\left(E_t\left\{M_{1,t+1}hpr_{n+1,t}\right\}\right) = 0$$

Áttérünk az árazási egyenlet logaritmusokra felírt (134) szerinti formájára

$$\text{(151)}\quad \begin{aligned} &E_t\left\{\left(r_1 - A_{n,t} - S_{n,t}\varepsilon_{t+1}\right) - \left(\delta_t + \lambda_t\varepsilon_{t+1}\right)\right\} + \\ &+ H_t\left\{\left(r_t - A_{n,t} - S_{n,t}\varepsilon_{t+1}\right) - \left(\delta_t + \lambda_t\varepsilon_{t+1}\right)\right\} = 0 \end{aligned}$$

elvégezve az egyszerűsítéseket kapjuk, hogy

$$\text{(152)}\quad A_{n,t} + \delta_t - r_t = H_t\left\{\left(S_{n,t} + \lambda_t\right)\varepsilon_{t+1}\right\}$$

3. Feltesszük, hogy az állapotváltozó(k) feltételes valószínűségi eloszlása sztenderd normális, tehát

$$\text{(153)}\quad H_t\left\{\left(S_{n,t} + \lambda_t\right)\varepsilon_{t+1}\right\} = \tfrac{1}{2}\left(S_{n,t} + \lambda_t\right)^2 H_t\left\{\varepsilon_{t+1}\right\} = \tfrac{1}{2}\left(S_{n,t} + \lambda_t\right)^2$$

melyet behelyettesítve kapjuk az arbitrázsmentességből adódó megszorítást a paraméterértékekre:

(154) $A_{n,t} + \delta_t - r_t = \frac{1}{2}\left(S_{n,t} + \lambda_t\right)^2$

Adott t időpontra vonatkoztatva a különféle lejáratokhoz tartozó feltételeket kivonhatjuk egymásból:

(155) $A_{n,t} - A_{m,t} = \lambda_t\left(S_{n,t} - S_{m,t}\right) + \frac{1}{2}\left(S_{n,t}^2 - S_{m,t}^2\right)$

Felhasználva, hogy

(156) $A_{0,t} = S_{0,t} = 0 \quad \forall t$

(amit könnyen beláthatunk, ha a (148) egyenletben elvégezzük az $n = 0$ behelyettestést) következik, hogy

(157) $A_{n,t} = \lambda_t S_{n,t} + \frac{1}{2} S_{n,t}^2$

és

(158) $\delta_t = r_t + \frac{1}{2}\lambda_t^2$

Ez utóbbi egyenlet analóg a CAPM-modell alapegyenletével, ahol a sztochasztikus diszkonttényező mozgását a piaci portfólió határozza meg.

Javasolt modellünkben mindez a következőképpen írható:

A (148) és (149) egyenletek az alábbi megfeleltetésekkel írandók

(159)
$$
\begin{aligned}
&-A_{n,t} \approx c_0 + \mathbf{c}_1'\mathbf{z}_t \\
&\quad \text{ahol} \\
&\quad c_0 = \left[(n+1)g(n+1) - ng(n)\right] - \left[g(1) + h(1)\right] \\
&\quad \mathbf{c}_1' = \left[(n+1)\boldsymbol{\gamma}'(n+1) - n\boldsymbol{\gamma}'(n)\mathbf{A}\right] - \left[\boldsymbol{\gamma}'(1) - \boldsymbol{\delta}'(1)\right] \\
&\quad \text{és} \\
&-S_{n,t} \approx -n\boldsymbol{\gamma}'(n)\mathbf{V}(\mathbf{z}_t)^{1/2}
\end{aligned}
$$

valamint

$$(160)\quad \begin{aligned} &-\delta_t \approx d_0 + \mathbf{d}_1'\mathbf{z}_t \\ &\quad \text{ahol} \\ &\quad d_0 = [g(1) + h(1)] \\ &\quad \mathbf{d}_1' = [\boldsymbol{\gamma}'(1) - \boldsymbol{\gamma}'(1)] \\ &\quad \text{és} \\ &\lambda_t \approx \boldsymbol{\lambda}_t'\mathbf{V}(\mathbf{z}_t)^{1/2} \end{aligned}$$

A normalitás feltételezése két megszorítást jelent. Egyrészt a

$$(161)\quad H_t\left\{[n\boldsymbol{\gamma}'(n) + \boldsymbol{\lambda}_t']\mathbf{V}(\mathbf{z}_t)^{1/2}\boldsymbol{\epsilon}_{t+1}\right\} = \tfrac{1}{2}[n\boldsymbol{\gamma}'(n) + \boldsymbol{\lambda}_t']\mathbf{V}(\mathbf{z}_t)[n\boldsymbol{\gamma}(n) + \boldsymbol{\lambda}_t]$$

ahol $\boldsymbol{\epsilon}_{t+1} \sim NID(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, másrészt

$$(162)\quad h_{1,t} = h(1) - \boldsymbol{\delta}'(1)\mathbf{z}_t = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}_t'\mathbf{V}(\mathbf{z}_t)\boldsymbol{\lambda}_\tau$$

Összességében nem másról van szó, mint egy rekurzív szabályról, amely együttesen meghatározza az állapotváltozókat és a különféle lejáratokhoz tartozó együtthatókat. A szabály lényegesen bonyolultabb, mivel négyzetes tagokat is tartalmaz, viszont nem ad több szabadsági fokot. Ahelyett, hogy megkötnénk az innovációk valószínűségi eloszlásának típusát, hogy ezen az áron jussunk becsülhető modellhez, célszerűbbnek tartjuk a linearitás megszorítását a Jensen-tag esetében is, hogy aztán esetleg – fordított logikával - ebből határozhassuk meg az innovációk eloszlását (vagy legalábbis az eloszlás néhány lényeges tulajdonságát).

3.4 A Jensen-tag egy modellje

A (143) és (144) képletek természetesen csak akkor tekinthetők a hozamgörbe modelljének, ha ismert a Jensen-tag, vagy legalábbis annak modellje. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a hozamgörbe modellezésének problémáját a Jensen-tag modellezésének problémájává alakítottuk át.

Hangsúlyozottan csak példaként, tekintsük az árazási mag logaritmusának alábbi mozgásegyenlét (ehhez hasonlót levezethetünk pl. a fogyasztás-alapú eszközárazási modelleknél, de teljesen szabadon választhatunk helyette faktormodellt, vagy esetleg likviditás-alapú modellt is):

$$m_{1,t+1} = \mu + \omega_{t+1}$$

ahol

$$\omega_{t+1} \sim \left(0, \sigma_{t+1}^2\right) \tag{163}$$

és

$$\sigma_{t+1}^2 \in \left\{\sigma_L^2, \sigma_H^2\right\}$$

ahol μ konstans és ω_{t+1} nulla várható értékű, autokorrelálatlan, de feltételesen heteroszkedasztikus folyamat. Feltesszük, hogy két rezsim között vált az árazási mag logaritmusa: egy alacsony volatilitású (L állapot) és egy magas volatilitású (H állapot) között. A rezsimváltás valószínűségét a

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} q_L & 1-q_H \\ 1-q_L & q_H \end{bmatrix} \tag{164}$$

átmenet-mátrix írja le. A mátrix (*i,j*) eleme annak valószínűségét adja meg, hogy a rendszer a *j* állapotból az *i* állapotba kerül (Feltételezzük, hogy a mátrix két sajátértéke különböző[66]. Ha a rendszer az *i* állapotból indul, akkor k periódus után az állapotok valószínűség-eloszlását az $e_i\mathbf{\Pi}^k$ kifejezés adja meg, ahol e_i az *i*-dik

[66] A két sajátérték 1 és $\lambda = q_L + q_H - 1$.

egységvektor. Mivel az árazási mag logaritmusa autokorrelálatlan, a k periódussal későbbi eloszlása

(165)
$$m_{k,t+k} = k\mu + \omega_{k,t+k}$$
ahol
$$\omega_{k,t+k} \sim \left(0, \sigma^2_{k,t+k}\right)$$

szerint alakul. Átugorva az unalmas algebrát

(166)
$$\sigma^2_{k,t+k} = e_i'\left(\sum_{j=0}^{k-1} \Pi^j\right)\begin{bmatrix}\sigma^2_L \\ \sigma^2_H\end{bmatrix} = k\sigma^2_L + k\frac{1-q_L}{1-\lambda}\left(1-\frac{1}{k}\frac{1-\lambda^k}{1-\lambda}\right)\left(\sigma^2_H - \sigma^2_L\right)$$
ahol
$$\lambda = -\left(1 - q_L - q_H\right)$$

Amint az a (136) és (140) egyenletekből következik, a Jensen-tag az alábbi kifejezés valószínűség-eloszlásától fog függni:

(167) $$\frac{1}{k}\sigma^2_{k,t+k} = \sigma^2_L + \frac{1-q_L}{1-\lambda}\left(1-\frac{1}{k}\frac{1-\lambda^k}{1-\lambda}\right)\left(\sigma^2_H - \sigma^2_L\right)$$

Az árazási mag logaritmusának "egy periódusra számított" varianciája aszimptotikusan ($1/k$ sebességgel) a

(168) $$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sigma^2_{k,t+k} = \sigma^2_L + \frac{1-q_L}{1-\lambda}\left(\sigma^2_H - \sigma^2_L\right) = \sigma^2_L + \frac{1}{1+\frac{1-q_H}{1-q_L}}\left(\sigma^2_H - \sigma^2_L\right)$$

értékhez tart. Ha a modell minden paramétere ismert és konstans, akkor a Jensen-tag értéke nulla, amiből következne, hogy érvényesül a várakozási hipotézis tiszta formája. Ha nem változik a gazdaság állapota (leszámítva az L, ill. H állapotokat), akkor idővel a piaci szereplők megtanulják az átmenet-valószínűségek helyes értékét.

Most tegyük fel, hogy az átmenet-valószínűségek nem állandók, hanem változnak a gazdaság állapotát jellemző makro mutatók (nem az L, ill. H állapotok, hanem esetleg az üzleti ciklus) függvényében. Ha a gazdaság állapotát leíró sztochasztikus folyamatok stacionerek, akkor a gazdaság állapotának legjobb előrejelzése rövid távon a makro változóktól (esetleg az üzleti ciklustól) függ, hosszú távon viszont konstans (a feltétel nélküli várható értékek), tehát az átmenet-valószínűségek is konstanshoz tartanak. Ezzel összhangban van Lanne (1999a) eredménye, miszerint rész-mintaidőszakokra nem elvethető a várakozási hipotézis a hozamgörbe hosszú végén. Ezt úgy értelmezhetjük, hogy a vizsgált rész-mintaidőszakokban az átmenetmátrix valószínűségei stacionernek voltak tekinthetők.

Ha a gazdaság állapota és az átmenetvalószínűségek közti kapcsolat nem eleve ismert, akkor a megfelelő függvények a tapasztalatokból becsülendők a piaci szereplők számára – a racionális tanulás elve alapján. Ha a gazdaság működését leíró sztochasztikus folyamat nem változik, akkor a piaci szereplők idővel megtanulják, hogy az átmenet-valószínűségek hogyan függenek a gazdaság makro-állapotától. Ez már egy sokkal lassabb folyamat, mint az előző. Ha ezen túlmenően még alapvetőbb változások is bekövetkeznek (mint pl. megváltozik a jegybank reakciófüggvénye), akkor a tanulási folyamat állandósulhat. A problémát jól illusztrálja, hogy pl. Hamilton (1989) az 1952-1984 időszak adatai alapján a konjunktúra időszakainak átlagos élettartamát 10 negyedévre becsülte, majd nem sokkal ezután következett egy majdnem 10 éves konjunktúra. Kérdés, hogy most mennyinek becsülné ugyanezt a valószínűséget. Különösen nagy problémát jelenthet a tanulásban a ritkábban előforduló (magas volatilitású) állapothoz tartozó átmenet-valószínűségek becslése, hiszen ha belegondolunk, meglehetőst nehéz lenne becslést adni arra pl., hogy ha most kezdődne megint egy nagy gazdasági világválság, akkor az meddig tartana. A legutóbbi 4 évig tartott, de azért nem valószínű, hogy ez megismétlődne. Amint Hamilton (1989) példáján is látjuk, három évtized adataiból levonható következtetéseket jelentős mértékben megváltoztathatják egyetlen további évtized történései. Ha ezt összevetjük azzal, hogy pl. a GDP adatsorok még az Egyesült Államokra vonatkozóan sem hosszabbak 100 évnél, akkor kiderül, hogy mennyire nincsenek felhalmozott kvantitatív ismereteink a gazdaságok működéséről. A sok bizonytalanság és a megfelelő hosszúságú idősorok hiánya igen tág teret nyit a peso-problémáknak is. Összességében arra a következtetésre jutunk, hogy a várakozásokat célszerű külön folyamatként kezelni, amint azt a (142) szerinti felírás is mutatja. Ez lehetővé teszi, hogy az állapotváltozók között legyenek olyanok is, amelyek csak a kamatlábakra és olyanok is, amelyek csak a Jensen-tagra hatnak. A pénzügytan szokásos kamatláb-modelljeiben – ismereteim szerint – nem fordul elő olyan faktor, amely a rövid lejáratú kamatlábra közvetlenül nem hat, de a diszkonttényezőre igen. Ezt a faktort Jensen-faktornak fogjuk hívni. (Természetesen nem lenne akadálya, hogy a modellben több Jensen-faktor is legyen, de egyszerű elemzési céljainkhoz elegendő lesz egyetlen ilyen faktor bevezetése is.

Ha a sztochasztikus diszkonttényező elég gyorsan konvergál a határértékéhez (példánkban ez a (167)-(168) szerinti képlettel megadott konvergencia), miközben maga a határérték időben változik, akkor az empirikus vizsgálatokban releváns lejáratokon[67] a Jensen-tag a lejárattól (de nem az időtől) függetlenként modellezhető.

[67] Ha a Fed funds rate egynapi kamatláb, akkor a 3 hónapos kamatlábnál n=90.

3.5 Egy egyszerű példa

A legegyszerűbb példaként tekintsük az alábbi két-változós modellt. Legyen

$$(169)\quad z_t = \begin{bmatrix} r_t \\ \xi_t \end{bmatrix}$$

ahol r_t a jegybanki kamatláb, ξ_t pedig a Jensen-faktor. Feltételezzük, hogy a Jensen-faktor a lejárattól függetlenül modellezhető. Az állapotváltozók ilyen megválasztásából következik, hogy

$$(170)\quad \begin{aligned} R_{1,t} &= \mathbf{e}_1'\mathbf{z}_t \\ h_{k,t} &= \mathbf{e}_2'\mathbf{z}_t \quad \forall k > 0 \end{aligned}$$

Mozgásukat két egyenlet írja le, a jegybanki reakciófüggvény és a feltételezett tanulási folyamat. Tegyük fel, hogy a jegybank a kamatlábat egy fix $(\bar{r})$értéken igyekszik tartani, de $(1-\lambda$ mértékű) simítást alkalmaz:

$$(171)\quad r_t = r_{t-1} + \lambda(\bar{r} - r_{t-1}) + \zeta_t$$

ahol ζ_t értelmezhető monetáris politikai sokként (melyről feltesszük, hogy martingál-különbség). A tanulási folyamat legyen egy egyszerű stacioner AR(1) folyamat, amely kifejezi, hogy az újdonságokat a piac idővel feldolgozza és miután „kiismerte az új világot” a Jensen-faktor aszimptotikusan visszatér a nulla értékhez.

$$(172)\quad \xi_t = \rho\xi_{t-1} + \varepsilon_t$$

Mátrix formában a modell tehát a

$$(173)\quad z_t = \begin{bmatrix} r_t \\ \xi_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\lambda)\bar{r} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{t-1} \\ \xi_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_t \\ \varepsilon_t \end{bmatrix}$$

alakot ölti. A hozamgörbe zárt megoldása a (143) képlet alapján

$$(174)\quad R_{n,t} = \frac{1}{n}\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda} r_t + \left(1 - \frac{1}{n}\frac{1-\rho^n}{1-\rho}\right)\xi_t$$

Érdemes megfigyelni, hogy a hosszú lejáratokon a hozamgörbe alakját (nem a szintjét) az az állapotváltozó fogja meghatározni, amelyiknek (abszolút értékben) nagyobb az autokorrelációs együtthatója.

3.6 A várakozási hipotézis tesztjei

Ebben az alfejezetben három olyan jelenséget vizsgálunk meg, amelyek a várakozási hipotézis tapasztalati elutasítására vezettek eddig. A hosszú lejáratú kamatlábak túlzott volatilitása, illetve túlreagálása monetáris politikai sokkok esetén, a határidős kamatlábak torzítása a jövőbeli kamatlábak előrejelzésekor, valamint a Campbell-Shiller regressziók.

3.6.1 A hozamgörbe hosszú végének viselkedése

A (174) képletből kiolvasható, hogy a hozamgörbe rövid végét a jegybanki kamatláb, míg a hosszú végét a Jensen-tag határozza meg. Ez a jelenség általánosan is levezethető a (143) zárt formából:

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\gamma}'(n) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\delta}'(n) + [\boldsymbol{\gamma}'(1) - \boldsymbol{\delta}'(1)] \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{A}^j \right] = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\delta}'(n) + [\boldsymbol{\gamma}'(1) - \boldsymbol{\delta}'(1)] \mathbf{A}^\infty$$

(175) ahol

$$\mathbf{A}^\infty = \lim_{n\to\infty} \mathbf{A}^n$$

Ha a rendszer teljesen stacioner (az **A** mátrix stabil, tehát összes sajátértéke az egységkörön belül van), akkor $\lim_{n\to\infty} \mathbf{A}^n = \mathbf{0}$, következésképp

(176) $$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\gamma}'(n) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\delta}'(n)$$

Ezt az összefüggést alátámasztja mind Campbell (1995), mind pedig Ang és Piazzesi (2001). Campbell – az 1994 tavaszi jelentős Fed kamatemelés-sorozatot vizsgálva – azt találta, hogy a határidős kamatlábak[68] sem az emelések időszakában, sem pedig azután, nem a várakozási hipotézisnek megfelelően alakultak. A magyarázat,

[68] Bár végtelen lejáratú kamatlábak még az amerikai pénzpiacon sem megfigyelhetők közvetlenül, mégis adható ezekre becslés, ha a távoli időhorizontra vonatkozó határidős kamatlábak konvergálnak egy értékhez. A végtelen lejáratú kamatlábnak e határértékhez kell tartania.

amelyet Campbell is hajlamosabb elfogadni, hogy a piaci szereplők értékelése a bizonytalanságokról változott meg mindkét esetben. Hogy lássuk, hogyan jelenik meg ez modellünkben, először kiszámítjuk a határidős rövid lejáratú kamatlábat:

$$\begin{aligned} r^f_{t+n} &= R^f_{1,t+n} = (n+1)R_{n+1,t} - nR_{n,t} = \\ &= [(n+1)g(n+1) - ng(n)] + [(n+1)\boldsymbol{\delta}'(n+1) - n\boldsymbol{\delta}'(n)]\mathbf{z}_t + [\boldsymbol{\gamma}'(1) - \boldsymbol{\delta}'(1)]\mathbf{A}^n\mathbf{z}_t \end{aligned} \tag{177}$$

Ha a rendszer stacioner és a Jensen-tag gyorsan konvergál határértékéhez (a lejárat függvényében) akkor az utolsó tag eltűnik és a határidős kamatláb csak a „határidős Jensen-tagtól" függ. Ha elhanyagoljuk a konstanst és a Jensen-faktor az egyik állapotváltozó, akkor aszimptotikusan a határidős kamatlábat egyszerűen a

$$\lim_{n\to\infty} r^f_{t+n} = \lim_{n\to\infty}[(n+1)\boldsymbol{\delta}'(n+1) - n\boldsymbol{\delta}'(n)]\mathbf{z}_t = \mathbf{e}'_2\mathbf{z}_t = \xi_t \tag{178}$$

egyenlet adja meg. Ennek fényében úgy is értelmezhetjük a (169)-(174) egyenletekben bemutatott példát, mint ahol a teljes hozamgörbét a pillanatnyi és a végtelen távoli határidős rövid lejáratú kamatláb határozza meg. Mivel Campbell nem a végtelenben vett határértéket vizsgálta, hanem az 5-10 éves horizontot, ezért még maradt valamennyi az **A** mátrix – következésképp a jegybanki kamatláb – hatásából. Ezért a kamatláb-emelések után is maradt némi tartós hatás ezeken a lejáratokon. Egyszerű, kis példánkat véve, ha feltételezzük, hogy havi szinten a λ paraméter értéke 0,97 (ami empirikus vizsgálatokban gyakori eredmény), akkor 125 bázispontos emelés hatása 5 éves horizonton 20 bázispontos emelkedés (Campbell 30 bázispontnál kisebb értékről ír), feltéve, hogy a Jensen-tag teljesen visszatér korábbi értékéhez. Minél nagyobb λ értéke, annál nagyobb a hatás a véges lejáratokon, de a végtelen időhorizonton ettől függetlenül eltűnik, amint azt Evans és Marshall (1998) is kimutatja.

Amint fenti egyszerű példánk esetében bemutattuk - a hosszú lejáratokon a hozamgörbe alakját (nem a szintjét) az az állapotváltozó fogja meghatározni, amelyiknek (abszolút értékben) nagyobb az autokorrelációs együtthatója. Ang és Piazzesi (2001) úgy találta, hogy annak a látens változónak, amelyik a hozamgörbe hosszú végének varianciáját dominálja az autokorrelációs együtthatója 0,99 körül van, tehát a hosszú távú tanulási folyamat működéséről a hozamgörbe hosszú végének tanulmányozásából szerezhetünk ismereteket.

A Jensen-faktor ilyen magas autokorrelációs együtthatója azt vonja maga után, hogy az innovációknak igen hosszú távon fennmarad a hatása. Ebből az is következik, hogy a jelenlegi hozamgörbe akár több évtizeddel ezelőtti egyszeri események hatását is tartalmazhatja a várakozások alakulásában betöltött szerepükön keresztül, ha pedig ez így van, akkor olyan ritka események is hosszú távon hathatnak, amelyek előfordulási gyakoriságának pontos becslésére még nyilvánvalóan nem állhat rendelkezésre kellő hosszúságú idősor. Szélsőséges példát véve, ami egyszer megtörtént az elmúlt 20 évben, az megtörténhet a következő 20 évben is, de hogy ennek pontosan mekkora a valószínűsége, az gyakorlatilag nem becsülhető. Ilyen „esemény" természetesen nem csak konkrét esemény lehet, hanem eltérő sztochasztikus folyamatokkal (pl. volatilitással) jellemezhető időszakok beköszöntése, illetve elmúlása is. Ez alapján megfogalmazatjuk azt a hipotézist, hogy a hozamgörbe magyarázatához nem lehet elég a racionális várakozások feltételezése, szükségképpen be kell kapcsolni a modellezésbe a racionális tanulás folyamatát.

3.6.2 A határidős kamatlábak, mint a kamatlábak előrejelzői

Definíció szerint a határidős kamatláb a hozamgörbéből a (28) képlet szerint számolható:

(179) $$mR^{f}_{n,m,t} \equiv (n+m)R_{n+m,t} - nR_{n,t}$$

Behelyettesítve a zárt alakú megoldásokat a kamatlábak helyére:

(180) $$mR^{f}_{n,m,t} = [(n+m)g(n+m) - ng(n)] + [(n+m)\boldsymbol{\gamma}'(n+m) - n\boldsymbol{\gamma}'(n)]\mathbf{z}_t =$$

Ezzel szemben az *n* időszakkal későbbi *m* lejáratú kamatláb legjobb előrejelzése alapján:

(181) $$\begin{aligned} &mE_t\{R_{m,t+n}\} = mg(m) + m\boldsymbol{\gamma}'(m)E_t\{\mathbf{z}_{t+n}\} = \\ &= mg(m) + m\boldsymbol{\gamma}'(m)(\mathbf{I} - \mathbf{A}^n)\boldsymbol{\theta} + m\boldsymbol{\gamma}'(m)\mathbf{A}^n\mathbf{z}_t \end{aligned}$$

Összehasonlítva a két eredményt azt látjuk, hogy a hiba, amit a határidős kamatlábbal való előrejelzéskor elkövetünk, nem feltétlenül függ azoktól a faktoroktól, amelyek a jegybanki kamatlábat meghatározzák. Elhanyagolva a konstanst és behelyettesítve a zárt alakú megoldást

$$\text{(182)}\quad R^{f}_{n,m,t} - E_t\left\{R_{m,t+n}\right\} \approx \left[\frac{(n+m)\boldsymbol{\delta}'(n+m) - n\boldsymbol{\delta}'(n)}{m} - \boldsymbol{\delta}'(m)\mathbf{A}^{n}\right]\mathbf{z}_t$$

Bár modellünk alapvetően diszkrét idejű, logikailag mégis megtehetjük, hogy m értékét nullához közelítsük és kiszámítsuk a pillanati kamatláb előrejelzési hibáját, mint határértéket. Az eredmény deriváltak formájában írható:

$$\text{(183)}\quad \lim_{m\to 0}\left[R^{f}_{n,m,t} - E_t\left\{R_{m,t+n}\right\}\right] = -\left\{\frac{\partial}{\partial n}\left[nh(n)\right] - h(0)\right\} + \left\{\frac{\partial}{\partial n}\left[n\boldsymbol{\delta}'(n)\right] - \boldsymbol{\delta}'(0)\mathbf{A}^{n}\right\}\mathbf{z}_t$$

A várakozási hipotézis visszanyeri érvényességét a véges lejáratokon, ha az állapotvektor együtthatója azonosan nulla.

Egyszerű példánkat véve alapul, a konstans tagokat elhanyagoljuk. Feltételezzük, hogy a Jensen-faktor autonóm folyamatot követ, tehát csak saját idősorából jelezhető előre, viszont a különféle lejáratokhoz tartozó együtthatók értékét engedjük eltérni, tehát legyen

$$\text{(184)}\quad \xi_t = \rho\xi_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{és} \quad \boldsymbol{\delta}(n) = \begin{bmatrix} 0 \\ d(n) \end{bmatrix}$$

Az állapotvektor együtthatója nulla, ha fennáll a

$$\text{(185)}\quad \frac{\partial}{\partial n}\left[nd(n)\right] = d(0)\rho^{n}$$

egyenlőség. Ez akkor igaz, ha találunk olyan $d(0)$ és c konstansokat, amelyekre

$$\text{(186)}\quad d(n) = \frac{1}{n}\left[\frac{d(0)}{\ln\rho}\rho^{n} + c\right]$$

Hogy ez megfelelő függvényforma lehet-e a Jensen-faktor együtthatóinak becslésére, arra a tapasztalat adhat választ.

3.6.3 A Campbell-Shiller regressziók

Az egyik legfontosabb cáfolata a várakozási hipotézisnek a Campbell-Shiller (1991) regressziók, ezért most ezeket vizsgáljuk meg. Mivel bennünket leginkább a hozamgörbe hosszú vége érdekel, ahol a Jensen-faktor szerepe a modell szerint nagy, ezért csak a másodikkal foglalkozunk (aszimptotikusan a két egyenlet egyébként is ekvivalens).

$$\text{(187)}\quad R_{n,t+m} - R_{n,t} = \alpha + \beta \frac{m}{n-m}\left(R_{n,t} - R_{m,t}\right) + \varepsilon_{t+m}$$

Nem befolyásolja az együtthatók értékét, ha az egyenlet mindkét oldalán a t időpontra vonatkozó feltételes várható értéket számolunk. Behelyettesítve a modell szerinti zárt formákat és összevonva a konstansokat:

$$\text{(188)}\quad \boldsymbol{\gamma}'(n)\left(\mathbf{A}^m - \mathbf{I}\right)\mathbf{z}_t \cong const. + \hat{\beta}\frac{m}{n-m}\left[\boldsymbol{\gamma}'(n) - \boldsymbol{\gamma}'(m)\right]\mathbf{z}_t$$

Ebből következik, hogy

$$\text{(189)}\quad \boldsymbol{\gamma}'(n)\left(\mathbf{A}^m - \mathbf{I}\right) \cong \hat{\beta}\frac{m}{n-m}\left[\boldsymbol{\gamma}'(n) - \boldsymbol{\gamma}'(m)\right]$$

Campbell és Shiller (1991) nem stacioner, kointegrált kamatlábakkal számolt (amit Engsted és Tanggaard (1994) is alátámasztott), így mi is így járunk el. Alappéldánkat a $\lambda = 1$ esetre alkalmazva[69] azt kapjuk, hogy

$$\text{(190)}\quad R_{n,t} = r_t + \left(1 - \frac{1}{n}\frac{1-\rho^n}{1-\rho}\right)\xi_t$$

[69] Ebben az esetben $\frac{1}{n}\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda} = 1$

Behelyettesítve ez alapján (189)-ba:

$$\text{(191)}\quad \begin{bmatrix}1 & 1-\frac{1}{n}\frac{1-\rho^n}{1-\rho}\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \rho^m\end{bmatrix}\right\}=\hat{\beta}\frac{m}{n-m}\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{m}\frac{1-\rho^m}{1-\rho}-\frac{1}{n}\frac{1-\rho^n}{1-\rho}\end{bmatrix}$$

amiből következik, hogy

$$\text{(192)}\quad \hat{\beta}=-\frac{1-\frac{1}{n}\frac{1-\rho^n}{1-\rho}}{\frac{1}{m}\frac{1-\rho^m}{1-\rho}-\frac{1}{n}\frac{1-\rho^n}{1-\rho}}\left(1-\rho^m\right)\frac{n-m}{m}$$

Az aszimptotikus érték *n* végtelenbe tartása esetén

$$\text{(193)}\quad \lim_{n\to\infty}\hat{\beta}=-(1-\rho)(n-m)$$

ami egy negatív meredekségű egyenes az *n* lejárat függvényében. Campbell és Shiller mérései alapján az együttható értéke[70] 60 hónapnál -3.1, 120 hónapnál –5. Ebből következően a becslés ρ értékére $1-\frac{1.9}{60}=0.968$.

Amint látjuk, a Jensen-faktor igen közel van az I(1) folyamathoz, ezért sem túlságosan meglepő, hogy Evans és Lewis (1994) nem tudta elutasítani az hozamgörbe meredekségének stacioneritását (amit Campbell és Shiller feltételezett)[71]. Felmerül tehát, hogy a kamatlábak esetleg nem csak azért bizonyulhatnak integrált folyamatoknak az empirikus tesztekben, mert a jegybank reakciófüggvénye szerint kell annak lenniük, hanem mert a Jensen-faktor közel integrált folyamat. Ez azt kell, hogy jelentse, hogy a tanulandó folyamatokban vannak törések. Ilyenek lehetnek pl. jelentős, diszkrét változások a jegybank reakciófüggvényében (mint azt Evans és Lewis is felveti), vagy a gazdaságot érő egyéb strukturális sokkok.

[70] Campbell és Shiller havi adatokkal dolgozik és az idézett két becslés az m=1 esetre vonatkozik.

[71] Ha Campbell és Shiller 1(a) táblázatából kiszámítjuk az 1 évnél hosszabb lejáratokra adódó összes β becslést, akkor a 47 adat közül kettő is fölötte van az 1-nek, ami durván úgy is fogalmazható, hogy 4 százalékos szignifikancia szinten nem elutasítható az egységgyök.

McCallum (1994), Hsu és Kugler (1997), valamint Kugler (1998) azzal próbálja magyarázni a várakozási hipotézis empirikus kudarcát, hogy a jegybank a hozamgörbe meredekségére reagál, amikor a rövid lejáratú kamatlábat meghatározza.

$$(194)\quad r_t = \sigma r_{t-1} + \lambda\left(R_{p,t} - r_t\right) + \zeta_t$$

Továbbra is fenntartjuk a Jensen-faktort meghatározó AR(1) folyamatot.[72] Az ebben az esetben kicsit bonyolultabb mátrix-jelölés helyett legyen

$$(195)\quad R_{n,t} = g(n) + \gamma_r(n) r_t + \gamma_\xi(n)\xi_t$$

Behelyettesítve ez alapján a reakciófüggvényben szereplő hosszabb lejáratú kamatlábat:

$$(196)\quad \left[1 + \lambda\left(1 - \gamma_r(p)\right)\right] r_t - \lambda\gamma_\xi(p)\xi_t = g(p) + \sigma r_{t-1} + \zeta_t$$

Bár McCallum még csak határesetként, Kugler már kizárólagosan csak az egységgyök folyamat esetét tárgyalja, tehát amikor $\sigma = 1$. Ha ezt elfogadjuk, akkor tudjuk, hogy $\gamma_r(n) = 1$ minden n-re, mivel kointegráltak a kamatlábak $\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}$ kointegráló vektorral, tehát

$$(197)\quad \begin{bmatrix}1 & -\lambda\gamma_\xi(p)\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_t\\ \xi_t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \rho\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_{t-1}\\ \xi_{t-1}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\zeta_t\\ \varepsilon_t\end{bmatrix}$$

ebből következik, hogy

$$(198)\quad \begin{bmatrix}r_t\\ \xi_t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \rho\lambda\gamma_\xi(p)\\ 0 & \rho\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_{t-1}\\ \xi_{t-1}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & \lambda\gamma_\xi(p)\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\zeta_t\\ \varepsilon_t\end{bmatrix}$$

Az egyetlen változás a korábbiakhoz képest, hogy itt már a Jensen-faktor és a Jensen-faktort befolyásoló sokkok is befolyásolják a jegybanki kamatlábat, nemcsak

[72] Maga McCallum is már AR(1) típusú kockázati prémiumot tételezett fel a várakozási hipotézisben.

a monetáris politikai sokkok. Tartalmilag ez azt jelenti, hogy a hozamgörbe meredekségére reagálva a jegybank néha „piaci pletykáknak is felülhet".

A rend kedvéért kiírjuk a zárt megoldást:

$$(199)\quad R_{n,t} = r_t + \left\{1 - \frac{1}{n}\frac{1-\rho^n\left[1-\lambda\gamma_\xi(p)\right]^n}{1-\rho\left[1-\lambda\gamma_\xi(p)\right]}\right\}\xi_t$$

de ez természetesen még nem teljesen explicit megoldás. Az explicit megoldáshoz ki kell fejeznünk $\gamma_\xi(p)$ értékét, amit úgy tudunk megtenni, ha n helyére p-t helyettesítünk, majd a kapott együtthatót egyenlővé tesszük $\gamma_\xi(p)$-vel.

Fontos megjegyeznünk, hogy $\lambda = 0$ esetén visszakapjuk az előző példát, amikor a jegybank még nem reagált a hozamgörbe meredekségére. Mivel ott is sikerült produkálnunk a Campbell-Shiller regressziókban becsült paraméter „anomáliáját", azt kell mondjuk, hogy a magyarázat lényege nem a jegybank reakciófüggvényében van, hanem sokkal inkább a Jensen-faktorban, ami McCallumnál az AR(1) típusú kockázati prémiumban jelenik meg.

3.7 A Jensen-faktor és a sztochasztikus diszkonttényező rekonstruálása

Cochrane és Piazzesi (2001) különféle (1 éven túli) lejáratú kötvények tartási periódusra számított hozamát próbálja előrejelezni a pillanatnyi és a határidős rövid (1 éves) lejáratú kamatlábak segítségével.[73] Regressziójuk – saját jelölésünket használva – a következőképpen néz ki:

$$(200)\quad \left[nR_{n,t}-(n-1)R_{n-1,t+1}-R_{1,t}\right]=const.+\sum_{k=1}^{5}\beta_{n,k}\left[kR_{k,t}-(k-1)R_{k-1,t}\right]+\varepsilon_{n,t+1}$$

ahol $\beta_{n,k}$ a becsülendő paraméterek. Ezeket a regressziókat 4 különböző *n* értékre (2-5 év) futtatják le.

Először a *t*-időpontra vonatkozó feltételes várható értéket számítunk (ez nem befolyásolja a paraméterbecslések értékét), majd (a konstanst elhanyagolva) megfeleltetjük egymásnak a paramétereket:

$$(201)\quad \left[n\boldsymbol{\gamma}'(n)-(n-1)\boldsymbol{\gamma}'(n-1)\mathbf{A}-\boldsymbol{\gamma}'(1)\right]\cong\sum_{k=1}^{5}\beta_{n,k}\left[k\boldsymbol{\gamma}'(k)-(k-1)\boldsymbol{\gamma}'(k-1)\right]$$

A kamatlábak paramétereit behelyettesítve (143) alapján a Jensen-tag paramétereivel:

(202)

$$\left[n\boldsymbol{\delta}'(n)-(n-1)\boldsymbol{\delta}'(n-1)\mathbf{A}-\boldsymbol{\delta}'(1)\right]\cong\sum_{k=1}^{5}\beta_{n,k}\left[k\boldsymbol{\delta}'(k)-(k-1)\boldsymbol{\delta}'(k-1)+\left[\boldsymbol{\gamma}'(1)-\boldsymbol{\delta}'(1)\right]\mathbf{A}^{k-1}\right]$$

[73] A regressziókat az1964-1999 időszakra futtatták.

Tegyük fel, hogy lefuttatjuk ezeket a regressziókat (amint azt Cochrane és Piazzesi is tette) valamennyi lejáratra 1-től n-ig[74]. Ha feltételezzük, hogy a rendszerben s állapotváltozó van, akkor az összes paraméterek száma:

1. az **A** mátrix tartalmaz s^2 elemet
2. a Jensen-tag különféle lejáratokhoz tartozó $\boldsymbol{\delta}'(k)$ együtthatóvektorainak elemszáma $n \times s$
3. az 1 periódus lejáratú kamatláb $\boldsymbol{\gamma}'(1)$ együtthatóvektora tartalmaz s paramétert
4. Az általánosság csökkentése nélkül megköthetjük, hogy $\boldsymbol{\gamma}'(1) = \mathbf{e}_1'$ és $\boldsymbol{\delta}'(1) = \mathbf{e}_2'$, tehát a meghatározandó paraméterek száma csökken $2s$-sel

Összesen tehát a meghatározandó paraméterek száma $s^2 + (n-1)s$.

Ha az egyes regressziókban az n időhorizontig terjedő határidős kamatlábakat vesszük figyelembe, akkor $n(n-1)$ független paraméterre kapunk becslést (lásd 74. lábjegyzet). Az állapotváltozók maximális száma n függvényében meghatározható az

$$(203)\ s^2 + (n-1)s \leq n(n-1)$$

feltétel alapján, ahol s, természetesen egész szám kell, hogy legyen. Az $n = 5$ esetre ez legfeljebb két állapotváltozót enged meg, mivel 12 a szükséges paraméterek száma, és 16 paraméterre kapunk becslést. Mivel így marad további négy becsült paraméterünk, nem élünk a $\boldsymbol{\gamma}'(1) = \mathbf{e}_1'$ és $\boldsymbol{\delta}'(1) = \mathbf{e}_2'$ megszorításokkal, csak mint az iteráció induló értéke.

Az **A** mátrix és a többi paraméter számított értékeit az alábbi táblázatok mutatják:

[74] Az első ezek közül természetesen degenerált, hiszen az a jelenlegi rövid lejáratú kamatlábat magyarázza saját magával és a határidős kamatlábakkal, tehát a becsült együtthatók vektora egységvektor lesz.

1. táblázat

	1. állapotváltozó	2. állapotváltozó
$\gamma'(1)$	0.9258	0.0418
$\delta'(1)$	-0.0361	1.0583
$\delta'(2)$	0.0005	1.0086
$\delta'(3)$	0.0369	0.9748
$\delta'(4)$	0.0389	0.9579
$\delta'(5)$	0.0120	0.9368

A jegybanki kamatláb és a Jensen-faktor paraméterei

Cochrane és Piazzesi (2001) alapján becsült értékek

2. táblázat

	1. állapotváltozó	2. állapotváltozó
1. állapotváltozó	0.7740	0.2048
2. állapotváltozó	-0.0136	1.0140

Az állapotváltozók autokorreláció-mátrixa

Cochrane és Piazzesi (2001) alapján becsült értékek

Az eredmények váratlanul közel állnak ahhoz, amit egyszerű kis példánkban feltételeztünk. Ezek alapján megfeleltethetjük a jegybanki kamatlábat az 1. állapotváltozónak, a Jensen-faktort pedig a 2. állapotváltozónak. A modellből a jegybanki reakciófüggvény nem identifikálható, mivel négy paramétert $(\rho, \lambda, \sigma, p)$ kellene meghatározni három becsült érték alapján. Nyilvánvaló, hogy a $\sigma = 1$ feltevéssel nem élhetünk, de azt mondhatjuk, hogy a jegybank a kamatlábat jelentős mértékben simítja és nem elhanyagolható mértékben reagál a tőle függetlenül alakuló Jensen-faktorra (valószínűleg a hozamgörbe meredekségén keresztül). A

Jensen-faktor gyakorlatilag I(1) folyamatnak tekinthető[75], ez a paraméter az egyetlen, amely önmagában is identifikált ($\hat{\rho} = 1.014$ éves szinten)

Természetesen további, kiterjedtebb vizsgálatok lehetővé tennék, hogy ne csak 2-változós modellt rekonstruálhassunk, illetve megállapíthassuk a $\delta'(n)$ vektorok második elemének határértékét.[76]

A Jensen-faktor rekonstruálása akkor teljes, ha nem csak az alakulását meghatározó folyamat tulajdonságait ismerjük (első sorban korrelációját más változókkal, illetve autokorrelációs együtthatóját), hanem a mintaidőszak minden egyes időpontjához minden lejáratra meg tudjuk határozni az értékét. Ehhez látens változós módszereket kell alkalmazni, melyre jó példa Ang és Piazzesi (2001) modellje, ahol 5 változót (és késleltetettjeiket) foglaltak VAR-strukturába. A Cochrane és Piazzesi (2001) számítások alapján adódó korrelációs és autokorrelációs együtthatók identifikációs megszorításokként alkalmazhatók egy ilyen becslésnél. Mindez további kutatás témája lehet.

Amint a (142)-(143) képletekből látható, $\delta'(k)$ és $h(k)$ együtthatók megfelelő megválasztásával bármilyen hozamgörbe előállítható (leszámítva az 1 periódus lejáratot, ahol a $\gamma'(1)$ és $g(1)$ paraméterek a mérvadóak). Mint már fentebb részletesebben szóltunk erről, annyiban hasonlít a megközelítés a Heath-Jarrow-Morton (1992) megközelítésre, hogy ez is egy piaci kamatláb-modell, viszont annyiban eltér, hogy nem tételezi fel az állapotváltozók feltételes valószínűség-eloszlásának normalitását. Ezért itt éppen fordított logika is érvényesülhet: kiindulva a $\delta'(k)$ és $h(k)$ együtthatók olyan megválasztásából, amely megfelelően

---

[75] Véleményünk szerint ez az 1964-1999 becslési időszakban bekövetkezett strukturális töréseknek köszönhető.

[76] Itt, csak annyit látunk a táblázatból, hogy az 1-5 éves horizonton csökkenő – amit peso-problémával kombinált rezsimváltó modellünk alapján is vártunk – de kérdés, hogy a határérték nulla-e, avagy pozitív szám. Meglepő módon az 1. Táblázatban szereplő 5 adat legjobban an^{-b} alakú hatványfüggvénnyel közelíthető, nem pedig exponenciális $\left(ae^{-bn}\right)$, avagy hiperbolikus $\left(a + \frac{b}{n}\right)$ függvénnyel. Még ezeknél is rosszabbul teljesít a (190) szerinti függvényforma, de természetesen ez az adatmennyiség nem ad alapot részletesebb elemzésre.

reprodukálja a tapasztalati hozamgörbét, a Jensen-faktor (135) szerinti definíciója alapján az esetek nagy részében rekonstruálható a sztochasztikus diszkonttényező eloszlása. (Elméletileg mindent tudunk az eloszlásról - a várható értéket kivéve –, ha ismerjük az összes centrális momentumot és a momentumokból, mint Taylor-együtthatókból képzett ún. generátorfüggvény az egységsugarú körön belül konvergens. Sajnos ez utóbbi feltétel több – a gyakorlat szempontjából fontos esetben nem teljesül. Ilyen pl. a lognormális eloszlás.)

4 Következtetések és lehetséges kutatási irányok

A hozamgörbe alakulásának egyik meghatározó tényezője a várakozások alakulása, ami racionális tanulási folyamatot is jelenthet. A rendelkezésre álló tapasztalati eredmények egyelőre nem elégségesek annak eldöntésére, hogy a hozamgörbe alakulása magyarázható-e pusztán a gazdaság állapotának racionálisan várt változásaival, avagy szükséges a beállt változások feldolgozásának tanulási folyamatát is bekapcsolni. A Jensen-faktor igen lassú lecsengése (közel egységgyök folyamat) arra utal, hogy olyan, igen ritkán előforduló események előfordulásának lehetősége is hatással lehet a hozamgörbe alakulására, amelyek előfordulási gyakoriságának pontos becslésére még nyilvánvalóan nem állhat rendelkezésre kellő hosszúságú idősor. Mindez újabb érvet szolgáltat a racionális tanulási folyamat modellezésének szükségességéhez.

Itt csak a legegyszerűbb két-változós modellek elemzésével foglalkoztunk, első sorban szemléltetési céllal. Bár az eredmények meglepően összhangban vannak a valósággal, nyilvánvalóan nem tekinthetőek ezek a hozamgörbe megfelelő modelljének. Kiterjedtebb vizsgálat szükséges a makrogazdasági változók (infláció, kibocsátás, stb.) bekapcsolására, ami lehetővé tenné a transzmissziós mechanizmusra koncentráló VAR-irodalom folytatását és szorosabb összekapcsolását a hozamgörbe egészének modellezésével.

Ha sikerül rekonstruálni a Jensen-faktorokat, majd azokból a sztochasztikus diszkonttényezők eloszlását, akkor alkalmazhatóvá válik a modell a kamatlábak származékos termékeinek árazására is, anélkül, hogy feltételeznénk a kamatlábakat alakító innovációk feltételesen normális eloszlását.

Mindenképpen megoldandó problémát jelent, hogy modellünkben nincs kezelve a nominális kamatlábak nulla alsó korlátja. Ez is kidolgozásra vár.

Az alkalmazott affin kamatláb-modell elemzése alátámasztja azt a hagyományos nézetet, hogy a hosszú lejáratú kamatlábak fontos információt hordoznak a gazdaságról, viszont kiderül, hogy ehhez valóban a nagyon hosszú (lehetőség szerint a végtelen) lejáratot kell tekinteni. Ezen a ponton külön kutatási irány lehet, pl. az

Európai Unió ún. maastrichti konvergencia-kritériumainak egyike, a hosszú lejáratú kamatlábak konvergenciája. A feltétel úgy szól, hogy a Gazdasági és Monetáris Unióhoz csatlakozni kívánó országban a hosszú lejáratú kamatláb nem haladhatja meg 2 százaléknál jobban a referencia értéket. A referencia érték a három legalacsonyabb inflációjú tagország hosszú lejáratú kamatlábának átkaga. Nem része a feltételnek, hogy a hosszú lejárat pontosan mennyit is jelent, mivel országonként változik az állampapír piacon forgalmazott leghosszabb lejárat. Fenti elemzésünk fényében, amely kimutatta, hogy a jegybank hajlama a rövid lejáratú kamatlábak simítására jelentősen befolyásolja a monetáris politika hatását a hosszabb lejáratokon, azt kell mondanunk, hogy valójában minden országban ki kellene számítani a Jensen-faktorokat és arra kellene megkövetelni a konvergenciát. Ha igaz az, hogy a végtelen lejáraton már csak a várakozások bizonytalansága hat, akkor tulajdonképpen ez a látens változó válik a legfontosabb konvergencia kritériummá (ami helyett a maastrichti szerződésben szereplő hosszú lejáratú kamatlábak csak közvetlenül mérhető proxyk) hiszen azok az országok tartoznak igazán egy gazdaságba, amelyek piacain még a várakozások is azonosak, mivel még az őket érő sokkok is azonosak (amint azt egy optimális pénzügyi uniótól meg szokás követelni). Csatlakozni kívánó országok esetében a csatlakozás kitűzött időpontjának hitelességét mérheti a megfelelő „határidős Jensen-faktor" konvergenciája.

Az Egyesült Államok jegybank törvénye, a Federal Reserve Act három célt tűz a jegybank elé. Ezek közül kettő tett szert nagyobb közismertségre: az infláció leszorítása és a teljes foglalkoztatás elősegítése. A harmadik a hosszú lejáratú kamatlábak alacsony szinten tartása. Hasonlóan az EU maastrichti kamatláb-kritériumához, itt is feltételezhetjük, hogy a nevezett kamatláb csak proxyként szolgál, és a valódi cél a gazdasági bizonytalanságok csökkentése, ami egy jegybank számára igazán szép és nemes feladat.

IRODALOMJEGYZÉK

AMATO, J.D. and LAUBACH, Th. [1999]: The Value of Interest Rate Smoothing: How the Private Sector Helps the Federal Reserve. FED of Kansas City, Economic Review. Q3 51-64.

ANG, A. and BEKAERT, G. [1998]: Regime Switches in Interest Rates. NBER Working Paper, 6508.

ANG, A. and PIAZZESI, M. [2001]: A No-Arbitrage Autoregression of Term Structure Dynamics with Macroeconomic and Latent Variables. NBER Working Paper, 8363.

APEL, M. and JANSSON, P. [1999]: A Parametric Approach for Estimating Core Inflation and Interpreting the Inflation Process. Sveriges Riksbank Working Paper Series, No. 80.

BACKUS, D.K., FORESI, S. and TELMER, CH. I. [1996]: Affine Models of Currency Pricing. NBER Working Paper, 5623.

BACKUS, D.K., FORESI, S. and TELMER, CH. I. [1998]: Discrete-Time Models of Bond Pricing. NBER Working Paper, 6736.

BAGLIANO, F.C. and FAVERO, C.A. [1998]: Measuring Monetary Policy with VAR Models: An Evaluation. European Economic Review, 1069-1112.

BALDUZZI, P., BERTOLA, G. and FORESI, S. [1997]: A Model of Target Changes and the Term Structure of Interest Rates. Journal of Monetary Economics, vol.39: 223-249.

BALDUZZI, P., BERTOLA, G., FORESI, S. and KLAPPER, L. [1997]: Interest Rate Targeting and the Dynamics of Short-Term Rates. NBER Working Paper, 5944.

BATINI, N. and HALDANE, A.G. [1999]: Forward-Looking Rules for Monetary Policy. in: Taylor, J.B. (ed.) Monetary Policy Rules; The University of Chicago Press, Chap.4.

BAXTER, M. and KING, R.G. [1998]: Measuring Business Cycles: Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series. Manuscript.

BEKAERT, G. and HODRICK, R.J. [2001]: Expectations Hypothesis Tests. Journal of Finance.

BEKAERT, G. and HODRICK, R.J. and MARSHALL, D.A. [1997]: On Biases in Tests of the Expectations Hypothesis of the Term Structure of Interest Rates. Journal of Financial Economics, 309-348.

BEKAERT, G., HODRICK, R.J. and MARSHALL, D.A. [2001]: "Peso Problem" Explanations for Term Structure Anomalies. Journal of Monetary Economics.

BERNANKE, B.S. and BLINDER, A.S. [1992]: The Federal Funds Rate and the Channels of Monetary Transmission. American Economic Review, 901-921.

BLACK, F., DERMAN, E. and TOY, W. [1990]: A One-Factor Model of Interest Rates and its Application to Treasury Bond Options. Financial Analysts Journal, 33-39.

BLINDER, A.S. [1997]: What Central Bankers Could Learn from Academics and Vicaversa. Journal of Economic Perspectives, vol.11, Number2, pp 3-19.

BOLLERSLEV, T., CHOU, R.Y. and KRONER, K.F. [1992]: ARCH Modeling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence. Journal of Econometrics, S / 5-59.

BOSSAERTS, P. [1998]: On Rationality in Financial Markets. Manuscript.

BOSSAERTS, P. [2001]: The Paradox of Asset Pricing. Princeton University Press, forthcoming.

BRYAN, M.F. and CECCHETTI, S.G. [1999]: The Monthly Measurement of Core Inflation in Japan. IMES Discussion Paper Series, No.99-E-4.

BUITER, W.H. [1998]: The Concept and Measurement of ‘Domestically Generated Inflation’. Manuscript.

BURNS, A.F. and MITCHELL, W.C. [1946]: Measuring Business Cycles. NBER Working Paper.

CAMPBELL, J.Y. [1995]: Some Lessons from the Yield Curve. Journal of Economic Perspectives, 129-152.

CAMPBELL, J.Y. and COCHRANE, J.H. [1999]: Explaining the Poor Performance of Consumption-Based Asset Pricing Models. NBER Working Paper 7237.

CAMPBELL, J.Y. and SHILLER, R. [1991]: Yield Spreads and Interest Rate Movements: A Bird's Eye View. Review of Economic Studies, 495-514.

CAMPBELL, J.Y., LO, A.W. and MACKINLAY, A.C. [1997]: The Econometrics of Financial Markets. Princeton University Press.

CHEUNG, Y-W. and CHINN, M.D. [1996]: Further Investigation of the Uncertain Unit Root in GNP. NBER Technical Working Paper Series, 206.

CHRISTIANO, L.J., EICHENBAUM, M. and EVANS, CH. [1999]: Monetary Policy Shocks: What Have We Learned and to What End. in: Taylor, J.B. & Woodford, M. (eds.) Handbook of Macroeconomics, North Holland, Chap.2.

CLARIDA, R.H., GALÍ, J. and GERTLER, M. [1997]: Monetary Policy Rules in Practice: Some International Evidence. CEPR, 1750.

CLARIDA, R.H., GALÍ, J. and GERTLER, M. [1998]: Monetary Policy Rules and Macroeconomic Stability: Evidence and some Theory. NBER Working Paper 6442.

CLARIDA, R.H., GALÍ, J. and GERTLER, M. [1999]: The Science of Monetary Policy: A New Keynesian Perspective. NBER Working Paper 7147.

COCHRANE, J.H. [1999]: New Facts in Finance. FED of Chicago Economic Perspectives, 36-58.

COCHRANE, J.H. [2001]: Asset Pricing. Princeton University Press.

COCHRANE, J.H. and PIAZZESI, M. [2001]: Bond Risk Premia. Manuscript.

COX, J.C., INGERSOLL, J.E. and ROSS, S.A. [1985]: A Theory of the Term Structure of Interest Rates. Econometrica, 385-407.

CUTHBERTSON, K. [1996]: Quantitative Financial Economics. John Wiley & Sons.

DAI, Q. and SINGLETON, K.J. [2001]: Expectation Puzzles, Time-Varying Risk Premia, and Dynamic Models of the Term Structure. NBER Working Paper 8167.

DAVIDSON, J.E.H. and HENDRY, D.F. and SRBA, F. and YEO, S. [1978]: Econometric Modelling of the Aggregate Time-Series Relationship between

Consumers' Expenditure and Income in the United Kingdom. Economic Journal 88, 661-692.

DEUTSCHE BUNDESBANK [1999]: Taylor Interest Rate and Monetary Conditions Index. Deutsche Bundesbank Monthly Report, April 47-63.

DIEBOLD, F.X., LEE, J.-H. and WEINBACH, G.C. [1994]: Regime Switching with Time-Varying Transition Probabilities. in: Hargreaves, C.P. (ed.) Nonstationary Time Series Analysis and Cointegration; OP, 283-302.

DUFFIE, D. [1996]: Dynamic Asset Pricing Theory. Princeton University Press.

DUFFIE, D. and KAN, R. [1993]: A Yield-Factor Model of Interest Rates. Mathematical Finance 6, 379-406.

DUPASQUIER, CH., GUAY, A. and ST-AMANT, P. [1997]: A Comparison of Alternative Methodologies for Estimating Potential Output and the Output Gap. Working Paper, Bank of Canada, 97-5.

ELLINGSEN, T. and SÖDERSTRÖM, U. [1998]: Monetary Policy and Market Interest Rates. Sveriges Riksbank Working Paper Series, No.56.

ENGSTED, T. and TANGGAARD, C. [1994]: Cointegration and the US Term Structure. Journal of Banking and Finance, 167-181.

ESTRELLA, A. and MISHKIN, F.S. [1999]: Rethinking the Role of NAIRU in Monetary Policy: Implications of Model Formulation and Uncertainty. in: Taylor, J.B. (ed.) Monetary Policy Rules; The University of Chicago Press, Chap.9.

EVANS, CH.L. and MARSHALL, D.A. [1998]: Monetary Policy and the Term Structure of Nominal Interest Rates: Evidence and Theory. Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, 53-111.

EVANS, G.W. and HONKAPOHJA, S. [2001]: Learning and Expectations in Macroeconomics. Princeton University Press.

EVANS, M.D.D. [1996]: Peso Problems: Their Theoretical and Empirical Implications. in: G.S.Maddala and C.R. Rao, eds., Handbook of Statistics, Vol.14., Elsevier Science, B.V., Chapter 21.

EVANS, M.D.D. and LEWIS, K.K. [1994]: Do Stationary Risk Premia Explain It All ?. Journal of Monetary Economics, 285-318.

FAVERO, C.A. [2000]: Applied Macroeconometrics. Oxford Univesity Press.

FAVERO, C.A. [2001]: Does Macroeconomics Help Understand the Term Structure of Interest Rates?. Manuscript.

FUHRER, J.C. [1996]: Monetary Shifts and Long-Term Interest Rates. Quarterly Journal of Economics, 1183-1208.

GOLDFELD, S.M. and QUANDT, R.E. [1973]: A Markov Model for Switching Regressions. Journal of Econometrics, 3-16.

GOODHART, C.A.E. [1996]: Why Do Monetary Authorities Smooth Interest Rates. LSE Financial Markets Group Special Paper, No.81.

GRANGER, C.W.J. [1981]: Some Properties of Time Series Data and their Use in Econometric Model Specification. Journal of Econometrics, 121-130.

HALL, R.E. [1978]: Stochastic Implications of the Life Cycle - Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence. Journal of Political Economy.

HAMILTON, J.D. [1988]: Rational Expectations Econometric Analysis of Changes in Regime: an Investigation of the Term Structure of Interest Rates. Journal of Economic Dynamics and Control, 385-423.

HAMILTON, J.D. [1989]: A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle. Econometrica, 357-384.

HAMILTON, J.D. [1994]: Time Series Analysis. Princeton University Press.

HAMILTON, J.D. and KIM, D.H. [2000]: A Re-Examination of the Predictability of Economic Activity Using the Yield Spread. NBER Working Paper, 7954.

HANSEN, L.P. and SARGENT, T.J. [1993]: Seasonality and Approximation Errors in Rational Expectations Models. Journal of Econometrics, v.55,21-55.

HAYASHI, F. [2000]: Econometrics. Princeton University Press.

HEATH, D., JARROW, R.A. and MORTON, A. [1992]: Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology. Econometrica, 77-105.

HELLER, R. [1988]: Implementing Monetary Policy. FED Bulletin, 419-429.

HICKS, J.R. [1939]: Value and Capital. Oxford Univesity Press.

HIGO, M. and NAKADA, S.K. [1998]: How Can We Extract a Fundamental Trend from an Economic Time Series ?. Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan.

HO, T.S.Y. and LEE, S-B. [1986]: Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims. Journal of Finance, 1011-1029.

HOLMSTRÖM, B. and TIROLE, J. [2001]: LAPM: A Liquidity-Based Asset Pricing Model. Journal of Finance 56.

HSU, CH. and KUGLER, P. [1997]: The Revival of the Expectations Hypothesis of the US Term Structure of Interest Rates. Economics Letters, 115-120.

JAMES, J. and WEBBER, N. [2000]: Interest Rate Modelling. JWS.

JOHANSEN, S. [1988]: Statistical Analysis of Cointegration Vectors. Journal of Economic Dynamics and Control, 231-254.

KUGLER, P. [1998]: The Term Premium, Time Varying Interest Rate Volatility and Central Bank Policy Reaction. Manuscript.

KUTTNER, K.N. [2001]: Monetary Policy Surprises and Interest Rates: Evidence from the Fed Funds Futures Market. Journal of Monetary Economics, 523-544.

LANGE, J., SACK, B. and WHITESELL, W. [2001]: Anticipation of Monetary Policy in Financial Markets. FED Board of Governors, Finance and Economics Discussion Paper.

LANNE, M. [1999a]: Near Unit Roots and the Predictive Power of Yield Spreads for Changes in Long-Term Interest Rates. Review of Economics and Statistics, 393-398.

LANNE, M. [1999b]: Testing the Expectations Hypothesis of the Term Structure of Interest Rates in the Presence of a Potential Regime Shift. Bank of Finland Discussion Paper, 20/99.

LUCAS, R.E. JR. [1976]: Econometric Policy Evaluation: A Critique. in: Brunner, K. & Meltzer, A. (eds.) The Phillips Curve and the Labor Markets, Amsterdam, North-Holland.

LUCAS, R.E. JR. [1978]: Asset Prices in an Exchange Economy. Econometrica, 1429-1445.

LÜTKEPOHL, H. and REIMERS, H.-E. [1992]: Impulse Response Analysis of Cointegrated Systems. Journal of Economic Dynamics and Control, 53-78.

MANKIW, N.G. and MIRON, J.A. [1986]: The Changing Behavior of the Term Structure of Interest Rates. Quarterly Journal of Economics, 211-228.

MCCALLUM, B.T. [1994]: Monetary Policy and the Term Structure of Interest Rates. NBER Working Paper, 4938.

MCCALLUM, B.T. [1999]: Issues in the Design of Monetary Policy Rules. in: Taylor, J.B. & Woodford, M. (eds.) Handbook of Macroeconomics, North Holland, Chap.23.

MCCALLUM, B.T. [2000]: Alternative Monetary Policy Rules: A Comparison with Historical Settings for the United States, the United Kingdom, and Japan. NBER Working Paper, 7725.

MCCALLUM, B.T. and NELSON, E. [1997]: An Optimizing IS-LM Specification for Monetary Policy and Business Cycle Analysis. NBER Working Paper, 5875.

MCCULLOCH, J.H. [1990]: U.S. Term Structure Data, 1946-1987, Appendix in: Friedman, B.M. and Hahn, F.H. (eds.) Handbook of Monetary Economics Vol.1. Chapter 13. Elsevier, North Holland.

MCCULLOCH, J.H. and KWON, H.-C. [1993]: U.S. Term Structure Data, 1947-1991. Ohio State University, working paper, no. 93-6.

MUTH, J.F. [1961]: Rational Expectations and the Theory of Price Movements. Econometrica.

NELSON, CH.R. and PLOSSER, CH.I. [1982]: Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series: Some Evidence and Implications. Journal of Monetary Economics, 139-162.

NIPPANI, S., LIU, P. and SCHULMAN, C.T. [2001]: Are Treasury Securities Free of Default?. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 251-265.

ONATSKI, A. and STOCK, J.H. [2000]: Robust Monetary Policy under Model Uncertainty in a Small Model of the U.S. Economy. NBER Working Paper, 7490.

ORPHANIDES, A. [1997]: Monetary Policy Rules Based on Real-Time Data. FED Board of Governors, manuscript.

ORPHANIDES, A. [1998]: Monetary Policy Evaluation with Noisy Information. FED Board of Governors, Finance and Economics Discussion Paper.

QUANDT, R.E. [1958]: The Estimation of Parameters of Linear Regression System Obeying Two Separate Regimes. Journal of the American Statistical Association, 873-880.

ROGOFF, K. [1980]: Essays on Expectations and Exchange Rate Volatility. Unpublished PhD Dissertation MIT.

ROTEMBERG, J.J. and WOODFORD, M. [1998]: An Optimization-Based Econometric Framework for the Evaluation of Monetary Policy: Expanded Version. NBER Technical Working Paper Series, No.233.

RUDEBUSCH, G.D. [1993]: The Uncertain Unit Root in Real GNP. American Economic Review, 264-272.

RUDEBUSCH, G.D. [1995]: Federal Reserve Interest Rate Targeting, Rational Expectations and the Term Structure. Journal of Monetary Economics, 245-274.

RUDEBUSCH, G.D. [1996]: Do Measures of Monetary Policy in a VAR Make Sens. Banca d'Italia, Temi di Discussione, no.269.

SACK, B. [1998a]: Does the Fed Act Gradually?. FED Board of Governors, mimeo.

SACK, B. [1998b]: Uncertainty, Learning, and Gradual Monetary Policy. FED Board of Governors, manuscript.

SARGENT, T.J. [1987]: Dynamic Macroeconomic Theory. Harvar University Press.

SHILLER, R.J. [1990]: The Term Structure of Interest Rates. in: Friedman, B. & Hahn, F. (eds.) Handbook of Monetary Economics, Vol.1 Chapter 13. 627-722. (with an Appendix by MCCULLOCH, J.H.)

SIBERT, A.C. [2001]: Monetary Policy with Uncertain Central Bank Preferences. Manuscript.

SIMS, CH.A. [1980]: Macroeconomics and Reality. Econometrica, 1-48.

STOCK, J.H. and WATSON, M.W. [1999]: Business Cycle Fluctuation in US Macroeconomic Time Series. in: Taylor, J.B. & Woodford, M. (eds.) Handbook of Macroeconomics, North Holland, Chap.1..

SUTTON, G.D. [1998]: Spread Overreaction in International Bond Markets. BIS Working Paper, 55.

SVENSSON, L.E.O. [1997]: Inflation Forecast Targeting: Implementing and Monitoring Inflation Targets. European Economic Review, 1111-1146.

TAYLOR, J.B. [1993]: Discretion Versus Policy Rules in Practice. Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, 195-214.

TZAVALIS, E. and WICKENS, M.R. [1997]: Explaining the Failures of the Term Spread Models of the Rational Expectations Hypothesis of the Term Structure. Journal of Money, Credit and Banking, 364-380.

VASICEK, O. [1977]: An Equilibrium Characterization of the Term Structure. Journal of Financial Economics, 177-188.

WALSH, C.E. [1998]: Monetary Theory and Policy. MIT Press.

WARNE, A. [1997]: Inference in Cointegrated VAR Systems. Review of Economics and Statistics, 508-511.

WATSON, M.W. [1994]: Vector Autoregression and Cointegration. in: Engle, R.F. & McFadden, D.L. (eds.) Handbook of Econometrics, Elsevier Science, vol.IV. 2843-2915.

WYNNE, M.A. [1999]: Core Inflation: A Review of Some Conceptual Issues. ECB Working Paper Series, 5.