SZABÓ IMRE

DUÁLIS MEGKÖZELÍTÉSEK A MIKROÖKÖNÓMIÁBAN

MATEMATIKA TANSZÉK

Témavezető
Dr. Dancs István, BKÁE, Matematika Tanszék

BUDAPESTI KÖZGAZDASÁGTUDOMÁNYI ÉS ÁLLAMIGAZGATÁSI EGYETEM

Közgazdaságtani Ph.D. Program

DUÁLIS MEGKÖZELÍTÉSEK A MIKROÖKONÓMIÁBAN

Ph.D. értekezés

Szabó Imre

Budapest, 2001

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A gazdasági élet valamely területét szemlélve, csupán a mindennapos tapasztalataink alapján is tudunk összefüggéseket megállapítani. Abból a célból, hogy ezeket ellenőrizzük, valamint a gazdaság szereplőinek heurisztikusan átláthatalan viselkedéséről esetleges további összefüggéseket találjunk, matematikai modellt konstruálhatunk. Ezt a modellt a matematika szabályai alapján vizsgálhatjuk, szigorúan a modell határain belül maradva. Egy gazdasági terület matematikai modellel való vizsgálatának az arculatát a rendelkezésre álló matematikai eszközök alakítják ki. Gyakran elkövetett hiba, hogy a modellen belüli vizsgálatok során, talán a közgazdasági nyelvezet csábításának is engedve, a modellben nem ellenőrzött összefüggéseket is felhasználnak. Ezt elkerülendő, a dolgozatban tudatosan szétválasztjuk a modellen belüli és a modellen kívüli feltevéseket. Mivel a célunk az eredeti gazdasági probléma minél jobb megértése, ezért gondosan kell interpretálni a kapott eredményeket a vizsgált gazdasági problémára.

A dolgozat az általános egyensúlyelméletnek elsősorban a fogyasztási oldalával foglalkozik. A fogyasztáselmélet azt vizsgálja, hogy a fogyasztó miként választ a fogyasztási javak kötegeiből. A fogyasztó választását többféleképpen is leírhatjuk. Az egyik lehetséges út során feltesszük, hogy a fogyasztó valamilyen optimumra törekszik. Ebben az esetben a fogyasztó viselkedését valamilyen feltételes szélsőértékfeladattal lehet leírni.

A fogyasztó viselkedésének jellemzését a mikroökonómiában kétféle szélsőértékfeladattal — egy maximum- és egy minimumfeladattal — szokás leírni. Ezek a feladatok ugyanannak a dolognak két különböző, de egymással teljesen egyenrangú megközelítései. Tudjuk, hogy a matematikai értelemben vett szélsőértékfeladatok majdnem mindig összetartozó párban jelennek meg. Ezen két mikroökonómiai feladat egymáshoz való viszonyának a leírása, valamint ezen viszony konvex analízisbeli hátterének megvilágítása a dolgozat fő célja. Ez a vizsgálat több okból is fontos. Egyrészt a kétféle megközelítés kapcsolata további fontos információkat hordoz a fogyasztóról, másrészt ennek ismeretében ezen feladatok közgazdasági értelmezése gazdagabbá és harmonikusabbá tehető. A dualitás gondolata különböző formában történetileg korábban megjelent annál, — például Marshall munkáiban — mint ahogyan az a matematikai módszerben tisztázódott, illetve kiteljesedett. Az utóbbi évtizedek tankönyveiben, például Deaton (1980) [13] és Mas-Colell - Whinston - Green (1995) [32] monográfiáiban a dualitás természetes szemléletként szerepel. Vannak munkák, amelyeket kifejezetten ennek a gondolatnak szenteltek, ezek közül megemlítjük Cornes (1992) [5] könyvét.

Az első három fejezetben nagy nyomatékot kapott az, hogy a leírásból jól látszódjon, hogy miután felírtuk azokat a szélsőértékfeladatokat, amelyek a véleményünk szerint jól tükrözik a gazdaság szereplői viselkedéséről kialakított képet, azok csupán mint matematikai problémák legyenek előttünk. Ezért az első három fejezet látszólag csak két, tulajdonképpen nem is bonyolult speciális szélsőértékfeladatnak, illetve ezek kapcsolatának a tanulmányozása, miközben nagy hangsúlyt kap az, hogy az egyes fogalmak tulajdonságai milyen matematikai eszközök alkalmazásán múlnak. Az igazi mozgatórugónk azonban mégis az, hogy ezeknek a szélsőértékfeladatoknak, illetve a bennük szereplő fogalmaknak és ezek tulajdonságainak alapvetőek a gazdasági interpretációi. Voltaképpen a dolgozat egyik célja a széles körben ismert mikroökonómiai fogalmak és alapvető összefüggések axiomatikus szemléletű bemutatása volt.

A haszonmaximalizálási és a költségminimalizálási feladatnak ez a tisztán matematikai vizsgálata még egy előnnyel és egyben hátránnyal is járt. Ezek a feladatok ugyanis nemcsak a fogyasztáselméletnek alapfeladatai, hanem a termeléselméletnek is, ezért a termeléselméletbeli interpretációi ugyanennyire fontosak. A hátrány abban jelentkezik, hogy a jelöléseknél választani kellett a fogyasztáselméletben és a termeléselméletben szokásosak között. A dolgozat későbbi fejezeteinek fogyasztáselméleti jellege miatt az előbbire került a választás.

Az első és a második fejezetben e két szélsőértékfeladattal, a haszonmaximalizálási és a költségminimalizálási feladattal foglalkozunk, amelyek A. Marshall illetve J. R. Hicks nevéhez köthetők. Ismert, hogy mindkét feladat megoldása során a határhaszonelmélet egy sarkalatos tételéhez jutunk. Feltéve, hogy a fogyasztó optimálisan dönt — az általános egyensúlyelmélet keretei között gondolkozva ez azt jelenti, hogy a fogyasztó döntése egy egyensúlyi allokáció része — akkor a parciális határhasznok hányadosa megegyezik az árarányokkal, továbbá a helyettesítési határráta abszolútértéke megegyezik az árarányok reciprokával. Ha azt is feltesszük, hogy a gazdaságban lévő pénz árupénz, és ez az ármérce jószág, akkor bármely jószágnak a határhaszna éppen a jószág ára, továbbá bármely jószágnak a pénzre vonatkozó helyettesítési határrátájának az abszolútértéke megegyezik a jószág árával. Köztudott, hogy a fogyasztási jószágok piacán is bemutatható, miszerint egy áru értéke az utoljára eladott egységének az ára, bár talán ez egy kicsit keresettnek tűnhet, azonban a részvénypiacon ez valóban mindennapos tapasztalat. Elméleti szempontból igen jelentősnek mondható, hogy a mindennapos megfigyelések alapján heurisztikusan kialakított határhaszonelmélethez található olyan matematikai modell, amely interpretációja azt megerősíti.

A feladat megoldásánál, illetve a megoldhatóság feltételeinek a megállapításánál még fontosabbnak mondható a megoldásoknak a feladat paramétereitől való függésének, azaz a keresleti leképezésnek a vizsgálata. Ezt a vizsgálatot komparatív statikának vagy érzékenységvizsgálatnak szokták nevezni. E területnek alapvető matematikai eszköze a halmazértékű leképezések analízise. Először a feladat feltételi leképezésének a tulajdonságait kell megismernünk, majd egy további fogalmat kell bevezetnünk: a szélsőértékfeladat értékfüggvényét, amit a haszonmaximalizálási feladatban indirekt hasznossági függvénynek, a költségminimalizálási feladatban pedig kiadási függvénynek neveznek.

Amennyiben az általános egyensúlyelméletben az egyensúly létezését a szokásos módon a Kakutani-tétel alkalmazásával akarjuk bebizonyítani, akkor be kell látni, hogy a keresleti leképezés felső-Vietoris-folytonos. E két fejezetben a legfontosabbnak a megoldásleképezés tulajdonságait összefoglaló állítások tekinthetők, amelyben Diewert (1982) [15] dolgozatának alapgondalatát követve az általunk használt keretek között igazoltuk a megoldásleképezések felső-Vietoris-folytonosságait. Ez a Berge-tétel alkalmazásával a feltételi leképezés Vietoris-folytonosságából következik. Ennek a bebizonyítása jelenti mindkét megközelítés legmunkaigényesebb részét. A haszonmaximalizálási feladat költségvetési leképezése Vietoris-folytonosságának olyan bizonyítását sikerült adnunk, amely kis módosítással egy általánosabb haszonmaximalizálási feladat költségvetési leképezésének a Vietoris-folytonosságát is igazolja, ekkor a jószágteret is a fentieknél általánosabban definiáljuk. Az általánosan ismert eredményekhez képest sikerült igazolnunk a költségminimalizálási feladat feltételi leképezésének nemcsak a zárt gráfúságát, hanem a felső-Vietoris-folytonosságát is. Az ennek matematikai hátteréül szolgáló tételeket a Függelékben külön pontban gyűjtöttük egybe.

A Marshall-féle illetve a Hicks-féle koncepció ugyanannak a gazdasági jelenségnek, a fogyasztói viselkedésnek kétféle módon való megragadása. Várható ezért, hogy erős kapcsolat van közöttük. Így például nem meglepő, hogy minden rögzített ár mellett az indirekt hasznossági és a kiadási függvények egymás inverzei. A harmadik fejezet első felében a haszonmaximalizálási és költségminimalizálási feladatnak, mint pusztán matematikai szempontból duális kapcsolatban álló két szélsőértékfeladatnak a kapcsolatát elemezzük. Ezzel egyidejűleg viszont a két koncepció közötti kapcsolatot jellemző állítások lehetővé teszik további gazdasági fogalmak tisztázását is. Jól ismert, hogy valamely áru árának a megváltozása a fogyasztó keresletére kétféleképpen is hat, egyrészt megváltozik a fogyasztó jövedelme, másrészt az árarányok megváltozásai a különböző áruk között helyettesítéseket indukálnak. A helyettesítési hatást a Slutsky-féle helyettesítési mátrix fejezi ki. Mas-Colell - Whinston - Green (1995) [32] alapján a két feladatsereg megoldásai (azaz a közönséges illetve a kompenzált keresleti függvény) közötti kapcsolatot jellemző állítás segítségével definiáltuk a Slutsky-féle helyettesítési mátrixot, majd adtuk meg további jellemzéseit, amelyekből a helyettesítési hatás és a jövedelemhatás közötti ismert mikroökonómiai kapcsolat is leolvasható.

A haszonmaximalizálási feladatról szóló fejezetben a Roy-tétellel kapcsolatban láttuk, hogy fontos lenne tudnunk, milyen feltételek mellett lenne az indirekt hasznossági függvény differenciálható. Ezzel a problémával foglalkoznak Crouzeix (1983) [6], (1985) [8] és (1996) [7] dolgozatai. Nagyon hasznos azonban az indirekt hasznossági függvény konvex voltának az ismerete is, mert ekkor a konvex függvényekre bevezetett szubderiváltat használhatjuk a Roy-azonosságban. Más oldalról fontos az is, hogy az indirekt hasznossági függvény ismeretében a direkt hasznossági függvény tulajdonságaira tudjunk következtetni. A negyedik fejezetben a direkt és az indirekt hasznossági függvény konvexitásának az egymással való kapcsolatát elemezzük. Látni fogjuk, hogy a konvexitás és a monotonitás szorosan összefüggő fogalmak, éppúgy mint az elemi matematikában. Martínez-Legaz (1997) [31] dolgozata a monoton és sugár-konvex függvények karakerizációjának a segítségével szükséges és elégséges feltételt adott az indirekt hasznossági függvény konvexitására. A monoton függvények egy olyan jellemzését sikerült találnunk, amely segítségével a fenti eredményekre új bizonyítás adható, valamint a hasznossági függvény konkávitására is megfogalmazhattunk egy szükséges feltételt. Ez utóbbi ennek a fejezetnek a legérdekesebb új eredménye.

További cél annak a vizsgálata is, hogy milyen feltétel biztosítja az értékfüggvény lokálisan Lipschitz voltának az ismeretét, mert ekkor a Clarke-féle általánosított deriváltat használhatnánk a Roy-azonosságban.

Az első két fejezetben is kiemelten vizsgáltuk a feltételi leképezések, az értékfüggvények és megoldásleképezések folytonossági tulajdonságait. Az ötödik fejezetben Flam (1994) [20] és Luchetti-Patrone (1986) [30] dolgozatai alapján a haszonmaximalizálási és költségminimalizálási feladat feltételi leképezéseinek, értékfüggvényeinek és megoldásleképezéseinek további érzékenységvizsgálatait végezzük el a Kuratowski-limeszfogalom, és a függvénysorozatokra bevezetett epi- illetve hypokonvergencia segítségével. A haszonmaximalizálási és költségminimalizálási feladat jellemzésén túl a tárgyalásba beleillik a profitmaximalizálási feladat elemzése is. Ezek után lehetőség kínálkozik az általános egyensúlyelméletben a gazdaság paramétereitől való függésnek az elemzésére: az aggregált keresletnek, az aggregált kínálatnak, sőt az egyensúlyi pontok konvergenciájának a vizsgálatára. Itt az egyensúly (Hicks-féle) statikus vizsgálatát végezzük el, nem pedig egy adott áralkalmazkodási szabályon alapuló úgynevezett dinamikus stabilitás vizsgálatát.

A fogyasztókat eddig a pontig a hasznossági függvényeiken keresztül a preferenciáikkal jelemeztük. A hatodik fejezetben a fogyasztókat közvetlenül a keresleti leképezéseikkel jellemezzük. Szemben az eddigi preferencia alapú megközelítéssel, ezt keresleti leképezés alapú megközelítésnek nevezzük. A keresleti leképezés alapú megközelítés bevezetésének az egyik komoly oka statisztikai. Ugyanis ha egy fogyasztót a preferenciával jellemzünk, akkor a belőle származtatható keresleti függvények közül olyat kell választani, amely statisztikailag jól tesztelhető, de nem is biztos, hogy ilyet találunk. Ehelyett a fogyasztót közvetlenül jellemezhetjük egy statisztikailag jól kezelhető keresleti függvénnyel, amit például valamilyen adatokból becsülni tudunk, és ebből következtetünk vissza a fogyasztó preferenciájára. Egy másik ok pedig közgazdasági, nevezetesen nem akarjuk a fogyasztó viselkedéséről feltenni, hogy az optimalizáló.

Igen régen, például már Antonelli (1886) [1] könyvében felvetődött a következő probléma, amit racionalizálhatóságnak vagy integrálhatóságnak neveznek. Ha egy fogyasztót a keresleti leképezésével jellemzünk, amit a fentiektől való megkülönböztetésül egyszerűen csak keresleti leképezésnek nevezünk, akkor ez milyen feltételek mellett racionalizálható abban az értelemben, hogy mikor létezik olyan preferencia, amely mellett a haszonmaximalizálási feladatból származó közönséges keresleti leképezés megegyezik a kiindulási keresleti leképezéssel? Erre a problémára többféle választ is adunk. Az egyik út az, hogy a keresleti leképezés segítségével többféle módon definiálhatunk úgynevezett kinyilvánított preferenciákat, és ezekhez olyan konzisztenciafeltételeket keresünk, amelyek racionalizálják a keresleti leképezést. Ilyen például a kinyilvánított preferencia és annak konzisztenciafeltétele, a kinyilvánított preferencia gyenge axiómája. Egy másik út pedig az, amit Mas-Colell - Whinston - Green (1995) [32] könyve alapján írtunk le, amely szerint a Marshall-féle és a Hicks-féle koncepció kapcsolatának a segítségével definiálunk olyan preferenciát, amely racionalizálja a keresleti leképezést.

Ezzel a dolgozatban egy kört sikerült leírnunk a preferenciarendezéstől kiindulva, a hasznossági függvényen keresztül a keresleti leképezés fogalmáig, és vissza a preferenciarendezésig. Érdekes, hogy e kör megtételéhez az egyik lehetőséget az adta, hogy kétféle, egymással egyenrangú módon is jellemeztük a fogyasztót.

A kereslet kezdeti vizsgálatakor is már tapasztalták, miszerint az árak növekedése mellett a kereslet csökken, amit „a kereslet törvényének” szoktak nevezni. King 1696-ban a búza ára és a mennyisége adatsorának vizsgálata során megállapította, hogy fordított statisztikai viszony van közöttük, amit King-törvényként ismerünk. Verri volt az első, aki 1760-ban formulát is adott a keresleti függvényre: az ár és a mennyiség szorzata állandó, lásd Katzner (1970) [29]. Tudjuk persze, hogy a kereslet csökkenése az árak növekedése mellett igen összetett kérdés, hiszen jócskán ismerünk olyan javakat, amelyek iránti kereslet az árak növekedése mellett növekszik. Nem teljesen kézenfekvő e probléma matematikai megfogalmazása sem. Ez a keresleti leképezés valamilyen értelemben vett monotonitását jelenti. Fontos probléma továbbá, hogy a fogyasztóra tett milyen feltételek vonják maguk után a keresleti leképezés valamilyen monotonitását, azaz a kereslet törvényének teljesülését. Érdekes, hogy a különféle kinyilvánított preferenciákhoz tartozó konzisztenciafeltételek és a keresleti leképezés valamilyen monotonitási tulajdonságai között szoros kapcsolat van. Két ilyenre is mutatunk példát. Mas-Colell - Whinston - Green (1995) [32] alapgondolatát követve a keresleti leképezésekre sikerült belátni, hogy a kinyilvánított preferencia gyenge axiómája hozzávetőlegesen ekvivalens a kereslet törvényével. Reinhard John (1998) [26] dolgozata alapján a keresleti leképezések kvázimonotonitását illetve valódi kvázimonotonitását jellemezzük, amely során többek között belátjuk, hogy a szigorúan kinyilvánított preferencia konzisztenciafeltétele pedig ekvivalens a kvázimonotonitással. Érdemes megjegyezni, hogy a keresleti leképezés kvázimonotonitásának a jellemzéséhez szükség van a KKM-féle tételre is, ami ekvivalens a Brouwer-féle fixponttétellel.

A dolgozat egy meglehetősen nagy Függeléket tartalmaz. El szerettük volna kerülni ugyanis azt, hogy a dolgozat vonulatát időnként megtörjék a szükséges matematikai eszközök, ezért ezeket a Függelékbe gyűjtöttük össze. Ez azzal az előnnyel is járt, hogy bizonyos témaköröknek, ha nem is teljes, de viszonylag kereknek mondható bevezetése szerepel. A Függelék első alfejezetében a halmazértékű leképezések különböző folytonossági tulajdonságait vizsgáljuk meg. A halmazértékű analízis alapjait Vietoris fektette le, lásd Vietoris (1923) [41], átfogó tárgyalását pedig például Michael (1951) [33] munkája tartalmazza, kitűnő tárgyalás található Hildenbrand (1974) [21] könyvében is, de leginkább Dancs (1980) [9] kéziratát használtuk. A második alfejezet a konvex analízis legalapvetőbb fogalmait és ezek tulajdonságait ismerteti. A konvexitás általános elméletével kapcsolatban a Rockafellar (1970) [34] és Ioffe-Tichomirov (1979) [25] referenciákat, valamint a Dancs (1981) [10] és Dancs (1983) [11] kéziratait használjuk. Nem véletlen, hogy a matematikának ezek a fejezetei ennyire előtérbe kerülnek a közgazdaságtanban. Ugyanis a halmazértékű analízis és a konvex analízis fejlődésének egyik mozgatórugója éppen a közgazdaságtan volt. A Függelék foglalkozik még a Kuratowski-limesszel és az epi- illetve hypokonvergenciával, ami az ötödik fejezet matematikai háttere, áttekinti a burkológörbe-tételeket, valamint a Ky Fan-féle metszettételt, amelyen a hatodik fejezetben a keresleti leképezések monotonitási tulajdonságainak vizsgálata alapul. Az általános analízisbeli ismereteket illetően például Dancs (1992) [12] könyvét említhetjük meg referenciaként.

A megjelent és a megjelenőben lévő saját dolgozatok Szabó (1986) [36], Szabó (1989) [37], Szabó (1990) [38], Kánnai - Szabó (1990a) [28], Kánnai - Szabó (1990b) [27], Szabó (1999) [39], Szabó (2000) [40] némelyike szorosan, némelyike csak kevésbé szorosan függ össze a jelen dolgozat témájával.

Végül ezúton szeretném megköszönni Dancs Istvánnak témavezetőmnek, hogy erre a területre irányította a figyelmemet, és a munkám során állandó tanácsaival kísért. Munkatársaim közül kiemelten Kánnai Zoltánnak szeretnék köszönetet mondani, aki a dolgozatomat folyamatosan olvasta és tanácsaival ellátott. Külön köszönettel tartozom az értekezéstervezet opponenseinek az odaadó munkájukért.

Jelölések

A jelölésekről általánosan a következőket jegyeznénk meg. Annak ellenére, hogy a jelölésekkel kapcsolatban legjobb a kialakult szokásokat követni, néhány helyen eltértünk.

Az esetek egy részében ennek az volt az oka, hogy általánosnak mondható az a szabály, mely szerint a vektorokat latin kisbetűvel, a skalárokat görög kisbetűvel jelölik. Ezért például fogyasztó jövedelmét μ-vel jelöltem w helyett.

Egy másik eltérés pedig abból fakadt, hogy a gyakorlatban gyakran jelölik egy leképezés, illetve a leképezésnek egy adott helyen felvett értékét azonosan, és csak a szövegösszefüggésekből lehet arra következtetni, hogy melyikről is van éppen szó. Ez viszont esetenként félreértésekre adhat alkalmat, ezért — talán túl aggályosan is — fontosnak tartjuk ezek megkülönböztetését. Emiatt például mivel egy fogyasztási jószágköteget (fogyasztói kosarat) x-szel szoktak jelölni, azért megkülönböztetésül a keresleti leképezést $\mathcal{X}$-szel jelöltem.

$\forall$ — univerzális kvantor,
$\exists$ — egzisztenciális kvantor,
$A \subset B$ — az A halmaz része (lehet nem valódi része is) a B halmaznak,
$\mathrm{cl}\, A$ — egy A halmaz zárt burka,
$\mathrm{co}\, A$ — egy A halmaz konvex burka,
$\mathcal{P}(X)$ — egy X halmaz hatványhalmaza,
$\mathbb{R}^n$ — n-dimenziós euklideszi tér,
$\mathbb{R}^n_+$ — az $\mathbb{R}^n$ nemnegatív ortánsa,
$\mathbb{R}^n_{++}$ — az $\mathbb{R}^n$ pozitív ortánsa,
$\leq$ — az $\mathbb{R}^n$-beli koordinátánkénti rendezés,
$<$ — az $\mathbb{R}^n$-beli koordinátánkénti szigorú rendezés,
$\partial_k f(x)$ — egy f függvény k-dik változó szerinti parciális deriváltja az x pontban.

1. Fejezet

A haszonmaximalizálási feladat

Elsőként a haszonmaximalizálási (termelésmaximalizálási) feladatot, a Marshall-féle megközelítést tárgyaljuk. Ez a megközelítés azért is érdekes, mert az általános egyensúlyelmélet Arrow-Debreu modelljében ezzel a feladattal (pontosabban ennek a feladatnak egy általánosításával) írják le a fogyasztók magatartását. A bevezetésben is említettük, hogy a feladat megoldása során — a megfelelő szükséges közgazdasági feltételek fennállása mellett — a határhaszonelmélet sarkalatos tételéhez jutunk, mely szerint a helyettesítési határarányok megegyeznek az árarányokkal, amiből pedig az következik, hogy jószágok árai a határhasznukkal (határtermékükkel) egyenlők. Azonban a feladat további vizsgálata során sokkal több értékes információhoz juthatunk, mint a feladat puszta megoldásának az ismerete. Legfontosabb, hogy elemezzük a megoldásoknak a feladat paramétereitől való függését, ami nem jelent mást, mint a keresleti leképezés (ami általában halmazértékű leképezés) tulajdonságainak a feltárását. Ehhez azonban be kell még vezetnünk egy további fogalmat is: a Marshall-féle feladat értékfüggvényét, amit indirekt hasznossági függvénynek szoktak nevezni. Ennek a függvénynek, valamint a feladat feltételi leképezésének, azaz a költségvetési leképezésnek (ami általában szintén halmazértékű leképezés) a tulajdonságai alapján tudjuk elemezni a keresleti leképezést.

Ebben a fejezetben újragondoljuk ezen terület széles körben ismert állításait, elsősorban Diewert (1974) [14], Diewert (1982) [15], Diewert (1988) [16] Blackorby - Diewert (1979) [3] dolgozatai valamint Mas-Colell - Whinston - Green (1995) [32] monográfiája alapján. Célunk elsősorban a terület minél világosabb átláthatósága, és az ismert eredmények lehetőség szerinti élesítése volt. Igyekeztük úgy elrendezni az állításokat és megfogalmazni a bizonyításokat, hogy jól látszódjon, miszerint egyrészt a kapott leképezések (költségvetési leképezés, indirekt hasznossági függvény, keresleti leképezés) tulajdonságai a haszonmaximalizálási feladat függvényeinek milyen tulajdonságaiból következnek, másrészt mi a felhasznált matematikai eszközök szerepe.

Az általános egyensúlyelméletben az egyensúly létezését a Kakutani-féle fixponttétel segítségével szokás bizonyítani. Ennek az alkalmazhatóságához szükséges a keresleti leképezés felső-Vietoris-folytonossága. A fejezet legfontosabb eredményének a megoldásleképezés tulajdonságait összefoglaló állítás tekinthető, amelyben a keresleti leképezés felső-Vietoris-folytonosságát is igazoltuk, ami a Berge-tétel alkalmazásával a költségvetési leképezés Vietoris-folytonosságából következik. Ennek olyan bizonyítását sikerült adnunk, ami a haszonmaximalizálási feladatnak egy olyan általánosítására is működik, amelyben a fogyasztó jövedelmét jóval általánosabban értelmezzük, a jószágteret pedig egy Banach-tér tetszőleges kompakt részhalmazának tekintjük. Ez a terület olyan mértékben támaszkodik a halmazértékű analízisre, hogy a Függelékben a halmazértékű leképezések folytonossági vizsgálatainak egy külön alfejezetet szenteltünk.

A terület igen érdekes és fontos eredménye a Roy-féle azonosság, amely az indirekt hasznossági függvény és a keresleti leképezés között teremt kapcsolatot. Ez a tétel természetesen veti fel az értékfüggvény deriválhatóságának a kérdését. Megoldást jelentene az értékfüggvény konvex vagy lokálisan Lipschitz voltának az ismerete, mert ekkor a konvex függvényekre bevezetett szubderiváltat, vagy a Clarke-féle általánosított deriváltat használhatnánk a Roy-féle azonosságban. Ezzel a kérdéssel majd a 4. fejezetben foglalkozunk. A indirekt hasznossági függvénynek ebben a fejezetben megismert tulajdonságait ott erőteljesen ki fogjuk használni, amivel választ kapunk arra is, miért volt szükség az értékfüggvény igen összetett, a konvex analízis eszközeit is igénybe vevő vizsgálataira.

Végül kiemelném, hogy ebben a fejezetben látszólag csupán egy speciális szélsőértékfeladatot tanulmányozunk, miközben nagy hangsúlyt kap, hogy az egyes fogalmak tulajdonságai milyen matematikai eszközök alkalmazásán múlnak. Azonban az egyes eszközök közgazdasági jelentése természetesen vonja maga után a matematikai vizsgálatok által adott válaszok pontos közgazdasági interpretációját, azaz a valóban releváns közgazdasági válaszokat.

1.1 Jelölések, definíciók

Legyen $u:\mathbb{R}^n_+\to\mathbb{R}$ adott függvény. Tekintsük a következő, $(\mu,p)\in\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpárral paraméterezett feladatsereget:

$$\left\{\begin{array}{l} u(x)\to\max \\ \langle p,x\rangle\le\mu \quad \text{és} \quad x\in\mathbb{R}^n_+ \end{array}\right. \tag{1.1}$$

1.1 Definíció.
Az (1.1) feladatsereg **feltételi leképezésének** nevezzük azt a $B:\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n_{++}\to\mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ halmazértékű leképezést, amelyre $\forall\ (\mu,p)\in\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpár esetén

$$\begin{aligned} B(\mu,p) &:= \{x\in\mathbb{R}^n_+ \ : \ \langle p,x\rangle\le\mu\} \\ &= \mathbb{R}^n_+\cap\langle p,.\rangle^{-1}(-\infty,\mu]\ . \end{aligned}$$

Ennek a segítségével az (1.1) feladatsereg a következő ekvivalens alakba írható:

$$\left\{\begin{array}{l} u(x)\to\max \\ x\in B(\mu,p) \end{array}\right.$$

1.2 Definíció.
Az (1.1) feladatsereg **értékfüggvényének** azt az $u^\vee:\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n_{++}\to\overline{\mathbb{R}}$ függvényt nevezzük, amelyre $\forall\ (\mu,p)\in\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpár esetén

$$\begin{aligned} u^\vee(\mu,p) &:= \sup_{B(\mu,p)} u \\ &= \sup\{\, u(x)\ :\ \langle p,x\rangle\le\mu \text{ és } x\in\mathbb{R}^n_+\}\,. \end{aligned}$$

1.3 Definíció.
Az (1.1) feladatsereg **megoldásleképezésének** nevezzük azt az $\mathcal{X}:\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n_{++}\to\mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ halmazértékű leképezést, amelyre $\forall\ (\mu,p)\in\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpár esetén

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\mu,p) &:= \operatorname*{argmax}_{B(\mu,p)} u \\ &= \{x\in B(\mu,p)\ :\ \forall\ z\in B(\mu,p) \text{ esetén } u(x)\ge u(z)\} \end{aligned}$$

Ha $\forall\ (\mu,p)\in\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n_{++}$ esetén $\mathcal{X}(\mu,p)\neq\emptyset$, akkor az $\mathcal{X}$ halmazértékű leképezésnek létezik egy $\chi:\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n_{++}\to\mathbb{R}^n_{+}$ szelekciója, amit az (1.1) feladatsereg egy **megoldásfüggvényének** nevezzük.

Amennyiben $\forall\ (\mu,p)\in\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n_{++}$ esetén az (1.1) feladatnak pontosan egy megoldása létezik, akkor az $\mathcal{X}:\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n_{++}\to\mathcal{P}(\mathbb{R}^n_{+})$ megoldásleképezés egyértékű (singleton-értékű), azaz lényegében egy $\chi:\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n_{++}\to\mathbb{R}^n_{+}$ megoldásfüggvény, (amelyre $\{\chi(\mu,p)\}=\mathcal{X}(\mu,p)$).

1.4 Megjegyzés.
Az értékfüggvény segítségével a megoldásleképezés a következőképpen is megadható: $\forall\ (\mu,p)\in\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpár esetén

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(\mu,p) &= \{x\in B(\mu,p)\ :\ u(x)=u^{\vee}(\mu,p)\}\\ &= u^{-1}(\{u^{\vee}(\mu,p)\})\cap B(\mu,p)\end{aligned}$$

A megoldásleképezés segítségével az értékfüggvény a következőképpen is megadható: Ha valamely $(\mu,p)\in\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpár esetén $\exists\ x\in\mathcal{X}(\mu,p)$ megoldás, akkor

$$u^{\vee}(\mu,p)=u(x)\,.$$

Ezért, ha létezik $\chi:\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n_{++}\to\mathbb{R}^n_{+}$ megoldásfüggvénye a feladatseregnek, akkor $\forall\ (\mu,p)\in\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$u^{\vee}(\mu,p)=u(\chi(\mu,p))\,,\quad \text{így}\quad u^{\vee}=u\circ\chi\,.$$

1.5 Definíció.
Az (1.1) feladat feltételében μ-vel osztva ($\mu\in\mathbb{R}_{++}$), $\frac{p}{\mu}$ helyett p-t írva, amelyre továbbra is $p\in\mathbb{R}^n_{++}$, a fenti feladatsereg azon módosított alakjához jutunk, amelyet egy $p\in\mathbb{R}^n_{++}$ paraméter jellemez, a μ paramétert $\mu=1$-nek rögzítettük:

$$\begin{cases} u(x)\to\max\\ \langle p,x\rangle\le 1 \quad\text{és}\quad x\in\mathbb{R}^n_{+}\end{cases}\tag{1.2}$$

Az (1.2) feladatsereg **feltételi leképezése** a $B(1,.):\mathbb{R}^n_{++}\to\mathcal{P}(\mathbb{R}^n_{+})$ halmazértékű leképezés, azaz $\forall\ p\in\mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\begin{aligned}B(1,p) &= \{x\in\mathbb{R}^n_{+}\ :\ \langle p,x\rangle\le 1\}\\ &= \mathbb{R}^n_{+}\cap\langle p,.\rangle^{-1}(-\infty,1]\ .\end{aligned}$$

Az (1.2) feladatsereg értékfüggvénye az $u^{\vee}(1,.):\mathbb{R}^n_{++}\to\overline{\mathbb{R}}$ függvény, azaz $\forall\ p\in\mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\begin{aligned}u^{\vee}(1,p) &= \sup_{B(1,p)} u\\ &= \sup\{\,u(x)\ :\ \langle p,x\rangle\le 1 \text{ és } x\in\mathbb{R}^n_{+}\}\,.\end{aligned}$$

Az (1.2) feladatsereg megoldásleképezése az $\mathcal{X}(1,.):\mathbb{R}^n_{++}\to\mathcal{P}(\mathbb{R}^n_{+})$ halmazértékű leképezés, azaz $\forall\ p\in\mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\mathcal{X}(1,p)=\operatorname*{argmax}_{B(1,p)}\ u\,.$$

Ha létezik $\chi(1,.):\mathbb{R}^n_{++}\to\mathbb{R}^n_{+}$ megoldásfüggvénye e feladatseregnek, akkor

$$u^{\vee}(1,p)=u(\chi(1,p))\ ,\quad\text{így}\quad u^{\vee}(1,.)=u\circ\chi(1,.)\ .$$

1.1.1 Mikroökonómiai interpretáció

Jóllehet a fenti szélsőértékfeladat csupán matematikai szempontból is érdeklődésre tarthatna számot, számunkra nem ezért érdekes, hanem mert mind a fogyasztás- mind a termeléselméletben — megfelelő elvonatkoztatás mellett — e feladattal leírható egy gazdaság szereplőinek a viselkedése.

A fogyasztáselméletbeli interpretáció

Tekintsünk egy olyan gazdaságot, amelyben egy fogyasztó rendelkezik egy fogyasztási halmazzal, másnéven jószágtérrel, azaz a választási lehetőségek halmazával. A következőkben a jószágteret jelenítse meg $\mathbb{R}^n_+$, egy fogyasztási jószágköteget (fogyasztási kosarat) jelöljön egy $x \in \mathbb{R}^n_+$ vektor. A választási lehetőségek halmazának a nemnegatív ortánssal való azonosítása meglehetősen erős korlátozásnak számít közgazdasági szempontból. Ezt az egyszerűsítést a minél egységesebb matematikai tárgyalás miatt választottuk. További cél lehet a választási lehetőségeket jobban megragadó struktúra megtalálása.

Kiindulásként feltesszük, hogy a fogyasztó rendelkezik azzal a képességgel, hogy képes „racionálisan" választani, amit úgy fogalmazunk meg (matematikai eszközökkel), hogy a fogyasztó rendelkezik egy $R \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ tranzitív és teljes relációval, azaz preferenciarendezéssel. Azért, hogy egy ilyen szélsőértékfeladatot az analízis eszközeivel tudjunk vizsgálni, a preferenciarelációt egy „preferenciaindikátorfüggvénnyel", más néven „hasznossági függvénnyel" kell helyettesíteni, azaz egy olyan $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvénnyel, ami reprezentálja az R preferenciarelációt. Ezen azt értjük, hogy $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n_+$ jószág esetén $x_1 \, R \, x_2 \ \Leftrightarrow\ u(x_1) \geq u(x_2)$. Ismert, hogy a mikroökonómia egyik igen fontos problémája volt, amit G. Debreu válaszolt meg, hogy milyen tulajdonságokkal rendelkező preferenciarendezés esetén létezik az illető preferenciát reprezentáló folytonos hasznossági függvény. Ezek után azzal a feltevéssel élünk, hogy a fogyasztó rendelkezik egy $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ hasznossági függvénnyel.

Tegyük fel, hogy a javak árai pozitívak. Ezek szerint jelenítse meg $\mathbb{R}^n_{++}$ a lehetséges árvektorok halmazát. Feltesszük még, hogy az áruk ára a fogyasztó számára külső adottság, azaz az ő egyéni fogyasztása nem hat vissza az árakra. Ezt a feltevést úgy nevezzük, hogy a fogyasztó árelfogadó.

Végül feltesszük, hogy a fogyasztó rendelkezik egy $\mu \in \mathbb{R}_{++}$ nagyságú pozitív jövedelemmel.

Megjegyezzük, a fejezet utolsó alfejezetében mind a jószágteret, mind a fogyasztó jövedelmét általánosabban értelmezzük.

A fogyasztó a fogyasztási javainak vektorát úgy határozza meg, hogy maximalizálja az $u(x)$ hasznosságát a $\langle p, x\rangle \leq \mu$ költségvetési feltétel mellett, azaz a viselkedését az (1.1) feladat írja le. Ebben az esetben

- az (1.1) feladatot **haszonmaximalizálási feladatnak**,
- a $B : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ feltételi leképezést **költségvetési leképezésnek**,
- az $u^\vee : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvényt **indirekt hasznossági függvénynek**,
- az $\mathcal{X} : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ megoldásleképezést **Walras-** illetve **Marshall-féle** vagy **közönséges keresleti leképezésnek** nevezzük.

Az indirekt hasznossági függvénynek a szokásos jelölése $v : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \overline{\mathbb{R}}$. Az eltérő jelöléssel azt akartuk hangsúlyozni, hogy az $u^\vee$ indirekt hasznossági függvény az u hasznossági függvényhez tartozik, valamint a későbbiekben bevezetünk az $u^\vee$ indirekt hasznossági függvényhez tartozó értéfüggvényt is, ami végül is kötődik az u hasznossági függvényhez, így természetes jelölése lesz $u^{\vee\vee}$.

A termeléselméletbeli interpretáció

Tekintsünk egy gazdaságot, amelyben tegyük föl, hogy egy termelő n-féle input felhasználásával egyetlen outputot állít elő. A technológiát egy u termelési függvény írja le, ami azt jelenti, hogy egy adott periódus alatt a termelési tényezők n-dimenziós x inputvektorának a felhasználásával legfeljebb $u(x)$ mennyiségű termék állítható elő outputként. A termelő úgy határozza meg a termelési tényezők inputvektorát, hogy maximalizálja az $u(x)$ termék kibocsátását a $\langle p, x\rangle \leq \mu$ költségvetési feltétel mellett, azaz a viselkedését szintén az (1.1) feladat írja le. Ebben az esetben

- az (1.1) feladatot **termelés-, volumen-, kibocsátás- vagy hozammaximalizálási feladatnak**,
- a $B : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ feltételi leképezést **költségvetési leképezésnek**,
- az $u^\vee : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvényt **indirekt termelési függvénynek vagy indirekt volumenfüggvénynek**,
- az $\mathcal{X} : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ megoldásleképezést **Walras-** illetve **Marshall-féle** vagy **közönséges keresleti leképezésnek** nevezzük.

1.2 A feltételi (költségvetési) leképezés tulajdonságai

Ez az alfejezet a Függeléknek a halmazértékű leképezések folytonosságával foglalkozó pontjára támaszkodik.

Először az (1.2) feladatsereg feltételi leképezésének a tulajdonságait vizsgáljuk meg, majd ebből következtetünk az (1.1) feladatsereg feltételi leképezésének a tulajdonságaira.

1.6 Állítás.
Az (1.2) feladatsereg $B(1,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ *feltételi leképezése*

(1) nemüres, konvex, kompakt értékű,

(2) lokálisan Lipschitz-folytonos a Hausdorff-metrikára nézve, így Hausdorff-folytonos,

(3) Vietoris-folytonos leképezés.

Bizonyítás.
(1) Legyen $p_0 \in \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges adott vektor.
A $B(1, p_0)$ nemüres, mert $\mathbf{0} \in B(1, p_0)$, valamint konvex, a skaláris szorzat linearitása miatt.
Belátjuk, hogy korlátos. Mivel $p_0 \in \mathbb{R}^n_{++}$, azért $\exists\ \alpha > 0$, hogy a p_0 minden koordinátájára, azaz $\forall\ k = 1, \ldots, n$ esetén $\pi^0_k \geq \alpha$. Legyen $x \in B(1, p_0)$ tetszőleges. Ekkor egyrészt $x \in \mathbb{R}^n_+$, másrészt

$$1 \geq \langle p, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \pi^0_k \cdot \xi_k \geq \sum_{k=1}^{n} \alpha \cdot \xi_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} \xi_k = \alpha \cdot \|x\|_1 \geq \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \|x\|\,,$$

azaz $\|x\| \leq \frac{\sqrt{2}}{\alpha}$, tehát $\|x\| \leq \mathcal{K}$, ahol $\mathcal{K} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}$. Ezek szerint a $B(1, p_0)$ halmaz korátos.

Mivel a $B(1,p_0)$ halmaz egy zárt halmaznak és egy zárt halmaz folytonos ősképének a metszete, azért zárt is, így kompakt.

(2) Ezt több kisebb állítás segítségével látjuk be. Legyen $p_0 \in \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges adott. Ekkor $\exists\ \alpha > 0$, hogy a p_0 minden koordinátájára, azaz $\forall\ k = 1,\ldots,n$ esetén $\pi_k^0 \geq \alpha$, ezért $\exists\ \delta > 0$ sugarú $\mathcal{B}(p,\delta)$ gömb, hogy $\forall\ p \in \mathcal{B}(p_0,\delta)$ minden koordinátájára, azaz $\forall\ k = 1,\ldots,n$ esetén $\pi_k \geq \frac{\alpha}{2}$.

Megmutatjuk, hogy a $B(1,.)$ halmaz értékű leképezés a $\mathcal{B}(p_0,\delta)$ gömbön egyenletesen korlátos.
Ugyanis: Legyen $p \in \mathcal{B}(p_0,\delta)$ tetszőleges. Ekkor $\forall\ x \in B(1,p)$, esetén egyrészt $x \in \mathbb{R}^n_+$, másrészt

$$1 \geq \langle p, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \pi_k \cdot \xi_k \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha}{2} \cdot \xi_k = \frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^{n} \xi_k = \frac{\alpha}{2}\|x\|_1 \geq \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\|x\|\,,$$

azaz $\|x\| \leq \frac{2\sqrt{2}}{\alpha}$, jelölje $\mathcal{K} := \frac{2\sqrt{2}}{\alpha}$, ekkor $\|x\| \leq \mathcal{K}$.

Legyenek $p_1, p_2 \in \mathcal{B}(p_0,\delta)$ tetszőlegesek.
Megmutatjuk, hogy $\forall\ x_1 \in B(1,p_1)$ esetén az

$$x_2 := \frac{1}{1 + \mathcal{K}\|p_2 - p_1\|} \cdot x_1 \in B(1,p_2)$$

vektorra

(a) $x_2 \in B(1,p_2)$,

(b) $\|x_2 - x_1\| < \mathcal{K}^2\|p_2 - p_1\|$.

Ugyanis:
(a) Mivel $\langle p_1, x_1\rangle \leq 1$, azért

$$\langle p_2, x_1\rangle = \langle p_1, x_1\rangle + \langle p_2 - p_1, x_1\rangle \leq 1 + \|p_2 - p_1\| \cdot \|x_1\| \leq 1 + \mathcal{K}\|p_2 - p_1\|\,,$$

ezért

$$\langle p_2, x_2\rangle = \langle p_2, \frac{1}{1 + \mathcal{K}\|p_2 - qp_1\|} \cdot x_1\rangle = \frac{1}{1 + \mathcal{K}\|p_2 - p_1\|}\langle p_2, x_1\rangle \leq 1\,.$$

Mivel $x_1 \in \mathbb{R}^n_+$, azért $x_2 \in \mathbb{R}^n_+$, így $x_2 \in B(1,p_2)$.

$$(b) \qquad \|x_1 - x_2\| = \|x_1 - \frac{1}{1 + \mathcal{K}\|p_2 - p_1\|} \cdot x_1\| = |1 - \frac{1}{1 + \mathcal{K}\|p_2 - p_1\|}| \cdot \|x_1\|$$

$$\leq \frac{\mathcal{K}\|p_2 - p_1\|}{1 + \mathcal{K}\|p_2 - p_1\|} \cdot \mathcal{K} \leq \mathcal{K}^2\|p_2 - p_1\|\,.$$

Ezek szerint $\forall\ x_1 \in B(1,p_1)$ esetén

$$x_1 \in \mathcal{B}(B(1,p_2), \mathcal{K}^2\|p_2 - p_1\|)\,,$$

így

$$B(1,p_1) \subset \mathcal{B}(B(1,p_2), \mathcal{K}^2\|p_2 - p_1\|)\,.$$

A p_1 és p_2 szerepét felcserélve adódik, hogy

$$B(1,p_2) \subset \mathcal{B}(B(1,p_1), \mathcal{K}^2\|p_2 - p_1\|)\,.$$

Ezért $\forall p_1, p_2 \in B(p_0, \delta)$ esetén

$$d_H(B(1,p_2), B(1,p_1)) \leq \mathcal{K}^2 \|p_2 - p_1\|\,,$$

ami azt jelenti, hogy a $B(1,.)$ halmazértékű leképezés a $\mathcal{B}(p_0,\delta)$ környezetben Lipschitz-Hausdorff-folytonos.

Mivel a $B(1,.)$ halmazértékű leképezés a $\mathcal{B}(p_0,\delta)$ környezetben Lipschitz-Hausdorff-folytonos, és $p_0 \in \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges, azért $B(1,.)$ az $\mathbb{R}^n_{++}$ halmazon lokálisan Lipschitz-Hausdorff-folytonos, ezért Hausdorff-folytonos.

(3) Mivel a $B(1,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ feltételi leképezés (1) szerint kompakt értékű, ugyanakkor (2) szerint pedig Hausdorff-folytonos, azért a Függelékben található 7.22. állítás alapján Vietoris-folytonos. □

1.7 Állítás. (a feltételi leképezés tulajdonságai)
Az (1.1) feladatsereg $B : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ feltételi (költségvetési) leképezése

(1) *nullad fokban pozitív homogén, azaz*

$$\forall\ (\mu,p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \text{ pontban } \forall\ \lambda \geq 0 \text{ esetén } B(\mu,p) = B(\lambda\mu, \lambda p)\,,$$

(2) *nemüres, konvex, kompakt értékű,*

(3) *lokálisan Lipschitz-folytonos a Hausdorff-metrikára nézve, így Hausdorff-folytonos,*

(4) *Vietoris-folytonos leképezés.*

Bizonyítás.
(1) $B(\mu,p) = \{x \in \mathbb{R}^n_+ \ : \ \langle p, x\rangle \leq \mu\} = \{x \in \mathbb{R}^n_+ \ : \ \langle \lambda p, x\rangle \leq \lambda\mu\} = B(\lambda\mu, \lambda p)\,.$

(2),(3),(4) Látható, hogy $B = B(1,.) \circ \mathrm{frac}$, ahol $\mathrm{frac} : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ az a függvény, amelyre $\forall\ (\mu,p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén $\mathrm{frac}(\mu,p) = \frac{p}{\mu}$. Mivel a frac függvény Lipschitz-folytonos, azért a B halmazértékű leképezés az előző 1.6. állítás (1) alapján nemüres, konvex, kompakt értékű, (2) alapján lokálisan Lipschitz-Hausdorff-folytonos illetve Hausdorff-folytonos, (3) alapján Vietoris-folytonos. □

1.8 Megjegyzés.
A fenti állítás alapvetően fontos, mert a Berge-tétel alapján ezen múlik mind az értékfüggvény folytonossága, mind a megoldásleképezés felső-Vietoris-folytonossága.

1.3 Az értékfüggvény tulajdonságai

Az (1.1) feladatsereg $u^\vee : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvénye (indirekt hasznossági függvénye) a következő tulajdonságokkal rendelkezik.

1.9 Állítás. (az értékfüggvény tulajdonságai)

(1) *Az $u^\vee : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény kvázikonvex;*

(2) *$\forall p \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén $u^\vee(.,p) : \mathbb{R}_{++} \to \overline{\mathbb{R}}$ monoton növekedő;*

(3) *$\forall \mu \in \mathbb{R}_{++}$ esetén $u^\vee(\mu,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \overline{\mathbb{R}}$ monoton csökkenő;*

(4) *ha az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor $u^\vee : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \overline{\mathbb{R}}$ véges és folytonos.*

Bizonyítás.
(1) Be kell látni, hogy $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ esetén az $(u^\vee)^{-1}(-\infty,\alpha] \subset \mathbb{R}^n_+$ halmaz konvex.
Legyenek (μ_1,p_1), $(\mu_2,p_2) \in (u^\vee)^{-1}(-\infty,\alpha]$ tetszőlegesek, azaz amely pontokra $u^\vee(\mu_1,p_1)$, $u^\vee(\mu_2,p_2) \le \alpha$, és legyen $\lambda \in (0,1)$ is tetszőleges. Megmutatjuk, hogy

$$(\mu,p) := (\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2, \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2) \in (u^\vee)^{-1}(-\infty,\alpha]\,.$$

Legyen $x \in B(\mu,p)$ tetszőleges, azaz

$$\lambda\langle p_1,x\rangle + (1-\lambda)\langle p_2,x\rangle \le \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2\,.$$

Ekkor $\langle p_1,x\rangle \le \mu_1$ vagy $\langle p_2,x\rangle \le \mu_2$.
Ugyanis, indirekt módon tegyük fel, hogy $\langle p_1,x\rangle > \mu_1$ és $\langle p_2,x\rangle > \mu_2$, ekkor mivel $\lambda, (1-\lambda) > 0$, azért

$$\lambda\langle p_1,x\rangle + (1-\lambda)\langle p_2,x\rangle > \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2\,,$$

ami ellentmondás.
Ha $\langle p_1,x\rangle \le \mu_1$, akkor

$$u(x) \le u^\vee(\mu_1,p_1) \le \alpha\,,$$

ha $\langle p_2,x\rangle \le \mu_2$, akkor

$$u(x) \le u^\vee(\mu_2,p_2) \le \alpha\,.$$

Ezért mindenképpen

$$u(x) \le \alpha\,.$$

Ez igaz $\forall\ x \in B(\mu,p)$ esetén, azért

$$u^\vee(\mu,p) \le \alpha\,,\ \text{azaz}\ (\mu,p) \in (u^\vee)^{-1}(-\infty,\alpha]\,.$$

Mivel $B : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ kompakt értékű és Vietoris-folytonos, az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvény pedig folytonos, azért a 7.31 Berge-tétel 1.c. szerint $u^\vee : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvény folytonos.

(2) Legyen $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges adott. Ha $\mu_1 \le \mu_2$, akkor $(-\infty,\mu_1] \subset (-\infty,\mu_2]$, ezért

$$\langle p,.\rangle^{-1}(-\infty,\mu_1] \subset \langle p,.\rangle^{-1}(-\infty,\mu_2]\,,\quad \text{így}\quad B(\mu_1,p) \subset B(\mu_2,p)\,,$$

innen

$$u^\vee(\mu_1,p) = \sup_{B(\mu_1,p)} u \ \le \ \sup_{B(\mu_2,p)} u = u^\vee(\mu_2,p)\,.$$

megjegyzés: Igaz a szigorú monotonitás is, ha teljesül u-nak nem létezik lokális maximuma.

(3) Legyen $\mu \in \mathbb{R}_{++}$ tetszőleges adott. Ha $p_1 \le p_2$, akkor

$$\langle p_2,.\rangle^{-1}(-\infty,\mu] \subset \langle p_1,.\rangle^{-1}(-\infty,\mu]\,,$$

ugyanis ha valamely $x \in \mathbb{R}^n_+$ esetén $\langle p_2,x\rangle \le \mu$, akkor $\langle p_1,x\rangle \le \mu$, (ha $p_1 < p_2$, akkor is csak $\le$-ség van,) így $B(\mu,p_2) \subset B(\mu,p_1)$, innen

$$u^\vee(\mu,p_1) = \sup_{B(\mu,p_1)} u \ \ge \ \sup_{B(\mu,p_2)} u = u^\vee(\mu,p_2)\,.$$

(4) Mivel a $B : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ nemüres, kompakt értékű leképezés, az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvény pedig folytonos, azért a Weierstrass-tétel miatt $u^\vee$ értékfüggvény véges értékű. $\square$

1.3.1 A duális feladat és értékfüggvénye

Ez az alfejezet erősen támaszkodik a Függeléknek az alulról félig folytonos függvényekkel foglalkozó pontjára.

1.10 Definíció. (a.f.f. burok, speciális eset)
Az $u^{\vee} : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvény (indirekt hasznossági függvény) alulról félig folytonos burka a Függelékben található 7.48. definíció szerint a

$$\mathrm{cl}(u^{\vee}) := \mathrm{func}\,\mathrm{cl}\,\mathrm{epi}(u^{\vee}) : \mathbb{R}_{+} \times \mathbb{R}^n_{+} \to \overline{\mathbb{R}}$$

függvény, azaz amelyre $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{+} \times \mathbb{R}^n_{+}$ esetén

$$\mathrm{cl}(u^{\vee})(\mu, p) := \inf\ \{\alpha \in \mathbb{R}\ :\ ((\mu, p), \alpha) \in \mathrm{cl}\,\mathrm{epi}(u^{\vee})\}\,.$$

1.11 Megjegyzés.
A 7.51. állítás (ekvivalens definíció) szerint

$$\mathrm{cl}(u^{\vee}) = \bigvee_{g:\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}\ \text{a.f.f.}\,,\ g|_{\mathbb{R}^n_{++}} \le u^{\vee}} g\ . \tag{1.3}$$

A 7.50. állítás 1. szerint $\mathrm{cl}(u^{\vee})$ bármilyen $u : \mathbb{R}^n_{+} \to \mathbb{R}$ függvény esetén alulról félig folytonos.

1.12 Állítás.
Legyen az $u : \mathbb{R}^n_{+} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos. Legyen $\mu := 1$. Ekkor

1. $\forall\ p \in \mathbb{R}^n_{+}$ *esetén*

$$\sup\ \{u(x)\ :\ \langle p, x\rangle < 1\,,\ x \ge \mathbf{0}\}\ =\ \max\ \{u(x)\ :\ \langle p, x\rangle \le 1\,,\ x \ge \mathbf{0}\}\,.$$

2. $\forall\ p \in \mathbb{R}^n_{++}$ *esetén*

$$\mathrm{cl}(u^{\vee})(1, p)\ =\ \sup\ \{u(x)\ :\ \langle p, x\rangle < 1\,,\ x \ge \mathbf{0}\}\,.$$

3. $\forall\ p \in \mathbb{R}^n_{+}$ *esetén*

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}(u^{\vee})(1, p)\ &\ge\ \sup\ \{u(x)\ :\ \langle p, x\rangle < 1\,,\ x \ge \mathbf{0}\}\\ &=\ \max\ \{u(x)\ :\ \langle p, x\rangle \le 1\,,\ x \ge \mathbf{0}\}\,.\end{aligned}$$

Bizonyítás.
1. A $\le$ irány nyilvánvaló.
Legyenek p és $x \in \mathbb{R}^n_{+}$, amelyekre $\langle p, x\rangle \le 1$. Tekintsük a $(\lambda_n) := (1 - \frac{1}{n})$ sorozatot, ekkor $\langle p, \lambda_n \cdot x\rangle < 1$, ezért

$$u(\lambda_n \cdot x)\ \le\ \sup\ \{u(y)\ :\ \langle ., y\rangle < 1\,,\ y \ge \mathbf{0}\}\,,$$

mivel $u : \mathbb{R}^n_{+} \to \mathbb{R}$ folytonos, azért $u(\lambda_n \cdot x) \to u(x)$, innen

$$u(x)\ \le\ \sup\ \{u(y)\ :\ \langle ., y\rangle < 1\,,\ y \ge \mathbf{0}\}\,,$$

ezért

$$\max\ \{u(x)\ :\ \langle p, x\rangle \le 1\,,\ x \ge \mathbf{0}\}\ \le\ \sup\ \{u(x)\ :\ \langle p, x\rangle < 1\,,\ x \ge \mathbf{0}\}\,.$$

2. Következik az 1.-ből.

3. Legyen $\forall\, x \in \mathbb{R}^n_+$ esetén $\varphi_x : \mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ az a függvény, amelyre $\forall\, p \in \mathbb{R}^n_+$ esetén

$$\varphi_x(p) := \begin{cases} u(x) & : \quad \langle p, x\rangle < 1 \\ -\infty & : \quad \langle p, x\rangle \geq 1 \end{cases} .$$

Ekkor $\varphi_x : \mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ alulról félig folytonos, így a felső burkolója is alulról félig folytonos. Továbbá

$$\bigvee_{x\in\mathbb{R}^n_+} \varphi_x \;=\; \sup\,\{u(x) \;:\; \langle ., x\rangle < 1\,,\; x \geq \mathbf{0}\}\,,$$

ezért a jobboldali függvény is alulról félig folytonos. A 2. szerint

$$\left(\bigvee_{x\in\mathbb{R}^n_+} \varphi_x\right)|_{\mathbb{R}^n_{++}} \;=\; u^\vee(1,.)\,.$$

Az (1.3). ekvivalens definíció szerint $\mathrm{cl}(u^\vee)(1,.) : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvény pedig a legnagyobb ilyen függvény, azaz

$$\mathrm{cl}(u^\vee)(1,.) \;\geq\; \bigvee_{x\in\mathbb{R}^n_+} \varphi_x \;=\; \sup\,\{u(x) \;:\; \langle ., x\rangle < 1\,,\; x \geq \mathbf{0}\}\,.$$

□

1.13 Megjegyzés.
Az előző állítás 3. nyilván nem igaz $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n_+$ esetén, ezért az $u^\vee : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvényt nem érdemes kiterjeszteni $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n_+$-ra. Ehelyett rögzítsük a $\mu \in \mathbb{R}_{++}$-t, legyen például $\mu := 1$, és tekintsük a $u^\vee(1,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvényt, ami igazából nem az (1.1), hanem az (1.2) feladatsereg értékfüggvénye, és ennek a függvénynek a p változóban $\mathbb{R}^n_{++}$-ra való

$$\mathrm{cl}(u^\vee(1,.)) := \mathrm{func}\,\mathrm{cl}\,\mathrm{epi}(u^\vee(1,.)) : \mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}$$

kiterjesztését vizsgáljuk.

Ezek szerint az (1.1) feladatsereg nem viselkedik szimmetrikusan a két paraméterében.

1.14 Példa.
Az $u^\vee(1,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ értékfüggvénynek nem feltétlenül létezik $\mathbb{R}^n_+$-ra való folytonos és véges kiterjesztése:

Tekintsük az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ Cobb-Douglas-függvényt, amelyre $\forall\ x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n_+$ esetén $u(x) := \prod_{i=1}^n \xi_i^{\alpha_i}$, ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$, ekkor kiszámolható, hogy $\forall\ y = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén $u^\vee(y) = \prod_{i=1}^n (\frac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^n \eta_j})^{\alpha_i}$.

1.15 Definíció.
Tekintsük az $u^\vee(1,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ értékfüggvénynek a $\mathrm{cl}(u^\vee(1,.)) : \mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ alulról félig folytonos burkát, és vegyük az (1.1) feladatseregnek, vagy pontosabban az (1.2) feladatseregnek a következő, $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ paraméterrel paraméterezett duális feladatseregét:

$$\begin{cases} \mathrm{cl}(u^\vee(1,p)) \to \min \\ \langle p, x\rangle \leq 1 \quad \text{és } p \in \mathbb{R}^n_+ \end{cases} \tag{1.4}$$

Az (1.4) feladatsereg értékfüggvénye az az $u^{\vee\vee} : \mathbb{R}^n_{++} \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény, amelyre $\forall\ x \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\begin{aligned} u^{\vee\vee}(x) \;&:=\; \min_{\mathbb{R}^n_+ \,\cap\, \langle ., x\rangle^{-1}(-\infty, 1]} \mathrm{cl}(u^\vee(1,.)) \\ &=\; \min\,\{\, \mathrm{cl}(u^\vee(1,p)) \;:\; \langle p, x\rangle \leq 1 \text{ és } p \in \mathbb{R}^n_+\}\,. \end{aligned}$$

Ha létezik a feladatnak $\upsilon : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ megoldásfüggvénye, akkor

$$u^{\vee\vee}(x) = \mathrm{cl}(u^\vee(1,.))(\upsilon(x)) \ , \text{ így } u^{\vee\vee} = \mathrm{cl}(u^\vee(1,.)) \circ \upsilon = u \circ \chi \circ (1,\upsilon) \, .$$

1.16 Állítás. (a duális feladat értékfüggvényének a tulajdonságai)
Ha az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ folytonos, kvázikonkáv és monoton növekedő, akkor az (1.4) duális feladat $u^{\vee\vee} : \mathbb{R}^n_{++} \to \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvénye

(1) az $\mathbb{R}^n_{++}$-on megegyezik az u függvénnyel: $u^{\vee\vee} = u|_{\mathbb{R}^n_{++}}$,

(2) folytonos,

(3) $\exists$ $\mathbb{R}^n_+$-ra folytonos kiterjesztése, nevezetesen az u függvény ilyen,

(4) a.f.f. burka megegyezik az u függvénnyel: $\mathrm{cl}(u^{\vee\vee}) = u$.

Bizonyítás.
(1) Legyen $x_0 \in \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges. Tekintsük az

$$u^{-1}((u(x_0),\infty)) = \{x \in \mathbb{R}^n_+ \ : \ u(x) > u(x_0)\} \ \subset \ \mathbb{R}^n_+$$

halmazt, amely nyílt és konvex, mivel u folytonos (elég az alulról félig folytonosság) és kvázikonkáv.

Belátjuk, hogy $\exists$ $p_0 \geq (\neq)\mathbf{0}$, amelyre egyrészt $\langle p_0, x_0\rangle = 1$, másrészt

$$\begin{aligned} u^{-1}((u(x_0),\infty)) \quad &\subset \quad \{x \in \mathbb{R}^n_+ \ : \ \langle p_0, x\rangle > 1\} , \text{ azaz} \\ \{x \in \mathbb{R}^n_+ \ : \ \langle p_0, x\rangle \leq 1\} \quad &\subset \quad u^{-1}((-\infty, u(x_0)]) \, . \end{aligned} \tag{1.5}$$

Amennyiben az $u^{-1}((u(x_0),\infty))$ halmaz üres, akkor nyilván igaz.
Tegyük fel, hogy az $u^{-1}((u(x_0),\infty))$ halmaz nemüres. Mivel $x_0 \notin u^{-1}((u(x_0),\infty))$, valamint $u^{-1}((u(x_0),\infty)) \subset \mathbb{R}^n_+$ nemüres, nyílt és konvex halmaz, azért egy szeperációs tétel szerint szétválaszthatók, azaz $\exists$ $p_0 \in \mathbb{R}^n_+$, $p_0 \neq \mathbf{0}$ támaszvektora az $u^{-1}((u(x_0),\infty))$ halmaznak az x_0 pontban, azaz

$$u^{-1}((u(x_0),\infty)) \subset \{x \in \mathbb{R}^n_+ \ : \ \langle p_0, x\rangle > \langle p_0, x_0\rangle\} \ = \ p_0^{-1}((\langle p_0, x_0\rangle, \infty)) \, .$$

Mivel az u függvény monoton növekedő, azért $p_0 \geq (\neq)\mathbf{0}$.
Ugyanis: ha $\exists$ $p_0^i < 0$ koordinátája, akkor egyrészt az u monoton növekedése miatt $\forall$ $x \in u^{-1}((u(x_0),\infty))$ és $\forall$ $\lambda > 1$ esetén $x + \lambda \cdot e_i \in u^{-1}((u(x_0),\infty))$, másrészt $\exists$ $\lambda > 1$, hogy $\langle p_0, x + \lambda \cdot e_i\rangle < \langle p_0, x_0\rangle$.
A p_0 vektor normálható, azaz megválasztható úgy, hogy $\langle p_0, x_0\rangle = 1$ legyen, mert $p_0 \geq (\neq)\mathbf{0}$ és $x_0 \in \mathbb{R}^n_{++}$, ezért $\langle p_0, x_0\rangle \neq 0$, így $\langle \frac{1}{\langle p_0, x_0\rangle} p_0, x_0\rangle = 1$.

Látható, hogy

$$u(x_0) = \max \, \{u(x) \ : \ x \geq \mathbf{0}, \ \langle p_0, x\rangle \leq 1\} \, ,$$

ugyanis: a $\leq$ egyenlőtlenség nyilvánvaló, a $\geq$ egyenlőtlenség a (1.5) tartalmazás miatt teljesül. Mivel a fenti állítás szerint

$$\mathrm{cl}(u^\vee)(1, p_0) \ = \ \max \, \{u(x) \ : \ x \geq \mathbf{0}, \ \langle p_0, x\rangle \leq 1\} \, ,$$

azért

$$u(x_0) = u^\vee(1, p_0) \, .$$

Mivel $\forall$ $p \in \mathbb{R}^n_+$ esetén, amelyre $\langle p, x_0\rangle \leq 1$ teljesül, hogy

$$\mathrm{cl}(u^\vee)(1,p) \ = \ \sup \, \{u(x) \ : \ \langle p, x\rangle \leq 1, \ x \geq \mathbf{0}\} \ \geq \ u(x_0) \ = \ u^\vee(1, p_0) \, ,$$

azért

$$u^{\vee\vee}(x_0) \ = \ \min \, \{\mathrm{cl}(u^\vee)(1,p) \ : \ \langle p, x_0\rangle \leq 1, \ x \geq \mathbf{0}\} \ = \ u^\vee(1,p_0) \ = \ u(x_0) \, .$$

(2), (3) és (4) következik az (1)-ből. □

1.4 A megoldásleképezés tulajdonságai

Ez az alfejezet a Függeléknek a Berge-tétellel foglalkozó pontjára támaszkodik.

Az (1.1) feladatsereg megoldásleképezése (keresleti leképezése) a következő tulajdonságokkal rendelkezik.

1.17 Állítás. (a megoldásleképezés tulajdonságai)
Az (1.1) feladatsereg $\mathcal{X} : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ megoldásleképezése

(1) nullad fokban pozitív homogén halmazértékű leképezés, azaz $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ pontban $\forall\ \lambda \geq 0$ esetén $\mathcal{X}(\lambda\mu, \lambda p) = \mathcal{X}(\mu, p)$;

(2) ha az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor nemüres, kompakt értékű, felső-Vietoris-folytonos leképezés;

(3) ha az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvény kvázikonkáv, akkor konvex értékű leképezés;

(4) ha az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan kvázikonkáv, akkor $\mathcal{X}$ értékei legfeljebb egyelemű halmazok;

(5) ha az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és szigorúan kvázikonkáv, akkor az (1.1) feladatnak $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén létezik pontosan egy $x_{\mu,p}$ megoldása, azaz $\mathcal{X}$ egyértékű (singleton-értékű), azaz a megoldásleképezés lényegében egy $\chi : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ függvény.

Bizonyítás.
(1) Mivel $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ pontban $\mathcal{X}(\mu, p) = \operatorname{argmax}_{B(\mu,p)} u$, valamint az 1.7. állítás szerint $\forall\ \lambda \geq 0$ esetén $B(\mu, p) = B(\lambda\mu, \lambda p)$, azért $\mathcal{X}(\mu, p) = \mathcal{X}(\lambda\mu, \lambda p)$.

(2) Mivel a $B : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ nemüres, kompakt értékű leképezés, az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvény pedig folytonos, azért a Weierstrass-tétel miatt az $\mathcal{X} : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ megoldásleképezés nemüres értékű.

Mivel a $B : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ kompakt értékű és Vietoris-folytonos leképezés, az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvény pedig folytonos, azért a 7.31. Berge-tétel 2.b szerint az $\mathcal{X} : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ megoldásleképezés kompakt értékű és felső-Vietoris-folytonos.

(3) Mivel az u kvázikonkáv, azért $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpár esetén $u^{-1}([u^\vee(\mu, p), \infty)) \subset \mathbb{R}^n_+$ konvex halmaz, ezért az

$$\mathcal{X}(\mu, p) = u^{-1}([u^\vee(\mu, p), \infty)) \cap \mathbb{R}^n_+ \cap \langle p, .\rangle^{-1}(-\infty, \mu]$$

halmaz is konvex.

Másképpen: Legyen $(\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges adott. Legyenek x_1 és $x_2 \in \mathcal{X}(\mu, p)$ tetszőlegesek, azaz definíció szerint x_1 és $x_2 \in B(\mu, p)$ és $\forall z \in B(\mu, p)$ esetén $u(x_1) = u(x_2) \geq u(z)$. Legyen $\lambda \in [0, 1]$, legyen $x_\lambda := \lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2$. Mivel $B(\mu, p)$ konvex halmaz, azért $x_\lambda \in B(\mu, p)$, mivel u kvázikonkáv, azért $\forall\ z \in B(\mu, p)$ esetén $u(x_\lambda) \geq u(x_1) = u(x_2) \geq u(z)$, azaz $x_\lambda \in \mathcal{X}(\mu, p)$.

(4) Indirekt módon tegyük fel, hogy a $\mathcal{X}(\mu, p)$ megoldáshalmaz több pontból áll, legyen $x_1, x_2 \in \mathcal{X}(\mu, p)$. Mivel (2) szerint az $\mathcal{X}(\mu, p)$ halmaz konvex, azért $\forall\ \lambda \in (0, 1)$ esetén $\lambda x_1 + (1 - \lambda x_2) \in \mathcal{X}(\mu, p)$, mivel u szigorúan kvázikonkáv, azért $u(\lambda x_1 + (1 - \lambda x_2)) > \min\{u(x_1), u(x_2)\}$, ami ellentmondás.

Másképpen: Ugyanaz, mint a (4) módosított bizonyítása egy kis változtatással. Legyen $(\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges adott. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists\ x_1$ és $x_2 \in \mathcal{X}(\mu, p)$, $x_1 \neq x_2$, legyen $\lambda \in (0, 1)$. Az u függvény szigorúan kvázikonkávitása szerint $u(x_\lambda) > u(x_1) = u(x_2)$, így x_1 és $x_2 \notin \mathcal{X}(\mu, p)$, ami ellentmondás.

(5) Következik (2) és (4)-ből. □

1.4.1 A Walras-törvény és a lokális maximum hiánya

1.18 Definíció.
1. Az (1.1) feladatsereg $\mathcal{X} : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ megoldásleképezése (a közönséges keresleti leképezés) egy $(\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpár mellett kielégíti a **Walras-törvényt**, ha $\forall\ x \in \mathcal{X}(\mu, p)$ esetén

$$\langle p, x \rangle = \mu\,.$$

2. Az (1.1) feladatsereg $\mathcal{X} : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ megoldásleképezése (közönséges keresleti leképezése) **Walras-típusú**, ha $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpár mellett kielégíti a **Walras-törvényt**.

1.19 Megjegyzés.
Az általános egyensúlyelméletben Walras-törvényen azt értik, hogy a gazdaságban fennáll a szigorú értékegyensúly. Ebből következik a fogyasztókra a feltételi korlát kimerülése. Ezért szokás a fogyasztáselmélet keretei között ezt a tulajdonságot is Walras-törvénynek tekinteni.

Tekintsük a következő, $(\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpárral paraméterezett egyenlőség-feltételes feladatsereget:

$$\begin{cases} u(x) \to \max \\ \langle p, x \rangle = \mu \quad \text{és} \quad x \in \mathbb{R}^n_+ \end{cases} \tag{1.6}$$

1.20 Állítás.
Ha az (1.1) feladatsereg $\mathcal{X} : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ megoldásleképezése egy $(\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpár mellett kielégíti a Walras-törvényt, akkor az (1.1) feladat megoldáshalmaza, feltéve, hogy nemüres, megegyezik az (1.6) egyenlőség-feltételes feladat megoldáshalmazával. Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy az (1.1) és a (1.6) feladatok ekvivalensek.

Bizonyítás.
Legyen $(\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges olyan paraméterpár, amely mellett $\mathcal{X}$ kielégíti a Walras-törvényt.
Legyen $x_{\mu,p}$ megoldása az (1.1) feladatnak. A Walras-törvény teljesülése miatt $\langle p, x_{\mu,p} \rangle = \mu$. Továbbá az (1.6) feladat feltételi halmaza része az (1.1) feladatének. Így $x_{\mu,p}$ megoldása az (1.6) feladatnak is.
Legyen $x_{\mu,p}$ megoldása az (1.6) feladatnak. Indirekt módon tegyük fel, hogy $x_{\mu,p}$ nem megoldása az (1.1) feladatnak. Mivel $\mathcal{X}(\mu, p) \neq \emptyset$, azért $\exists\ x \in \mathcal{X}(\mu, p)$, amelyre $u(x) > u(x_{\mu,p})$. A Walras-törvény teljesülése miatt $\langle p, x \rangle = \mu$. Így $x_{\mu,p}$ nem megoldása a (1.6) feladatnak, ami ellentmondás. $\square$

1.21 Definíció.
Az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvénynek **nem létezik lokális maximuma**, másképpen **lokálisan telíthetetlen** vagy **lokálisan kielégíthetetlen**, ha $\forall\ x \in \mathbb{R}^n_+$ pont és $U \in \tau_{\mathbb{R}^n_+}(x)$ környezet esetén $\exists\ z \in U$, hogy $u(z) > u(x)$.

1.22 Megjegyzés.
A lokális maximum hiánya az u függvénynek egy olyan tulajdonsága, amelynek teljesülése esetén az $\mathcal{X}$ megoldásleképezésre teljesül a Walras-törvény, és közgazdaságilag jól interpretálható. Mivel a lokális maximum hiánya elnevezés a hasznossági és a termelési függvényekre egyaránt használható, azért a szokástól eltérően ezt részesítem előnyben a lokális telíthetetlenséggel szemben.

1.23 Állítás.
Ha az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvénynek nem létezik lokális maximuma, akkor az (1.1) feladat $\mathcal{X}$ megoldásleképezésére $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpár mellett teljesül a Walras-törvény, így az előző állítás szerint $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpár mellett az (1.1) feladat megoldásai megegyeznek a (1.6) egyenlőség-feltételes feladat megoldásaival.

Bizonyítás.
Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpár és $x \in \mathcal{X}(\mu, p)$, hogy $\langle p, x\rangle < \mu$. Legyen

$$U := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \langle p, x\rangle \leq \mu\} = \mathbb{R}^n_+ \cap \langle p, .\rangle^{-1}(-\infty, \mu)\,,$$

ekkor $U \in \tau_{\mathbb{R}^n_+}(x)$, mivel u-ak nem létezik lokális maximuma, azért $\exists\ z \in U$, hogy $u(z) > u(x)$, ezért $x \notin \mathcal{X}(\mu, p)$, ami ellentmondás. □

1.4.2 A megoldásfüggvény differenciálhatósága

Láttuk, hogy ha az u függvény folytonos és szigorúan kvázikonkáv, akkor $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén az (1.1) feladatnak pontosan egy $x_{\mu,p}$ megoldása létezik, azaz a megoldásleképezés lényegében egy $\chi : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ függvény. Az implicit-függvény-tétel biztosítja azt, hogy az u függvényre tett bizonyos feltételek mellett a megoldásfüggvény differenciálható is.

1.24 Állítás. (a megoldásfüggvény differenciálhatósága)
Tegyük fel, hogy az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvénynek nem létezik lokális maximuma, továbbá kétszer folytonosan differenciálható, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n_+$ esetén $u'(x) \neq \mathbf{0}$, (az $\mathbb{R}^n_{++}$-on ebből következik a lokális maximum hiánya), konkáv, valamint tegyük fel, hogy a

$$\begin{bmatrix} u''(x) & u'(x)^T \\ u'(x) & 0 \end{bmatrix} \in L(\mathbb{R}^{n+1}_+)$$

lineáris transzformáció — ún. szegélyezett Hesse-mátrix — invertálható. Ekkor az (1.1) feladatnak $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén pontosan egy megoldása létezik, azaz a megoldásleképezés lényegében egy $\chi : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ függvény, valamint ez az $\chi : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ megoldásfüggvény differenciálható is.

Emlékeztetünk rá, hogy a lokális maximum hiánya miatt az 1.23. állítás szerint ebben az esetben az (1.1) feladat megoldásai megegyeznek az (1.6) egyenlőség-feltételes feladat megoldásaival.

Bizonyítás.
A (1.6) feladatsereg Lagrange-függvénye az az $\mathcal{L} : (\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}) \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\forall\ ((x, \lambda,), (\mu, p)) \in (\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++})$ esetén

$$\mathcal{L}((x, \lambda,), (\mu, p)) = u(x) - \lambda \cdot (\langle p, x\rangle - \mu)\,.$$

Legyen $G : (\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}) \to \mathbb{R}^{n+1}$ olyan függvény, amelyre teljesül, hogy $\forall\ ((x, \lambda,), (\mu, p)) \in (\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++})$ esetén

$$G((x, \lambda,), (\mu, p)) = \partial_{1,2}\mathcal{L}((x, \lambda,), (\mu, p)) = \begin{bmatrix} u'(x) - \lambda \cdot p \\ \langle p, x\rangle - \mu \end{bmatrix} \in L(\mathbb{R}^{n+1}_+)\,.$$

Mivel u differenciálható, azért G jóldefiniált.
Látható, hogy a $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges paraméterpár és $\forall\ x \in \mathbb{R}^n_+$ esetén fennállnak a Lagrange-féle multiplikátor-tétel feltételei:

u és $\langle p, .\rangle$ folytonosan differenciálható függvények, valamint mivel $p \neq 0$, azért $\mathcal{R}(\langle p, .\rangle'(x)) = \mathcal{R}(\langle p, .\rangle) = \mathbb{R}$.

A Lagrange-multiplikátortétel és u konkavitása szerint $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges paraméterpár esetén egy $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ vektor belsőponti megoldása az (1.1) feladatnak, (azaz $x \in \mathcal{X}(\mu, p)$) pontosan akkor, ha $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$, hogy

$$\begin{aligned}
&((x, \lambda,), (\mu, p)) \ \in \ G^{-1}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^{n+1}})\,, \text{ azaz} \\
&G((x, \lambda,), (\mu, p)) = \partial_{1,2}\mathcal{L}((x, \lambda,), (\mu, p)) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{n+1}}\,, \text{ azaz} \\
&u'(x) - \lambda \cdot p = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} \text{ és } \langle p, x\rangle - \mu = 0\,,
\end{aligned}$$

mivel feltettük, hogy $\forall x \in \mathbb{R}^n_{+}$ esetén $u'(x) \neq \mathbf{0}$, azért $\lambda \neq 0$.

Belátjuk, hogy a G függvényre $\forall\ ((x, \lambda,), (\mu, p)) \in G^{-1}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^{n+1}})$ pontban fennállnak az implicitfüggvény-tétel feltételei:

G folytonosan differenciálható függvény, valamint

$\forall\ ((x, \lambda,), (\mu, p)) \in G^{-1}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^{n+1}})$ pontban a $\partial_{1,2}G((x, \lambda,), (\mu, p)) \ \in L(\mathbb{R}^{n+1}_{+})$ lineáris transzformáció invertálható.

Ugyanis: Mivel u kétszer folytonosan differenciálható, így u' folytonosan differenciálható, valamint $\langle p, .\rangle$ folytonosan differenciálható , azért G is folytonosan differenciálható függvény az $(\mathbb{R}^n_{+} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++})$ halmazon. Ezek szerint $\forall\ ((x, \lambda,), (\mu, p)) \in (\mathbb{R}^n_{+} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++})$ esetén

$$\exists\ \partial_{1,2}G((x, \lambda,), (\mu, p)) \text{ és } = \begin{bmatrix} u''(x) & -p \\ \langle p, .\rangle & 0 \end{bmatrix},$$

továbbá a fentiek szerint $\forall\ ((x, \lambda,), (\mu, p)) \in G^{-1}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^{n+1}})$ pontban, mivel $\lambda \neq 0$, azért ez a következő alakba írható:

$$\begin{bmatrix} u''(x) & -\frac{1}{\lambda}u'(x)^T \\ \frac{1}{\lambda}u'(x) & 0 \end{bmatrix},$$

mivel feltettük, hogy

$$\begin{bmatrix} u''(x) & u'(x)^T \\ u'(x) & 0 \end{bmatrix} \in L(\mathbb{R}^{n+1}_{+})$$

lineáris transzformáció invertálható, azért a

$$\partial_{1,2}G((x, \lambda,), (\mu, p)) \ \in L(\mathbb{R}^{n+1}_{+})$$

lineáris transzformáció invertálható. Ezért az imlicitfüggvény-tétel szerint

$$\forall\ ((x, \lambda), (\mu, p)) \in G^{-1}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^{n+1}})$$

pont esetén a (μ, p) pontnak $\exists\, U$ környezete, az (x, λ) pontnak $\exists\, V$ környezete, hogy a $G^{-1}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^{n+1}}) \cap U \times V$ reláció egy $(\chi, \ell) : U \to V$ függvény, amely differenciálható is, valamint $\forall(\mu, p) \in U$ esetén

$$\chi'(\mu, p) = -[\partial_1 G((x, \lambda,), (\mu, p))]^{-1}\partial_{3,4}G((x, \lambda,), (\mu, p))\,.$$

A fentiek szerint pedig az $\chi : U \to \mathbb{R}^n$ függvény az (1.6), így az (1.1) feladat megoldása. □

1.25 Állítás.
Ha $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén az (1.1) feladatnak pontosan egy megoldása létezik, azaz a megoldásleképezés lényegében egy $\chi : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_{+}$ függvény, valamint ez az $\chi : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_{+}$ megoldásfüggvény differenciálható is, akkor $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\partial_1\chi(\mu, p)\,\mu + \partial_2\chi(\mu, p)\,p = \mathbf{0}\,.$$

BIZONYÍTÁS.
Mivel a fenti állítás szerint χ nulladfokú pozitív homogén függvény, azért az Euler-tétel szerint $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén $\forall\ i = 1, \ldots, n$ mellett

$$\langle \chi_i'(\mu, p)\,(\mu, p)\rangle = 0 \cdot \chi_i(\mu, p)\,,$$

így $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= 0 \cdot \chi(\mu, p) = \chi'(\mu, p)\,(\mu, p) \\ &= \langle (\partial_1 \chi(\mu, p), \partial_2 \chi(\mu, p)), (\mu, p)\rangle \\ &= \partial_1 \chi(\mu, p)\,\mu + \partial_2 \chi(\mu, p)\,p\,. \end{aligned}$$

□

1.26 Állítás.
Ha az (1.1) feladatnak $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén pontosan egy megoldása létezik, azaz a megoldásleképezés lényegében egy $\chi : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_{+}$ függvény, valamint ez az $\chi : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_{+}$ megoldásfüggvény differenciálható, és kielégíti a Walras-törvényt is, akkor $\forall (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\begin{aligned} &\langle p, \partial_1 \chi(\mu, p)\rangle = 1\,, \\ &[\partial_2 \chi(\mu, p)]^*(p) + \chi(\mu, p) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\,. \end{aligned}$$

BIZONYÍTÁS.
Mivel a χ megoldásfüggvény kielégíti a Walras-törvényt, azért $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpár esetén $\langle p, \chi(\mu, p)\rangle = \mu$.
Egyrészt ezt μ szerint deriválva azt kapjuk, hogy

$$1 = \partial_\mu \langle p, \chi(\mu, p)\rangle = \langle p, .\rangle'(\chi(\mu, p)) \circ \partial_1 \chi(\mu, p) = \langle p, .\rangle \circ \partial_1 \chi(\mu, p) = \langle p, \partial_1 \chi(\mu, p)\rangle.$$

Másrészt ezt p szerint deriválva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{0}_{(\mathbb{R}^n)^*} &= \partial_p \langle p, \chi(\mu, p)\rangle \\ &= \langle p, .\rangle'(\chi(\mu, p)) \circ \partial_2 \chi(\mu, p) + \langle ., \chi(\mu, p)\rangle'(p) \\ &= \langle p, .\rangle \circ \partial_2 \chi(\mu, p) + \langle \chi(\mu, p), .\rangle \\ &= \langle p, [\partial_2 \chi(\mu, p)](.)\rangle + \langle \chi(\mu, p), .\rangle \\ &= \langle [\partial_2 \chi(\mu, p)]^*(p), .\rangle + \langle \chi(\mu, p), .\rangle\,, \end{aligned}$$

azaz az izomorfiákat figyelembe véve

$$[\partial_2 \chi(\mu, p)]^*(p) + \chi(\mu, p) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$$

□

1.4.3 A megoldás meghatározása

1.27 Megjegyzés.
1. Legyen $(\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges adott paraméterpár, és tekintsük az (1.6) egyenlőség-feltételes szélsőértékfeladatot. Legyen $x_{\mu,p} \in \mathcal{X}(\mu, p) \cap \mathbb{R}^n_{++}$ egy tetszőleges belsőponti megoldása a feladatnak.

1. A Lagrange-multiplikátortétel feltételei a feladatra:

az u függvény folytonosan differenciálható az $x_{\mu,p}$ pontban,

a $\langle p, .\rangle$ függvény folytonosan differenciálható az $x_{\mu,p}$ pontban, de nyilván ez mindig teljesül,

$\mathcal{R}(\langle p,.\rangle'(x_{\mu,p})) = \mathcal{R}(\langle p,.\rangle) = \mathbb{R}$, mivel $p \neq \mathbf{0}$, azért ez is teljesül.

2. Legyenek $i,j = 1,\ldots,n$ tetszőlegesek. Jelölje $B_{i,j} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ az $i \times j$-dik koordinátasík beágyazását $\mathbb{R}^n$-be. Az implicitfüggvénytétel feltételei az $u \circ B_{i,j} : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ függvényre az $x_{\mu,p} \in \mathbb{R}^n_+$ pontban:

folytonosan differenciálható az $x_{\mu,p}$ pont egy környezetében,

$\partial_j u(x_{\mu,p}) \neq 0$.

1.28 Állítás. (a megoldás meghatározása)
1. Legyen $(\mu,p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges adott paraméterpár, és tekintsük az (1.1) feladatot. Tegyük fel, hogy az u függvénynek nem létezik lokális maximuma. Legyen $x_{\mu,p} \in \mathcal{X}(\mu,p) \cap \mathbb{R}^n_{++}$ egy tetszőleges belsőponti megoldása a feladatnak. Tegyük fel továbbá, hogy fennáll a Lagrange-multiplikátortétel feltétele, azaz u folytonosan differenciálható az $x_{\mu,p}$ pontban. Ekkor $\forall\ i,j = 1,\ldots,n$ mellett

$$\frac{\partial_i u(x_{\mu,p})}{\partial_j u(x_{\mu,p})} = \frac{p_i}{p_j}. \tag{1.7}$$

2. Továbbá, tegyük fel még, hogy $\forall\ i,j = 1,\ldots,n$ esetén az $u \circ B_{i,j} : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ függvényre az $x_{\mu,p}$ pontban fennállnak az implicitfüggvénytétel feltételei, azaz folytonosan differenciálható az $x_{\mu,p}$ pont egy környezetében, és $\partial_j u(x_{\mu,p}) \neq 0$. Ekkor $\exists$ olyan U környezete az $x_{\mu,p} \in \mathbb{R}^n_{++}$ pontnak, hogy a megoldás j-dik koordinátája az i-dik koordinátájának a függvényeként áll elő:

$$\xi_i \mapsto \xi_j = g_j(\xi_i)\,,\ \textit{azaz az}$$
$$U \cap \mathrm{Pr}_{i,j} u^{-1}(u(x_{\mu,p})) \subset \mathbb{R}^2_+$$

reláció függvény, valamint ez differenciálható is, és

$$g_j'(\xi_i) = -\frac{p_i}{p_j}. \tag{1.8}$$

Emlékeztetünk rá, hogy a lokális maximum hiánya miatt az 1.23. állítás szerint ebben az esetben az (1.1) feladat megoldásai megegyeznek az (1.6) egyenlőség-feltételes feladat megoldásaival.

Bizonyítás.
1. Az (1.6) feladat Lagrange-függvénye az az $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\forall\ x \in \mathbb{R}^n_+,\ \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = u(x) - \lambda \cdot (\langle p,x\rangle - \mu)\,.$$

Ekkor a Lagrange-multiplikátortétel szerint az $x_{\mu,p} \in \mathcal{X}(\mu,p) \cap \mathbb{R}^n_{++}$ belsőponti megoldás esetén $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$, hogy $\mathcal{L}'(x_{\mu,p},\lambda) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{n+1}}$ azaz

$$u'(x_{\mu,p}) - \lambda \cdot p = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} \quad \text{és} \quad \langle p,x\rangle = \mu\,,$$

amiből $\forall\ i,j = 1,\ldots,n$ esetén

$$\frac{\partial_i u(x_{\mu,p})}{\partial_j u(x_{\mu,p})} = \frac{p_i}{p_j}\,.$$

2. Az implicitfüggvénytétel feltételeinek fennálása esetén

$$g_j'(\xi_i) = -\frac{\partial_i u(x_{\mu,p})}{\partial_j u(x_{\mu,p})}\,,$$

ezért az (1.7) szerint

$$g_j'(\xi_i) = -\frac{p_i}{p_j}\,.$$

□

1.29 Megjegyzés. (mikroökonómiai interpretáció)
A fenti állítás teljesen azonos a Hicks-féle koncepció 2.23. állításával. Ugyanazok a mikroökonómiai interpretációi is.

Tegyük fel, hogy a fogyasztó illetve a termelő optimálisan dönt. Az általános egyensúlyelmélet keretei között gondolkozva ez azt jelenti, hogy a fogyasztó illetve a termelő döntése egy egyensúlyi allokáció része. Ebben az esetben az (1.7) összefüggés szerint a parciális határhasznok illetve a parciális határtermékek hányadosa megegyezik az árarányokkal. Még nevezetesebb mikroökonómiai összefüggés az (1.8), amely szerint a helyettesítési határráta abszolútértéke megegyezik az árarányok reciprokával.

Tegyük fel még azt is, hogy az egyik jószágot pénznek tekintjük, azaz a gazdaságban lévő pénz árupénz, és ez az ármérce jószág. Ebben az esetben az (1.7) összefüggésből következik, hogy bármely jószágnak a határhaszna illetve a határterméke éppen a jószág ára. Az (1.8) összefüggésből pedig az következik, hogy bármely jószágnak a pénzre vonatkozó helyettesítési határrátájának az abszolútértéke megegyezik a jószág árával.

1.5 A megoldásfüggvény és az értékfüggvény kapcsolata

Ez az alfejezet a Függeléknek a burkológörbe-tétellel foglalkozó pontjára támaszkodik.

1.30 Megjegyzés.
A 7.82. burkológörbe-tétel II. feltételei az (1.6) egyenlőség-feltételes feladatseregre:

> $\forall\ (\mu,p)\in\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n_{++}$ esetén az (1.6) feladatnak létezik pontosan egy megoldása, azaz a megoldásleképezés lényegében egy $\chi:\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n_{++}\to\mathbb{R}^n_{+}$ függvény, valamint ez az $\chi:\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n_{++}\to\mathbb{R}^n_{+}$ megoldásfüggvény differenciálható.
>
> $\forall\ (\mu,p)\in\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n_{++}$ esetén az (1.6) feladatra fennáll a Lagrange-multiplikátortétel feltétele, ami a fenti megjegyzés szerint az, hogy $u:\mathbb{R}^n_{+}\to\mathbb{R}$ folytonosan differenciálható az $x_{\mu,p}=\chi(\nu,p)\in\mathbb{R}^n_{++}$ belsőponti megoldás pontjában.

Mivel $\chi:\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n_{++}\to\mathbb{R}^n_{+}$ függvény, azért $\forall\ (\mu,p)\in\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$u^{\vee}(\mu,p)=u(\chi(\mu,p))=(u\circ\chi)(\mu,p)\,,$$

így $u^{\vee}=u\circ\chi:\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n_{++}\to\mathbb{R}$, mivel u és χ differenciálhatók, azért $u^{\vee}$ is az.

1.31 Állítás. (Roy-féle azonosság)
Tekintsük az (1.1) feladatsereget. Tegyük fel, hogy az $u:\mathbb{R}^n_{+}\to\mathbb{R}$ függvénynek nem létezik lokális maximuma, továbbá a megoldásleképezés egy $\chi:\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n_{++}\to\mathbb{R}^n_{+}$ függvény, amely megoldásfüggvény differenciálható is, valamint $\forall\ (\mu,p)\in\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpár esetén $u:\mathbb{R}^n_{+}\to\mathbb{R}$ folytonosan differenciálható az $x_{\mu,p}=\chi(\mu,p)\in\mathbb{R}^n_{++}$ belsőponti megoldás pontjában. Ekkor az $u^{\vee}:\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n_{++}\to\mathbb{R}$, értékfüggvény differenciálható, és $\forall\ (\mu,p)\in\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$(u^{\vee})'(\mu,p)=[\lambda(\mu,p),-\lambda(\mu,p)\cdot\chi(\mu,p)]\,,\ \textit{azaz}$$

$$\partial_1 u^{\vee}(\mu,p)=\lambda(\mu,p)\,,\quad \partial_2 u^{\vee}(\mu,p)=-\lambda(\mu,p)\cdot\chi(\mu,p)\,. \tag{1.9}$$

Feltéve, hogy $\partial_1 u^\vee(\mu,p) \neq 0$, *akkor*

$$\chi(\mu,p) = -\frac{1}{\partial_1 u^\vee(\mu,p)} \cdot \partial_2 u^\vee(\mu,p)\,,$$

azaz koordinátákra megfogalmazva: $\forall\ k = 1,\dots,n$ *esetén*

$$\chi_k(\mu,p) = -\frac{\partial_{2_k} u^\vee(\mu,p)}{\partial_1 u^\vee(\mu,p)}\,.$$

Emlékeztetünk rá, hogy a lokális maximum hiánya miatt az 1.23. állítás szerint ebben az esetben az (1.1) feladat megoldásai megegyeznek az (1.6) egyenlőség-feltételes feladat megoldásaival.

Bizonyítás.
A (1.6) feladatsereg Lagrange-függvénye az az

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}) \to \mathbb{R}$$

függvény, amelyre $\forall\ x \in \mathbb{R}^n_+,\ z \in \mathbb{R},\ (\mu,p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\mathcal{L}(x,z,(\mu,p)) = u(x) - z \cdot (\langle p,x\rangle - \mu)\,.$$

Az állítás feltételei szerint fennállnak 7.82. burkológörbe-tétel II. feltételei, ezért $\forall\ (\mu,p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$(u^\vee)'(\mu,p) = \partial_3 \mathcal{L}(\chi(\mu,p), \lambda(\mu,p), (\mu,p))\,,$$

mivel

$$\partial_3 \mathcal{L}(x,z,(\mu,p)) = [z, -z \cdot x] \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n_+\,,$$

azért

$$(u^\vee)'(\mu,p) = [\lambda(\mu,p), -\lambda(\mu,p) \cdot \chi(\mu,p)]\,.$$

□

1.32 Megjegyzés.
Ez az állítás analóg a Hicks-féle megközelítésben szereplő 2.26. Shephard-féle azonossággal, azzal a lényeges eltéréssel, hogy ebben a valós paraméter nem hagyható el.

1.6 A haszonmaximalizálási feladat általánosítása

Az általános egyensúlyelmélet Arrow-Debreu modelljében a fogyasztókat leíró haszonmaximalizálási feladat a fenti (1.1) feladatnál valamivel általánosabban van megfogalmazva. Nem azt teszik fel, hogy a fogyasztási halmaz $\mathbb{R}^n_+$, hanem azt, hogy az $\mathbb{R}^n$-nek egy konvex és zárt részhalmaza. A kompaktságot direkt módon nem kell feltenni, mert egy ügyes trükkel, a releváns allokáció fogalmának a bevezetésével el lehet érni, hogy az egyensúly szempontjából szóbajöhető pontok halmaza egy rögzített kompakt halmazban legyen benne.

Az alábbiakban legyen X Banach-tér (speciálisan ez szokásosan $\mathbb{R}^n$). Legyen $M \subset X$ egy konvex, kompakt halmaz. Ezt tekintjük egy fogyasztó fogyasztási halmazának. Jelölje $x \in X$ a fogyasztási javaknak, $p \in X^*$ pedig ezen fogyasztási javak árainak vektorát. A fogyasztót egy $u : X \to \mathbb{R}$ hasznossági függvény jellemez. A fogyasztó jövedelme a következőkből áll: egyrészt rendelkezik egy $a \in X$ kezdőkészlettel, másrészt egy $h : X^* \to \mathbb{R}$ függvénnyel, ami megadja a termelők profitjából való részesedését. Az általános egyensúlyelméletbeli állításokban ennek a h részesedési függvénynek a folytonosságát illetve a homogénitását kell feltenni.

A költségvetési leképezés Vietoris-folytonosságához a h függvény folytonosságára lesz szükség. A fentiek alapján a fogyasztó jövedelme nem egy $\mu \in \mathbb{R}_{++}$ konstans, hanem egy $I_{a,h} : X^* \to \mathbb{R}_{++}$ függvény, amelyre $\forall\, p \in X^*$ ár esetén

$$I_{a,h}(p) := \langle p, a\rangle + h(p)\,.$$

A fogyasztó a fogyasztási javainak vektorát úgy határozza meg, hogy maximalizálja az $u(x)$ hasznosságát a $\langle p, x\rangle \leq \langle p, a\rangle + h(p)$ költségvetési feltétel mellett.

Ezek szerint a fogyasztó viselkedését adott $a \in X$ kezdőkészlet és $h : X^* \to \mathbb{R}$ részesedési függvény esetén a következő, $p \in X^*$ paraméterrel paraméterezett feladatsereg írja le:

$$\left\{\begin{array}{l} u(x) \to \max \\ x \in M \quad \text{és} \quad \langle p, x\rangle \leq I_{a,h}(p) \;(= \langle p, a\rangle + h(p)\,) \end{array}\right. \tag{1.10}$$

1.33 Definíció.
Adott $a \in X$ kezdőkészlet és $h : X^* \to \mathbb{R}$ részesedési függvény esetén az (1.10) feladatsereg **feltételi leképezésének** (költségvetési leképezésének) nevezzük azt a $B \circ (I_{a,h}, \mathrm{id}) : X^* \to \mathcal{P}(X)$ halmazértékű leképezést, amelyre $\forall\, p \in X^*$ esetén

$$\begin{aligned} B(I_{a,h}(p), p) \quad &:= \quad \{x \in M \ : \ \langle p, x\rangle \leq I_{a,h}(p)\} \\ &= \quad \{x \in M \ : \ \langle p, x\rangle \leq \langle p, a\rangle + h(p)\,\} \\ &= \quad M \cap p^{-1}(-\infty, I_{a,h}(p)]\ . \end{aligned}$$

Ekkor az (1.10) feladatsereg a következő ekvivalens alakba írható:

$$\left\{\begin{array}{l} u(x) \to \max \\ x \in B(I_{a,h}(p), p) \end{array}\right.$$

1.34 Definíció.
Adott $a \in X$ kezdőkészlet és $h : X^* \to \mathbb{R}$ részesedési függvény esetén az (1.10) feladatsereg **megoldásleképezésének** (keresleti leképezésének) nevezzük azt az $\mathcal{X} \circ (I_{a,h}, \mathrm{id}) : X^* \to \mathcal{P}(X)$ halmazértékű leképezést, amelyre $\forall\, p \in X^*$ paraméter esetén

$$\mathcal{X}(I_{a,h}(p), p) \quad := \quad \operatorname*{argmax}_{B(I_{a,h}(p),p)} \ u$$

Az általános egyensúlyelméletben az egyensúly létezéséhez, azaz a Kakutani-tétel alkalmazhatóságához be kell látni, hogy a keresleti leképezés felső-Vietoris-folytonos. Ez a Berge-tétel alkalmazásával a költségvetési leképezés Vietoris-folytonosságából következik. Ennek a bebizonyítása tekinthető az elmélet legmunkaigényesebb részének. Ennek során szükséges a következő feltétel:

1.35 Definíció.
Azt mondjuk, hogy az (1.10) feladatseregre fennáll a **valós választás lehetőségének a feltétele**, másnéven a **létminimum feltétele**, ha

$$\forall\, p \in X^* \ \text{ árvektor esetén } \ \exists\, b_p \in M, \ \text{ hogy } \ \langle p, b_p\rangle < I_{a,h}(p) \;(= \langle p, a\rangle + h(p)\,)\,.$$

Ez a feltétel ebben a formában, amikor a valós választás folytonos lehetőségét tesszük fel, Zalai Ernőtől származik, lásd Zalai (1989) [43] illetve Zalai (2000) [44].

Első lépésben most is egy egyszerűsített feladat feltételi leképezésének a Vietoris-folytonosságát bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy a fogyasztó jövedelme minden ár mellett konstans, például 1. Ekkor a fogyasztó viselkedését a következő, $p \in X^*$ paraméterrel paraméterezett feladatsereg írja le:

$$\left\{\begin{array}{l} u(x) \to \max \\ x \in M \quad \text{és} \quad x \in M \quad \text{és} \quad \langle p, x\rangle \leq 1 \end{array}\right. \tag{1.11}$$

Az (1.11) feladatsereg **feltételi leképezése** a $B \circ (1, \mathrm{id}) : X^* \to \mathcal{P}(X)$ halmazértékű leképezés, azaz $\forall\, p \in X^*$ esetén

$$B(1,p) \quad = \quad \{x \in M \;:\; \langle p, x\rangle \leq 1\}\,.$$

Látható, hogy

$$B \circ (I_{a,h}, \mathrm{id}) = B \circ (1, \mathrm{id}) \circ \frac{\mathrm{id}}{I_{a,h}}\,.$$

A valós választás lehetőségének a feltétele az (1.11) feladatseregre

$$\forall\, p \in X^* \ \text{ árvektor esetén } \ \exists\, b_p \in M, \quad \text{hogy} \quad \langle p, b_p\rangle < 1\,.$$

Az alábbiakban az (1.11) feladatsereg $B \circ (1, \mathrm{id}) : X^* \to \mathcal{P}(X)$ költségvetési leképezésének a Vietoris-folytonosságát az (1.2) feladatsereg $B(1,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ költségvetési leképezésének a Vietoris-folytonosságához hasonlóan, az 1.6. állítás bizonyításának némi módosításával látjuk be.

1.36 Állítás.
Ha az (1.11) feladatseregre fennáll a valós választás lehetőségének a feltétele, azaz

$$\forall\, p \in X^* \ \textit{ árvektor esetén } \ \exists\, b_p \in M, \quad \textit{hogy} \quad \langle p, b_p\rangle < 1\,,$$

akkor a $B \circ (1, \mathrm{id}) : X^* \to \mathcal{P}(X)$ feltételi leképezése

(1) nemüres, konvex, kompakt értékű,

(2) Hausdorff-folytonos,

(3) Vietoris-folytonos leképezés.

Bizonyítás.
(1) Legyen $p_0 \in \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges adott. A $B(1,p_0)$ halmaz nemüres, mert $b_{p_0} \in B(1,p_0)$ valamint nyilván konvex és kompakt.

(2) Ezt több kisebb állítás segítségével látjuk be. Legyen $p_0 \in \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges adott. Mivel $\exists\, \alpha > 0$, hogy $\langle p_0, b_{p_0}\rangle < 1-\alpha$, azért $\exists\, \delta_1 > 0$ sugarú $\mathcal{B}(p_0,\delta_1)$ gömb, hogy $\forall\, p \in \mathcal{B}(p_0,\delta_1)$ esetén $\langle p, b_{p_0}\rangle < 1-\alpha$.
Jelölje

$$\mathcal{K} := \max_{x\in M} \|x\| + \mathrm{diam} M\,.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Legyen $0 < \lambda < \frac{\varepsilon}{\mathcal{K}}$. Mivel

$$\lim_{\delta\to 0+} \left[\, \lambda(1-\alpha) + (1-\lambda)(1+\delta)\,\right] = \lambda(1-\alpha) + (1-\lambda) = 1 - \lambda\alpha < 1\,,$$

azért $\exists\, \delta_2 > 0$, hogy

$$\lambda(1-\alpha) + (1-\lambda)(1+\delta_2) < 1\,.$$

Legyen $\delta_3 := \min\{\delta_1, \frac{\delta_2}{2\mathcal{K}}\}$. Látható, hogy $\forall\, p_1, p_2 \in \mathcal{B}(p_0,\delta_3)$ esetén $\forall\, x \in M$ mellett

$$\langle p_2, x\rangle \leq \langle p_1, x\rangle + \delta_2\,.$$

Ugyanis:

$$|\langle p_2, x\rangle - \langle p_1, x\rangle| \leq |\langle p_2 - p_1, x\rangle| \leq \|p_2 - p_1\| \cdot \|x\| \leq 2\delta_3\mathcal{K} \leq 2\frac{\delta_2}{2\mathcal{K}}\mathcal{K} = \delta_2\,.$$

Legyenek $p_1, p_2 \in \mathcal{B}(p_0,\delta_3)$ tetszőlegesek.
Megmutatjuk, hogy $\forall\, x_1 \in B(1,p_1)$ esetén az

$$x_2 := \lambda \cdot b_{p_0} + (1-\lambda) \cdot x_1$$

vektorra

(a) $x_2 \in B(1, p_2)$,

(b) $\|x_2 - x_1\| < \varepsilon$.

Ugyanis:
(a)

$$\begin{aligned}
\langle p_2, x_2 \rangle &= \langle p_2, \lambda \cdot b_{p_0} + (1-\lambda) \cdot x_1 \rangle \\
&= \lambda \cdot \langle p_2, b_{p_0} \rangle + (1-\lambda) \cdot \langle p_2, x_1 \rangle \\
&\leq \lambda(1-\alpha) + (1-\lambda)(\langle p_1, x_1 \rangle + \delta_2) \\
&\leq \lambda(1-\alpha) + (1-\lambda)(1+\delta_2) < 1,
\end{aligned}$$

azaz $\langle p_2, x_2 \rangle < 1$. Mivel az M halmaz konvex, azért $x_2 \in M$ is, ezért $x_2 \in B(1, p_2)$.

(b)

$$\begin{aligned}
\|x_2 - x_1\| &= \|\lambda \cdot b_{p_0} + (1-\lambda) \cdot x_1 - x_1\| \\
&= \|x_1 - \lambda \cdot (b_{p_0} - x_1) - x_1\| = \lambda \|b_{p_0} - x_1\| \\
&\leq \lambda \cdot \operatorname{diam} M < \frac{\varepsilon}{\mathcal{K}} \cdot \operatorname{diam} M < \varepsilon
\end{aligned}$$

Ezek szerint $\forall\, x_1 \in B(1.p_1)$ esetén

$$x_1 \in \mathcal{B}(B(1, p_2), \varepsilon),$$

így

$$B(1, p_1) \subset \mathcal{B}(B(1, p_2), \varepsilon).$$

A p_1 és p_2 szerepét felcserélve adódik, hogy

$$B(1, p_2) \subset \mathcal{B}(B(1, p_1), \varepsilon).$$

Ezért $\forall\, p_1, p_2 \in \mathcal{B}(p_0, \delta_3)$ esetén

$$d_H(B(1, p_1), B(1, p_2)) \leq \varepsilon,$$

ami $p_2 = p_0$ választással azt jelenti, hogy a $B \circ (1, \mathrm{id})$ leképezés p_0-ban Hausdorff-folytonos.

(3) Mivel a $B \circ (1, \mathrm{id}) : X^* \to \mathcal{P}(X)$ feltételi leképezés (1) szerint kompakt értékű, ugyanakkor (2) szerint pedig Hausdorff-folytonos, azért a Függelékben található 7.22. állítás alapján Vietoris-folytonos. □

1.37 Megjegyzés.
Az 1.6. állításban $\forall\, p \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén a $b_p := \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n_+$ biztosítja a valós választás lehetősége feltételének teljesülését, és a költségvetési halmaz nemürességét, így az 1.6. állítás az 1.36. állításból következik.

1.38 Állítás. (az általánosított feltételi leképezés tulajdonságai)
Legyen $a \in X$ egy adott kezdőkészlet és $h : X^* \to \mathbb{R}$ egy folytonos részesedési függvény, valamint tegyük fel, hogy az (1.10) feladatseregre fennáll a valós választás lehetőségének a feltétele, azaz

$$\forall\, p \in X^* \;\; \textit{árvektor esetén} \;\; \exists\, b_p \in M, \;\; \textit{hogy} \;\; \langle p, b_p \rangle < I_{a,h}(p) \; (= \langle p, a \rangle + h(p)),$$

akkor a $B \circ (I_{a,h}, \mathrm{id}) : X^* \to \mathcal{P}(X)$ feltételi leképezése

(1) nemüres, konvex, kompakt értékű,

(2) lokálisan Lipschitz-folytonos a Hausdorff-metrikára nézve, így Hausdorff-folytonos,

(3) Vietoris-folytonos leképezés.

Bizonyítás.
Láttuk, hogy

$$B \circ (I_{a,h}, \mathrm{id}) = B \circ (1, \mathrm{id}) \circ \frac{\mathrm{id}}{I_{a,h}}\,.$$

Mivel az $\frac{\mathrm{id}}{I_{a,h}}$ függvény Lipschitz-folytonos, azért a $B(I_{a,h}, .)$ halmazértékű leképezés az előző 1.36. állítás (1) alapján nemüres, konvex, kompakt értékű, (2) alapján lokálisan Lipschitz-Hausdorff-folytonos illetve Hausdorff-folytonos, (3) alapján Vietoris-folytonos. □

2. Fejezet

A költségminimalizálási feladat

Másodikként a költségminimalizálási feladatot, a Hicks-féle megközelítést tárgyaljuk. A bevezetésben is említettük, hogy ennek a tárgyalása a haszonmaximalizálási feladatéval párhuzamosan végezhető. Az eredmények is hasonlók, például e feladatnak a megoldása során is eljutunk — szintén a megfelelő szükséges közgazdasági feltételek fennállása mellet — a határhaszonelmélet sarkalatos tételéhez, mely szerint a helyettesítési határarányok megegyeznek az árarányokkal, amiből pedig az következik, hogy a fogyasztáselméletben a jószágok árai a határhasznukkal, a termeléselméletben a határtermékükkel egyenlők. Legfontosabb vizsgálati cél most is a megoldásoknak a feladat paramétereitől való függésének, azaz a keresleti leképezés tulajdonságainak a feltárása. Ehhez be kell vezetnünk a Hicks-féle feladat értékfüggvényét is, amit kiadási függvénynek szoktak nevezni. Ennek a függvénynek, valamint a feladat feltételi leképezésének a tulajdonságai alapján tudjuk a keresleti leképezést elemezni.

Ebben a fejezetben ezen terület állításait gondoljuk újra, ezt is elsősorban Diewert (1974) [14], Diewert (1982) [15], Diewert (1988) [16], Blackorby - Diewert (1979) [3] dolgozatai valamint Mas-Colell - Whinston - Green (1995) [32] monográfiája alapján. A célunk elsősorban most is a terület minél világosabb átláthatósága, és az ismert eredmények lehetőség szerinti élesítése volt. Most is úgy igyekeztük elrendezni az állításokat, megfogalmazni a bizonyításokat, hogy jól látszódjon, miszerint egyrészt a kapott leképezések (feltételi leképezés, kiadási függvény, keresleti leképezés) tulajdonságai a költségminimalizálási feladat függvényeinek milyen tulajdonságaiból következnek, másrészt mi a felhasznált matematikai eszközök szerepe.

Amenyiben az általános egyensúlyelméleti modellben a költségminimalizálási feladatot használjuk, és az egyensúly létezését a szokásos módon a Kakutani-féle fixponttétel segítségével bizonyítjuk, akkor szükséges a keresleti leképezés felső-Vietoris-folytonosságát vagy felső-zárt-konvergencia-folytonosságát igazolni. A fejezetben sikerült igazolnunk a feltételi leképezésnek a felső-Vietoris-folytonosságát a szokásosan ismert zárt gráfúsággal szemben. A feltételi leképezés Vietoris-folytonossága most nem bizonyítható, ezért a keresleti leképezés felső-Vietoris-folytonossága — ami a fejezet legfontosabb eredménye — a Berge-tétel egy eléggé árnyaltan megfogalmazott alakjának a felhasználásával igazolható.

A terület igen érdekes és fontos eredménye a Shephard-féle azonosság, amely a kiadási függvény és a keresleti leképezés között teremt kapcsolatot. Ez az állítás is felveti az értékfüggvény deriválhatóságának a kérdését. Most azonban a kiadási függvény az árak szerint konkáv a hasznossági függvény felülről félig folytonossága mellett, ezért ekkor a konvex függvényekre bevezetett szubderivált használatával megfogalmazható a Shephard-féle azonosság.

Végül kiemelnénk, hogy ebben a fejezetben is látszólag csupán egy speciális szélsőértékfeladatot tanulmányozunk, miközben nagy hangsúlyt kap az, hogy az egyes fogalmak tulajdonságai milyen matematikai eszközök alkalmazásán múlnak. A háttérben persze most is az a motivációnk, hogy e szélsőértékfeladat, illetve a bennük szereplő fogalmak és ezek tulajdonságai gazdasági interpretációinak a mikroökonómiában alapvető a szerepük.

2.1 Jelölések, definíciók

Legyen $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ adott függvény. Tekintsük a következő, $(\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpárral paraméterezett feladatsereget:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle p, x\rangle \to \min \\ u(x) \geq \nu \ \text{ és } \ x \in \mathbb{R}^n_+ \end{array} \right. \tag{2.1}$$

2.1 Definíció.
A (2.1) feladatsereg **feltételi leképezésének** nevezzük azt a $H : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ halmazértékű leképezést, amelyre $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\begin{aligned} H(\nu, p) &= \{x \in \mathbb{R}^n_+ \ : \ u(x) \geq \nu\} \\ &= u^{-1}[\nu, \infty)\,. \end{aligned}$$

A $H(\nu, .) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ halmazértékű leképezés nyilván konstans. A p változót ennek ellenére fel kell tüntetni, mert a későbbiekben a feltételi leképezésnek, mint kétváltozós leképezésnek a folytonosságára lesz szükség.

Ennek a segítségével a (2.1) feladatsereg a következő ekvivalens alakba írható:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle p, x\rangle \to \min \\ x \in H(\nu, p) \end{array} \right.$$

2.2 Definíció.
A (2.1) feladat **értékfüggvényének** nevezzük azt az $u^\wedge : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényt, amelyre $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\begin{aligned} u^\wedge(\nu, p) &:= \inf_{H(\nu,p)} \langle p, .\rangle \\ &= \inf\{\langle p, x\rangle \ : \ u(x) \geq \nu \text{ és } x \in \mathbb{R}^n_+\}\,. \end{aligned}$$

2.3 Definíció.
A (2.1) feladatsereg **megoldásleképezésének** nevezzük azt az $\mathcal{X} : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ halmazértékű leképezést, amelyre $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\nu, p) &:= \operatorname*{argmin}_{H(\nu,p)} \langle p, .\rangle \\ &= \{x \in H(\nu, p) \ : \ \forall\ z \in H(\nu, p) \ \text{ esetén } \ \langle p, x\rangle \leq \langle p, z\rangle\}, \end{aligned}$$

Amennyiben $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén $\mathcal{X}(\nu, p) \neq \emptyset$, akkor az $\mathcal{X}$ halmazértékű leképezésnek létezik egy $\chi : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ szelekciója, amit a (2.1) feladatsereg egy **megoldásfüggvényének** nevezzük.

2.4 Megjegyzés.
Az értékfüggvény segítségével a megoldásleképezés a következőképpen is megadható: $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpár esetén

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\nu, p) &= \{x \in H(\nu, p) : \langle p, x\rangle = u^\wedge(\nu, p)\} \\ &= \langle p, .\rangle^{-1}(\{u^\wedge(\nu, p)\}) \cap H(\nu, p)\,. \end{aligned}$$

A megoldásleképezés segítségével az értékfüggvény a következőképpen is megadható: Ha valamely $(\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpár esetén $\exists\ x \in \mathcal{X}(\nu, p)$ megoldás, akkor

$$u^\wedge(\nu, p) = \langle p, x \rangle \,.$$

Ezért, ha létezik $\chi : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ megoldásfüggvénye a feladatseregnek, akkor $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$u^\wedge(\nu, p) = \langle p, \chi(\nu, p) \rangle \,, \quad \text{így} \quad u^\wedge = \langle ., . \rangle \circ (\mathrm{Pr}_2, \chi) \,.$$

2.1.1 Mikroökonómiai interpretáció

Jóllehet a fenti szélsőértékfeladat csupán matematikai szempontból is érdeklődésre tarthatna számot, számunkra ez a feladat nem ezért érdekes, hanem ugyanúgy, mint a haszonmaximalizálási feladattal, e feladattal is leírható — megfelelő elvonatkoztatás mellett — egy gazdaság szereplőinek a viselkedése mind a fogyasztás- mind a termeléselméletben.

A fogyasztáselméletbeli interpretáció

Tekintsünk egy gazdaságot, amelyben tegyük föl ugyanazokat a feltételeket, mint az 1.1.1. alfejezetben, a haszonmaximalizálási feladat fogyasztáselméleti interpretációjában. Röviden, tegyük fel, hogy egy fogyasztónak van egy fogyasztási halmaza, ez legyen $\mathbb{R}^n_+$. Jelölje $x \in \mathbb{R}^n_+$ a fogyasztási javaknak, $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ pedig ezen fogyasztási javak árainak vektorát. A fogyasztó rendelkezik egy $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ hasznossági függvénnyel.

A fogyasztó a fogyasztási javainak vektorát azonban ebben az esetben másként határozza meg, nevezetesen minimalizálja a $\langle p, x \rangle$ költségét, miközben legalább ν megkívánt hasznossági szintet ér el, azaz a viselkedését a (2.1) feladat írja le. Ebben az esetben

- a (2.1) feladatot **költségminimalizálási feladatnak**,
- az $u^\wedge : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvényt **kiadási-függvénynek**,
- $\forall\, p$ esetén a $\partial_1 u^\wedge(., p) : \mathcal{R}(u) \to \overline{\mathbb{R}}$ deriváltfüggvényt (feltéve, hogy ez létezik) határköltségfüggvénynek,
- az $\mathcal{X} : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ megoldásleképezést **Hicks-féle** vagy **kompenzált keresleti leképezésnek** nevezzük.

A kiadási függvénynek a szokásos jelölése $e : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \overline{\mathbb{R}}$, az eltérő jelöléssel azt akartuk hangsúlyozni, hogy az $u^\wedge$ kiadási függvény az u hasznossági függvényhez tartozik.

A termeléselméletbeli interpretáció

Tekintsünk egy gazdaságot, amelyben tegyük föl ugyanazokat a feltételeket, mint a haszonmaximalizálási feladat termeléselméleti interpretációjában. Röviden, tegyük fel, hogy a termelő n input felhasználásával egyetlen outputot állít elő. A technológiát egy u termelési függvény írja le, ami azt jelenti, hogy egy adott periódus alatt a termelési tényezők n-dimenziós x inputvektorának a felhasználásával legfeljebb $u(x)$ mennyiségű termék állítható elő outputként. A termelő úgy határozza meg a termelési tényezők inputvektorát, hogy minimalizálja a $\langle p, x \rangle$ költségét, miközben legalább ν mennyiségű terméket termel, azaz a viselkedését a (2.1) feladat írja le. Ebben az esetben

- a (2.1) feladatot **költségminimalizálási feladatnak**,
- az $u^\wedge : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvényt **feltételes költségfüggvénynek**,
- $\forall\, p$ esetén a $\partial_1 u^\wedge(., p) : \mathcal{R}(u) \to \overline{\mathbb{R}}$ deriváltfüggvényt (feltéve, hogy ez létezik) határköltségfüggvénynek,
- az $\mathcal{X} : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ megoldásleképezést **feltételes keresleti leképezésnek** nevezzük.

2.2 A feltételi leképezés tulajdonságai

Ez az alfejezet a Függeléknek a halmazértékű leképezések folytonosságával foglalkozó pontjára támaszkodik.

2.5 Állítás. (a feltételi leképezés tulajdonságai)
A (2.1) feladatsereg $H : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ feltételi (költségvetési) leképezése

(1) nemüres értékű;

(2) ha az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvény kvázikonkáv, akkor konvex értékű;

(3) ha az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvénynek nincs lokális maximuma (például szigorúan monoton növekvő a pozitív ortánssal megadott rendezésre nézve), akkor alsó-Vietoris-folytonos;

(4) ha az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvény felülről félig folytonos, akkor és csak akkor zárt gráfú.

Bizonyítás.
(1) $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén nyilván $\exists\ x \in \mathbb{R}^n_+$, hogy $u(x) = \nu$, ekkor $x \in H(\nu, p)$.

(2) Az u kvázikonkávitása pontosan az $u^{-1}[\nu, \infty)$ szinthalmaz konvexitását jelenti.

(3) Legyen $(\nu_0, p_0) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges adott. Legyen $G \subset \mathbb{R}^n_+$ olyan nyílt halmaz, amelyre

$$H(\nu_0, p_0) \cap G \neq \emptyset\,,$$

ekkor $\exists\ x \in H(\nu_0, p_0) \cap G$, azaz $u(x) \geq \nu_0$ és $x \in G$. Mivel az $u|_G$-nek x-ben nincs maximuma, azért $\exists\ y \in G$, hogy $u(x) < u(y)$. Ekkor az

$$U := (0, u(y))$$

halmaz környezete ν_0-nak, továbbá $\forall\ \nu \in U$ esetén $u(y) > \nu_0$, ezért $y \in H(\nu, p_0)$, ezért $y \in H(\nu, p_0) \cap G$, így $H(\nu, p_0) \cap G \neq \emptyset$, azaz $\forall\ \nu \in U$ esetén $H(\nu, p_0) \cap G \neq \emptyset$, azaz a $H(., p)$ leképezés alsó-Vietoris-folytonos ν_0-ban. Mivel a H leképezés p-ben konstans, azért a H leképezés alsó-Vietoris-folytonos (ν_0, p_0)-ban, mivel (ν_0, p_0) tetszőleges, azért az egész értelmezési tartományon.

(4) Szükségesség: Legyen az u felülről félig folytonos, legyen (ν_n, p_n, x_n) graph H-beli sorozat, azaz $\forall\ n$ esetén $u(x_n) \geq \nu_n$, tegyük fel, hogy $(\nu_n, p_n, x_n) \to (\nu, p, x)$, ekkor

$$u(x) = u(\lim x_n) \geq \limsup u(x_n) \geq \lim \nu_n = \nu\,, \text{ azaz}$$

$$x \in H(\nu, p)\,, \text{ azaz } (\nu, p, x) \in \operatorname{graph} H\,.$$

Elégségesség: Mivel a H zárt gráfú, azért zárt értékű is, azaz az $u^{-1}[\nu, \infty)$ halmazok zártak, azaz az u felülről félig folytonos. □

2.6 Megjegyzés.
A H feltételi leképezés nem kompakt értékű, pedig ez biztosítaná (a $\langle p, .\rangle$ folytonosságával együtt) a megoldás létezését. Továbbá H zárt gráfú, így felső-zárt-konvergencia-folytonos is. Ebből azonban nem következik a felső-Vietoris folytonossága, amire szükségünk lenne a megoldásleképezés felső-Vietoris folytonosságának a bizonyításához. Ezt a problémát a következő állításokkal hidaljuk át.

2.7 Állítás.
$\forall\ (\nu_0, p_0) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén $\exists\ x_0 \in H(\nu_0, p_0)$, $\exists\ U \times B(p_0, \delta)$ környezet és $\exists\ \mathcal{K} > 0$ szám hogy $\forall\ (\nu, p) \in U \times B(p_0, \delta)$ esetén

1. $x_0 \in H(\nu, p) \cap B(\mathbf{0}, \mathcal{K})$;
2. $\mathcal{X}(\nu, p) \subset H(\nu, p) \cap B(\mathbf{0}, \mathcal{K})$.

Bizonyítás.
1. Legyen $(\nu_0, p_0) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges adott.
Ekkor $\exists\ \alpha > 0$, hogy $\forall\ k = 1, \ldots, n$ esetén $p_k^0 \geq \alpha$, ezért $\exists\ \delta > 0$, hogy $\forall\ p \in B(p_0, \delta)$ mellett $\forall\ k = 1, \ldots, n$ esetén $p_k \geq \frac{\alpha}{2}$.

A következő két eset lehetséges:
I. eset: $\exists\ x_0 \in \mathbb{R}^n_+$, hogy $u(x_0) > \nu_0$. Ebben az esetben legyen $U := (-\infty, u(x_0))$, ez környezete ν_0-nak.
II. eset: $\nu_0 = \max \mathcal{R}(u)$, ekkor $\exists\ x_0 \in \mathbb{R}^n_+$, hogy $u(x_0) = \nu_0$. Ebben az esetben legyen $U := (-\infty, u(x_0)]$, ez $\mathcal{R}(u)$-beli környezete ν_0-nak. Legyen

$$\mathcal{K} := \frac{2}{\alpha}[(\|p_0\| + \delta) + 1] \cdot \|x_0\|,$$

és

$$(\nu, p) \in U \times B(p_0, \delta)$$

tetszőleges. Ekkor egyrészt az U választása miatt $x_0 \in H(\nu, p)$. Másrészt mivel $\mathcal{K} > 1$, azért $\|x_0\| \leq \mathcal{K} \cdot \|x_0\|$, ezért $x_0 \in H(\nu, p) \cap B(\mathbf{0}, \mathcal{K})$.

2. Legyen $x \in \mathcal{X}(\nu, p)$ tetszőleges, ekkor

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{2}\|x\|_1 &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha}{2} x_k \leq \sum_{k=1}^{n} p_k x_k = \langle p, x\rangle \quad (\text{mivel } x_0 \in H(\nu, p)\text{, azért}) \\ &\leq \langle p, x_0\rangle \leq \|p\| \cdot \|x_0\| \leq (\|p_0\| + \delta) \cdot \|x_0\|,\end{aligned}$$

ezért

$$\|x\| \leq \|x\|_1 \leq \frac{2}{\alpha}(\|p_0\| + \delta)\|x_0\| < \frac{2}{\alpha}[(\|p_0\| + \delta) + 1] \cdot \|x_0\| = \mathcal{K},$$

így

$$\mathcal{X}(\nu, p) \subset B(\mathbf{0}, \mathcal{K}), \text{ ezért}$$
$$\mathcal{X}(\nu, p) \subset H(\nu, p) \cap B(\mathbf{0}, \mathcal{K}).$$

□

2.8 Megjegyzés.
Legyen a 2.7. állítás jelölései mellett $\tilde{H} : U \times B(p_0, \delta) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ az a halmazértékű leképezés, amelyre $\forall\ (\nu, p) \in U \times B(p_0, \delta)$ esetén

$$\tilde{H}(\nu, p) := H(\nu, p) \cap \bar{B}(\mathbf{0}, \mathcal{K}).$$

Továbbá tekintsük a következő, $(\nu, p) \in U \times B(p_0, \delta)$ paraméterpárral paraméterezett feladatsereget:

$$\begin{cases} \langle p, x\rangle \to \min \\ x \in \tilde{H}(\nu, p) \end{cases} \tag{2.2}$$

Jelölje ennek a (2.2) feladatseregnek az értékfüggvényét $\tilde{u}^\wedge : U \times B(p_0, \delta) \to \overline{\mathbb{R}}$, a megoldásleképezését $\tilde{\mathcal{X}} : U \times B(p_0, \delta) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$, azaz amelyre $\forall\ (\nu, p) \in U \times B(p_0, \delta)$ esetén

$$\tilde{\mathcal{X}}(\nu, p) := \operatorname*{argmax}_{\tilde{H}(\nu,p)} \langle p, x \rangle .$$

2.9 Állítás. (a módosított feltételi leképezés felső-Vietoris-folytonossága)
Ha az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvény felülről félig folytonos, akkor $\tilde{H} : U \times B(p_0, \delta) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ kompakt értékű, felső-Vietoris-folytonos leképezés.

BIZONYÍTÁS.
Mivel az u felülről félig folytonos, azért a 2.5. állítás (4) szerint $\tilde{H}$ zárt gráfú. Mivel $\tilde{H}$ zárt gráfú, és értékei benne vannak a $\bar{B}(\mathbf{0}, \mathcal{K})$ kompakt halmazban, azért egyrészt kompakt értékű, másrészt a függelékben található 7.27. állítás szerint felső-Vietoris-folytonos. □

2.10 Állítás.
A (2.1) és a (2.2) feladatsereg ekvivalens a $U \times B(p_0, \delta)$ halmazon, azaz $\forall\ (\nu, p) \in U \times B(p_0, \delta)$ esetén

$$\mathcal{X}(\nu, p) = \tilde{\mathcal{X}}(\nu, p)\,, \quad \text{így} \quad u^\wedge(\nu, p) = \tilde{u}^\wedge(\nu, p)\,.$$

BIZONYÍTÁS.
Legyen $(\nu, p) \in U \times B(p_0, \delta)$ tetszőleges.
Egyrészt legyen $x \in \mathcal{X}(\nu, p)$ tetszőleges. Ekkor $\forall\, z \in H(\nu, p)$ esetén $\langle p, x \rangle \le \langle p, z \rangle$,

mivel $\tilde{H}(\nu, p) \subset H(\nu, p)$, azért $\forall\ z \in \tilde{H}(\nu, p)$ esetén $\langle p, x \rangle \le \langle p, z \rangle$,

mivel $\mathcal{X}(\nu, p) \subset \tilde{H}(\nu, p)$, azért $x \in \tilde{H}(\nu, p)$,

így $x \in \tilde{\mathcal{X}}(\nu, p)$.

Másrészt legyen $x \in \tilde{\mathcal{X}}(\nu, p)$ tetszőleges. Ekkor $\forall\ z \in \tilde{H}(\nu, p)$ esetén $\langle p, x \rangle \le \langle p, z \rangle$. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists\ z \in H(\nu, p)$, hogy $\langle p, z \rangle < \langle p, x \rangle$.
A 2.7. állításban szereplő x_0 vektorra $x_0 \in H(\nu, p) \cap B(\mathbf{0}, \mathcal{K}) \subset \tilde{H}(\nu, p)$, ezért $\langle p, x \rangle \le \langle p, x_0 \rangle$, így a Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség szerint

$$\langle p, z \rangle < \langle p, x_0 \rangle \le \|p\| \cdot \|x_0\| \le (\|p_0\| + \delta) \cdot \|x_0\|\,.$$

Valamint

$$\frac{\alpha}{2}\|z\|_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha}{2}{}_k \le \sum_{k=1}^{n} p_k z_k = \langle p, z \rangle\,,$$

ezért

$$\frac{\alpha}{2}\|z\|_1 < (\|p_0\| + \delta) \cdot \|x_0\|\,,$$

így

$$\|z\| \le \|z\|_1 < \frac{2}{\alpha}(\|p_0\| + \delta)\|x_0\| < \frac{2}{\alpha}[(\|p_0\| + \delta) + 1] \cdot \|x_0\| = \mathcal{K}\,,$$

ezért

$$z \in \tilde{H}(\nu, p) = H(\nu, p) \cap \bar{B}(\mathbf{0}, \mathcal{K})\,,$$

ezért $\langle p, x \rangle \le \langle p, z \rangle$, ami ellentmondás. □

2.3 Az értékfüggvény tulajdonságai

Ha csupán azt tesszük is fel, hogy létezik a (2.1) feladatseregnek megoldása, azaz az u függvény felülről félig folytonos, az értékfüggvénye már akkor is számos szép tulajdonsággal rendelkezik.

2.11 **Állítás. (az értékfüggvény tulajdonságai)**
Ha az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvény felülről félig folytonos (azaz az $u^{-1}[\nu, \infty) \subset \mathbb{R}^n_+$ halmaz zárt), akkor

1. *az $u^\wedge : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvény*
   (1) *nemnegatív,*
   (2) *véges értékű,*
   (3) *alulról félig folytonos,*
2. *$\forall\, p \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén az $u^\wedge(., p) : \mathcal{R}(u) \to \mathbb{R}$ függvény*
   (1) *monoton növekedő,*
   (2) *ha $0 \in \mathcal{R}(u)$, akkor $u^\wedge(0, p) = 0$,*
   (3) *ha $\sup u = \infty$, akkor $\lim_\infty u^\wedge(., p) = \infty$,*
3. *$\forall\, \nu \in \mathcal{R}(u)$ esetén az $u^\wedge(\nu, .) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ függvény*
   (1) *pozitív homogén,*
   (2) *konkáv,*
   (3) *monoton növekedő,*
   (4) *folytonos.*

Bizonyítás.
1. Legyen $(\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges.

(1) Mivel $u^\wedge(\nu, p) = \inf_{H(\nu,p)} \langle p, . \rangle$, ahol $H(\nu, p) = \mathbb{R}^n_+ \cap u^{-1}[\nu, \infty)$, azért

$$u^\wedge(\nu, p) \geq 0\,.$$

A (2) és (3) bizonyítása előtt emlékeztetünk arra, hogy a 2.10. állítás szerint a $(\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ pontnak $\exists\, U \times B(p, \delta)$ környezete, hogy a (2.1) és a (2.2) feladatsereg ekvivalens az $U \times B(p, \delta)$ halmazon, így az értékfüggvényük is megegyezik ezen a halmazon, azaz

$$u^\wedge|_{U \times B(p,\delta)} = \tilde{u}^\wedge\,.$$

(2) Mivel u felülről félig folytonos, azért a 2.9. állítás szerint a (2.2) feladatsereg $\widetilde{H} : U \times B(p, \delta) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ feltételi leképezése kompakt értékű, ezért

$$u^\wedge(\nu, p) = \tilde{u}^\wedge(\nu, p) \in \mathbb{R}\,,$$

Mivel $(\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges, azért az $u^\wedge : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ értékfüggvény véges.

(3) Mivel u felülről félig folytonos, azért a 2.9. állítás szerint a (2.2) feladatsereg $\widetilde{H} : U \times B(p, \delta) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ feltételi leképezése kompakt értékű és felső-Vietoris-folytonos leképezés, ezért a 7.31. Berge-tétel 1.b szerint az

$$\tilde{u}^\wedge = u^\wedge|_{U \times B(p_0,\delta)} : U \times B(p, \delta) \to \mathbb{R}$$

értékfüggvény, mivel minimumot veszünk, alulról félig folytonos.
Ezért az $u^\wedge$ értékfüggvény alulról félig folytonos a (ν,p) pontban, mivel $(\nu,p)\in\mathcal{R}(u)\times\mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges volt, azért az $u^\wedge:\mathcal{R}(u)\times\mathbb{R}^n_{++}\to\mathbb{R}$ értékfüggvény alulról félig folytonos az egész értelmezési tartományán.

2. Legyen $p\in\mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges adott.
(1) Ha $\nu_1\le\nu_2$, akkor $[\nu_1,\infty)\supseteq[\nu_2,\infty)$, így $u^{-1}[\nu_1,\infty)\supseteq u^{-1}[\nu_2,\infty)$, így $H(\nu_1,p)\supseteq H(\nu_2,p)$ ezért

$$\inf_{H(\nu_1,p)}\langle p,.\rangle\le\inf_{H(\nu_2,p)}\langle p,.\rangle\,,$$

azaz

$$u^\wedge(\nu_1,p)\le u^\wedge(\nu_2,p)\,.$$

(2) Egyrészt a fentiek szerint $u^\wedge(0,p)\ge0$, másészt $\mathbf{0}\in H(0,p)$, ezért

$$u^\wedge(0,p)\le\langle p,\mathbf{0}\rangle=0\,.$$

(3) Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists\,\nu_k\to\infty$ sorozat, és $\exists\,\mathcal{K}>0$, hogy $\forall\,k\in\mathbb{N}$ esetén $u^\wedge(\nu_k,p)<\mathcal{K}$. Ekkor $\forall\,k$ esetén $\exists\,x_k\in H(\nu_k,p)$, amelyre $\langle p,x_k\rangle\le\mathcal{K}$. Mivel $p>\mathbf{0}$, azért az (x_k) sorozat korlátos, (ugyanis $\forall\,k$ és $j=1,\dots,n$ esetén $x_k^{(j)}<\mathcal{K}$). Mivel az u felülről félig folytonos, azért az $(u(x_k))$ sorozat korlátos, ugyanakkor $u(x_k)\ge\nu_k$ és $\nu_k\to\infty$.

3. Legyen $\nu\in\mathcal{R}(u)$ tetszőleges adott. Ekkor a $p\mapsto H(\nu,p)=u^{-1}[\nu,\infty)$ halmazértékű leképezés konstans, jelölje ezért az alábbi bizonyítások során

$$H(\nu,p_0):=u^{-1}[\nu,\infty)$$

ezt a halmazt, ahol $p_0\in\mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges rögzített.
(1) $\forall\,p\in\mathbb{R}^n_{++}$ mellett $\forall\,\lambda>0$ esetén

$$u^\wedge(\nu,\lambda\cdot p)=\inf_{H(\nu,p_0)}\langle\lambda\cdot p,.\rangle=\lambda\cdot\inf_{H(\nu,p_0)}\langle p,.\rangle=\lambda\cdot u^\wedge(\nu,p)\,.$$

(2) $u^\wedge(\nu,.)=\sigma^\flat(.|H(\nu,p_0))$, és ismert, hogy az alsó támaszfüggvény konkáv, mert lineáris függvények alsó burkolója.

Részletesen: Legyenek $p_1,p_2\in\mathbb{R}^n_{++},\ \lambda\in[0,1]$, ekkor

$$\begin{aligned}u^\wedge(\nu,\lambda p_1+(1-\lambda)p_2)&=\inf_{H(\nu,p_0)}\langle\lambda p_1+(1-\lambda)p_2,.\rangle\\&\ge\lambda\inf_{H(\nu,p_0)}\langle p_1,.\rangle+(1-\lambda)\inf_{H(\nu,p_0)}\langle p_2,.\rangle\\&=\lambda u^\wedge(\nu,p_1)+\lambda u^\wedge(\nu,p_2)\,.\end{aligned}$$

(3) Mivel $\forall\,(\nu,p)\in\mathcal{R}(u)\times\mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$u^\wedge(\nu,p)=\inf_{H(\nu,p_0)}\langle p,.\rangle\,,$$

azért ha $p_1\le p_2$, akkor

$$u^\wedge(\nu,p_1)\le u^\wedge(\nu,p_2)\,.$$

(4) Mivel konkáv és véges, azért folytonos $\mathbb{R}^n_{++}$-on. □

2.12 Megjegyzés.
Bár a H feltételi leképezés Vietoris folytonosságát nem igazoltuk, mégis bizonyítható az értékfüggvény folytonossága. A nehezebb részét, az alulról félig folytonosságát már beláttuk.

2.13 Állítás.
Ha az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ *függvénynek nincs lokális maximuma (például szigorúan monoton növekvő a pozitív ortánssal megadott rendezésre nézve), akkor az* $u^\wedge : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \overline{\mathbb{R}}$ *értékfüggvény felülről félig folytonos.*

BIZONYÍTÁS.
A 2.5. állítás (3) szerint a H feltételi leképezés alsó-Vietoris-folytonos, ezért a 7.31. Berge-tétel 1.a szerint a $-u^\wedge$ értékfüggvény alulról félig folytonos, ezért az $u^\wedge$ értékfüggvény felülről félig folytonos. □

2.14 Állítás. (az értékfüggvény folytonossága)
Ha az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ *függvény felülről félig folytonos, valamint nincs lokális maximuma (például szigorúan monoton növekvő a pozitív ortánssal megadott rendezésre nézve), akkor az* $u^\wedge : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ *értékfüggvény folytonos.*

BIZONYÍTÁS.
Következik az előző két, a 2.11. 1.(3) és a 2.13. állításból. □

2.4 A megoldásleképezés tulajdonságai

Ez az alfejezet a Függeléknek a Berge-tétellel foglalkozó pontjára támaszkodik. A (2.1) feladatsereg megoldásleképezésének (keresleti leképezésének) a tulajdonságait foglaljuk össze az alábbiakban. Bár a H feltételi leképezés Vietoris folytonosságát nem igazoltuk, a megoldásleképezés felső-Vietoris folytonossága a Berge-tételnek egy, a szokásosnál árnyaltabban megfogalmazott alakjának a segítségével mégis bizonyítható.

2.15 Állítás. (a megoldásleképezés tulajdonságai)
A (2.1) feladatsereg $\mathcal{X} : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ *megoldásleképezése*

(1) $\forall\ \nu \in \mathcal{R}(u)$ *tetszőlegesen rögzített szám mellett az* $\mathcal{X}(\nu, .) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ *halmazértékű leképezés nullad fokban pozitív homogén, azaz* $\forall\ p \in \mathbb{R}^n_{++}$ *mellett* $\forall\ \lambda \geq 0$ *esetén* $\mathcal{X}(\nu, \lambda p) = \mathcal{X}(\nu, p)$;

(2) ha az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ *függvény felülről félig folytonos, akkor nemüres értékű leképezés, azaz* $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ *paraméterpár mellett* $\mathcal{X}(\nu, p) \neq \emptyset$, *azaz* $\exists\ x \in \mathcal{X}(\nu, p)$ *megoldás;*

(3) ha az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ *függvény felülről félig folytonos, valamint, ha nincs lokális maximuma (például szigorúan monoton növekvő), akkor felső-Vietoris-folytonos halmazértékű leképezés;*

(4) ha az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ *függvény kvázikonkáv, akkor konvex értékű leképezés, azaz* $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ *paraméterpár mellett* $\mathcal{X}(\nu, p) \subset \mathbb{R}^n_+$ *konvex halmaz;*

(5) ha az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ *függvény szigorúan kvázikonkáv, akkor* $\mathcal{X}$ *értékei legfeljebb egyelemű halmazok;*

(6) ha az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ *függvény szigorúan kvázikonkáv és felülről félig folytonos, akkor* $\mathcal{X}$ *egyértékű (singleton-értékű), azaz a (2.1) feladatnak* $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ *paraméterpár mellett létezik pontosan egy* $x_{\nu,p}$ *megoldása.*

Bizonyítás.
A bizonyítás során végig legyen $(\nu,p)\in\mathcal{R}(u)\times\mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges pont.

(1) Legyen $\lambda\geq 0$ tetszőleges szám. Mivel a $H(\nu,.)$ feltételi leképezés konstans, azért $H(\nu,\lambda p)=H(\nu,p)$. A $\langle p,.\rangle$ és $\langle\lambda p,.\rangle$ lineáris funkcionálok pedig ezen a halmazon ugyanott veszik fel a maximumukat, ezért $\mathcal{X}(\lambda\nu,\lambda p)=\mathcal{X}(\nu,p)$.

A (2) és (3) bizonyítása előtt emlékeztetünk arra, hogy a 2.10. állítás szerint a $(\nu,p)\in\mathcal{R}(u)\times\mathbb{R}^n_{++}$ pontnak $\exists\ U\times B(p,\delta)$ környezete, hogy a (2.1) és a (2.2) feladatsereg ekvivalens a $U\times B(p,\delta)$ halmazon, azaz

$$\tilde{\mathcal{X}}=\mathcal{X}|_{U\times B(p_0,\delta)}\ \text{ illetve }\ \tilde{u}^\wedge=u^\wedge|_{U\times B(p,\delta)}\,.$$

(2) Mivel u felülről félig folytonos, azért a 2.9. állítás szerint a (2.2) feladatsereg $\tilde{H}:U\times B(p_0,\delta)\to\mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ feltételi leképezése kompakt értékű, ezért

$$\mathcal{X}(\nu,p)=\tilde{\mathcal{X}}(\nu,p)\neq\emptyset\,.$$

(3) Mivel u felülről félig folytonos, azért a 2.9. állítás szerint a (2.2) feladatsereg $\tilde{H}:U\times B(p,\delta)\to\mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ feltételi leképezése kompakt értékű és felső-Vietoris-folytonos.
Mivel az u függvény felülről félig folytonos, valamint nincs lokális maximuma, azért az $u^\wedge:\mathcal{R}(u)\times\mathbb{R}^n_{++}\to\mathbb{R}$ értékfüggvény folytonos, emiatt a (2.2) feladatsereg $\tilde{u}^\wedge=u^\wedge|_{U\times B(p,\delta)}:U\times B(p,\delta)\to\mathbb{R}$ értékfüggvénye is folytonos.
Ezek szerint a 7.31. Berge-tétel 2.a. szerint a

$$\tilde{\mathcal{X}}=\mathcal{X}|_{U\times B(p,\delta)}:U\times B(p,\delta)\to\mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$$

megoldásleképezés felső-Vietoris-folytonos. Ezért az $\mathcal{X}$ megoldásleképezés felső-Vietoris-folytonos a (ν,p) pontban. Mivel a $(\nu,p)\in\mathcal{R}(u)\times\mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpár tetszőleges volt, azért az $\mathcal{X}:\mathcal{R}(u)\times\mathbb{R}^n_{++}\to\mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ megoldásleképezés felső-Vietoris-folytonos az egész értelmezési tartományán.

(4) Legyen $x_1,\,x_2\in\mathcal{X}(\nu,p)$ tetszőleges adott, ekkor $x_1,\,x_2\in H(\nu,p)$ valamint $\forall\ z\in H(\nu,p)$ esetén

$$\langle p,x_1\rangle=\langle p,x_2\rangle\leq\langle p,z\rangle\,.$$

Legyen $\lambda\in[0,1]$ tetszőleges. Mivel (u kvázikonkáv, ezért) $H(\nu,p)$ konvex halmaz, azért

$$\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in H(\nu,p)\,,$$

továbbá látható, hogy

$$\langle p,\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\rangle=\lambda\langle p,x_1\rangle+(1-\lambda)\langle p,x_2\rangle=\langle p,x_1\rangle\,,$$

ezért $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in\mathcal{X}(\nu,p)$.

(4) és (5) Megmutatjuk, hogy az $u:\mathbb{R}^n_+\to\mathbb{R}$ függvény kvázikonkáv, (ebben az esetben $H(\nu,p)=u^{-1}[\nu,\infty)$ konvex halmaz,) akkor az

$$\operatorname*{argmin}_{H(\nu,p)}\langle p,.\rangle$$

halmaz a $H(\nu,p)$ halmaz extremális halmaza.

Ugyanis: Legyen $x\in\operatorname{argmin}_{H(\nu,p)}\langle p,.\rangle$ tetszőleges, ekkor ha $u,v\in H(\nu,p)$ olyan, hogy valamely $\lambda\in(0,1)$ esetén $\lambda u+(1-\lambda)v=x$, akkor

$$\lambda\langle p,u\rangle+(1-\lambda)\langle p,v\rangle=\langle p,\lambda u+(1-\lambda)v\rangle=\langle p,x\rangle=\lambda\langle p,x\rangle+(1-\lambda)\langle p,x\rangle\,,$$

így
$$\lambda(\langle p,u\rangle-\langle p,x\rangle)+(1-\lambda)\langle p,v\rangle-\langle p,x\rangle=0\,,$$
mivel $\langle p,u\rangle-\langle p,x\rangle\geq 0$, és $\langle p,v\rangle-\langle p,x\rangle\geq 0$, azért
$$\langle p,u\rangle=\langle p,x\rangle \text{ és } \langle p,v\rangle=\langle p,x\rangle\,,$$
azaz
$$u\in\operatorname*{argmin}_{H(\nu,p)}\langle p,.\rangle \quad\text{és}\quad v\in\operatorname*{argmin}_{H(\nu,p)}\langle p,.\rangle\,.$$

Ebből következik egyrészt, hogy ha az u kvázikonkáv, azaz a
$$H(\nu,p)=u^{-1}[\nu,\infty)$$
halmaz konvex, akkor az $\operatorname{argmin}_{H(\nu,p)}\langle p,.\rangle$ extremális halmaza is konvex.

Továbbá ha az $u:\mathbb{R}^n_+\to\mathbb{R}$ függvény szigorúan kvázikonkáv, azaz a
$$H(\nu,p)=u^{-1}[\nu,\infty)$$
halmaz szigorúan konvex, akkor a $\operatorname{argmin}_{H(\nu,p)}\langle p,.\rangle$ extremális halmaza singleton.

(6) Következik a (2) és (5)-ből. $\square$

2.16 Állítás.
Ha $\forall\ (\nu,p)\in\mathcal{R}(u)\times\mathbb{R}^n_{++}$ esetén a (2.1) feladatnak létezik pontosan egy megoldása, azaz a megoldásleképezés lényegében egy $\chi:\mathcal{R}(u)\times\mathbb{R}^n_{++}\to\mathbb{R}^n_+$ függvény, valamint ez az $\chi:\mathcal{R}(u)\times\mathbb{R}^n_{++}\to\mathbb{R}^n_+$ megoldásfüggvény differenciálható a második változójában, akkor $\forall\ (\nu,p)\in\mathcal{R}(u)\times\mathbb{R}^n_{++}$ esetén
$$[\partial_2\chi(\mu,p)]\,p=\mathbf{0}\,.$$

Bizonyítás.
Mivel a fenti 2.15. állítás (1) szerint $\forall\ \nu\in\mathcal{R}(u)$ rögzített szám mellett $\chi(\nu,.):\mathbb{R}^n_{++}\to\mathbb{R}^n_+$ nullad fokban pozitív homogén függvény azért az Euler-tétel szerint $\forall\ p\in\mathbb{R}^n_{++}$ esetén
$$[\partial_2\chi(\nu,p)]\,p=0\cdot\chi(\nu,p)=\mathbf{0}\,.$$
$\square$

2.4.1 A nincs extra hasznosság elve

Tekintsük a következő, $(\nu,p)\in\mathcal{R}(u)\times\mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpárral paraméterezett egyenlőség-feltételes feladatsereget:
$$\begin{cases}\langle p,x\rangle\to\min\\ u(x)=\nu \quad\text{és}\quad x\in\mathbb{R}^n_+\end{cases}\tag{2.3}$$

2.17 Definíció.
A (2.1) feladatsereg $\mathcal{X}:\mathcal{R}(u)\times\mathbb{R}^n_{++}\to\mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ megoldásleképezése (a kompenzált keresleti leképezés) egy $(\nu,p)\in\mathcal{R}(u)\times\mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpár mellett kielégíti a **nincs extra hasznosság elvét**, ha $\forall\ x\in\mathcal{X}(\nu,p)$ esetén
$$u(x)=\nu\,.$$

2.18 Megjegyzés.
A nincs extra hasznosság elve matematikai szempontból megfelel a haszonmaximalizálási feladatbeli Walras-törvénynek, ezért Walras-szerű szabálynak, vagy duális Walras-törvénynek is nevezhetnénk, ami viszont közgazdasági szempontból nem lenne szerencsés. Említettük ugyanis, hogy az általános egyensúlyelméletben Walras-törvényen a szigorú értékegyensúly fennállását értik, amiből következik a haszonmaximalizálási feladat esetén az egyensúlyi pontban a feltételi korlát kimerülése. Azonban a költségminimalizálási feladat esetén a megoldásnak ez a tulajdonsága nincs kapcsolatban a Walras-törvénnyel.

2.19 Állítás.
Ha a (2.1) feladatsereg $\mathcal{X}:\mathcal{R}(u)\times\mathbb{R}^n_{++}\to\mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ megoldásleképezése egy $(\nu,p)\in\mathcal{R}(u)\times\mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpár mellett kielégíti a nincs extra hasznosság elvét, akkor a (2.1) feladat $\mathcal{X}(\nu,p)$ megoldáshalmaza, feltéve, hogy nemüres, megegyezik a (2.3) egyenlőség-feltételes feladat megoldáshalmazával. Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy a (2.1) és a (2.3) feladatok ekvivalensek.

Bizonyítás.
Legyen $(\nu,p)\in\mathcal{R}(u)\times\mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges olyan paraméterpár, amely mellett $\mathcal{X}$ kielégíti a nincs extra hasznosság elvét.
Legyen $x_{\nu,p}$ megoldása a (2.1) feladatnak. A nincs extra hasznosság elvének teljesülése miatt $u(x_{\nu,p})=\nu$. Továbbá a (2.3) feladat feltételi halmaza része a (2.1) feladaténak. Így $x_{\nu,p}$ megoldása a (2.3) feladatnak is.
Legyen $x_{\nu,p}$ megoldása a (2.3) feladatnak. Indirekt módon tegyük fel, hogy $x_{\nu,p}$ nem megoldása a (2.1) feladatnak. Mivel $\mathcal{X}(\nu,p)\neq\emptyset$, azért $\exists\, x\in\mathcal{X}(\nu,p)$, amelyre $\langle p,x\rangle<\langle p,x_{\nu,p}\rangle$. A nincs extra hasznosság elvének teljesülése miatt $u(x)=\nu$. Így $x_{\nu,p}$ nem megoldása a (2.3) feladatnak, ami ellentmondás. □

2.20 Definíció.
Legyen $\mathcal{X}_{++}:\mathcal{R}(u)\times\mathbb{R}^n_{++}\to\mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$, a (2.1) feladatsereg belsőponti megoldásleképezése, amelyre $\forall\ (\nu,p)\in\mathcal{R}(u)\times\mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\mathcal{X}_{++}(\nu,p)=\mathcal{X}(\nu,p)\cap\mathbb{R}^n_{++}\,.$$

2.21 Állítás.
Legyen $(\nu,p)\in\mathcal{R}(u)\times\mathbb{R}^n_{++}$ adott paraméterpár. Ha az $u:\mathbb{R}^n_+\to\mathbb{R}$ függvény alulról félig folytonos az $\mathcal{X}_{++}(\nu,p)=\mathcal{X}(\nu,p)\cap\mathbb{R}^n_{++}$ halmazon, akkor a (2.1) feladat $\mathcal{X}_{++}:\mathcal{R}(u)\times\mathbb{R}^n_{++}\to\mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$, belsőponti megoldásleképezésére a $(\nu,p)\in\mathcal{R}(u)\times\mathbb{R}^n_{++}$ pontban teljesül a nincs extra hasznosság elve, így az előző állítás szerint a $(\nu,p)\in\mathcal{R}(u)\times\mathbb{R}^n_{++}$ pontban a (2.1) feladat belsőponti megoldásai megegyeznek a (2.3) egyenlőség-feltételes belsőponti feladat megoldásaival.

Bizonyítás.
Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists\ (\nu,p)\in\mathcal{R}(u)\times\mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpár és $x\in\mathcal{X}_{++}(\nu,p)=\mathcal{X}(\nu,p)\cap\mathbb{R}^n_{++}$ belsőponti megoldás, amelyre

$$u(x)>\nu\,.$$

Mivel u alulról félig folytonos az x pontban, azért $\exists\ \lambda\in(0,1)$, hogy

$$u(\lambda x)\geq\nu\,,\quad \text{és}\quad \lambda x\in\mathbb{R}^n_{++}\,,$$

mivel p és $\lambda x\in\mathbb{R}^n_{++}$, azért

$$\langle p,\lambda x\rangle<\langle p,x\rangle\,,$$

így $x\notin\mathcal{X}_{++}(\nu,p)$, ami ellentmondás. □

2.4.2 A megoldás meghatározása

2.22 Megjegyzés.
1. Legyen $(\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges adott paraméterpár, és tekintsük a (2.3) egyenlőség-feltételes szélsőértékfeladatot. Legyen $x_{\nu,p} \in \mathcal{X}(\nu, p) \cap \mathbb{R}^n_{++}$ egy tetszőleges belsőponti megoldása a feladatnak.

1. A Lagrange-multiplikátortétel feltételei a feladatra:

a $\langle p, . \rangle$ függvény folytonosan differenciálható az $x_{\nu,p}$ pontban, de nyilván ez mindig teljesül,

az u függvény folytonosan differenciálható az $x_{\nu,p}$ pontban,

$\mathcal{R}(u'(x_{\nu,p})) = \mathbb{R}$, azaz $u'(x_{\nu,p})) \neq \mathbf{0}$.

2. Legyenek $i, j = 1, \ldots, n$ tetszőlegesek. Jelölje $B_{i,j} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ az $i \times j$-dik koordinátasík beágyazását $\mathbb{R}^n$-be. Az implicitfüggvénytétel feltételei az $u \circ B_{i,j} : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ függvényre az $x_{\nu,p} \in \mathbb{R}^n_+$ pontban:

folytonosan differenciálható az $x_{\nu,p}$ pont egy környezetében,

$\partial_j u(x_{\nu,p}) \neq 0$.

2.23 Állítás. (a megoldás meghatározása)
1. Legyen $(\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges adott paraméterpár, és tekintsük a (2.1) feladatot. Tegyük fel, hogy az u függvény alulról félig folytonos az $\mathcal{X}_{++}(\nu, p) = \mathcal{X}(\nu, p) \cap \mathbb{R}^n_{++}$ halmazon. Legyen $x_{\nu,p} \in \mathcal{X}(\nu, p) \cap \mathbb{R}^n_{++}$ egy tetszőleges belsőponti megoldása a feladatnak. Tegyük fel továbbá, hogy fennállnak a Lagrange-multiplikátortétel feltételei, azaz u folytonosan differenciálható az $x_{\nu,p} \in \mathbb{R}^n_+$ pontban, és $u'(x_{\nu,p})) \neq \mathbf{0}$. Ekkor $\forall\, i, j = 1, \ldots, n$ mellett

$$\frac{\partial_i u(x_{\nu,p})}{\partial_j u(x_{\nu,p})} = \frac{p_i}{p_j}\,. \tag{2.4}$$

2. Továbbá, tegyük fel még, hogy $\forall\ i, j = 1, \ldots, n$ esetén az $u \circ B_{i,j} : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ függvényre az $x_{\nu,p}$ pontban fennállnak az implicitfüggvénytétel feltételei, azaz folytonosan differenciálható az $x_{\nu,p}$ pont egy környezetében, és $\partial_j u(x_{\nu,p}) \neq 0$. Ekkor $\exists$ olyan U környezete az $x_{\nu,p} \in \mathbb{R}^n_{++}$ pontnak, hogy a megoldás j-dik koordinátája az i-dik koordinátájának a függvényeként áll elő:

$$\xi_i \mapsto \xi_j = g_j(\xi_i)\,, \text{ azaz az}$$

$$U \cap \mathrm{Pr}_{i,j} u^{-1}(u(x_{\nu,p})) \subset \mathbb{R}^2_+$$

reláció függvény, valamint ez differenciálható is, és

$$g_j'(\xi_i) = -\frac{p_i}{p_j}\,. \tag{2.5}$$

Emlékeztetünk rá, hogy a 2.21. állítás szerint ebben az esetben a (2.1) feladat belsőponti megoldásai megegyeznek a (2.3) egyenlőség-feltételes feladat belsőponti megoldásaival.

Bizonyítás.
1. A (2.3) feladat Lagrange-függvénye az az $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\forall\ x \in \mathbb{R}^n_+$, $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \langle p, x \rangle - \lambda \cdot (u(x) - \nu)\,.$$

Ekkor a Lagrange-multiplikátortétel szerint az $x_{\nu,p} \in \mathcal{X}(\nu,p) \cap \mathbb{R}^n_{++}$ belsőponti megoldás esetén, $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$, hogy $\mathcal{L}'(x_{\nu,p},\lambda) = \mathbf{0}$ azaz

$$p - \lambda \cdot u'(x_{\nu,p}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} \quad \text{és} \quad u(x) = \nu\,,$$

amiből $\forall\ i,j = 1,\dots,n$ esetén

$$\frac{\partial_i u(x_{\nu,p})}{\partial_j u(x_{\nu,p})} = \frac{p_i}{p_j}\,.$$

2. Az implicitfüggvénytétel feltételeinek fennálása esetén

$$g_j'(\xi_i) = -\frac{\partial_i u(x_{\nu,p})}{\partial_j u(x_{\nu,p})}\,,$$

ezért a (2.4) szerint

$$g_j'(\xi_i) = -\frac{p_i}{p_j}\,.$$

□

2.24 Megjegyzés. (mikroökonómiai interpretáció)
A fenti állítás teljesen azonos a Marshall-féle koncepció 1.28. állításával. Ugyanazok a mikroökonómiai interpretációi is.

Tegyük fel, hogy a fogyasztó illetve a termelő optimálisan dönt. Az általános egyensúlyelmélet keretei között gondolkozva ez azt jelenti, hogy a fogyasztó illetve a termelő döntése egy egyensúlyi allokáció része. Ebben az esetben a (2.4) összefüggés szerint a parciális határhasznok illetve a parciális határtermékek hányadosa megegyezik az árarányokkal. Még nevezetesebb mikroökonómiai összefüggés az (2.5), amely szerint a helyettesítési határráta abszolútértéke megegyezik az árarányok reciprokával.

Tegyük fel még azt is, hogy az egyik jószágot pénznek tekintjük, azaz a gazdaságban lévő pénz árupénz, és ez az ármérce jószág. Ebben az esetben az (2.4) összefüggésből következik, hogy bármely jószágnak a határhaszna illetve a határterméke éppen a jószág ára. Az (2.5) összefüggésből pedig az következik, hogy bármely jószágnak a pénzre vonatkozó helyettesítési határrátájának az abszolútértéke megegyezik a jószág árával.

2.5 A megoldásfüggvény és az értékfüggvény kapcsolata

Ez az alfejezet a Függeléknek a burkológörbe-tétellel foglalkozó pontjára támaszkodik.

2.25 Megjegyzés.
A 7.82. burkológörbe-tétel II. feltételei a (2.3) egyenlőség-feltételes feladatseregre:

> $\forall\ (\nu,p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén a (2.3) feladatnak létezik pontosan egy megoldása, azaz a megoldásleképezés lényegében egy $\chi : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_{+}$ függvény, valamint ez az $\chi : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_{+}$ megoldásfüggvény differenciálható.
>
> $\forall\ (\nu,p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén a (2.3) feladatra fennállnak a Lagrange-multiplikátortétel feltételei, amik a fenti megjegyzés szerint azok, hogy u folytonosan differenciálható az $x_{\nu,p} = \chi(\nu,p) \in \mathbb{R}^n_{++}$ belsőponti megoldás pontjában, és $u'(x_{\nu,p})) \neq \mathbf{0}$.

Mivel $\chi : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ függvény, azért $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$u^\wedge(\nu, p) = u(\chi(\nu, p)) = (u \circ \chi)(\nu, p)\,,$$

így $u^\wedge = u \circ \chi : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$, mivel u és χ differenciálhatók, azért $u^\wedge$ is az.

2.26 Állítás. (Shephard-féle azonosság I.)
Tekintsük a (2.1) feladatsereget. Tegyük fel, hogy az u függvény alulról félig folytonos, továbbá a megoldásleképezés egy $\chi : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ függvény, amely megoldásfüggvény differenciálható is, valamint $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén u folytonosan differenciálható az $x_{\nu,p} = \chi(\nu, p) \in \mathbb{R}^n_{++}$ belsőponti megoldás pontjában, és $u'(x_{\nu,p})) \neq \mathbf{0}$. Ekkor az $u^\wedge : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ értékfüggvény differenciálható, és $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$(u^\wedge)'(\nu, p) = [\lambda(\nu, p), \chi(\nu, p)]\,, \quad \textit{azaz}$$

$$\partial_1 u^\wedge(\nu, p) = \lambda(\nu, p)\,, \quad \partial_2 u^\wedge(\nu, p) = \chi(\nu, p)\,, \tag{2.6}$$

a második egyenlőség koordinátásan megfogalmazva: $\forall\ k = 1, \ldots, n$ esetén

$$\chi_k(\nu, p) = \partial_{2_k} u^\wedge(\nu, p)\,.$$

Emlékeztetünk rá, hogy a 2.21. állítás szerint ebben az esetben a (2.1) feladat belsőponti megoldásai megegyeznek a (2.3) egyenlőség-feltételes feladat belsőponti megoldásaival.

Bizonyítás.
A (2.3) feladatsereg Lagrange-függvénye az az $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}) \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\forall\ x \in \mathbb{R}^n_+$, $z \in \mathbb{R}$, $(\nu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\mathcal{L}(x, z, (\nu, p)) = \langle p, x\rangle - z \cdot (u(x) - \nu)\,.$$

Az állítás feltételei szerint fennállnak a 7.82. burkológörbe-tétel II. feltételei, ezért $\forall(\nu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$(u^\wedge)'(\nu, p) = \partial_3 \mathcal{L}(\chi(\nu, p), \lambda(\nu, p), (\nu, p))\,,$$

mivel

$$\partial_3 \mathcal{L}(x, z, (\nu, p)) = [z, x] \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n_+\,,$$

azért

$$(u^\wedge)'(\nu, p) = [\lambda(\nu, p), \chi(\nu, p)]\,.$$

□

2.27 Megjegyzés.
Ez az állítás analóg a Marshall-féle megközelítésben szereplő 1.31. Roy-féle azonossággal, azzal a lényeges eltéréssel, hogy ebben a valós paraméter elhagyható. Ez azért is érdekes, mert eddig semmi jel nem utalt arra, hogy a ν paraméter kevésbé fontos lenne, mint a p paraméter.

A következő állítás lényegesen gyengébb feltételek mellett fogalmaz meg a (2.6)-hoz hasonló egyenlőséget.

2.28 Állítás. (Shephard-féle azonosság II.)
Tekintsük a (2.1) feladatsereget. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{X} : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ megoldásleképezése nemüres értékű, azaz $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén $\exists\ x_{\nu,p} \in \mathcal{X}(\nu, p)$ megoldás. (Ez teljesül a 2.15 állítás (2) szerint, ha az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvény felülről félig folytonos.) Ha $\forall\ \nu \in \mathcal{R}(u)$ esetén az $u^\wedge(\nu, .) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ értékfüggvény differenciálható, akkor

(1) $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ *esetén*

$$\partial_2 u^\wedge(\nu, p) = x_{\nu,p}\,,$$

(2) $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ *esetén a (2.1) feladatnak létezik pontosan egy* $x_{\nu,p} \in \mathcal{X}(\nu, p)$ *megoldása, azaz a megoldásleképezés lényegében egy* $\chi : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_{+}$ *függvény, amelyre*

(3) $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ *esetén*

$$\partial_2 u^\wedge(\nu, p) = \chi(\nu, p)\,. \tag{2.7}$$

BIZONYÍTÁS.
(1) Legyen $(\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges paraméterpár. Legyen $x_{\nu,p} \in \mathcal{X}(\nu, p)$ egy megoldás. Jelölje $g : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ az a függvényt, amelyre $\forall\ q \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$g(q) := \langle q, x_{\nu,p}\rangle - u^\wedge(\nu, q)\,.$$

Ekkor $\forall\ q \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén $g(q) \geq 0$, ugyanis: $\forall\ x_{\nu,q} \in \mathcal{X}(\nu, q)$ megoldás esetén

$$u^\wedge(\nu, q) = \langle q, x_{\nu,q}\rangle \leq \langle q, x_{\nu,p}\rangle\,.$$

Továbbá $g(p) = 0$, ugyanis:

$$g(p) = \langle p, x_{\nu,p}\rangle - u^\wedge(\nu, p) = 0\,,$$

ezért a $g : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ függvénynek $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ belsőponti minimumhelye.
A $g : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható, ugyanis egyrészt a $\langle ., x_{\nu,p}\rangle$ függvény lineáris, így differenciálható, az $u^\wedge(\nu, .) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ függvényről pedig feltettük.
A fentiek szerint

$$g'(p) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\,.$$

Mivel $\forall\ q \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$g'(q) = \ (\,\partial_2 u^\wedge(\nu, q) - \langle ., x_{\nu,p}\rangle =)\ \partial_2 u^\wedge(\nu, q) - x_{\nu,p}\,,$$

azért

$$\partial_2 u^\wedge(\nu, p) - x_{\nu,p} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\,.$$

(2) és (3) közvetlenül következik (1)-ből. □

2.29 Állítás. (Shephard-féle azonosság III.)
Ha az $u : \mathbb{R}^n_{+} \to \mathbb{R}$ *függvény kvázikonkáv és felülről félig folytonos, akkor* $\forall\ \nu \in \mathcal{R}(u)$ *paraméter esetén* $\forall\ p \in \mathbb{R}^n_{++}$ *pontban az* $u^\wedge(\nu, .) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ *értékfüggvény szuperderiválható, és*

$$\partial^s_2 u^\wedge(\nu, p) = \mathcal{X}(\nu, p)\,,$$

ahol ∂^s *a szuperderiváltat jelöli, így*

$$\partial^s_2 u^\wedge(\nu, .) = \mathcal{X}(\nu, .)\,.$$

BIZONYÍTÁS.
Legyen $\nu \in \mathcal{R}(u)$ tetszőleges. A 2.11. állítás 3.(2) szerint az $u^\wedge(\nu, .) = u^\wedge_\nu : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ értékfüggvény konkáv, ezért $\forall\ p \in \mathbb{R}^n_{++}$ pontban szuperderiválható, és a konjugált függvény 7.53. definíciója és a szuperderivált (szubderivált) 7.66.3. definíciója szerint

$$x \in \partial^s u^\wedge_\nu(p) \ \Leftrightarrow\ u^\wedge_\nu(p) + (u^\wedge_\nu)^*(x) = \langle p, x\rangle\,.$$

A 2.2. és a 7.59. definíció alapján az $u_\nu^\wedge$ függvény a $H_\nu = \{x \in \mathbb{R}_+^n \; : \; u(x) \geq \nu\}$ feltételi halmaz $\sigma_{H_\nu}^\flat$ alsó támaszfüggvénye, azaz $\forall\, p \in \mathbb{R}_{++}^n$ esetén

$$u_\nu^\wedge(p) \;=\; \sigma_{H_\nu}^\flat(p) \;=\; -\sigma_{H_\nu}(-p)\,.$$

Mivel az $u : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ függvény kvázikonkáv és felülről félig folytonos, azért a 2.5. állítás szerint a $H_\nu \subset \mathbb{R}_+^n$ halmaz konvex és zárt, így a 7.61. állítás szerint $u_\nu^\wedge$ konjugáltja $\forall\, p \in \mathbb{R}_{++}^n$ pontban

$$(u_\nu^\wedge)^*(p) \;= (-\sigma_{H_\nu})^*(x) \;=\; -\Psi_{H_\nu}(x)\,,$$

ezért

$$\begin{aligned} x \in \partial^s u_\nu^\wedge(p) \quad &\Leftrightarrow \quad u_\nu^\wedge(p) - \Psi_{H_\nu}(x) = \langle p, x\rangle \\ &\Leftrightarrow \quad u_\nu^\wedge(p) = \langle p, x\rangle \text{ és } x \in H_\nu \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \mathcal{X}(p)\,, \end{aligned}$$

ahol az utolsó ekvivalencia a 2.4. megjegyzésen alapul. □

2.30 Állítás.
Tegyük fel, hogy $\forall\, (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}_{++}^n$ esetén a (2.1) feladatnak létezik pontosan egy megoldása, azaz a megoldásleképezés lényegében egy $\chi : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}_{++}^n \to \mathbb{R}_+^n$ függvény, továbbá $\forall\, (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}_{++}^n$ esetén fennáll Shephard-féle azonosság:

$$\partial_2 u^\wedge(\nu, p) = \chi(\nu, p)\,.$$

(Ez teljesül, ha fennálnak akár a 2.26. , akár a 2.28. állítás feltételei.) Tegyük még fel, hogy az $\chi : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}_{++}^n \to \mathbb{R}_+^n$ megoldásfüggvény differenciálható a második változójában, valamint az $u^\wedge$ értékfüggvény kétszer folytonosan differenciálható a második változójában. Akkor $\forall\, (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}_{++}^n$ esetén
1.

$$\partial_2 \chi(\nu, p) = \partial_2^2 u^\wedge(\nu, p)\,;$$

2. a $\partial_2 \chi(\nu, p) \in L(\mathbb{R}^n)$ lineáris transzformáció (mátrix) a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

(1) szimmetrikus, azaz $\forall\, i, j = 1, \ldots, n$ esetén $\partial_{2,j}\chi_i(\nu, p) = \partial_{2,i}\chi_j(\nu, p)$,

(2) negatív szemidefinit,

(3) $\forall\, i = 1, \ldots, n$ esetén $\exists\, j = 1, \ldots, n$, hogy $\partial_{2,j}\chi_i(\nu, p) \geq 0$.

Bizonyítás.
1. A $\chi(\nu, p) = \partial_2 u^\wedge(\nu, p)$ egyenlőség deriválásából adódik, hogy

$$\partial_2 \chi(\nu, p) = \partial_2^2 u^\wedge(\nu, p)\,.$$

(1) Az 1.-ből következik, mert a $\partial_2^2 u^\wedge(\nu, p) \in L(\mathbb{R}^n)$ lineáris transzformáció (mátrix) szimmetrikus.

(2) Az 1.-ből következik, mert az $u^\wedge$ függvény konkáv, ezért a $\partial_2^2 u^\wedge(\nu, p) \in L(\mathbb{R}^n)$ lineáris transzformáció (mátrix) negatív szemidefinit. .

(3) A 2.16. állítás szerint $\forall\, p \in \mathbb{R}_{++}^n$ esetén $\partial_2 \chi(\nu, p)\, p = \mathbf{0}$. Mivel a (2) szerint a $\partial_2 \chi(\nu, p) \in L(\mathbb{R}^n)$ szimmetrikus lineáris transzformáció (mátrix) negatív szemidefinit, azért $\forall\, i = 1, \ldots, n$ esetén

$$\partial_{2,i}\chi_i(\nu, p) \leq 0\,,$$

így $\exists\, j = 1, \ldots, n$, hogy

$$\partial_{2,j}\chi_i(\nu, p) \geq 0\,.$$

□

2.31 Megjegyzés.
Az előző állítás közgazdasági szempontból is igen figyelemre méltó. Egyrészt a matematikai összefüggések jól interpretálhatók:

(1) szerint a jószágok kompenzált ár szerinti kereszt-deriváltjai megegyeznek.

(2) Erre a későbbiekben visszatérünk még. (A Slutsky- helyettesítési mátrix negatív szemidefinitását jelenti.)

(3) szerint minden jószágnak létezik helyettesítője.

Másrészt ezeket a gazdasági törvényszerűségeket a fenti matematikai apparátus nélkül nem kaphattuk volna meg. Ezt kiemelte Samuelson is: Samuelson (1947) [35].

3. Fejezet

A haszonmaximalizálás és a költségminimalizálás kapcsolata

A haszonmaximalizálás és a költségminimalizálás ugyanazt a gazdasági jelenséget — a fogyasztók illetve a termelők viselkedését — írja le, más megközelítésben. Várhatóan hasonló eredményre is kellett vezetniük. A megoldás meghatározásából valóban ugyanazt az összefüggést kaptuk. Az értékfüggvények és a megoldásleképezések közötti kapcsolatok is hasonló, bár nem pontosan azonos eredményre vezettek. A kérdés az, hogy ezen szélsőértékfeladatok között milyen mélyebb kapcsolat húzódik meg. Látni fogjuk, hogy minden rögzített ár mellett az indirekt hasznossági és a kiadási függvények egymás inverzei. Az (1.1) és a (2.1) feladatseregeket összekötő állítások további gazdasági fogalmak tisztázását is lehetővé teszik.

Jól ismert, hogy valamely áru árának a megváltozása a fogyasztó keresletére kétféleképpen is hat. Egyrészt megváltozik a fogyasztó jövedelme, ennek hatását jövedelemhatásnak nevezik. Másrészt az árarányok megváltozása a különböző áruk között helyetesítéseket indukálnak, ezt helyettesítési hatásnak nevezik. Ezt a hatást a Slutsky-féle helyettesítési mátrix fejezi ki, amelyet Mas-Colell - Whinston - Green (1995) [32] alapján definiáltunk és adtuk meg további jellemzéseit, amelyeknek az egyik mikroökonómiai interpretációja a jövedelem- és helyettesítési hatás közismert kapcsolata. A definícióhoz, valamint a jellemzésekhez szükséges a két feladatsereg megoldásai, azaz a közönséges illetve a kompenzált keresleti függvény közötti kapcsolatot jellemző 3.2. állítás.

3.1 A kétféle megközelítés alapvető összefüggései

Ebben az alfejezetben a Marshall-féle és a Hicks-féle koncepció közötti, pusztán matematikai szempontból, mint szélsőértékfeladatok közötti kapcsolatokat vizsgáljuk.

3.1 Állítás.
Tegyük fel, hogy az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvénynek nem létezik lokális maximuma. Legyen $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges paraméter. Ha egy $\mu \in \mathbb{R}_{++}$ paraméter mellett $x^M_{\mu,p} \in \mathbb{R}^n_+$ megoldása az (1.1) haszonmaximalizálási (Marshall-féle) feladatnak, akkor a $\nu = u^\vee(\mu,p) = u(x^M_{\mu,p}) \in \mathbb{R}_{++}$ paraméter mellett

1. *$x^M_{\mu,p} \in \mathbb{R}^n_+$ megoldása a (2.1) költségminimalizálási (Hicks-féle) feladatnak, azaz*
$$x^M_{\mu,p} \in \mathcal{X}^H(u^\vee(\mu,p),p)\,, \quad \text{így} \quad \mathcal{X}^M(\mu,p) \subset \mathcal{X}^H(u^\vee(\mu,p),p)\,,$$
2. *valamint*
$$u^\wedge(u^\vee(\mu,p),p) = \langle p, x^M_{\mu,p}\rangle \ .$$

BIZONYÍTÁS.
1. Indirekt módon tegyük fel, hogy a $\nu = u^{\vee}(\mu,p) = u(x^M_{\mu,p}) \in \mathbb{R}_{++}$ paraméter mellett $x^M_{\mu,p} \in \mathbb{R}^n_+$ nem megoldása a (2.1) Hicks-féle (költségminimalizálási) feladatnak, azaz $\exists\, x \in \mathbb{R}^n_+,\ x \neq x^M_{\mu,p}$, hogy egyrészt

$$u(x) \geq \nu \quad (= u^{\vee}(\mu,p) = u(x^M_{\mu,p})\,),$$

másrészt

$$\langle p, x\rangle < \langle p, x^M_{\mu,p}\rangle\,.$$

Mivel $x^M_{\mu,p}$ megoldása az (1.1) feladatnak, azért

$$\langle p, x^M_{\mu,p}\rangle \leq \mu\,,\ (\text{ sőt } =)\,,$$

így

$$\langle p, x\rangle < \mu\,.$$

Mivel az u-nak nem létezik lokális maximuma, és az 1.23. állítás szerint ekkor teljesül a Walras-törvény, azért az $x \in \mathbb{R}^n_+$ nem megoldása az (1.1) feladatnak, (mert akkor $\langle p, x\rangle = \mu$ lenne). Mivel az $x \in \mathbb{R}^n_+$ nem megoldása az (1.1) feladatnak, de $\langle p, x\rangle \leq \mu$ (sőt $<$) azért

$$u(x) < u(x^M_{\mu,p}) = u^{\vee}(\mu,p) = \nu\,,$$

azaz $u(x) < \nu$, ami ellentmondás.

2. Mivel

$$u^{\wedge}(u^{\vee}(\mu,p),p) = \langle p, x\rangle\,,\ \text{ahol}\ \ x \in \mathcal{X}^H(u^{\vee}(\mu,p),p)\,,$$

azért az 1. szerint

$$u^{\wedge}(u^{\vee}(\mu,p),p) = \langle p, x^M_{\mu,p}\rangle\,.$$

□

3.2 Állítás.
Tegyük fel, hogy az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvény alulról félig folytonos. Legyen $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges paraméter. Ha egy $\nu \in \mathcal{R}(u)$ paraméter mellett $x^H_{\nu,p} \in \mathbb{R}^n_+$ megoldása a (2.1) költségminimalizálási (Hicks-féle) feladatnak, akkor a $\mu = u^{\wedge}(\nu,p) = \langle p, x^H_{\nu,p}\rangle \in \mathbb{R}_{++}$ paraméter mellett

1. *$x^H_{\nu,p} \in \mathbb{R}^n_+$ megoldása az (1.1) haszonmaximalizálási (Marshall-féle) feladatnak, azaz*

$$x^H_{\nu,p} \in \mathcal{X}^M(u^{\wedge}(\nu,p),p)\,,\quad \textit{így}\ \ \mathcal{X}^H(\nu,p) \subset \mathcal{X}^M(u^{\wedge}(\nu,p),p)\,,$$

2. *valamint*

$$u^{\vee}(u^{\wedge}(\nu,p),p) = u(x^H_{\nu,p})\,.$$

BIZONYÍTÁS.
1. Indirekt módon tegyük fel, hogy a $\mu = u^{\wedge}(\nu,p) = \langle p, x^H_{\nu,p}\rangle \in \mathbb{R}_{++}$ paraméter mellett $x^H_{\nu,p} \in \mathbb{R}^n_+$ nem megoldása az (1.1) Marshall-féle (haszonmaximalizálási) feladatnak, azaz $\exists\, x \in \mathbb{R}^n_+,\ x \neq x^H_{\nu,p}$, hogy egyrészt

$$\langle p, x\rangle \leq \mu \quad (= u^{\wedge}(\nu,p) = \langle p, x^H_{\nu,p}\rangle\,),$$

másrészt

$$u(x) > u(x^H_{\nu,p})\,.$$

Mivel $x^H_{\nu,p}$ megoldása a (2.1) feladatnak, azért

$$u(x^H_{\nu,p}) \geq \nu\,, \ \text{(sőt } =)\,,$$

így

$$u(x) > \nu\,.$$

Mivel $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ alulról félig folytonos, és a 2.21. állítás szerint ekkor teljesül a nincs extra hasznosság elve, azért az $x \in \mathbb{R}^n_+$ nem megoldása a (2.1) feladatnak, (mert akkor $u(x) = \nu$ lenne). Mivel $x \in \mathbb{R}^n_+$ nem megoldása a (2.1) feladatnak, de $u(x) \geq \nu$ (sőt $>$) azért

$$\langle p, x\rangle > \langle p, x^H_{\nu,p}\rangle = u^\wedge(\nu, p) = \mu\,,$$

azaz $\langle p, x\rangle > \mu$, ami ellentmondás.

2. Mivel

$$u^\vee(u^\wedge(\nu, p), p) = u(x)\,, \quad \text{ahol } x \in \mathcal{X}^M(u^\wedge(\nu, p), p)\,,$$

azért az 1. szerint

$$u^\vee(u^\wedge(\nu, p), p) = u(x^H_{\nu,p})\,.$$

□

A következő állítást kevert Shephard-féle azonosságnak is nevezhetnénk, mert a kiadási függvény deriváltja, és a közönséges keresleti függvény között teremt kapcsolatot, és igen fontos szerepet fog játszani az integrálhatóság területén.

3.3 Állítás.
Tegyük fel, hogy az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvény alulról félig folytonos. Teljesüljenek még a 2.26. állítás feltételei. Ekkor a (2.1) feladat értékfüggvénye és az (1.1) feladat megoldásfüggvénye között a következő összefüggés áll fenn: $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\partial_2 u^\wedge(\nu, p) = \chi^M(u^\wedge(\nu, p), p)\,.$$

Bizonyítás.
$\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén egyrészt a 3.2. állítás szerint

$$\chi^H(\nu, p) = \chi^M(u^\wedge(\nu, p), p)\,,$$

másrészt a 2.26. állítás szerint

$$\partial_2 u^\wedge(\nu, p) = \chi(\nu, p)\,,$$

amikből

$$\partial_2 u^\wedge(\nu, p) = \chi^M(u^\wedge(\nu, p), p)\,.$$

□

3.4 Állítás.
Tegyük fel, hogy az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvény alulról félig folytonos. Ekkor a (2.1) feladat értékfüggvénye és az (1.1) feladat megoldásfüggvénye között a következő összefüggés áll fenn: $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\partial^s_2 u^\wedge(\nu, p) \subset \mathcal{X}^M(u^\wedge(\nu, p), p)\,.$$

Bizonyítás.
$\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén egyrészt a 3.2. állítás 1. szerint

$$\mathcal{X}^H(\nu, p) \subset \mathcal{X}^M(u^\wedge(\nu, p), p)\,,$$

másrészt a 2.29. állítás szerint

$$\partial_2^s u^\wedge(\nu, p) = \mathcal{X}^H(\nu, p)\,,$$

amikből

$$\partial_2^s u^\wedge(\nu, p) \subset \mathcal{X}^M(u^\wedge(\nu, p), p)\,.$$

□

Végül belátjuk, hogy minden rögzített ár mellett az indirekt hasznossági és a kiadási függvények egymás inverzei.

3.5 Állítás.
Tegyük fel, hogy az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ adott függvénynek nem létezik lokális maximuma és alulról félig folytonos. Legyen $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges paraméter. Ekkor az $u^\vee(., p) : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ és az $u^\wedge(., p) : \mathcal{R}(u) \to \mathbb{R}$ függvények invertálhatók, méghozzá egymás inverzei :

$$(u^\vee)^{-1}(., p) = u^\wedge(., p)\,, \quad \textit{azaz}$$

$$u^\wedge(., p) \circ u^\vee(., p) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{++}} \quad \textit{és} \quad u^\vee(., p) \circ u^\wedge(., p) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{++}}\,.$$

Bizonyítás.
Legyen $\mu \in \mathbb{R}_{++}$ tetszőleges, ekkor

$$(u^\wedge(., p) \circ u^\vee(., p))(\mu) = u^\wedge(u^\vee(\mu, p), p) = \langle p, x\rangle\,,$$

ahol $x \in \mathcal{X}^H(u^\vee(\mu, p), p)$ megoldása a (2.1) költségminimalizálási feladatnak.
Legyen $x^M_{\mu,p} \in \mathcal{X}^M(\mu, p)$ megoldása az (1.1) haszonmaximalizálási feladatnak, ekkor egyrészt mivel u-nak nem létezik lokális maximuma, azért a Walras-törvény teljesülése miatt

$$\langle p, x^M_{\mu,p}\rangle = \mu\,,$$

másrészt a 3.1. állítás 1. szerint

$$x^M_{\mu,p} \in \mathcal{X}^H(u^\vee(\mu, p), p)\,,$$

ezért

$$(u^\wedge(., p) \circ u^\vee(., p))(\mu) = \langle p, x^M_{\mu,p}\rangle = \mu\,.$$

Másképpen: Legyen $\nu \in \mathcal{R}(u)$ tetszőleges, ekkor

$$(u^\vee(., p) \circ u^\wedge(., p))(\nu) = u^\vee(u^\wedge(\nu, p), p) = u(x)\,,$$

ahol $x \in \mathcal{X}^M(u^\vee(\nu, p), p)$ megoldása az (1.1) haszonmaximalizálási feladatnak.
Legyen $x^H_{\nu,p} \in \mathcal{X}^H(\nu, p)$ megoldása a (2.1) költségminimalizálási feladatnak, ekkor egyrészt mivel u alulról félig folytonos, azért a nincs extra hasznosság elve teljesülése miatt

$$u(x^H_{\nu,p}) = \nu\,,$$

másrészt a 3.2. állítás 1. szerint

$$x^H_{\nu,p} \in \mathcal{X}^M(u^\wedge(\nu, p), p)\,,$$

ezért

$$(u^\vee(., p) \circ u^\wedge(., p))(\nu) = u(x^H_{\nu,p}) = \nu\,.$$

□

3.2 A Slutsky-féle helyettesítési mátrix

A következőkben az árak megváltozásának a keresletre gyakorolt hatását vizsgáljuk rögzített jövedelemszint mellett. A közönséges (Marshall-féle) keresleti függvény esetén ez nyilván $\partial_2 \chi^M(\mu, p)$. Az árváltozás miatt azonban a jövedelem is relatív módon megváltozik. Arra vagyunk kiváncsiak, hogy az árváltozás hatásából mennyi csupán az árarányok változásának a hatása, és mennyi az árváltozásból származó jövedelemváltozásnak a hatása. Az árarányok változása hatásának az elemzését a kompenzált (Hicks-féle) keresleti függvény rögzített hasznossági szint melletti ár szerinti $\partial_2 \chi^H(u^\vee(\mu, p), p)$ parciális deriváltja segítségével végezhetjük el.

Az eddigi fejezeteket gondolhattuk volna tisztán matematikainak, azok szélsőértékfeladatok vizsgálatai voltak. Ennek az alfejezetnek már nem csak a kérdésfelvetései, hanem a problémára adott válasz módja is közgazdasági jellegű.

3.6 Definíció.
Tegyük fel, hogy $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén a (2.1) költségminimalizálási feladatnak létezik pontosan egy megoldása, azaz az $\mathcal{X}_H$ megoldásleképezés, a kompenzált keresleti leképezés lényegében egy $\chi^H : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ függvény, amely differenciálható is a második változójában.
Az (1.1) haszonmaximalizálási (Marshall-féle) feladat $(\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpárhoz artozó **Slutsky-féle helyettesítési mátrixának** (lineáris transzformációjának) nevezzük a kompenzált (Hicks-féle) keresleti függvénynek a μ jövedelemszinthez rögzített $\nu := u^\vee(\mu, p)$ hasznossági szint melletti második változó szerinti parciális deriváltját, azaz az

$$\begin{aligned} S(\mu, p) &:= \partial_2 \chi^H(\nu, p) \quad (\ \nu = u^\vee(\mu, p) \text{ mellett}\ ) \\ &= \partial_2 \chi^H(u^\vee(\mu, p), p) \in \mathbb{R}^{n \times n} (= L(\mathbb{R}^n)) \end{aligned}$$

kvadratikus mátrixot (lineáris transzformációt), azaz amelynek az elemei $\forall\ i, j = 1, \ldots, n$ esetén

$$s_{i,j}(\mu, p) := \partial_{2,j} \chi^H_i(u^\vee(\mu, p), p) \in \mathbb{R}\,.$$

3.7 Megjegyzés.
A Slutsky-féle helyettesítési mátrix azt fejezi ki, hogy adott μ jövedelemszinten rögzített $\nu := u^\vee(\mu, p)$ hasznossági szint melletti árváltozás, azaz csupán az árarányok változása, az egyes jószágok között milyen helyettesítéseket indukál.

3.8 Állítás.
$\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$[S(\mu, p)]\, p = \mathbf{0}\,,$$

amiből az is következik, hogy $S(\mu, p)$ szinguláris.

Bizonyítás.
A definíció szerint $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$S(\mu, p) = \partial_2 \chi^H(\nu, p)\,,$$

ahol $\nu := u^\vee(\mu, p)$ rögzített. A 2.16. állítás szerint $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\partial_2 \chi^H(\nu, p)\, p = \mathbf{0}\,,$$

amiből következik az állítás. $\square$

3.9 Állítás. (ekvivalens definíció I.)
Tegyük fel, hogy fennállnak a 2.30. állítás feltételei:
Tegyük fel, hogy $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ *esetén a (2.1) feladatnak létezik pontosan egy megoldása, azaz a megoldásleképezés, azaz a kompenzált keresleti leképezés lényegében egy* $\chi^H : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_{+}$ *függvény, továbbá* $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ *esetén fennáll Shephard azonosság:*

$$\partial_2 u^{\wedge}(\nu, p) = \chi^H(\nu, p)\,.$$

(Ez teljesül, ha fennálnak akár a 2.26. , akár a 2.28. állítás feltételei.) Tegyük még fel, hogy az $\chi^H : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_{+}$ *megoldásfüggvény, a kompenzált keresleti függvény differenciálható a második változójában, valamint az* $u^{\wedge}$ *értékfüggvény kétszer folytonosan differenciálható a második változójában.*
Ekkor $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ *esetén a Slutsky-mátrix kifejezhető a költségminimalizálási feladat értékfüggvényével, a kiadási függvénnyel is:*

$$S(\mu, p) = \partial_2^2 u^{\wedge}(u^{\vee}(\mu, p), p)\,. \tag{3.1}$$

Ezért ebben az esetben a $S(\mu, p) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *Slutsky-mátrix a következő további tulajdonságokkal rendelkezik:*

(1) a $S(\mu, p)$ *Slutsky-mátrix szimmetrikus, azaz* $\forall i, j = 1, \dots, n$ *esetén*

$$s_{i,j}(\mu, p) = s_{i,j}(\mu, p)\,,$$

(2) a $S(\mu, p)$ *Slutsky-mátrix negatív szemidefinit,*

(3) $\forall\ i = 1, \dots, n$ *esetén* $s_{i,i}(\mu, p) \le 0\,.$

Bizonyítás.
A definíció szerint $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$S(\mu, p) = \partial_2 \chi^H(\nu, p)\,,$$

ahol $\nu := u^{\vee}(\mu, p)$ rögzített. A 2.30. állítás szerint $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\partial_2 \chi(\nu, p) = \partial_2^2 u^{\wedge}(\nu, p)\,, \quad \text{ezért } S(\mu, p) = \partial_2^2 u^{\wedge}(\nu, p)\,,$$

ahol $\nu = u^{\vee}(\mu, p)$ rögzített, így

$$S(\mu, p) = \partial_2^2 u^{\wedge}(u^{\vee}(\mu, p), p)\,.$$

Az (1) illetve (2) a 2.30. állítás (1) illetve (2)-ből, a (3) pedig a (2)-ből következik.
□

3.10 Megjegyzés.
A 2.30. állítás utáni megjegyzésben elmondtuk, hogy az állításban szereplő tulajdonságoknak fontos a közgazdasági tartalma. A második tulajdonságot viszont csak most tudjuk interpretálni: a Slutsky-mátrix negatív szemidefinitségét jelenti.

3.11 Állítás. (ekvivalens definíció II.)
Tegyük fel, hogy $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ *illetve* $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ *esetén a (2.1) illetve a (1.1) feladatnak létezik pontosan egy megoldása, azaz a megoldásleképezések, azaz a kompenzált illetve a közönséges keresleti leképezés lényegében egy* $\chi^H : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_{+}$ *illetve egy* $\chi^M : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_{+}$ *függvény. Tegyük fel továbbá, hogy* $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ *esetén fennáll Shephard-féle azonosság:*

$$\partial_2 u^{\wedge}(\nu, p) = \chi^H(\nu, p)\,.$$

(Ez teljesül, ha fennálnak akár a 2.26. , akár a 2.28. állítás feltételei.) Tegyük még fel, hogy az $\chi^H : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ megoldásfüggvény differenciálható a második változójában, illetve az $\chi^M : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ megoldásfüggvény differenciálható. Ekkor $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén a Slutsky-mátrix kifejezhető a közönséges keresleti függvény deriváltja segítségével is:

$$S(\mu,p) = \partial_1\chi^M(\mu,p)\cdot\chi^M(\mu,p)^T + \partial_2\chi^M(\mu,p) \in \mathbb{R}^{n\times n}\,, \tag{3.2}$$

azaz $\forall i,j = 1,\dots,n$ esetén

$$s_{i,j}(\mu,p) = \partial_1\chi^M_i(\mu,p)\cdot\chi^M_j(\mu,p) + \partial_{2,j}\chi^M_i(\mu,p) \in \mathbb{R}\,.$$

Bizonyítás.
Legyen $(\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges adott. Legyen $\nu := u^\vee(\mu,p)$. A fenti 3.2. állítás 1. alapján

$$\chi^H(\nu,p) = \chi^M(u^\wedge(\nu,p),p)\,, \tag{3.3}$$

amiből a Shephard azonosság szerint

$$\partial_2 u^\wedge(\nu,p) = \chi^M(u^\wedge(\nu,p),p)\,,$$

sőt igazából

$$\partial_2 u^\wedge(\nu,p) = [\chi^M(u^\wedge(\nu,p),p)]^T \in \mathbb{R}^{1\times n}\,. \tag{3.4}$$

Ezek szerint

$$\begin{aligned}
S(\mu,p) &= \partial_2\chi^H(u^\vee(\mu,p),p)\ \left(=\partial_2\chi^H(\nu,p)\right)\\
&= \partial_p\chi^M(u^\wedge(\nu,p),p)\ \left(=[\chi^M(u^\wedge(\nu,.),.)]'(p) = [\chi^M\circ(u^\wedge(\nu,.),\mathrm{id})]'(p)\right)\\
&= \langle(\,\partial_1\chi^M(u^\wedge(\nu,p),p)\,,\partial_2\chi^M(u^\wedge(\nu,p),p)\,),(\,\partial_2 u^\wedge(\nu,p)\,,\,\mathrm{id}\,)\rangle\\
&= \partial_1\chi^M(u^\wedge(\nu,p),p)\cdot\partial_2 u^\wedge(\nu,p) + \partial_2\chi^M(u^\wedge(\nu,p),p) =\\
&= \partial_1\chi^M(u^\wedge(\nu,p),p)\cdot[\chi^M(u^\wedge(\nu,p),p)]^T + \partial_2\chi^M(u^\wedge(\nu,p),p)\\
&= \partial_1\chi^M(\mu,p)\cdot[\chi^M(\mu,p)]^T + \partial_2\chi^M(\mu,p)\,.
\end{aligned}$$

A 2. egyenlőség a (3.3) összefüggés miatt, az 5. egyenlőség a (3.4) összefüggés miatt igaz. □

3.12 Megjegyzés. (a helyettesítési és a jövedelemhatás)
A fenti állítást úgy is megfogalmazhatjuk, hogy $\forall\ (\mu,p) \in \mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\partial_2\chi^M(\mu,p) = S(\mu,p) - \partial_1\chi^M(\mu,p)\cdot[\chi^M(\mu,p)]^T \in \mathbb{R}^{n\times n}\,.$$

Ezek szerint az árak megváltozásának a keresletre gyakorolt hatása rögzített jövedelemszint mellett, azaz a

$$\partial_2\chi^M(\mu,p) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

mátrix, két összetevőre bontható:

> Egyrészt egy helyettesítési hatásra, ami az ráarányok megváltozásának a következménye, ezt az $S(\mu,p)$ Slutsky-féle helyettesítési mátrix fejezi ki.
>
> Másrészt egy jövedelemhatásra, ami az árváltozásból eredő relatív jövedelemváltozás következménye, ez pedig a fentiek szerint:
>
> $$-\,\partial_1\chi^M(\mu,p)\cdot[\chi^M(\mu,p)]^T \in \mathbb{R}^{n\times n}\,.$$

3.13 Állítás.
Az előző 3.9. és 3.11. állítások feltételeinek fennállása esetén teljesül, hogy ha valamely $i = 1, \ldots, n$ esetén

$$\partial_{2,i}\chi_i^M(\mu, p) \geq 0\,,$$

azaz az i-dik jószág Giffen, akkor

$$\partial_1\chi_i^M(\mu, p) \leq 0\,,$$

azaz az i-dik jószág inferior (közönséges);

másképpen: ha valamely $i = 1, \ldots, n$ esetén $\partial_1\chi^M(\mu, p) \geq 0$, azaz az i-dik jószág normál, akkor $\partial_{2,i}\chi_i^M(\mu, p) \leq 0$, azaz az i-dik jószág nem giffen.

Bizonyítás.
A 3.11. állítás szerint $\forall\ i = 1, \ldots, n$ esetén

$$\partial_{2,i}\chi_i^M(\mu, p) = s_{i,i}(\mu, p) - \partial_1\chi_i^M(\mu, p) \cdot \chi_i^M(\mu, p)\,.$$

A 3.9. állítás (3) szerint $\forall\ i = 1, \ldots, n$ esetén $s_{i,i}(\mu, p) \leq 0$. Ezek szerint, ha $\partial_{2,i}\chi_i^M(\mu, p) \geq 0$, akkor $\partial_1\chi^M(\mu, p) \leq 0$. □

3.14 Megjegyzés.
Az lehetne gondolni, hogy a fentiekkel párhuzamosan egy másik helyettesítési mátrix is bevezethető. Definiálható a (2.1) költségminimalizálási (Hicks-féle) feladat Slutsky-féle helyettesítési mátrixa, amely $\forall\ (\nu, p)$ esetén a (Marshall-féle) keresleti függvény adott ν hasznossági szinthez rögzített $\mu := u^\wedge(\nu, p)$ jövedelemszint melletti második változó szerinti parciális deriváltja, azaz az

$$\tilde{S}(\nu, p) := \partial_2\chi^M(u^\wedge(\mu, p), p) \in \mathbb{R}^{n\times n}\,.$$

Ez a mátrix azt fejezi ki, hogy adott hasznossági szinthez rögzített jövedelem mellett egy árváltozás, az egyes jószágok között milyen helyettesítéseket indukál. Ez a fogalom azonban sajnos nem túl jól használható, mert a fenti ekvivalens definíciók nem igazak, illetve csak módosítással, amik viszont már nem használhatók olyan jól. Ugyanis a haszonmaximalizálási feladatban a Shephard-féle azonosságnak megfelelő Roy-féle azonosság szerint

$$\chi^M(\mu, p) = -\frac{1}{\partial_1 u^\vee(\mu, p)} \cdot \partial_2 u^\vee(\mu, p)\,.$$

A Roy-féle azonosságból megfelelő feltételek mellett egyrészt az következik, hogy

$$\tilde{S}(\nu, p) = \partial_2\left(-\frac{1}{\partial_1 u^\vee(\mu, p)} \cdot \partial_2 u^\vee(u^\wedge(\nu, p), p)\right)\,,$$

ami összehasonlíthatatlanul bonyolultabb, mint a (3.1) összefüggés, és nem állapíthatók meg belőle $\tilde{S}(\nu, p)$-re a 3.1. állításbelihez hasonló tulajdonságok.

A Roy-féle azonosságból megfelelő feltételek mellett másrészt az következik, hogy

$$\tilde{S}(\nu, p) = \partial_1\chi^H(u^\wedge(\nu, p), p) \cdot \partial_1 u^\vee(u^\wedge(\nu, p), p) \cdot [\chi^M(u^\wedge(\nu, p), p)]^T + \partial_2\chi^H(u^\wedge(\nu, p), p)\,,$$

ami a (3.2) öszefüggéssel analóg, ezért a 3.12. megjegyzéshez hasonló észrevételek tehetők, de a 3.1. állításbelihez hasonló tulajdonságok hiánya miatt ez semmitmondó marad.

4. Fejezet

A hasznossági és az indirekt hasznossági függvények konvexitása

Mind a haszonmaximalizálás, mind a költségminimalizálás esetén a megoldásleképezés és az értékfüggvény kapcsolata vizsgálatához szükség van az értékfüggvény deriváltjára. A haszonmaximalizálási feladat indirekt hasznossági függvényének differenciálhatóságával foglalkoznak Crouzeix (1983) [6], Crouzeix (1985) [8] és Crouzeix (1996) [7] dolgozatai. Nagyon hasznos azonban az értékfüggvények konvex vagy konkáv voltának az ismerete is, mert ekkor a konvex függvényekre bevezetett szubderiváltat használhatjuk. Ide kapcsolódó fontos kérdés az is, hogy az értékfüggvény ismeretében a hasznossági függvény konkávitására tudjunk következtetni.

A költségminimalizálási feladat kiadási függvényéről tudjuk, hogy a második változójában konkáv, ha a hasznossági függvény felülről félig folytonos. Ebben az alfejezetben azt vizsgáljuk, hogy a direkt hasznossági függvény milyen tulajdonságaiból követezik az indirekt hasznosság konvexitása, és megfordítva, az indirekt hasznossági függvény milyen tulajdonságaiból követezik a direkt hasznosság konvexitása. Látni fogjuk, hogy — a klasszikus esethez hasonlóan — a konvexitás és monotonitás szorosan összefüggő fogalmak. Martínez-Legaz (1997) [31] dolgozata a monoton és sugár-konvex függvények karakerizációjának a segítségével szükséges és elégséges feltételt adott az indirekt hasznossági függvény konvexitására. Az alfejezet tárgyalása ettől eltérő, a monoton függvények egy olyan jellemzését sikerült találnunk, amely segítségével a fenti eredményekre új bizonyítás adható. A fenti eszközök segítségével a hasznossági függvény konkávitására is megfogalmazhattunk egy szükséges feltételt. Ez a dolgozat egyik új eredménye, lásd Szabó (2000) [40].

További cél lehetne annak a vizsgálata is, hogy milyen feltétel biztosítaná az értékfüggvény lokálisan Lipschitz voltának az ismeretét, mert ekkor a Clarke-féle általánosított deriváltat használhatnánk a Roy-azonosságban.

4.1 Jelölés.

1. Jelölje $\forall\ x = (\xi_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén $x^{-1} := (\frac{1}{\xi_1}, \ldots, \frac{1}{\xi_n})$.
2. Jelölje az alábbiakban $h : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_{++}$ azt a függvényt, amelyre teljesül, hogy $\forall\ x \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén $h(x) := x^{-1}$.

4.2 Megjegyzés. (probléma)

Milyen $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ hasznossági függvény esetén lesz az $u^\vee : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ indirekt hasznossági függvény konvex?

Speciálisan, ha az $u:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ egyváltozós, monoton növekedő hasznossági függvény, akkor az $u^\vee:\mathbb{R}_{++}\to\mathbb{R}$ indirekt hasznossági függvény $\forall\, p\in\mathbb{R}_{++}$ esetén $u^\vee(p)=\max_{x\le\frac{1}{p}}\ u(x)=u(\frac{1}{p})=(u\circ h)(p)$. Ebben az esetben $u^\vee$ pontosan akkor konvex, ha $u\circ h$ konvex.

4.1 A monoton és sugár-konvex függvények

Ez az alfejezet tisztán matemetikai természetű, a monoton és sugár-konvex függvények jellemzését tartalmazza. Első látásra emiatt a függelékben illene lennie. Azért szerepel mégis itt ezen függvények jellemzése, mert e terület olyan szorosan kötődik a direkt és indirekt hasznossági függvények konvexitásának a kapcsolatához, hogy kizárólag emiatt jött létre.

4.3 Állítás. (monoton fogyó függvény reprezentációja)
Ha az $f:\mathbb{R}^n_+\to\mathbb{R}$ függvény monoton fogyó, akkor $\forall\, x\in\mathbb{R}^n_+$ és $y\in\mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$f\left(\max_{i=1,\dots,n}\frac{\xi_i}{\eta_i}\cdot y\right)\ \le f(x)\ \le\ f\left(\min_{i=1,\dots,n}\frac{\xi_i}{\eta_i}\cdot y\right)\ ,$$

valamint ha $x\in\mathbb{R}^n_{++}$, akkor az $y=x$ helyen végig egyenlőség van.
Ebben az esetben az állítás a következő módon átfogalmazható: $\forall\, x\in\mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\max_{y\in\mathbb{R}^n_{++}} f\left(\max_{i=1,\dots,n}\frac{\xi_i}{\eta_i}\cdot y\right)\ =\ f(x)\ =\ \min_{y\in\mathbb{R}^n_{++}} f\left(\min_{i=1,\dots,n}\frac{\xi_i}{\eta_i}\cdot y\right)\ ,$$

ahol a maximum illetve a minimum az $y=x$ helyen éretik el.

Bizonyítás.
1."$\le$": Jelölje $\forall\, x\in\mathbb{R}^n_+,\ y\in\mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\alpha(x,y):=\min\{\alpha\in\mathbb{R}\ :\ x\le\alpha\cdot y\}\ .$$

Nyilván $\alpha(x,x)=1$.
Mivel az f függvény monoton fogyó, azért $\forall\, x\in\mathbb{R}^n_+,\ y\in\mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$f(x)\ge f(\alpha(x,y)\cdot y)\,,\quad \text{speciálisan}\ \ y=x\ \text{esetén}\ \ f(x)=f(\alpha(x,x)\cdot x)\,.$$

Végül belátjuk, hogy $\forall\, x\in\mathbb{R}^n_+,\ y\in\mathbb{R}^n_{++}$ esetén $\alpha(x,y)=\max\limits_{i=1,\dots,n}\dfrac{\xi_i}{\eta_i}$.
Egyrészt, mivel $x\le\alpha(x,y)\cdot y$, azért $\forall\, i=1,\dots,n$ esetén

$$\xi_i\le\alpha(x,y)\cdot\eta_i\,,\quad \text{azaz}\ \ \frac{\xi_i}{\eta_i}\le\alpha(x,y)\,,\quad \text{így}\ \ \max_{i=1,\dots,n}\frac{\xi_i}{\eta_i}\le\alpha(x,y)\,.$$

Másrészt, mivel $\forall\, k=1,\dots,n$ esetén $\dfrac{\xi_k}{\eta_k}\le\max\limits_{i=1,\dots,n}\dfrac{\xi_i}{\eta_i}$, azaz $\xi_k\le\max\limits_{i=1,\dots,n}\dfrac{\xi_i}{\eta_i}\cdot\eta_k$, azért

$$x\le\max_{i=1,\dots,n}\frac{\xi_i}{\eta_i}\cdot y\,,\quad \text{így}\quad \max_{i=1,\dots,n}\frac{\xi_i}{\eta_i}\ge\alpha(x,y)\,.$$

Ezért $\max\limits_{i=1,\dots,n}\dfrac{\xi_i}{\eta_i}=\alpha(x,y)$.

2."$\le$": Jelölje $\forall\, x\in\mathbb{R}^n_+,\ y\in\mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\beta(x,y)=\max\{\beta\in\mathbb{R}\ :\ x\ge\alpha\cdot y\}\ .$$

Nyilván $\beta(x,x) = 1$.
Mivel az f függvény monoton fogyó, azért $\forall\ x \in \mathbb{R}^n_+,\ y \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$f(x) \le f(\beta(x,y)\cdot y)\,, \quad \text{speciálisan } y = x \text{ esetén } \; f(x) = f(\beta(x,y)\cdot y)\,.$$

Végül belátjuk, hogy $\forall\ x \in \mathbb{R}^n_+,\ y \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén $\beta(x,y) = \min\limits_{i=1,\dots,n} \dfrac{\xi_i}{\eta_i}$.
Egyrészt, mivel $x \ge \alpha(x,y)\cdot y$, azért $\forall\ i = 1,\dots,n$ esetén

$$\xi_i \ge \alpha(x,y)\cdot\eta_i\,, \quad \text{azaz } \frac{\xi_i}{\eta_i} \ge \beta(x,y)\,, \quad \text{így } \min_{i=1,\dots,n} \frac{\xi_i}{\eta_i} \ge \beta(x,y)\,.$$

Másrészt, mivel $\forall\ k = 1,\dots,n$ esetén $\dfrac{\xi_k}{\eta_k} \ge \min\limits_{i=1,\dots,n} \dfrac{\xi_i}{\eta_i}$, azaz $\xi_k \ge \min\limits_{i=1,\dots,n} \dfrac{\xi_i}{\eta_i}\cdot\eta_i$, azért

$$x \ge \min_{i=1,\dots,n} \frac{\xi_i}{\eta_i}\cdot y\,, \quad \text{így } \min_{i=1,\dots,n} \frac{\xi_i}{\eta_i} \le \beta(x,y)\,.$$

Ezért $\min_{i=1,\dots,n} \frac{\xi_i}{\eta_i} = \beta(x,y)$. □

4.4 Állítás. (monoton növő függvény reprezentációja)
Ha az $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvény monoton növő, akkor $\forall\ x \in \mathbb{R}^n_+$ esetén $\forall\ y \in \mathbb{R}^n_{++}$ mellett

$$f\left(\min_{i=1,\dots,n} \frac{\xi_i}{\eta_i}\cdot y\right) \;\le\; f(x) \;\le\; f\left(\max_{i=1,\dots,n} \frac{\xi_i}{\eta_i}\cdot y\right)\,,$$

valamint ha $x \in \mathbb{R}^n_{++}$, akkor az $y = x$ helyen végig egyenlőség van.
Ebben az esetben az állítás a következő módon átfogalmazható: $\forall\ x \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\max_{y\in\mathbb{R}^n_{++}} f\left(\min_{i=1,\dots,n} \frac{\xi_i}{\eta_i}\cdot y\right) \;=\; f(x) \;=\; \min_{y\in\mathbb{R}^n_{++}} f\left(\max_{i=1,\dots,n} \frac{\xi_i}{\eta_i}\cdot y\right)\,,$$

ahol a maximum illetve a minimum az $y = x$ helyen éretik el.

Bizonyítás.
Ekkor a $-f$ függvény monoton fogyó, erre igaz a fenti állítás, ebből -1-gyel szorozva adódik az állítás. □

4.5 Jelölés.
Egy $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvény mellett $\forall\ x \in \mathbb{R}^n_+$ esetén jelölje $f_x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ azt a függvényt, amelyre $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}_+$ esetén $f_x(\alpha) := f(\alpha x)$.

4.6 Definíció.
Egy $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvényt sugár-konvexnek nevezzük, ha $\forall\ x \in \mathbb{R}^n_+$ esetén az $f_x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ függvény konvex.
Nyilván hasonló módon definiálható egy függvény sugár-konkávitása is.

Az alábbiakban a monoton és sugár-konvex (sugár-konkáv) függvényeket jellemezzük.

4.7 Állítás. (monoton fogyó és sugár-konvex függvény reprezentációja)
Ha egy $f : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ függvény monoton fogyó és sugár-konvex, akkor $\forall\ x \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

1.
$$f(x) = \max_{(y,-\delta_y)\in\mathbb{R}^n_{++}\times\partial f_y(1)} \left(f_y(1) + \delta_y - \max_{i=1,\dots,n} \frac{\xi_i}{\eta_i}\cdot\delta_y\right)\,.$$

2. Így az

$$\begin{aligned} U &:= \{(\delta_y \cdot y^{-1}, f(y)+\delta_y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ : \ y \in \mathbb{R}^n_{++}, \ -\delta_y \in \partial f_y(1)\} \\ &\subset (\mathbb{R}^n_{++} \cup \{\mathbf{0}\}) \times \mathbb{R} \ \ \textit{halmaz mellett} \end{aligned}$$

$$f(x) = \max_{(c,\gamma_0)\in U} \left(\gamma_0 - \max_{i=1,\dots,n} \xi_i \cdot \gamma_i \right) .$$

3. Legyen $g : \mathbb{R}^n_{++} \cup \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ *az a függvény, amelyre* $\forall\ c \in \mathbb{R}^n_{++} \cup \{\mathbf{0}\}$ *esetén*

$$g(c) := \sup\{\gamma_0 \in \mathbb{R} \ : \ (c, \gamma_0) \in U\} ,$$

ekkor $\forall\ x \in \mathbb{R}^n_{++}$ *esetén*

$$f(x) = \sup_{c\in\mathbb{R}^n_{++}\cup\{\mathbf{0}\}} \left(g(c) - \max_{i=1.\dots,n} \gamma_i \cdot \xi_i \right) .$$

Bizonyítás.
Legyen $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges adott.
1. Legyen $y \in \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges. Mivel az f_y függvény konvex, azért $\partial f_y(1) \neq \emptyset$, valamint az f_y függvény monoton fogyó is, ezért $\forall\ (-\delta_y) \in \partial f_y(1)$ esetén $(-\delta_y) \leq 0$, így $\delta_y \geq 0$. Ismert, hogy $\forall\ (-\delta_y) \in \partial f_y(1)$ esetén

$$\begin{aligned} f\left(\max_{i=1,\dots,n} \frac{\xi_i}{\eta_i} \cdot y \right) &= f_y\left(\max_{i=1,\dots,n} \frac{\xi_i}{\eta_i} \right) \\ &\geq f_y(1) - \delta_y \left(\max_{i=1,\dots,n} \frac{\xi_i}{\eta_i} - 1 \right) \\ &\geq f_y(1) + \delta_y - \delta_y \cdot \max_{i=1,\dots,n} \frac{\xi_i}{\eta_i} = f_y(1) + \delta_y - \max_{i=1,\dots,n} \frac{\xi_i}{\eta_i} \cdot \delta_y \ , \end{aligned}$$

(a δ_y-t a nemnegativitása miatt lehet bevinni a maximum mögé,) valamint $y = x$ esetén nyilván egyenlőség van, ezért

$$f\left(\max_{i=1,\dots,n} \frac{\xi_i}{\eta_i} \cdot y \right) = \max_{y\in\mathbb{R}^n_{++}, -\delta_y\in\partial f_y(1)} \left(f_y(1) + \delta_y - \max_{i=1,\dots,n} \frac{\xi_i}{\eta_i} \cdot \delta_y \right) ,$$

így az előző 4.3. állítás első egyenlősége miatt

$$\begin{aligned} f(x) &= \max_{y\in\mathbb{R}^n_{++}} f\left(\max_{i=1,\dots,n} \frac{\xi_i}{\eta_i} \cdot y \right) \\ &= \max_{y\in\mathbb{R}^n_{++}} \ \max_{y\in\mathbb{R}^n_{++}, -\delta_y\in\partial f_y(1)} \left(f_y(1) + \delta_y - \max_{i=1,\dots,n} \frac{\xi_i}{\eta_i} \cdot \delta_y \right) \\ &= \max_{(y,-\delta_y)\in\mathbb{R}^n_{++}\times\partial f_y(1)} \left(f_y(1) + \delta_y - \max_{i=1,\dots,n} \frac{\xi_i}{\eta_i} \cdot \delta_y \right) . \end{aligned}$$

2. Jelölje $\gamma_0 := f_y(1) + \delta$, és $\forall\ i = 1, \dots, n$ esetén $\gamma_i := \frac{\delta_y}{\eta_i}$, azaz $c = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) := \delta_y \cdot y^{-1} \in \mathbb{R}^n_{++} \cup \{\mathbf{0}\}$, ekkor

$$f_y(1) + \delta_y - \max_{i=1,\dots,n} \frac{\xi_i}{\eta_i} \cdot \delta_y = \gamma_0 - \max_{i=1,\dots,n} \xi_i \cdot \gamma_i ,$$

ezért az

$$\begin{aligned} U &:= \{(\delta_y \cdot y^{-1}, f(y)+\delta_y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ : \ y \in \mathbb{R}^n_{++}, \ -\delta_y \in \partial f_y(1)\} \\ &\subset (\mathbb{R}^n_{++} \cup \{\mathbf{0}\}) \times \mathbb{R} \ \ \text{halmaz mellett} \end{aligned}$$

$$f(x) = \max_{(c,\gamma)\in U} (\gamma_0 - \max_{i=1,\dots,n} \xi_i \cdot \gamma_i) \, .$$

(Azért tettük fel, hogy $-\delta_y \in \partial f_y(1)$, hogy $c = \delta_y \cdot y^{-1} \in \mathbb{R}^n_{++} \cup \{\mathbf{0}\}$ legyen, ne pedig $c = \delta_y \cdot y^{-1} \in \mathbb{R}^n_{--} \cup \{\mathbf{0}\}$.)

3. Belátjuk a következőt. Legyenek X és Y tetszőleges halmazok, legyen $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ egy halmazértékű leképezés, ($\operatorname{graph} F \subset X \times Y$,) legyen $f : \operatorname{graph} F \to \mathbb{R}$, ekkor

$$\sup_{(x,y)\in \operatorname{graph} F} f(x,y) = \sup_{x\in X} \left(\sup_{y\in F(x)} f(x,y) \right) \, .$$

Ugyanis: $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén egyrészt

$$\sup_{(x,y)\in \operatorname{graph} F} f(x,y) - \varepsilon \le \sup_{x\in X} \left(\sup_{y\in F(x)} f(x,y) \right) \, ,$$

másrészt

$$\sup_{(x,y)\in \operatorname{graph} F} f(x,y) \ge \sup_{x\in X} \left(\sup_{y\in F(x)} f(x,y) \right) - \varepsilon \, .$$

Legyen most speciálisan $F : \mathbb{R}^n_{++} \cup \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ az a halmazértékű leképezés, amelyre $\forall\, c \in \mathbb{R}^n_{++} \cup \{\mathbf{0}\}$ esetén $F(c) := \{\gamma_0 : (c,\gamma_0) \in U\}$, ekkor $\operatorname{graph} F = U$. A fentiek szerint

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sup_{(c,\gamma_0)\in U = \operatorname{graph} F} (\gamma_0 - \max_{i=1,\dots,n} \xi_i \cdot \gamma_i) \\
&= \sup_{c\in \mathbb{R}^n_{++}\cup\{\mathbf{0}\}} \left(\sup_{\gamma_0 \in F(c)} (\gamma_0 - \max_{i=1,\dots,n} \xi_i \cdot \gamma_i) \right) \\
&= \sup_{c\in \mathbb{R}^n_{++}\cup\{\mathbf{0}\}} \left(\sup_{\gamma_0 \in F(c)} \gamma_0 - \max_{i=1,\dots,n} \xi_i \cdot \gamma_i \right) \\
&= \sup_{c\in \mathbb{R}^n_{++}\cup\{\mathbf{0}\}} \left(\sup_{(c,\gamma_0) \in U} \gamma_0 - \max_{i=1,\dots,n} \xi_i \cdot \gamma_i \right) \, .
\end{aligned}$$

Az utolsó előtti egyenlőség azért igaz, mert a belső szuprémumban $\max_{i=1,\dots,n} \xi_i \cdot \gamma_i$ konstans, az utolsó egyenlőség pedig azért igaz, mert $\sup_{\gamma_0\in F(c)} \gamma_0 = \sup_{(c,\gamma_0)\in U} \gamma_0$.
□

4.8 Állítás. (monoton fogyó és sugár-konkáv függvény reprezentációja)
Ha egy $f : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ függvény monoton fogyó és sugár-konkáv, akkor $\forall\, x \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

1.

$$f(x) = \min_{(y,-\delta_y)\in \mathbb{R}^n_{++}\times \partial^s f_y(1)} \left(f_y(1) + \delta_y - \min_{i=1,\dots,n} \frac{\xi_i}{\eta_i} \cdot \delta_y \right) \, .$$

2. Így az

$$\begin{aligned}
U &:= \{(\delta_y \cdot y^{-1}, f(y) + \delta_y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \;:\; y \in \mathbb{R}^n_{++},\; -\delta_y \in \partial^s f_y(1)\} \\
&\subset (\mathbb{R}^n_{++} \cup \{\mathbf{0}\}) \times \mathbb{R} \quad \textit{halmaz mellett}
\end{aligned}$$

$$f(x) = \min_{(c,\gamma)\in U} \left(\gamma_0 - \min_{i=1,\dots,n} \xi_i \cdot \gamma_i \right) \, .$$

3. Legyen $g : \mathbb{R}^n_{++} \cup \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ *az a függvény, amelyre* $\forall\ c \in \mathbb{R}^n_{++} \cup \{\mathbf{0}\}$ *esetén*

$$g(c) := \inf\{\gamma_0 \in \mathbb{R}\ :\ (c, \gamma_0) \in U\}\,,$$

ekkor $\forall\ x \in \mathbb{R}^n_{++}$ *esetén*

$$f(x) = \inf_{c \in \mathbb{R}^n_{++} \cup \{\mathbf{0}\}} \left(g(c) - \min_{i=1.\ldots,n} \gamma_i \cdot \xi_i \right)\,.$$

A ∂^s *a szuperderiváltat jelöli.*

Bizonyítás.
Az előző bizonyításhoz teljesen hasonlóan megy, nyilván azzal a különbséggel, hogy a fenti 4.3. állítás második egyenlőtlenségét használjuk, és a szuperderiváltra vonatkozó egyenlőtlenség is fordított irányú.
A 3. bizonyításához a fenti 4.7. állítás 3. pontja bizonyításában lévő észrevétel analógját használjuk, amely szerint

$$\inf_{(x,y) \in \operatorname{graph} F} f(x,y) = \inf_{x \in X} \left(\inf_{y \in F(x)} f(x,y) \right)\,.$$

□

4.9 Állítás. (monoton növő és sugár-konvex függvény reprezentációja)
Ha egy $f : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ *függvény monoton növő és sugár-konvex, akkor* $\forall\ x \in \mathbb{R}^n_{++}$ *esetén*

1.
$$f(x) = \max_{(y,\delta_y) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \partial f_y(1)} \left(f_y(1) - \delta_y + \min_{i=1,\ldots,n} \frac{\xi_i}{\eta_i} \cdot \delta_y \right)\,.$$

2. Így az

$$\begin{aligned} U &:= \{(\delta_y \cdot y^{-1}, f(y) - \delta_y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\ :\ y \in \mathbb{R}^n_{++},\ \delta_y \in \partial f_y(1)\} \\ &\subset (\mathbb{R}^n_{++} \cup \{\mathbf{0}\}) \times \mathbb{R} \quad \textit{halmaz mellett} \end{aligned}$$

$$f(x) = \max_{(c,\gamma) \in U} \left(\gamma_0 + \min_{i=1,\ldots,n} \xi_i \cdot \gamma_i \right)\,.$$

3. Legyen $g : \mathbb{R}^n_{++} \cup \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ *az a függvény, amelyre* $\forall\ c \in \mathbb{R}^n_{++} \cup \{\mathbf{0}\}$ *esetén*

$$g(c) := \sup\{\gamma_0 \in \mathbb{R}\ :\ (c, \gamma_0) \in U\}\,,$$

ekkor $\forall\ x \in \mathbb{R}^n_{++}$ *esetén*

$$f(x) = \sup_{c \in \mathbb{R}^n_{++} \cup \{\mathbf{0}\}} \left(g(c) + \min_{i=1.\ldots,n} \gamma_i \cdot \xi_i \right)\,.$$

Bizonyítás.
Az előző bizonyításokhoz teljesen hasonlóan megy, nyilván azzal a különbséggel, hogy a 4.4. állítás első egyenlőtlenségét, és a szubderiváltra vonatkozó egyenlőtlenséget használjuk, valamint — és ez a legfontosabb — mivel f monoton növő, azért $\forall\ \delta_y \in \partial f_y(1)$ esetén $\delta_y \geq 0$, ezért most nem kellenek a -1-gyel való szorzás körülményeskedései.
A 3. bizonyításához a fenti 4.7. állítás 3. pontja bizonyításában lévő észrevételt használjuk. □

4.10 Állítás. (monoton növő és sugár-konkáv függvény reprezentációja)
Ha egy $f : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ *függvény monoton növő és sugár-konkáv, akkor* $\forall\ x \in \mathbb{R}^n_{++}$ *esetén*

1.

$$f(x) = \min_{(y,\delta_y)\in\mathbb{R}^n_{++}\times\partial^s f_y(1)} \left(f_y(1) - \delta_y + \max_{i=1,\ldots,n} \frac{\xi_i}{\eta_i} \cdot \delta_y \right) .$$

2. Így az

$$\begin{aligned} U &:= \{(\delta_y \cdot y^{-1}, f(y) - \delta_y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ :\ y \in \mathbb{R}^n_{++},\ \delta_y \in \partial^s f_y(1)\} \\ &\subset (\mathbb{R}^n_{++} \cup \{\mathbf{0}\}) \times \mathbb{R} \ \ \textit{halmaz mellett} \end{aligned}$$

$$f(x) = \min_{(c,\gamma)\in U} \left(\gamma_0 + \max_{i=1,\ldots,n} \xi_i \cdot \gamma_i \right) .$$

3. Legyen $g : \mathbb{R}^n_{++} \cup \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ *az a függvény, amelyre* $\forall\ c \in \mathbb{R}^n_{++} \cup \{\mathbf{0}\}$ *esetén*

$$g(c) := \inf\{\gamma_0 \in \mathbb{R} \ :\ (c, \gamma_0) \in U\} ,$$

ekkor $\forall\ x \in \mathbb{R}^n_{++}$ *esetén*

$$f(x) = \inf_{c\in\mathbb{R}^n_{++}\cup\{\mathbf{0}\}} \left(g(c) + \max_{i=1.\ldots,n} \gamma_i \cdot \xi_i \right) .$$

A ∂^s *a szuperderiváltat jelöli.*

Bizonyítás.
Az előző bizonyításokhoz teljesen hasonlóan megy, nyilván azzal a különbséggel, hogy a fenti 4.4. állítás második egyenlőtlenségét használjuk, és a szuperderiváltra vonatkozó egyenlőtlenség is fordított irányú, valamint mivel f monoton növő, azért $\forall\ \delta_y \in \partial f_y(1)$ esetén $\delta_y \geq 0$.
A 3. bizonyításához a fenti 4.8. állítás 3. pontja bizonyításában lévő észrevételt használjuk. □

4.11 Állítás.
Egy $f : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ *függvény monoton fogyó és sugár-konvex, akkor és csak akkor, ha* $\exists\ U \subset \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}$ *halmaz, hogy* $\forall\ x \in \mathbb{R}^n_{++}$ *esetén*

$$f(x) = \sup_{(c,\gamma)\in U} \left(\gamma_0 - \max_{i=1,\ldots,n} \gamma_i \cdot \xi_i \right) .$$

Bizonyítás.
szükségesség: A 4.7. állítás.
elégségesség:
(1) monoton csökkenő: Ha $x_1 \leq x_2$ akkor $\forall\ (c, \gamma) \in U$ esetén

$$\gamma_0 - \max_{i=1.\ldots,n} \gamma_i \cdot \xi_i^{(1)} \ \leq\ \gamma_0 - \max_{i=1.\ldots,n} \gamma_i \cdot \xi_i^{(2)} .$$

(2) sugár-konvex: $\forall\ x \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\begin{aligned} f_x(\alpha) &= f(\alpha x) = \sup_{(c,\gamma_0)\in U} (\gamma_0 - \max_{i=1.\ldots,n} \gamma_i \cdot \xi_i \cdot \alpha) \\ &= \sup_{(c,\gamma_0)\in U} (\gamma_0 - \alpha \cdot \max_{i=1.\ldots,n} \gamma_i \cdot \xi_i) \\ &= \sup_{(c,\gamma_0)\in U} (\beta(c, \gamma_0) \cdot \alpha + \gamma_0) \end{aligned} \tag{4.1}$$

azaz $f_x = \sup_{(c,\gamma_0)\in U}(\beta(c, \gamma_0) \cdot . + \gamma_0)$, azaz f affin függvények felső burkolója, így konvex. □

4.12 Megjegyzés.
1. A bizonyítás elégséges része ugyanígy megy pl. homogén függvények esetén is.
2. Ehhez az állításhoz hasonlóan láthatók be a további analóg állítások.

4.13 Állítás.
Egy $f : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ *függvény monoton fogyó és sugár-konkáv, akkor és csak akkor, ha* $\exists\, U \subset \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}$ *halmaz, hogy* $\forall\, x \in \mathbb{R}^n_{++}$ *esetén*

$$f(x) = \inf_{(c,\gamma_0)\in U} \left(\gamma_0 - \min_{i=1,\dots,n} \gamma_i \cdot \xi_i\right) .$$

4.14 Állítás.
Egy $f : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ *függvény monoton növő és sugár-konvex, akkor és csak akkor, ha* $\exists\, U \subset \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}$ *halmaz, hogy* $\forall\, x \in \mathbb{R}^n_{++}$ *esetén*

$$f(x) = \sup_{(c,\gamma_0)\in U} \left(\gamma_0 + \min_{i=1,\dots,n} \gamma_i \cdot \xi_i\right) .$$

4.15 Állítás.
Egy $f : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ *függvény monoton növő és sugár-konkáv, akkor és csak akkor, ha* $\exists\, U \subset \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}$ *halmaz, hogy* $\forall\, x \in \mathbb{R}^n_{++}$ *esetén*

$$f(x) = \inf_{(c,\gamma_0)\in U} \left(\gamma_0 + \max_{i=1,\dots,n} \gamma_i \cdot \xi_i\right) .$$

4.16 Megjegyzés. (a 4.7. állítás eredeti bizonyítása)
Legyen $y \in \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges. Mivel f_y konvex, azért $\partial f_y(1) \neq \emptyset$. Mivel f_y monoton csökkenő, azért $\forall\, -\delta_y \in \partial f_y(1)$ nempozitív, így δ_y nemnegatív, ezért $\delta_y \cdot y \in \mathbb{R}^n_{++} \cup \{\mathbf{0}\}$, így $U \subset\ (\mathbb{R}^n_{++} \cup \{\mathbf{0}\}) \times \mathbb{R}$.
Legyen $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges.
"$\leq$" : Legyen $(c, \gamma) \in U$ tetszőleges, ekkor $\exists\, y \in \mathbb{R}^n_{++}$, és $-\delta_y \in \partial f_y(1)$, hogy $c = \delta_y \cdot y^{-1}$, így $\gamma_i = \frac{\delta_y}{\eta_i}$, valamint $\gamma = f(y) + \delta_y = f_y(1) + \delta_y$. Ekkor

$$\gamma - \max_{i=1.\dots,n} \gamma_i \cdot \xi_i = f_y(1) + \delta_y - \delta_y \cdot \max_{i=1.\dots,n} \frac{\delta_y}{\eta_i} \cdot \xi_i \leq^*$$

mivel $-\delta_y \in \partial f_y(1) \Leftrightarrow \forall\, \zeta\mathbb{R}$ esetén $(-\delta_y)\cdot(\zeta - 1) \leq f_y(\zeta) - f_y(1)$, azaz $f_y(1) \leq f_y(\zeta) + \delta_y \cdot \zeta - \delta_y$, így speciálisan $\zeta = \max_{i=1.\dots,n} \frac{\xi_i}{\eta_i}$ esetén is $f_y(1) \leq f_y(\max_{i=1.\dots,n} \frac{\xi_i}{\eta_i}) + \delta_y \cdot \max_{i=1.\dots,n} \frac{\xi_i}{\eta_i} - \delta_y$, ezért

$$\begin{aligned} \leq^* &\quad (f_y(\max_{i=1.\dots,n} \frac{\xi_i}{\eta_i}) + \delta_y \cdot \max_{i=1.\dots,n} \frac{\xi_i}{\eta_i} - \delta_y) + \delta_y - \delta_y \cdot \max_{i=1.\dots,n} \frac{\delta_y}{\eta_i} \cdot \xi_i \\ = &\quad f_y\left(\max_{i=1.\dots,n} \frac{\delta_y}{\eta_i}\right) = f\left((\max_{i=1.\dots,n} \frac{\delta_y}{\eta_i}) \cdot y\right) \leq f(x) . \end{aligned}$$

A legutolsó egyenlőtlenség azért igaz, mert f monoton csökkenő, valamint $\forall\, k = 1, \dots, n$ esetén $\xi_k = \dfrac{\xi_k}{\eta_k} \cdot \eta_k \leq \max\limits_{i=1.\dots,n} \dfrac{\xi_i}{\eta_i} \cdot \eta_k$, így $x \leq f_y\left(\max\limits_{i=1.\dots,n} \dfrac{\xi_i}{\eta_i}\right) \cdot y$.
Összefoglalva: $\forall\, (c, \gamma) \in U$ esetén $\gamma - \max\limits_{i=1.\dots,n} \gamma_i \cdot \xi_i \leq f(x)$, így

$$\sup_{(c,\gamma)\in U} (\gamma - \max_{i=1.\dots,n} \gamma_i \cdot \xi_i) \leq f(x) .$$

"$=$" : Speciálisan $y = x$ ekkor $\forall\, \delta_y \in \partial f_x(1)$ esetén a $(c, \gamma) := (\delta_y \cdot x^{-1}, f(x) + \delta_y) \in U$ mellett $\gamma - \max\limits_{i=1.\dots,n} \gamma_i \cdot \xi_i = f(x) + \delta - \max\limits_{i=1.\dots,n} \dfrac{\delta_y}{\xi_i} \cdot \xi_i = f(x)$. □

4.2 Az indirekt hasznossági függvény konvexitása

Tekintsük egy adott $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ hasznossági függvény mellett a $p \in \mathbb{R}^n_{++}$, paraméterrel paraméterezett (miközben a μ paramétert 1-nek rögzítettük) az (1.2) haszonmaximalizálási feladatsereget:

$$\begin{cases} u(x) \to \max \\ \langle p, x\rangle \leq 1 \quad \text{és} \quad x \in \mathbb{R}^n_+ \end{cases}$$

Az (1.2) feladatsereg értékfüggvénye az $u^\vee(1,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény, azaz $\forall\, p \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$u^\vee(1,p) = \max_{x \in \mathbb{R}^n_{++} \cap \langle p,.\rangle^{-1}(-\infty,1]} u(x)\,.$$

Tekintsük továbbá az $u^\vee(1,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ értékfüggvénynek a $\mathrm{cl}(u^\vee(1,.)) : \mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ a.f.f. burkát, és vegyük az (1.2) feladatseregnek az $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ paraméterrel paraméterezett (1.4) duális feladatseregét:

$$\begin{cases} \mathrm{cl}(u^\vee(1,p)) \to \min \\ \langle p, x\rangle \leq 1 \quad \text{és}\ p \in \mathbb{R}^n_+ \end{cases}$$

Az (1.4) feladatsereg értékfüggvénye az $u^{\vee\vee} : \mathbb{R}^n_{++} \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény, amelyre $\forall\, x \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$u^{\vee\vee}(x) = \min_{\mathbb{R}^n_+ \,\cap\, \langle .,x\rangle^{-1}(-\infty,1]} \mathrm{cl}(u^\vee(1,.))$$

4.17 Állítás. (az indirekt hasznossági függvény konvexitása)
Ha az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ hasznossági függvény monoton növő, valamint az $u|_{\mathbb{R}^n_{++}} \circ h : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ függvény sugár-konvex, akkor az $u^\vee(1,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ indirekt hasznossági függvény konvex .

Bizonyítás.
Mivel egyrészt az $u|_{\mathbb{R}^n_{++}} \circ h : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ függvény sugár-konvex, másrészt az u függvény monoton növő, így az $u \circ h$ függvény monoton fogyó, azért az 4.7. állítás 3. szerint a $g(c) = \sup\{\gamma \ :\ (c,\gamma) \in U\}$ függvény mellett $\forall\, x \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$u(x^{-1}) = (u \circ h)(x) = \sup_{c \in \mathbb{R}^n_{++} \cup \{\mathbf{0}\}} \left(g(c) - \max_{i=1.\,\dots,n} \gamma_i \cdot \xi_i \right),$$

ezért $\forall\, x \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$u(x) = \sup_{c \in \mathbb{R}^n_{++} \cup \{\mathbf{0}\}} \left(g(c) - \max_{i=1.\,\dots,n} \frac{\gamma_i}{\xi_i} \right).$$

Ezek szerint az $u^\vee(1,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ értékfüggvény $\forall\, p \in \mathbb{R}^n_{++}$ pontban

$$\begin{aligned} u^\vee(1,p) &= \max_{x \in \mathbb{R}^n_{++} \cap \langle p,.\rangle^{-1}(-\infty,1]} u(x) \\ &= \max_{x \in \mathbb{R}^n_{++} \cap \langle p,.\rangle^{-1}(-\infty,1]} \ \sup_{c \in \mathbb{R}^n_{++} \cup \{\mathbf{0}\}} \left(g(c) - \max_{i=1.\,\dots,n} \frac{\gamma_i}{\xi_i} \right) \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n_{++} \cap \langle p,.\rangle^{-1}(-\infty,1]} \ \sup_{c \in \mathbb{R}^n_{++} \cup \{\mathbf{0}\}} \left(g(c) - \max_{i=1.\,\dots,n} \frac{\gamma_i}{\xi_i} \right) \\ &= \sup_{c \in \mathbb{R}^n_{++} \cup \{\mathbf{0}\}} \left(g(c) - \inf_{x \in \mathbb{R}^n_{++} \cap \langle p,.\rangle^{-1}(-\infty,1]} \ \max_{i=1.\,\dots,n} \frac{\gamma_i}{\xi_i} \right). \end{aligned}$$

A legutolsó egyenlőtlenség azért igaz, mert a szuprémum definíciója szerint tetszőleges X, Y halmazok, és $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ függvény esetén

$$\sup_{x\in X}(\sup_{y\in Y} f(x,y)) = \sup_{(x,y)\in X\times Y} f(x,y) = \sup_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y) \ .$$

Belátjuk a következőt:

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n_{++}\cap\langle p,.\rangle^{-1}(-\infty,1]} \ \max_{i=1,\ldots,n} \frac{\gamma_i}{\xi_i} = \langle p,c\rangle \,,$$

valamint ezt az $x_0 := \dfrac{c}{\langle p,c\rangle} \in \mathbb{R}^n_{++}$ pontban éri el.
Ugyanis: Az $x_0 := \frac{c}{\langle p,c\rangle}$ pontra
egyrészt $\langle p, \dfrac{c}{\langle p,c\rangle}\rangle = 1$, így $x_0 \in \mathbb{R}^n_{++} \cap \langle p,.\rangle^{-1}(-\infty,1]$,
másrészt $\forall\ i = 1,\ldots,n$ esetén $\dfrac{\gamma_i}{\xi^0_i} = \dfrac{\gamma_i}{\frac{\gamma_i}{\langle p,c\rangle}} = \langle p,c\rangle$, így $\displaystyle\max_{i=1,\ldots,n} \frac{\gamma_i}{\xi^0_i} = \langle p,c\rangle$.
Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists$ olyan $x \in \mathbb{R}^n_{++}\cap\langle p,.\rangle^{-1}(-\infty,1]$ pont, amelyre $\displaystyle\max_{i=1,\ldots,n} \frac{\gamma_i}{\xi_i} < \langle p,c\rangle$. Ekkor $\forall\ i = 1,\ldots,n$ esetén

$$\frac{\gamma_i}{\xi_i} < \langle p,c\rangle \,, \ \text{azaz} \ \frac{\gamma_i}{\langle p,c\rangle} < \xi_i \ ,$$

ezért

$$\langle p,x\rangle = \sum_{i=1}^n \pi_i\cdot\xi_i > \sum_{i=1}^n \pi_i \cdot \frac{\gamma_i}{\langle p,c\rangle} = \frac{1}{\langle p,c\rangle}\sum_{i=1}^n \pi_i\cdot\gamma_i = 1\,, \ \text{így} \ \langle p,x\rangle > 1\,,$$

ami ellentmondás.
Ezért

$$u^\vee(1,p) = \sup_{c\in\mathbb{R}^n_{++}\cup\{\mathbf{0}\}} (\, g(c) - \langle p,c\rangle\,) \ .$$

Ezek szerint $u^\vee$ affin függvények felső burkolója, ezért konvex. □

4.18 Állítás. (az indirekt hasznossági függvény konvexitása II.)
Legyen $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ folytonos, kvázikonkáv és monoton növő hasznossági függvény. Ekkor az $u|_{\mathbb{R}^n_{++}} \circ h : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ függvény sugár-konvex pontosan akkor, ha az $u^\vee(1,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ indirekt hasznossági függvény konvex .

Bizonyítás.
szükségesség: Az előző 4.17. állítás.
elégségesség: Az $u^\vee(1,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ indirekt hasznossági függvény a feltétel szerint konvex, valamint ismert, hogy folytonos, így a.f.f is, továbbá, mivel u monoton növekedő, azért monoton csökkenő is. Így a $\mathrm{cl}(u^\vee(1,.)) : \mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ a.f.f. burka szintén konvex és csökkenő.
Mivel az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ hasznossági függvény folytonos, kvázikonkáv és monoton növekedő, azért az 1.16. állítás (1) szerint az (1.4) duális feladat $u^{\vee\vee} : \mathbb{R}^n_{++} \to \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvénye az $\mathbb{R}^n_{++}$ halmazon megegyezik az u függvénnyel, azaz $\forall\ x \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$u(x) = u^{\vee\vee}(x) = \min_{p\in\mathbb{R}^n_+\cap\langle.,x\rangle^{-1}(-\infty,1]} \mathrm{cl}(u^\vee(1,p)) \ . \tag{4.2}$$

Mivel $\mathrm{cl}(u^\vee(1,.))$ a.f.f. és konvex, azért a konjugált függvényre vonatkozó 7.55. állítás 3. (Fenchel-Moreau-tétel) szerint $(\mathrm{cl}(u^\vee(1,.)))^{**} = \mathrm{cl}(u^\vee(1,.))$ azaz $\forall\ p \in \mathbb{R}^n_+$ esetén

$$\mathrm{cl}(u^\vee)(1,p) = \sup_{c\in\mathbb{R}^n_+} (-\langle p,c\rangle - (\mathrm{cl}(u^\vee))^*(1,-c))\,. \tag{4.3}$$

A (4.2) és (4.3)-ből következik, hogy $\forall\ x \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\begin{aligned}
u(x) &= u^{\vee\vee}(x) = \min_{p\in\mathbb{R}^n_+\cap\langle .,x\rangle^{-1}(-\infty,1]} \mathrm{cl}(u^\vee)(1,p) \\
&= \min_{p\in\mathbb{R}^n_+\cap\langle .,x\rangle^{-1}(-\infty,1]} \mathrm{cl}(u^\vee)^{**}(1,p) \\
&= \min_{p\in\mathbb{R}^n_+\cap\langle .,x\rangle^{-1}(-\infty,1]} \sup_{c\in\mathbb{R}^n_+} (-\langle p,c\rangle - (\mathrm{cl}(u^\vee))^*(1,-c)) = \\
&= \sup_{c\in\mathbb{R}^n_+} \min_{p\in\mathbb{R}^n_+\cap\langle .,x\rangle^{-1}(-\infty,1]} (-\langle p,c\rangle - (\mathrm{cl}(u^\vee))^*(1,-c)) \\
&= \sup_{c\in\mathbb{R}^n_+} \left[\left(\min_{p\in\mathbb{R}^n_+\cap\langle .,x\rangle^{-1}(-\infty,1]} -\langle p,c\rangle\right) - (\mathrm{cl}(u^\vee))^*(1,-c)\right] \\
&= \sup_{-c\in\mathbb{R}^n_-\cap((\mathrm{cl}(u^\vee))^*)^{-1}[-\infty,\infty)} (-(\mathrm{cl}(u^\vee))^*(1,-c) - \max_{p\in\mathbb{R}^n_+\cap\langle .,x\rangle^{-1}(-\infty,1]} \langle p,c\rangle) \\
&= \sup_{-c\in\mathbb{R}^n_-\cap((\mathrm{cl}(u^\vee))^*)^{-1}[-\infty,\infty)} \left(-(\mathrm{cl}(u^\vee))^*(1,-c) - \max_{i=1,\ldots,n} \langle \frac{1}{\xi_i} e_i, c\rangle\right).
\end{aligned}$$

A negyedik egyenlőség azért igaz, mert $\mathbb{R}^n_+ \cap \langle .,x\rangle^{-1}(-\infty,1]$ kompakt halmaz. A legutolsó egyenlőség azért igaz, mert $\mathbb{R}^n_+ \cap \langle .,x\rangle^{-1}(-\infty,1]$ poliéder, így $\langle .,c\rangle$ e poliéder extremális pontjaiban veszi fel a maximumot, ezért

$$\max_{p\in\mathbb{R}^n_+\cap\langle .,x\rangle^{-1}(-\infty,1]} \langle p,c\rangle = \max_{i=1,\ldots,n} \langle \frac{1}{\xi_i} e_i, c\rangle .$$

Ezek szerint

$$\begin{aligned}
(u\circ h)(x) &= u(x^{-1}) \\
&= \sup_{-c\in\mathbb{R}^n_-\cap((\mathrm{cl}u^\vee)^*)^{-1}[-\infty,\infty)} \left(-(\mathrm{cl}u^\vee)^*(-c) - \max_{i=1,\ldots,n} \langle \xi_i \cdot e_i, c\rangle\right) \\
&= \sup_{-c\in\mathbb{R}^n_-\cap((\mathrm{cl}u^\vee)^*)^{-1}[-\infty,\infty),\gamma=-(\mathrm{cl}u^\vee)^*(-c)} \left(\gamma - \max_{i=1,\ldots,n} \xi_i \cdot \gamma_i\right).
\end{aligned}$$

Ennek alapján a fenti 4.11. állítás szerint $u|_{\mathbb{R}^n_{++}} \circ h$ sugár-konvex. □

4.19 Állítás. (a hasznossági függvény konkávitása)
1. Ha az $u^\vee : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ indirekt hasznossági függvény monoton fogyó, valamint a $u^\vee \circ h : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ függvény sugár-konkáv, akkor a $\mathrm{cl}(u^{\vee\vee}) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ függvény konkáv.

2. Tegyük fel, hogy az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ hasznossági függvény folytonos, kvázikonkáv és monoton növekedő. Ha az $u^\vee : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ indirekt hasznossági függvény monoton fogyó, valamint a $u^\vee \circ h : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ függvény sugár-konkáv, akkor az $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ hasznossági függvény konkáv.

Bizonyítás.
1. Mivel egyrészt az $u^\vee \circ h : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ függvény sugár-konkáv, másrészt az $u^\vee$ függvény monoton fogyó, így az $u^\vee \circ h$ függvény monoton növő, azért a 4.10. állítás 3. szerint a $g(c) = \inf\{\gamma\ :\ (c,\gamma) \in U\}$ függvény mellett $\forall\ p \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$u^\vee(p^{-1}) = (u^\vee \circ h)(p) = \inf_{c\in\mathbb{R}^n_{++}\cup\{\mathbf{0}\}} \left(g(c) + \max_{i=1.\ldots,n} \gamma_i \cdot \pi_i\right),$$

ezért $\forall\ p \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$u^\vee(p) = \inf_{c\in\mathbb{R}^n_{++}\cup\{\mathbf{0}\}} \left(g(c) + \max_{i=1.\ldots,n} \frac{\gamma_i}{\pi_i}\right).$$

Ezek szerint az $u^{\vee\vee} : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ értékfüggvény $\forall\, x \in \mathbb{R}^n_{++}$ pontban

$$\begin{aligned} u^{\vee\vee}(x) &= \min_{p \in \mathbb{R}^n_{++} \cap \langle .,x\rangle^{-1}(-\infty,1]} u^{\vee}(p) \\ &= \min_{p \in \mathbb{R}^n_{++} \cap \langle .,x\rangle^{-1}(-\infty,1]} \inf_{c \in \mathbb{R}^n_{++} \cup \{\mathbf{0}\}} \left(g(c) + \max_{i=1.\,\dots,n} \frac{\gamma_i}{\pi_i} \right) \\ &= \inf_{c \in \mathbb{R}^n_{++} \cup \{\mathbf{0}\}} \left(g(c) + \inf_{p \in \mathbb{R}^n_{++} \cap \langle .,x\rangle^{-1}(-\infty,1]} \max_{i=1.\,\dots,n} \frac{\gamma_i}{\pi_i} \,. \right) \end{aligned}$$

Belátjuk a következőt:

$$\inf_{p \in \mathbb{R}^n_{++} \cap \langle .,x\rangle^{-1}(-\infty,1]} \max_{i=1,\dots,n} \frac{\gamma_i}{\pi_i} = \langle c, x\rangle \,,$$

valamint ezt a $p_0 := \dfrac{c}{\langle c, x\rangle}$ pontban éri el.

Ugyanis: A $p_0 = \dfrac{c}{\langle c, x\rangle} \in \mathbb{R}^n_{++}$ pontra

egyrészt $\langle \dfrac{c}{\langle c, x\rangle}, x\rangle = 1$, így $p_0 \in \mathbb{R}^n_{++} \cap \langle .,x\rangle^{-1}(-\infty,1]$,

másrészt $\forall\, i = 1,\dots,n$ esetén $\dfrac{\gamma_i}{\pi_i^0} = \dfrac{\gamma_i}{\frac{\gamma_i}{\langle c,x\rangle}} = \langle c, x\rangle$, így $\displaystyle\max_{i=1,\dots,n} \frac{\gamma_i}{\pi_i^0} = \langle c, x\rangle$.

Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists$ olyan $p \in \mathbb{R}^n_{++} \cap \langle .,x\rangle^{-1}(-\infty,1]$ amelyre $\displaystyle\max_{i=1,\dots,n} \frac{\gamma_i}{\pi_i} < \langle c, x\rangle$. Ekkor $\forall\, i = 1,\dots,n$ esetén

$$\frac{\gamma_i}{\pi_i} < \langle c, x\rangle \,, \text{ azaz } \frac{\gamma_i}{\langle c, x\rangle} < \pi_i \;,$$

ezért

$$\langle p, x\rangle = \sum_{i=1}^n \pi_i \cdot \xi_i > \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{\langle c, x\rangle} \cdot \xi_i = \frac{1}{\langle c, x\rangle} \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \xi_i = 1 \,, \text{ így } \langle p, x\rangle > 1 \,,$$

ami ellentmondás.

Ezért

$$u^{\vee\vee}(x) = \inf_{c \in \mathbb{R}^n_{++} \cup \{\mathbf{0}\}} (\, g(c) + \langle p, c\rangle \,) \;.$$

Ezek szerint az $u^{\vee\vee} : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ értékfüggvény affin függvények alsó burkolója, ezért konkáv, így a $\mathrm{cl}(u^{\vee\vee}) : \mathbb{R}^n_{+} \to \mathbb{R}$ a.f.f. burka is konkáv.

2. Mivel $u : \mathbb{R}^n_{+} \to \mathbb{R}$ folytonos, kvázikonkáv és monoton növekedő, azért az 1.16. állítás (4) szerint az (1.4) duális feladat értékfüggvényének a $\mathrm{cl}(u^{\vee\vee}) : \mathbb{R}^n_{+} \to \mathbb{R}$ affin burka megegyezik az u függvénnyel: $\mathrm{cl}(u^{\vee\vee}) = u$. Emiatt 1.-ből következik, hogy az $u : \mathbb{R}^n_{+} \to \mathbb{R}$ hasznossági függvény konkáv. □

5. Fejezet

Érzékenységvizsgálatok

Az első két fejezetben is kiemelt helyet kaptak a komparatív statikai elemzések, ezen belül is elsősorban a megoldásleképezések folytonossági vizsgálatai. Ebben a fejezetben a haszonmaximalizálási és költségminimalizálási feladat feltételi leképezéseinek és megoldásleképezéseinek, azaz a keresleti leképezéseknek további érzékenységvizsgálatait végezzük el a Kuratowski-limeszfogalom segítségével. A halmazsorozatok Kuratowski-limeszének fogalma segítségével be lehet vezetni a függvénysorozatok epi- illetve hypokonvergenciájának fogalmát is, amelyekkel az indirekt hasznossági függvénynek illetve a kiadási függvénynek a paraméterekre való érzékenysége tovább elemezhető. Flam (1994) [20] és Luchetti-Patrone (1986) [30] dolgozatának a menetét követtük, de felhasználásra kerültek a Wets (1983) [42], Hogan (1973) [24], Attouch (1984) [2] dolgozatok is.

A haszonmaximalizálási és költségminimalizálási feladat jellemzésén túl a tárgyalásba beleillik a profitmaximalizálási feladat elemzése is.

Ezek után lehetőség kínálkozik az általános egyensúlyelméletben az aggregált kereslet és az aggregált kínálat elemzésére, sőt annak vizsgálatára is, hogy az egyensúlyi pontok miképpen függnek a gazdaság paramétereitől. Itt az egyensúly (Hicks-féle) statikus vizsgálatát végezzük el, nem pedig egy adott áralkalmazkodási szabályon alapuló úgynevezett dinamikus stabilitás vizsgálatát.

A fejezet a Függeléknek a konvex analízissel, a Kuratowszki-limesszel valamint az epi- illetve hypokonvergenciával foglalkozó alfejezeteire támaszkodik.

5.1 Az alapfeladatok érzékenységvizsgálata

Ebben az alfejezetben először a haszonmaximalizálási feladat és a költségminimalizálási feladat érzékenységvizsgálatát végezzük el. Ezután a profitmaximalizálási feladattal foglalkozunk. Ez a feladat a költségminimalizálási feladattal rokon, de annál lényegesen egyszerűbb. Szerencsés módon a matematikai háttere pontosan megegyezik a konvex függvényekre bevezetett szubderivált, illetve a lokálisan Lipschitz-folytonos függvényekre bevezetett Clarke-féle derivált hátterével, ahogyan a Függelékben, illetve bővebben Clarke (1983) [4] könyvben látható.

5.1.1 A haszonmaximalizálási feladat érzékenységvizsgálata

Az (1.1) haszonmaximalizálási feladatsereg érzékenységvizsgálatához első lépésben a haszonmaximalizálási feladatsereg egy általánosítását elemezzük.

Legyenek $\forall\ n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n : \mathbb{R}^n_+ \to [-\infty, +\infty)$ és $f : \mathbb{R}^n_+ \to [-\infty, +\infty)$ adott függvények, amelyeket célfüggvényeknek nevezünk. továbbá legyenek H_n és $H \subset \mathbb{R}^n_+$ halmazok, amelyeket feltételi halmazoknak nevezünk.

Tekintsük $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén a következő feladatsereget:

$$\begin{cases} f_n(x) \to \max \\ x \in H_n \end{cases} \tag{5.1}$$

5.1 Definíció.
$\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén az (5.1) feladat

1. **értékének** nevezzük azt az $\nu_n \in \mathbb{R}$ számot, amelyre

$$\nu_n := \sup_{H_n} f_n\,.$$

2. **megoldási halmazának** nevezzük azt az $X_n \subset \mathbb{R}^n_+$ halmazt, amelyre

$$X_n := \operatorname*{argmax}_{H_n} f_n$$

5.2 Állítás.
Álljanak fenn a 7.79 állítás feltételei, amely szerint legyenek $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n : \mathbb{R}^n_+ \to [-\infty, +\infty)$ és $f : \mathbb{R}^n_+ \to [-\infty, +\infty)$ f.f.f. és konkáv függvények, amelyekre $\text{Kc-lim}\,\text{hypo}\, f_n = \text{hypo}\, f$. Legyenek $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén H_n és $H \subset \mathbb{R}^n_+$ konvex, zárt halmazok, amelyekre $\text{Kc-lim}\, H_n = H$. Tegyük fel még, hogy

$$\text{int}\,\text{Dom}\, f \cap H \neq \emptyset\,, \ \textit{vagy}\ \text{Dom}\, f \cap \text{int}\, H \neq \emptyset\,.$$

Ekkor

1. $\liminf \nu_n \geq \nu$, *azaz* $\liminf\,(\sup_{H_n} f_n) \leq \sup_H f$,
2. $\text{Kc-limsup}\, X_n \subset X$, *azaz* $\text{Kc-limsup}\ \text{argmax}_{H_n} f_n \subset \text{argmax}_H f$,
3. *ha* $\text{Kc-limsup}\,(\text{argmax}_{H_n} f_n) \neq \emptyset$ *akkor* $\lim \nu_n = \nu$, *azaz* $\limsup_{H_n} f_n = \sup_H f$.

BIZONYÍTÁS.
1. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < \sup_H f$ tetszőleges. Ekkor $\exists\, x \in H$ hogy $f(x) \geq \alpha$, azaz $(x, \alpha) \in \text{hypo}\, f|_H$. Mivel a 7.79 állítás szerint

$$\text{Kc-lim}\,(\text{hypo}\, f_n \cap (H_n \times \mathbb{R})) = \text{hypo}\, f \cap (H \times \mathbb{R})\,,\ \text{azaz}$$

$$\text{Kc-lim}\,(\text{hypo}\, f_n|_{H_n}) = \text{hypo}\, f|_H\,,\ \text{így}$$

$$\text{hypo}\, f|_H \subset \text{Kc-liminf}\,(\text{hypo}\, f_n|_{H_n})\,,$$

azért $\exists\, (x_n, \alpha_n) \in \text{hypo}\, f|_{H_n}$ sorozat, hogy $(x_n, \alpha_n) \to (x, \alpha)$. Mivel $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén $\alpha_n \leq f(x_n) \leq \sup_{H_n} f_n$ azért $\alpha = \lim \alpha_n \leq \limsup_{H_n} f_n$ ezért

$$\sup_H f \leq \lim \sup_{H_n} f_n\,.$$

2. $\text{Kc-limsup}\,(\text{argmax}_{H_n} f_n) \subset \text{argmax}_H f$ azt jelenti, hogy $\exists\, x_{n_k} \in \text{argmax}_{H_n} f_n$ részsorozat, hogy $x := \lim x_{n_k} \in \text{argmax}_H f$.
Legyen $\alpha < \sup_H f$ tetszőleges rögzített, ekkor az 1. szerint $\alpha < \limsup_{H_n} f_n$, ami azt jelenti, hogy $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n_k > n_0$ esetén $\alpha < \sup_{H_{n_k}} f_{n_k}$, így $\alpha < f_{n_k}(x_{n_k})$, azaz $(x_{n_k}, \alpha) \in \text{hypo}(f_{n_k}|_{H_{n_k}})$. Mivel $\lim(x_{n_k}, \alpha) = (x, \alpha)$, valamint

$$\text{Kc-lim}\,(\text{hypo}\, f_n) = \text{hypo}\, f \quad \text{és} \quad \text{Kc-lim}\, H_n = H\,,$$

azért $(x, \alpha) \in \text{hypo}(f|_H)$, azaz $x \in H$ és $\alpha \leq f(x)$.
Ezért $\sup_H f \leq f(x)$, így $\sup_H f = f(x)$, azaz $x \in \text{argmax}_H f$. □

5.3 Állítás.
Álljanak fenn a 7.80 állítás feltételei: Legyenek $\forall\ n \in \mathbb{N}$ *esetén* H_n, $K_n \subset \mathbb{R}^n$ *illetve* H, $K \subset \mathbb{R}^n$ *konvex, zárt halmazok, amelyekre* $\text{Kc-lim}\, H_n = H$ *illetve* $\text{Kc-lim}\, K_n = K$, *valamint tegyük fel, hogy*

$$\operatorname{int} K_0 \cap H_0 \neq \emptyset\,, \quad \textit{vagy} \quad K_0 \cap \operatorname{int} H_0 \neq \emptyset\,.$$

Legyenek $\forall\ n \in \mathbb{N}$ *esetén* $f_n : H_n \to [-\infty, +\infty)$ *és* $f : H \to [-\infty, +\infty)$ *folytonos függvények, amelyekre* $f_n \to_c f$. *Ekkor*

1. $\liminf \nu_n \geq \nu$,
2. $\text{Kc-limsup}\, X_n \subset X$.

Bizonyítás.
A 7.80 állítás szerint $f_n|_{H_n \cap K_n} \to_c f|_{H \cap K}$. □

5.4 Állítás. (a költségvetési halmazok konvergenciája)
Legyenek $\forall\ n \in \mathbb{N}$ *esetén* (μ_n, p_n) *és* $(\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ *amelyekre* $\lim(\mu_n, p_n) = (\mu, p)$. *Tegyük még fel, hogy* $\operatorname{int} B(\mu, p) \neq \emptyset$. *Akkor*

$$\text{Kc-lim}\, B(\mu_n, p_n) = B(\mu, p)\,.$$

Bizonyítás.
1. $\text{Kc-limsup}\, B(\mu_n, p_n) \subset B(\mu, p)$:
Legyen $x \in \text{Kc-limsup}\, B(\mu_n, p_n)$ tetszőleges, ekkor $\exists\ x_{n_k} \in B(\mu_n, p_n)$, azaz $x_{n_k} \in \mathbb{R}^n_+$ és $\langle p_{n_k}, x_{n_k} \rangle \leq \mu_{n_k}$ részsorozat, hogy $\lim x_{n_k} = x$. Ekkor $x \in \mathbb{R}^n_+$, továbbá mivel $\lim(\mu_n, p_n) = (\mu, p)$ azért $\langle p, x \rangle \leq \mu$, így $x \in B(\mu, p)$.

2. $\operatorname{int} B(\mu, p) \subset \text{Kc-liminf}\, B(\mu_n, p_n)$:
Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists\ x \in B(\mu, p)$, amelyre $x \notin \text{Kc-liminf}\, B(\mu_n, p_n)$. Ez azt jelenti, hogy $\exists\ B(x, r) \subset B(\mu, p) \subset \mathbb{R}^n_+$ gömbi környezete x-nek, amely végtelen sok $B(\mu_n, p_n)$ költségvetési halmaztól diszjunt, azaz $\exists\ (B(\mu_{n_k}, p_{n_k}))$ részsorozat, hogy

$$B(x, r) \cap B(\mu_{n_k}, p_{n_k}) \neq \emptyset\,,$$

ezért $\forall\ n_k \in \mathbb{N}$ és $z \in B(x, r)$ esetén $\langle p_{n_k}, z \rangle > \mu_{n_k}$, így $\forall\ z \in B(x, r)$ esetén $\langle p, z \rangle \geq \mu$.

Legyen $0 < \lambda < \frac{r}{||p||}$ tetszőleges, ekkor a $z := x - \lambda \cdot p$, vektorra
egyrészt $z \in B(x, r)$, így $\langle p, z \rangle \geq \mu$,
másrészt $\langle p, z \rangle = \langle p, x - \lambda \cdot p \rangle = \langle p, x \rangle + t||p||^2 < \langle p, x \rangle \leq \mu$, ami ellentmondás.
Mivel $\operatorname{int} B(\mu, p) \subset \text{Kc-liminf}\, B(\mu_n, p_n)$ és $\text{Kc-liminf}\, B(\mu_n, p_n)$ zárt, azért

$$\operatorname{cl} \operatorname{int} B(\mu, p) \subset \text{Kc-liminf}\, B(\mu_n, p_n)\,,$$

mivel $B(\mu, p)$ konvex, zárt halmaz, amelynek a belseje nemüres, azért

$$\operatorname{cl} \operatorname{int} B(\mu, p) = B(\mu, p)\,,$$

ezért

$$B(\mu, p) \subset \text{Kc-liminf}\, B(\mu_n, p_n)\,.$$

□

5.5 Állítás. (a haszonmaximalizálás további konvergenciái)
Legyenek $\forall\ n \in \mathbb{N}$ *esetén* $u_n : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ *és* $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ *konkáv hasznossági függvények, amelyekre* $\text{Kc-lim}\, \operatorname{hypo} u_n = \operatorname{hypo} u$, *valamint legyenek* (μ_n, p_n) *és* $(\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ *amelyekre* $\lim(\mu_n, p_n) = (\mu, p)$. *Tegyük még fel, hogy*

$$\operatorname{int} u^{-1}(-\infty, +\infty] \cup B(\mu, p) \neq \emptyset \quad \textit{vagy} \quad u^{-1}(-\infty, +\infty] \cup \operatorname{int} B(\mu, p) \neq \emptyset\ .$$

Ekkor

1. Kc-limsup $\mathcal{X}_n(\mu_n, p_n) = \mathcal{X}(\mu, p)$,

2. ha Kc-limsup $\mathcal{X}_n(\mu_n, p_n) \neq \emptyset$, *akkor*

$$u_n^\vee \to_c u^\vee\,, \;\; \textit{azaz}\;\; \lim(\sup(u_n(B_n))) = \sup(u(B))\,,$$

3. ha még u monoton és nem létezik lokális maximuma, akkor $u_n^\wedge \to_c u^\wedge$,

4. Kc-lim hypo $u_n^\wedge(u_n(.), .) = \operatorname{hypo} u^\wedge(u(.), .)$,

5. ha még $\nu_n \to \nu < \sup_{\mathbb{R}_+^n} u$ *akkor* Kc-lim graph $\partial u_n^\wedge(., \nu_n) = \operatorname{graph} \partial u^\wedge(., \nu)$,

6. ha Kc-limsup $\mathcal{X}_n(\mu_n, p_n) \neq \emptyset$, *akkor* Kc-lim graph $\mathcal{X}_n = \operatorname{graph} \mathcal{X}$.

Bizonyítás.
1. A 5.2 állítás 2. alapján következik.

2. A 5.2 állítás 3. alapján következik.

3. Legyen $\forall\, (\nu, p, x) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}_+^n$ esetén

$$e(\nu, p, x) := \begin{cases} \langle p, x\rangle & \text{ha} \quad x \in H(\nu, p) \\ \infty & \text{különben} \end{cases} .$$

Látható, hogy $u^\wedge(\nu, p) = \inf_x e(\nu, p, x)$. Ehhez hasonlóan definiálható $\forall\, n$ esetén $e_n(\nu_n, p_n, x_n)$. Ezek alapján az állítás következik a 5.6 állítás 1.-ből.

4. A 3.-ból következik, mivel $u^\wedge(., p)$ monoton.

5. $\forall\, \nu < \sup_{\mathbb{R}_+^n} u$ esetén $u^\wedge(\nu, .)$ konkáv, ezért a 3.-ból következik az Attouch (1984) [2] Theorem 3.66. alkalmazásával.

6. Legyen $(\mu, p, x) \in \operatorname{graph} \mathcal{X}$ tetszőleges. Be kell látni, hogy

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \text{ esetén } \exists\, (\mu_n, p_n, x_n) \in \operatorname{graph} \mathcal{X}_n\,, \text{ hogy } (\mu_n, p_n, x_n) \to (\mu, p, x)\,.$$

Legyen $\forall\, (\mu_n, p_n)$ illetve (μ, p) esetén $\nu_n := u_n^\vee(\mu_n, p_n)$ illetve $\nu := u^\vee(\mu, p)$, ekkor a 2. szerint $\nu_n \to \nu$, valamint a 3.4 állítás szerint

$$x \in \mathcal{X}(\mu, p) = \partial_2 u^\wedge(\nu, p)\,,$$

ezért az 5. szerint

$$\exists\, x_n \in \partial_2 u_n^\wedge(\nu_n, p_n) = \mathcal{X}_n(\mu_n, p_n)\,, \text{ hogy } (p_n, x_n) \to (p, x)\,.$$

Legyen $\forall\, (\nu_n, p_n)$ illetve (ν, p) esetén $\mu_n := u_n^\wedge(\nu_n, p_n)$ illetve $\mu := u^\wedge(\nu, p)$, ekkor a 3. szerint $\mu_n \to \mu$. □

5.1.2 A költségminimalizálási feladat érzékenységvizsgálata

Ebben az alfejezetben a (2.1) költségminimalizálási feladatsereg érzékenységvizsgálatát végezzük el.

5.6 Állítás. (a kiadási függvények konvergenciája)
Legyenek $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *esetén* $u_n : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ *és* $u : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ *konkáv függvények, amelyeknek nem létezik lokális maximumuk, továbbá amelyekre* Kc-lim hypo $u_n = \operatorname{hypo} u$, *valamint legyenek* $\nu_n \in \mathcal{R}(u_n)$ *és* $\nu \in \mathcal{R}(u)$ *amelyekre* $\lim \nu_n = \nu$. *Ekkor*

1. Kc-lim $H_n(\nu_n) = H(\nu)$, *azaz* Kc-lim $u_n^{-1}[\nu_n, \infty) = u_n^{-1}[\nu_n, \infty)$,

2. Kc-lim hypo $u_n^\wedge(\nu_n, .) = \operatorname{hypo} u^\wedge(\nu, .)$

Bizonyítás.
1.
Először azt látjuk be, hogy $\text{Kc-limsup}\, H_n(\nu_n) \subset H(\nu)$.
Legyen $x \in \text{Kc-limsup}\, H_n(\nu_n)$ tetszőleges, ekkor $\exists\ (x_{n_k})$, $x_{n_k} \in H_{n_k}(\nu_{n_k})$ részsorozat és $x \in H(\nu)$ hogy $x_{n_k} \to x$. Legyen $\forall\ n \neq n_k$ esetén $x_n := x$ valamint ideiglenesen $\nu_n := u(x)$, ekkor $\forall\ n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n \in H_n(u_n)$ és $x_n \to x$.
Mivel eredetileg $\lim \nu_n = \nu$ volt, azért a módosított sorozat esetén $\limsup \nu_n \geq \nu$.
Mivel $\text{Kc-lim}\, \text{hypo}\, u_n = \text{hypo}\, u$, azért $u(x) \geq \limsup u(x_n)$. Ezek szerint

$$u(x) \geq \limsup u(x_n) \geq \limsup \nu_n \geq \nu\,,$$

azaz $u(x) \geq \nu$, azaz $x \in H(\nu)$.

Másodszor azt látjuk be, hogy $H(\nu) \subset \liminf H_n(\nu_n)$.
Legyen $x \in H(\nu)$ tetszőleges, legyen $y \in H(\nu)$ olyan, amelyre $u(y) > \nu$. Mivel $\text{Kc-lim}\, \text{hypo}\, u_n = \text{hypo}\, u$, azért

$$\exists\ (x_n),\ x_n \to x \ \text{ sorozat, amelyre } \ u(x) \leq \liminf\ u(x_n)\,,$$

$$\exists\ (y_n),\ y_n \to y \ \text{ sorozat, amelyre } \ u(y) \leq \liminf\ u(y_n)\,.$$

Legyen $\forall\ m$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_{m,n} := (1 - \frac{1}{m}) \cdot x_n + \frac{1}{m} \cdot y_n\ .$$

Mivel $\forall\ m \in \mathbb{N}$ esetén $x_{m,n} \to x$, azért $\exists\ m(n) \to \infty$ indexsorozat, hogy $x_{m(n),n} \to x$. Legyen $\forall\ m$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$i_{m,n} := \begin{cases} 0 & : \ u_n(x_{m,n}) \geq \nu_n\,, \ \text{azaz } x_{m,n} \in H_n(\nu_n) \\ 1 & : \ \text{különben} \end{cases}\,.$$

Mivel $\forall\ n \in \mathbb{N}$ mellett u_n konkáv, azért $\forall\ m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} u_n(x_{m,n}) \quad &\geq \quad \liminf_{n\to\infty}\ [(1 - \frac{1}{m}) \cdot u_n(x_n) + \frac{1}{m} \cdot u_n(y_n)] \\ &\geq \quad (1 - \frac{1}{m}) \cdot u(x) + \frac{1}{m} \cdot u(y) \ > \ \nu\,, \end{aligned}$$

azaz

$$\liminf_{n\to\infty}\ u_n(x_{m,n}) > \nu\,,$$

ami azt jelenti, hogy véges sok n index kivételével

$$u_n(x_{m,n}) > \nu\,, \ \text{így} \ \ u_n(x_{m,n}) > \nu_n\,, \ \text{azaz} \ \ i_{m,n} = 0\,,$$

ezért

$$\limsup_{n\to\infty}\ i_{m,n} = 0\,.$$

Mivel ez $\forall\ m \in \mathbb{N}$ esetén igaz, azért

$$\limsup_{m\to\infty}\ \limsup_{n\to\infty}\ i_{m,n} = 0\,.$$

Az Attouch (1984) [2] Cor.1.16. szerint $\exists\ m(n) \to \infty$ indexsorozat, hogy

$$\limsup_{n\to\infty}\ i_{m(n),n}\ \leq\ \limsup_{m\to\infty}\ \limsup_{n\to\infty}\ i_{m,n}\,,$$

ezért

$$\limsup_{n\to\infty}\ i_{m(n),n} = 0\,,$$

ami azt jelenti, hogy véges sok n index kivételével

$$i_{m(n),n} = 0\,, \text{ azaz } u_n(x_{m(n),n}) > \nu_n \text{ azaz } x_{m(n),n} \in H_n(\nu_n)\,.$$

Mivel $x_{m(n),n} \to x$, azért $x \in \text{Kc-liminf}\, H_n(\nu_n)$.

2. Azt látjuk be, hogy 1. $\Leftrightarrow$ 2.:
A Függelék Konvex analízis alfejezetének az állításai alapján:

$$\begin{aligned} \text{Kc-lim}\, H_n(\nu_n) = H(\nu) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{Kc-lim}\,\text{epi}\,\Psi_{H_n(\nu_n)} = \text{epi}\,\Psi_{H(\nu)} \\ &\Leftrightarrow \quad \text{Kc-lim}\,\text{epi}\,\Psi^*_{H_n(\nu_n)} = \text{epi}\,\Psi^*_{H(\nu)} \\ &\Leftrightarrow \quad \text{Kc-lim}\,\text{epi}\,\sigma_{H_n(\nu_n)} = \text{epi}\,\sigma_{H(\nu)} \\ &\Leftrightarrow \quad \text{Kc-lim}\,\text{hypo}\,u_n^\wedge(\nu_n,.) = \text{hypo}\,u^\wedge(\nu,.)\,. \end{aligned}$$

□

5.2 A profitmaximalizálási feladat

Legyen $Y \subset \mathbb{R}^n$ adott halmaz, amit technológiai halmaznak nevezünk. Tekintsük a következő, $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ paraméterrel mint árral paraméterezett, úgynevezett profitmaximalizálási feladatsereget:

$$\begin{cases} \langle p, x\rangle \to \max \\ x \in Y \end{cases} \tag{5.2}$$

5.7 Definíció.
Az (5.2) profitmaximalizálási feladatsereg **értékfüggvényének** illetve **profitfüggvényének** nevezzük azt a $\pi_Y : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre $\forall\, p \in \mathbb{R}_{++}$ esetén

$$\pi_Y(p) := \sup_{x\in Y} \langle p, x\rangle\,,$$

ami nem más, mint az Y halmaz támaszfüggvénye: $\pi_Y = \sigma_Y$.

5.8 Definíció.
Az (5.2) profitmaximalizálási feladatsereg **megoldási leképezésének**, illetve **kínálati leképezésének** nevezzük azt az $\mathcal{Y} : \mathbb{R}_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ halmazértékű leképezést, amelyre $\forall\, p \in \mathbb{R}_{++}$ esetén

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(p) \quad &:= \quad \underset{x\in Y}{\text{argmax}}\, \langle p, x\rangle \\ &= \quad \{x \in Y \ : \ \langle p, x\rangle = \pi_Y(p)\}\,. \end{aligned}$$

5.9 Állítás.
1. $\forall\, Y \subset \mathbb{R}^n$ technológiai halmaz esetén a $\pi_Y : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ profitfüggvény szublineáris, ha Y korlátos, akkor folytonos, továbbá, ha $\mathbf{0} \in Y$, akkor nemnegatív.

2. Ha $\pi : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ egy folytonos és szublineáris profitfüggvény, akkor az

$$M_\pi = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle p, x\rangle \le \pi(p)\} \subset \mathbb{R}^n$$

halmaz nemüres, konvex és kompakt technológiai halmaz.

3. A nemüres, konvex és kompakt technológiai halmazok valamint a folytonos és szublineáris profitfüggvények egymásnak kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők, azaz $\forall\, Y \subset \mathbb{R}^n$ nemüres, konvex és kompakt technológiai halmaz esetén

$$Y = M_{\pi_Y}\,,$$

valamint $\forall\, \pi : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ folytonos és szublineáris profitfüggvény esetén

$$\pi = \pi_{M_\pi}\,.$$

Bizonyítás.
1. A 7.60. állításból következik.
2. A 7.63. állításból következik.
3. A 7.64. állításból következik. □

A költségminimalizálási feladat kiadási függvénye és keresleti leképezése kapcsolatáról szóló 2.29. állítással teljesen analóg állítás fogalmazható meg a profitfüggvény és a kínálati leképezés kapcsolatáról:

5.10 Állítás. (Hotelling-lemma)
Legyen az $Y \subset \mathbb{R}^n$ technológiai halmaz konvex és zárt, ekkor $\forall\ p \in \mathbb{R}^n_{++}$ pontban a $\pi_Y : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ profitfüggvény szubderiválható, és

$$\partial_s \pi_Y(p) = \mathcal{Y}(p)\,,$$

ahol ∂_s a szubderiváltat jelöli, így

$$\partial_s \pi_Y = \mathcal{Y}\,.$$

Bizonyítás.
Az 5.9. állítás 1. szerint a profitfüggvény szublineáris, így konvex, ezért $\forall\ p \in \mathbb{R}^n_{++}$ pontban szubderiválható, és a konjugált függvény 7.53. definíciója és a szubderivált 7.66.3. definíciója szerint

$$x \in \partial_s \pi_Y(p) \;\Leftrightarrow\; \pi_Y(p) + \pi_Y^*(x) = \langle p, x\rangle\,.$$

Az 5.7. és a 7.59. definíció alapján a π_Y profitfüggvény az Y technológiai halmaz σ_Y támaszfüggvénye, azaz $\forall\ p \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén $\pi_Y(p) = \sigma_Y(p)$, mivel az $Y \subset \mathbb{R}^n$ technológiai halmaz kovex és zárt, azért a 7.61. állítás szerint a konjugáltja $\forall\ p \in \mathbb{R}^n_{++}$ pontban

$$\pi_Y^*(p) \;=\; \sigma_Y^*(x) \;=\; \Psi_Y(x)\,,$$

ezért

$$\begin{aligned} x \in \partial_s \pi_Y(p) \quad &\Leftrightarrow \quad \pi_Y(p) + \Psi_Y(x) = \langle p, x\rangle \\ &\Leftrightarrow \quad \pi_Y(p) = \langle p, x\rangle \text{ és } x \in Y \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \mathcal{Y}(p)\,, \end{aligned}$$

ahol az utolsó ekvivalencia a 5.8. definíció második alakjából következik. □

5.11 Állítás. (konvergenciák ekvivalenciája)
Legyenek $\forall\ n \in \mathbb{N}$ esetén Y_n és $Y \subset \mathbb{R}^n$ konvex zárt halmazok, ekkor

1. $\text{Kc-lim}\, Y_n = Y \;\Leftrightarrow$
2. $\text{Kc-lim}\,\text{epi}\,\pi_{Y_n} = \text{epi}\,\pi_Y \;\Leftrightarrow$
3. $\text{Kc-lim}\,\text{graph}\,\partial\pi_{Y_n} = \text{graph}\,\partial\pi_Y$.

Bizonyítás.
1. $\Leftrightarrow$ 2.: A Függelék Konvex analízis alfejezetének az állításai alapján:

$$\begin{aligned} \text{Kc-lim}\, Y_n = Y \quad &\Leftrightarrow \quad \text{Kc-lim}\,\text{epi}\,\Psi_{Y_n} = \text{epi}\,\Psi_Y \\ &\Leftrightarrow \quad \text{Kc-lim}\,\text{epi}\,\Psi^*_{Y_n} = \text{epi}\,\Psi^*_Y\,, \\ &\Leftrightarrow \quad \text{Kc-lim}\,\text{epi}\,\sigma_{Y_n} = \text{epi}\,\sigma_Y \\ &\Leftrightarrow \quad \text{Kc-lim}\,\text{epi}\,\pi_{Y_n} = \text{epi}\,\pi_Y\,. \end{aligned}$$

2. $\Leftrightarrow$ 3.: Attouch (1984) [2] Theorem 3.66 □

5.3 Az általános egyensúly stabilitása

5.12 Definíció.
Gazdaságnak nevezzük a következőt:

$$\mathcal{E} := (I, J, u_i, a_i, \theta_{i,j}, Y_j) \ ,$$

ahol

1. I véges halmaz, a fogyasztók száma,
2. J véges halmaz, a termelők száma,
3. $\forall\ i \in I$, esetén $u_i : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ az i-dik fogyasztó hasznossági függvénye,
4. $\forall\ i \in I$, esetén $a_i \in \mathbb{R}^n_+$ az i-dik fogyasztó kezdő készlete,
5. $\forall\ i \in I\ j \in J$, esetén $\theta_{i,j} \in \mathbb{R}_+$ az i-dik fogyasztó részesedése a j-dik termelő π_{Y_j} profitjából, felteszük, hogy $\forall\ j \in J$ esetén $\sum_{i \in I} \theta_{i,j} = 1$,
6. $\forall\ j \in J$ esetén $Y_j \subset \mathbb{R}^n$ a j-dik termelő technológiai halmaza, amely alapján a j-dik termelő profitfüggvénye $\pi_{Y_j} = \sigma_j$.

$\forall\ i \in I$, esetén az i-dik fogyasztó jövedelme adott $p \in \mathbb{R}_{++}$ ár mellett:

$$\mu_i := \langle p, a_i \rangle + \sum_{j \in J} \theta_{i,j} \pi_{Y_j}(p) \ .$$

5.13 Definíció.
1. **A termelők aggregált technológiai halmaza:**

$$\sum_{j \in J} Y_j \subset \mathbb{R}^n \ .$$

2. **A termelők aggregált profitfüggvénye** a

$$\pi_{\sum_{j \in J} Y_j} : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$$

függvény, azaz amelyre $\forall\ p \in \mathbb{R}_{++}$ esetén

$$\pi_{\sum_{j \in J} Y_j}(p) := \sup_{x \in \sum_{j \in J} Y_j} \langle p, x \rangle \ ,$$

ami nem más, mint a $\sum_{j \in J} Y_j$ halmaz támaszfüggvénye: $\pi_{\sum_{j \in J} Y_j} = \sigma_{\sum_{j \in J} Y_j}$.
3. **A termelők aggregált kínálati leképezése** az

$$\mathcal{Y} := \sum_{j \in J} \mathcal{Y}_j : \mathbb{R}_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

halmazértékű leképezés, azaz amelyre $\forall\ p \in \mathbb{R}_{++}$ esetén

$$\mathcal{Y}(p) := \operatorname*{argmax}_{x \in \sum_{j \in J} Y_j} \langle p, x \rangle \ = \ \operatorname*{argmax}_{y_j \in Y_j} \langle p, \sum_{j \in J} y_j \rangle \ = \ \sum_{j \in J} \operatorname*{argmax}_{y_j \in Y_j} \langle p, y_j \rangle \ .$$

5.14 Állítás. (Hotelling-lemma az aggregált kínálatra)
Legyen $\forall\ j \in J$ esetén az $Y_j \subset \mathbb{R}^n$ technológiai halmaz konvex és zárt, ekkor $\forall\ p \in \mathbb{R}^n_{++}$ pontban a $\pi_Y : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ aggregált profitfüggvény szubderiválható, és

$$\partial_s \pi_{\sum_{j \in J} Y_j}(p) = \mathcal{Y}(p) \ ,$$

ahol ∂_s a szubderiváltat jelöli.

Bizonyítás.
A definíciók alapján következik a 5.10. állításból. □

5.15 Állítás. (az aggregált kínálat konvergenciája)
Legyenek $\forall\ n \in \mathbb{N}$ *esetén* $\mathcal{E}^n := (I^n, J^n, u_i^n, a_i^n, \theta_{i,j}^n, Y_j^n)$ *olyan gazdaságok, valamint legyen* $\mathcal{E} := (I, J, u_i, a_i, \theta_{i,j}, Y_j)$ *olyan gazdaság, amelyekre* $\forall\ i \in I,\ j \in J$, *esetén*

(1) $a_i^n \to a_i$,

(2) $\theta_{i,j}^n \to \theta_{i,j}$,

(3) $\text{Kc-lim} \sum_{j\in J} Y_j^n = \sum_{j\in J} Y_j$,
ez teljesül például, ha $\forall\ j \in J$ *esetén* $\text{Kc-lim}\, Y_j = Y_j$, *ahol* Y_j *kompakt,*

ekkor

$$\text{Kc-lim graph} \sum_{j\in J} \mathcal{Y}_j^n = \sum_{j\in J} \mathcal{Y}_j \ .$$

Bizonyítás.
Mivel

$$\text{Kc-lim} \sum_{j\in J} Y_j^n = \sum_{j\in J} Y_j \,,$$

azért a 5.11 állítás szerint

$$\text{Kc-lim}\, \text{graph}\, \partial\pi_{\sum_{j\in J} Y_j^n} = \text{graph}\, \partial\pi_{\sum_{j\in J} Y_j} \ .$$

Ezért a 5.10 és a 5.14 Hotelling-lemmák szerint

$$\text{Kc-lim graph} \sum_{j\in J} \mathcal{Y}_j^n = \sum_{j\in J} \mathcal{Y}_j \,.$$

□

5.16 Definíció.
1. **A fogyasztók aggregált kiadási függvénye** az

$$u^\wedge := \sum_{i\in I} u_i^\wedge : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \overline{\mathbb{R}}$$

függvény, azaz amelyre $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$u^\wedge(\nu,p) = \sum_{i\in I} u_i^\wedge(\nu,p) = \sum_{i\in I} \inf_{x_i \in H_i(\nu_n)} \langle p, x_i\rangle = \inf_{\forall\ i\in I\ \ x_i\in H_i(\nu_n)} \langle p, \sum_{i\in I} x_i\rangle \,.$$

2. **keresleti leképezése** az

$$\mathcal{X} := \sum_{i\in I} \mathcal{X}_i : \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$$

halmazértékű leképezés, azaz amelyre $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(u) \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\mathcal{X}(\nu,p) = \sum_{i\in I} \mathcal{X}_i = \sum_{i\in I} \underset{H_i(\nu,p)}{\text{argmin}}\ \langle p, .\rangle \,.$$

5.17 Állítás. (az aggregált kereslet konvergenciája)
Legyenek $\forall\ n \in \mathbb{N}$ *esetén* $\mathcal{E}^n := (I^n, J^n, u_i^n, a_i^n, \theta_{i,j}^n, Y_j^n)$ *olyan gazdaságok, valamint legyen* $\mathcal{E} := (I, J, u_i, a_i, \theta_{i,j}, Y_j)$ *olyan gazdaság, amelyekre* $\forall\ i \in I,\ j \in J$, *esetén*

(1) $a_i^n \to a_i$,

(2) $\theta_{i,j}^n \to \theta_{i,j}$,

(3) u_i^n *konkáv és f.f.f.,* u_i *monoton és nem létezik lokális maximuma, továbbá* $\text{Kc-lim hypo}\, u_i^n = \text{hypo}\, u_i^n$,

(4) $\text{Kc-limsup}\, \mathcal{X}_i^n(\mu_n^i, p_n) = \mathcal{X}_i(\mu^i, p)$,

(5) *tegyük még fel, hogy*

$$\text{int}\, u^{-1}(-\infty, +\infty] \cup B(\mu, p) \neq \emptyset \quad \textit{vagy} \quad u^{-1}(-\infty, +\infty] \cup \text{int}\, B(\mu, p) \neq \emptyset \ ,$$

valamint

$$\sum_{i \in I} \partial_s (u_i^\wedge)^n (\nu_n, .) = \partial_s \sum_{i \in I} (u_i^\wedge)^n (\nu_n, .) \, ,$$

illetve

$$\sum_{i \in I} \partial_s u_i^\wedge (\nu, .) = \partial_s \sum_{i \in I} u_i^\wedge (\nu, .) \, .$$

ekkor

$$\text{Kc-lim graph} \sum_{i \in I} \mathcal{X}_i^n = \sum_{i \in I} \mathcal{X}_i .$$

BIZONYÍTÁS.
A 5.5 állítás 3. szerint $\forall\, i \in I$ mellett $(u_i^\wedge)^n \to_c u_i^\wedge$, így

$$\sum_{i \in I} (u_i^\wedge)^n \to_c \sum_{i \in I} u_i^\wedge \, .$$

Továbbá a 5.5 állítás 5. szerint $\forall\, i \in I$ esetén $\forall\, \nu_i^n \to \nu_i < \sup_{\mathbb{R}_+^n} u_i$ sorozat esetén $\text{Kc-lim graph}\, \partial (u_i^\wedge)^n (., \nu_i^n) = \text{graph}\, \partial (u_i^\wedge)^n (., (\nu)_{i \in I})$, így

$$\text{Kc-lim graph} \sum_{i \in I} \partial_s (u_i^\wedge)^n (\nu_i^n, .) = \text{graph} \sum_{i \in I} \partial_s u_i^\wedge ((\nu)_{i \in I}, .) \, ,$$

a feltétel szerint

$$\text{Kc-lim graph}\ \partial_s \sum_{i \in I} (u_i^\wedge)^n (\nu_i^n, .) = \text{graph}\ \partial_s \sum_{i \in I} u_i^\wedge ((\nu)_{i \in I}, .) \, .$$

A bizonyítás innen ugyanaz, mint a 5.5 állítás 6.
Legyen $(\mu, p, x) \in \text{graph} \sum_{i \in J} \mathcal{X}_i$, (ahol $x = \sum_{i \in I} x_i,\ x_i \in \mathcal{X}_i$) tetszőleges. Be kell látni, hogy $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\exists\ (\mu^n, p^n, x^n) \in \text{graph} \sum_{i \in J} \mathcal{X}_i \, ,$$

(ahol $x^n = \sum_{i \in I} x_i^n,\ x_i^n \in \mathcal{X}_i$,) hogy $(\mu^n, p^n, x^n) \to (\mu, p, x)$.
Legyen $\forall\, i \in I$ esetén $\forall\, (\mu_i^n, p_i^n)$ illetve (μ_i, p_i) esetén

$$\nu_i^n := u_n^\vee(\mu_i^n, p_n) \text{ illetve } \nu_i := u^\vee(\mu_i, p) \, ,$$

ekkor a 5.5 állítás 2. szerint $\nu_i^n \to \nu_i$, valamint a 3.4 állítás szerint $x_i \in \mathcal{X}_i(\mu, p) = \partial_2 u_i^\wedge(\nu_i, p)$, ezért a 5.5 állítás 5. szerint

$$\exists\ x_i^n \in \partial_2 (u_i^\wedge)^n (\nu_i^n, p_n) = \mathcal{X}_i^n(\mu_i^n, p_i^n) \, ,$$

hogy $(p_n, x_i^n) \to (p, x_i)$, így az $x_n := \sum_{i\in I} x_i^n$ és az $x := \sum_{i\in I} x_i \in \mathcal{X}(\mu, p)$ esetén $(p_n, x^n) \to (p, x)$.
Legyen $\forall\ (\nu_i^n, p_n)$ illetve (ν_i, p) esetén

$$\mu_i^n := (u_i^\wedge)^n(\nu_i^n, p_n) \text{ illetve } \mu_i := (u^\wedge)^i(\nu, p),$$

ekkor a 3. szerint $\mu_i^n \to \mu_i$.
Ezeket összeadva

$$(\mu^n, p^n, x^n) := (\sum_{i\in I} \mu_i^n, p^n, \sum_{i\in I} x_i^n) \to (\mu, p, x) = (\sum_{i\in I} \mu_i, p, \sum_{i\in I} x_i)\ .$$

□

5.18 Definíció.
Azt mondjuk, hogy a $p \in \mathbb{R}_{++}$ ár mellett az

$$((x_i)_{i\in I}, (y_j)_{j\in J}) \in (\times_{i\in I}\mathbb{R}_+^n) \times (\times_{j\in J} Y_j)$$

allokáció **egyensúlyt** alkot, másképpen fogalmazva, az

$$e = (((x_i)_{i\in I}, (y_j)_{j\in J}), p) \in (\times_{i\in I}\mathbb{R}_+^n) \times (\times_{j\in J} Y_j) \times \mathbb{R}_{++}^n$$

az $\mathcal{E}$ gazdaság **egyensúlyi pontja**, ha

(1) $\forall\ i \in I$ esetén $x_i \in \mathcal{X}(\mu, p)$,

(2) $\forall\ j \in J$, esetén $y_j \in \mathcal{Y}(p)$,

(3) $\sum_{i\in I} x_i \ \leq\ \sum_{i\in I} a_i + \sum_{j\in J} y_j$,

(4) $\sum_{i\in I} \langle p, x_i\rangle \ =\ \sum_{i\in I} \langle p, a_i\rangle \ +\ \sum_{j\in J} \langle p, y_j\rangle$.

5.19 Jelölés.
Jelölje az $\mathcal{E}$ gazdaság egyensúlyi pontjainak a halmazát $\mathrm{eq}\,\mathcal{E}$.

5.20 Állítás. (az egyensúly konvergenciája)
Legyenek $\forall\ n \in \mathbb{N}$ *esetén* $\mathcal{E}^n := (I^n, J^n, u_i^n, a_i^n, \theta_{i,j}^n, Y_j^n)$ *olyan gazdaságok, valamint* $\mathcal{E} := (I, J, u_i, a_i, \theta_{i,j}, Y_j)$ *olyan gazdaság, amelyekre az* $\mathcal{E}^n$ *gazdaság tart az* $\mathcal{E}$ *gazdasághoz, amelyen azt értjük, hogy* $\forall\ i \in I,\ j \in J$, *esetén*

(1) $a_i^n \to a_i$,

(2) $\theta_{i,j}^n \to \theta_{i,j}$,

(3) $\text{Kc-lim}\, Y_j^n = Y_j$;

(4) $\text{Kc-lim}\,\mathrm{hypo}\, u_i^n = \mathrm{hypo}\, u_i^n$,

valamint fennállnak még a következők:

(5) $\forall\ n \in \mathbb{N}$ *esetén* $\mathbf{0} \in Y_j^n$,

(6) $\forall\ n \in \mathbb{N}$ *esetén* u_i^n *konkáv és f.f.f.,* u_i *monoton és nem létezik lokális maximuma,*

(7) $\exists\ b_i << a_i$, *azaz* $\beta_{i_1} < \alpha_{i_1}, \ldots, \beta_{i_n} < \alpha_{i_n}$,

ekkor

$$\text{Kc-limsup}\ \mathrm{eq}\,\mathcal{E}^n \subset \mathrm{eq}\,\mathcal{E}\,.$$

Bizonyítás.
Legyen $e = (((x_i)_{i\in I}, (y_j)_{j\in J}), p) \in \text{Kc-limsup eq } \mathcal{E}^n$, ez azt jelenti, hogy

$$\exists\ e^{n_k} = (((x_i^{n_k})_{i\in I}, (y_j^{n_k})_{j\in J}), p^{n_k}) \in \text{eq } \mathcal{E}^n$$

egyensúlyi pontoknak olyan részsorozata, amelyekre $\lim e^{n_k} = e$. Be kell látni, hogy

$$e = (((x_i)_{i\in I}, (y_j)_{j\in J}), p) \in \text{eq } \mathcal{E}\,.$$

Az 5.18 definíció (3) és (4) nyilván teljesül.

Az 5.18 definíció (2): Legyen $j \in J$ tetszőleges. Mivel a fentiek szerint

$$e = (((x_i)_{i\in I}, (y_j)_{j\in J}), p) \in \text{Kc-limsup eq } \mathcal{E}^n\,,$$

azért

$$y_j \in \text{Kc-limsup}\, \mathcal{Y}_j^n\,.$$

Az állítás feltétele szerint $\text{Kc-lim}\, Y_j^n = Y_j$. Továbbá mivel $\lim\langle p_n, .\rangle = \langle p, .\rangle$ egyenletesen, azért a 7.74 állítás szerint

$$\text{Kc-lim}\, \text{epi}\langle p_n, .\rangle = \langle p, .\rangle\,.$$

Ezek alapján az 5.2 állítás szerint,

$$\text{Kc-limsup} \operatorname*{argmax}_{Y_j^n}\langle p_n, .\rangle \subset \operatorname*{argmax}_{Y_j}\langle p, .\rangle\,,$$

azaz

$$\text{Kc-limsup}\, \mathcal{Y}_j^n \subset \mathcal{Y}_j\,,$$

ezért $y_j \in \mathcal{Y}_j$.

Az 5.18 definíció (1) : Legyen $i \in I$ tetszőleges. Mivel a fentiek szerint

$$e = (((x_i)_{i\in I}, (y_j)_{j\in J}), p) \in \text{Kc-limsup eq } \mathcal{E}^n\,,$$

azért

$$x_i \in \text{Kc-limsup}\, \mathcal{X}_i^n\,.$$

Az állítás feltétele szerint $\text{Kc-lim}\, \text{hypo}\, u_i^n = \text{hypo}\, u_i^n$. Mivel

$$\text{Kc-lim}\, B_i(\mu_n, p_n) = B_i(\mu, p)\,,$$

azért az 5.2 állítás szerint,

$$\text{Kc-limsup} \operatorname*{argmax}_{B(\mu_n), p_n} u_n \subset \operatorname*{argmax}_{B(\mu, p)} u\,, \quad \text{azaz} \quad \text{Kc-limsup}\, \mathcal{X}_i^n \subset \mathcal{X}_i\,,$$

ezért $x_i \in \mathcal{X}_i$. □

6. Fejezet

Keresleti leképezés alapú megközelítés

A fogyasztókat eredetileg a preferenciáikkal jellemeztük. A fogyasztók viselkedését szélsőértékfeladatokkal írtuk le. Azért, hogy az analízis eszközeit alkalmazhassuk, a preferenciákat hasznossági függvényekkel reprezentáltuk. Ismert, hogy a mikroökonómia egyik igen fontos problémája, hogy milyen tulajdonságú preferencia reprezentálható folytonos hasznossági függvénnyel. A szélsőértékfeladatok megoldásai jelentik a fogyasztók keresleteit, ezek után a fogyasztókat már a keresleti leképezéseikkel jellemezhetjük.

Több okból is felvetődik az a szándék, hogy a fogyasztókat közvetlenül a keresleti leképezéseikkel jellemezzük. Szemben az eddigi preferencia alapú megközelítéssel, ezt keresleti leképezés alapú megközelítésnek nevezzük.

A keresleti leképezés alapú megközelítés bevezetésének az egyik oka közgazdasági, nevezetesen az, hogy nem akarjuk a fogyasztó viselkedéséről feltenni, hogy az optimalizáló. Egy másik ok pedig statisztikai. Ugyanis egy fogyasztó preferenciái nagyon nehezen megfigyelhetők. Továbbá, ha egy fogyasztót a preferenciáival jellemzünk, akkor a belőle származtatható keresleti függvények közül olyat kell választani, amely statisztikailag jól kezelhető, de nem biztos, hogy ilyet találunk. Ehelyett a fogyasztót közvetlenül jellemezhetjük egy statisztikailag jól verifikálható keresleti függvénnyel, amit például valamilyen adatokból becsülni tudunk, és ebből következtetünk vissza a fogyasztó preferenciájára.

Már a XIX. században, például Antonelli (1886) [1] könyvében felvetődött a következő pobléma, amit racionalizálhatóságnak vagy integrálhatóságnak neveznek. Ha egy fogyasztót a keresleti leképezésével jellemzünk — amit a közönséges keresleti leképezéstől való megkülönböztetésül egyszerűen csak keresleti leképezésnek nevezünk — akkor ez milyen feltételek mellett racionalizálható, azaz létezik-e olyan preferencia, amely mellett a haszonmaximalizálási feladatból származó közönséges keresleti leképezés megegyezik a kiindulási keresleti leképezéssel?

Erre a problémára többféleképpen is válaszolhatunk. Az egyik út az, hogy a keresleti leképezés segítségével többféle módon definiálhatunk úgynevezett kinyilvánított preferenciákat, és ezekhez olyan konzisztenciafeltételeket keresünk, hogy racionalizálják a keresleti leképezést. Ilyen például a kinyilvánított preferencia és a konzisztenciafeltétele, a kinyilvánított preferencia gyenge axiómája, lásd Samuelson (1947) [35].

A racionalizálhatóság problémája megoldásának egy másik útja pedig az, amit Mas-Colell - Whinston - Green (1995) [32] könyve alapján írtunk le, hogy a haszonmaximalizálás a költségminimalizálás kapcsolatának a segítségével, nevezetesen a kiadási függvénynek a deriváltja és a közönséges keresleti leképezés közötti összefüggés alapján definiálunk olyan preferenciát, amely racionalizálja a keresleti leképezést.

A kereslet kezdeti vizsgálatakor is ismert volt az az összefüggés — amit „a kereslet törvénye” néven ismerünk — miszerint az árak növekedése mellett a kereslet csökken. Tudjuk persze, hogy a kereslet csökkenése az árak növekedése mellett igen összetett kérdés, hiszen jócskán ismerünk olyan javakat, amelyek kereslete az árak növekedése mellett növekszik. Nem teljesen kézenfekvő e probléma matematikai megfogalmazása sem. Ez a keresleti függvény illetve leképezés valamilyen értelemben vett monotonitását jelenti. Kérdés egyrészt az, hogyan definiáljuk ezeket a monotonitási fogalmakat, másrészt az, hogy a fogyasztóra tett milyen feltételek vonják maguk után a keresleti leképezés valamilyen monotonitását, azaz a kereslet törvényének teljesülését. Látni fogjuk, hogy a keresletelméleten belül is összefüggenek a a monotonitás és konvexitás kérdései, amelyeket többféle szemléletben és célzatban vizsgálnak. Megjegyezzük, hogy mindkét keresleti leképezés monotonitási és egyéb, új szempontok szerinti vizsgálatának a tudományos centruma a Bonni Egyetem. A keresleti leképezés monotonitása kérdései egyik irányból való közelítésének alapvető forrásként a Hildenbrand (1983) [22] és a Hildenbrand (1994) [23], egy másik irányban a Edlin (1998) [17] és Edlin (1998a) [18] munkákat említjük meg.

Érdekes, hogy a különféle kinyilvánított preferenciákhoz tartozó konzisztenciafeltételek és a keresleti leképezés valamilyen monotonitási tulajdonságai között szoros kapcsolat van. Két ilyenre is mutatunk példát. A fejezet legfontosabb állításai Reinhard John (1998) [26] dolgozatából valók, amelyek a keresleti leképezések kvázimonotonitását illetve valódi kvázimonotonitását jellemzik, amelyek szerint a szigorúan kinyilvánított preferencia konzisztenciafeltétele ekvivalens a kvázimonotonitással. Érdemes megjegyezni, hogy a keresleti leképezés kvázimonotonitásának a jellemzéséhez szükség van a Ky Fan-féle metszettételhez is, amit a függelékben ismertetünk. Ez a KKM-féle tételből következik, ami igen erős eszköz, egyébként ekvivalens a Brouwer-féle fixponttétellel.

Mas-Colell - Whinston - Green (1995) [32] alapgondolatát követve pedig sikerült belátni a keresleti leképezésekre, hogy a kinyilvánított preferencia gyenge axiómája hozzávetőlegesen ekvivalens a kereslet törvényével.

A következőkben a haszonmaximalizálás fogalmi keretei között gondolkozunk. A jószágteret jelenítse meg $\mathbb{R}^n_+$, a lehetséges árvektorok halmazát pedig $\mathbb{R}^n_{++}$. Egy fogyasztó költségvetési leképezését ugyanúgy értelmezzük, mint az 1.1. definícióban, a keresleti leképezés fogalma, viszont már eltér haszonmaximalizálásbeli közönséges keresleti leképezéstől.

6.1 Definíció.
Egy fogyasztó **költségvetési leképezésének** nevezzük azt a $B : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ halmazértékű leképezést, amelyre $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$B(\mu, p) := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \langle p, x\rangle \leq \mu\}\,.$$

$\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$ paraméterpár esetén $B(\mu, p) \subseteq \mathbb{R}^n_+$ a μ jövedelem és a p ár melletti költségvetési halmaza a fogyasztónak.

Ismert az 1.7. állítás (2)-ből, hogy a B költségvetési leképezés nemüres értékű.

6.2 Definíció.
Az $\mathcal{X} : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ halmazértékű leképezést **keresleti leképezésnek** nevezzük, ha $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\mathcal{X}(\mu, p) \subset B(\mu, p)\,.$$

A következőkben egy fogyasztót tehát az $\mathcal{X} : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezésével fogjuk jellemezni, amelyet a közönséges keresleti leképezéstől való megkülönböztetés miatt nevezünk így.
$\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpár esetén $\mathcal{X}(\mu, p) \subseteq \mathbb{R}^n_+$ a fogyasztónak a μ jövedelem és a p ár melletti kereslteit tartalmazza.

6.3 Definíció.
1. Az $\mathcal{X} : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezést **valódinak** nevezzük, ha nemüres értékű, azaz $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpár mellett

$$\mathcal{X}(\mu, p) \neq \emptyset\,.$$

2. Az $\mathcal{X} : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezést **Walras-típusúnak** nevezzük, ha $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpár mellett kielégíti a 1.18. definícióbeli **Walras-törvényt**, azaz $\forall\ x \in \mathcal{X}(\mu, p)$ esetén

$$\langle p, x \rangle = \mu\,.$$

6.4 Megjegyzés.
A keresleti leképezés valódisága (nemüres értékűsége) első pillanatban nem látszik erős feltevésnek, de ha belegondolunk, hogy azt jelenti, hogy a fogyasztó minden árvektor mellett tud választani, akkor közgazdasági illetve viselkedéslélektani szempontból már erős feltétel. Matematikai szempontból, ha megengedjük a keresleti leképezés nem valódi voltát, akkor az azt jelenti, hogy a keresleti leképezés valódi (effektív) értelmezési tartománya tetszőleges, akár véges halmaz is lehet.

6.5 Definíció.
Egy $R \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ reláció által indukált keresleti leképezésnek nevezzük azt az $\mathcal{X}_R : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ halmazértékű leképezést, amelyre $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_R(\mu, p) &:= \{x \in \mathbb{R}^n_+ : x \in B(\mu, p) \text{ és } \forall\ y \in B(\mu, p) \text{ esetén } xRy\} \\ &= \left(\bigcap_{x \in B(p)} R(x) \right) \cap B(\mu, p)\,, \end{aligned}$$

ahol $\forall\ x \in \mathbb{R}^n_+$ esetén

$$R(x) := \{y \in \mathbb{R}^n_+\ :\ y\,R\,x\}\,.$$

az R reláció felső nívó halmaza.

6.6 Megjegyzés.
Amennyiben a fogyasztót egy olyan R preferenciával jellemeznénk, amely egy hasznossági függvénnyel reprezentálható, úgy az általa indukált keresleti leképezés nem lenne más, mint a haszonmaximalizálás során származtatott közönséges keresleti leképezés.

6.7 Definíció.
Azt mondjuk, hogy egy $R \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ reáció **racionalizálja** az $\mathcal{X} : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezést, ha ez megegyezik az R reláció által indukált keresleti leképezéssel:

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_R\,.$$

6.8 Megjegyzés. (problémák)
1. Milyen feltételek mellett létezik egy fogyasztót jellemző keresleti leképezéshez olyan preferencia (illetve hasznossági függvény), amelyből a haszonmaximalizálás

során származó közönséges keresleti leképezés megegyezik az általunk megadott keresleti függvénnyel?

Másképpen megfogalmazva, egy fogyasztót jellemző $\mathcal{X}$ keresleti leképezés esetén milyen módon lehet bevezetni egy olyan R preferenciarelációt, amely racionalizálja ezt a keresleti leképezést, azaz az általa indukált közönséges keresleti leképezés megegyezik ezzel az keresleti leképezéssel: $\mathcal{X} = \mathcal{X}_R$.

Ezt a közgazdaságtani problémát racionalizálhatóságnak illetve integrálhatóságnak nevezik, és igen régen vetődött fel: Antonelli (1886) [1]. A fenti problémára többféleképpen is adhatunk választ.

2. A keresleti függvénynek illetve leképezésnek milyen monotonitási tulajdonságait lehet definiálni, amelyek jól tükrözik kereslet törvényét, továbbá a fogyasztóra tett milyen feltételek vonják maguk után a keresleti függvény illetve leképezés valamilyen monotonitását.

6.1 A kinyilvánított preferenciák

Az egyik lehetőség, hogy a 6.8 megjegyzésbeli 1. problémára választ adjunk az, hogy a keresleti leképezés alapján bevezetünk egy preferenciarelációt, az ilyen preferenciarelációkat kinyilvánított (revealed) preferenciáknak nevezzük, és olyan feltételeket keresünk, amik racionalizációt biztosítanak, ezeket konzisztenciafeltételeknek, illetve kinyilvánított preferencia axiómáknak nevezzük.

6.1.1 A racionalizáció

Az egyik konzisztenciafeltétel, ami racionalizációt biztosít, a kinyilvánított preferencia gyenge axiómája: Samuelson (1947) [35].

6.9 Definíció.
Egy $\mathcal{X} : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezéshez tartozó **kinyilvánított (revealed) preferenciának** nevezzük azt az $R_\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ relációt, amelyre $\forall\, x,\ y \in \mathbb{R}^n_+$ esetén

$$x\ R_\mathcal{X}\ y \ :\Leftrightarrow\ \exists\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}, \text{ hogy } x \in \mathcal{X}(\mu, p), \text{ miközben } y \in B(\mu, p)\,.$$

6.10 Definíció.
Egy $\mathcal{X} : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezés **konzisztens a kinyilvánított preferenciával**, másképpen, a keresleti leképezésre teljesül **a kinyilvánított preferencia gyenge axiómája**, ha

$$\begin{aligned}
&\forall\ (\mu_1, p_1), (\mu_2, p_2) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \text{ jövedelem- és árváltozás mellett,}\\
&\forall\ x_1 \in \mathcal{X}(\mu_1, p_1),\ x_2 \in \mathcal{X}(\mu_2, p_2),\ x_1 \neq x_2 \text{ esetén,}\\
&\text{ha } x_1 \in B(\mu_2, p_2) \Rightarrow x_2 \notin B(\mu_1, p_1)\,.
\end{aligned}$$

6.11 Megjegyzés.
Ez azt jelenti, hogy ha a (μ_1, p_1) és a (μ_2, p_2) jövedelem és ár mellett az x_1 illetve az x_2 egymástól különböző jószágkötegeket választottuk, valamint x_1 a (μ_2, p_2) jövedelem és ár mellett is választható, akkor x_2 a (μ_1, p_1) jövedelem és ár mellet már nem választható.

Az előbbieket a következőképpen fogalmazhatjuk át:

$$\begin{aligned}
&\forall\ (\mu_1, p_1), (\mu_2, p_2) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \text{ jövedelem- és árváltozás mellett,}\\
&\forall\ x_1 \in \mathcal{X}(\mu_1, p_1),\ x_2 \in \mathcal{X}(\mu_2, p_2),\ x_1 \neq x_2 \text{ esetén,}\\
&\text{ha } \langle p_2, x_1 \rangle \leq \mu_2 \Rightarrow \langle p_1, x_2 \rangle > \mu_1\,.
\end{aligned}$$

Ha a keresleti leképezés Walras-típusú, akkor a következő átfogalmazás adható:

$$\begin{aligned}
&\forall\ (\mu_1, p_1), (\mu_2, p_2) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \text{ jövedelem- és árváltozás mellett,}\\
&\forall\ x_1 \in \mathcal{X}(\mu_1, p_1),\ x_2 \in \mathcal{X}(\mu_2, p_2),\ x_1 \neq x_2 \text{ esetén,}\\
&\text{ha } \langle p_2, x_1 \rangle \le \langle p_2, x_2 \rangle \Rightarrow \langle p_1, x_2 \rangle > \langle p_1, x_1 \rangle\,, \text{ azaz}\\
&\text{ha } \langle p_2, x_1 - x_2 \rangle \le 0 \Rightarrow \langle p_1, x_1 - x_2 \rangle < 0\,.
\end{aligned}$$

6.12 Megjegyzés.
Belátható, hogy ha egy $\mathcal{X} : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezés konzisztens az $R_{\mathcal{X}} \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ kinyilvánított preferenciával, azaz teljesíti a kinyilvánított preferencia gyenge axiómáját, akkor a kinyilvánított preferencia racionalizálja, azaz

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_{R_{\mathcal{X}}}\,.$$

6.1.2 A gyenge racionalizáció

A későbbiekben a keresleti leképezés monotonitását szeretnénk vizsgálni. Ehhez olyan kinyilvánított preferenciát kell keresni, továbbá ehhez olyan konzisztenciafeltételt, amely nem zárja ki az optimális választások közömbösségét. Az alábbiakban bevezetett fogalmak csak ún. gyenge racionalizálást biztosítanak.

6.13 Definíció.
Azt mondjuk, hogy egy $R \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ reláció **gyengén racionalizálja** az $\mathcal{X} : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezést, ha ez része az R reláció által indukált keresleti leképezésnek:

$$\mathcal{X} \subset \mathcal{X}_R\,.$$

A fenti feltétel nyilván átfogalmazható a következőképpen:

$$\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \text{ esetén } \mathcal{X}(\mu, p) \subset \mathcal{X}_R(\mu, p)\,.$$

6.14 Állítás.
Egy $R \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ reláció gyengén racionalizálja az $\mathcal{X} : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezést, pontosan akkor, ha az $R_{\mathcal{X}} \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ kinyilvánított preferenciára teljesül, hogy

$$R_{\mathcal{X}} \subset R\,, \ \textit{azaz}$$

$$\forall\ x \in \mathbb{R}^n_+ \ \textit{esetén}\ R_{\mathcal{X}}(x) \subset R(x)\,.$$

BIZONYÍTÁS.
Egyrészt az $R \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ reláció által indukált $\mathcal{X}_R : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezésre $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\mathcal{X}_R(\mu, p) = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : x \in B(\mu, p) \text{ és } \forall\ y \in B(\mu, p) \text{ esetén } xRy\}\,,$$

ezért, valamint a fenti észrevétel miatt $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}_R$ pontosan akkor, ha $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén $\forall\ x \in \mathcal{X}(\mu, p)$ és $\forall\ y \in B(\mu, p)$ mellett $x\,R\,y$.

Másrészt mivel az $\mathcal{X} : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezéshez tartozó kinyilvánított preferenciára $\forall\ y \in \mathbb{R}^n_+$ esetén

$$R_{\mathcal{X}}(y) = \{x \in \mathbb{R}^n_+ \ :\ \exists\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}, \text{ hogy } x \in \mathcal{X}(\mu, p)\,,\ y \in B(\mu, p)\}\,,$$

azért $\forall\ y \in \mathbb{R}^n_+$ esetén $R_{\mathcal{X}}(y) \subset R(y)$ pontosan akkor, ha $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ és $\forall\ x \in \mathcal{X}(\mu, p)$ esetén $y \in B(\mu, p)$ mellett $x\,R\,y$. $\square$

6.15 Definíció.
Egy $\mathcal{X} : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezéshez tartozó **szigorúan kinyilvánított preferenciának**, másképpen **feltárt preferenciának** nevezzük azt a $P_{\mathcal{X}} \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ relációt, amelyre $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n_+$ esetén

$$x\ P_{\mathcal{X}}\ y \ :\Leftrightarrow\ \exists\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}, \text{ hogy } x \in \mathcal{X}(\mu, p), \text{ miközben } \langle p, y\rangle < \langle p, x\rangle\,.$$

6.16 Megjegyzés.
Mivel $\langle p, y\rangle < \langle p, x\rangle \leq \mu$, azért $y \in B(\mu, p)$ most is, de ennél szűkebb halmazt követelünk meg.

6.17 Definíció.
Egy $\mathcal{X} : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezés **konzisztens a szigorúan kinyilvánított preferenciával**, ha

$$\begin{aligned}
&\forall\ (\mu_1, p_1), (\mu_2, p_2) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \text{ jövedelem- és árváltozás mellett,}\\
&\forall\ x_1 \in \mathcal{X}(\mu_1, p_1),\ x_2 \in \mathcal{X}(\mu_2, p_2), \text{ esetén,}\\
&\text{ha } \langle p_2, x_1\rangle < \mu_2 \Rightarrow \langle p_1, x_2\rangle \geq \mu_1\,.
\end{aligned}$$

Ha a keresleti leképezés Walras-típusú, akkor a következő átfogalmazás adható:

$$\begin{aligned}
&\forall\ (\mu_1, p_1), (\mu_2, p_2) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \text{ jövedelem- és árváltozás mellett,}\\
&\forall\ x_1 \in \mathcal{X}(\mu_1, p_1),\ x_2 \in \mathcal{X}(\mu_2, p_2), \text{ esetén,}\\
&\text{ha } \langle p_2, x_1\rangle < \langle p_2, x_2\rangle \Rightarrow \langle p_1, x_2\rangle \geq \langle p_1, x_1\rangle\,, \text{ azaz}\\
&\text{ha } \langle p_2, x_1 - x_2\rangle < 0 \Rightarrow \langle p_1, x_1 - x_2\rangle \leq 0\,.
\end{aligned}$$

6.18 Megjegyzés.
Belátható, hogy ha egy $\mathcal{X} : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezés konzisztens a $P_{\mathcal{X}} \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ szigorúan kinyilvánított preferenciával, akkor a szigorúan kinyilvánított preferencia gyengén racionalizálja, azaz

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_{R_{\mathcal{X}}}\,.$$

6.2 Integrálhatóság

Ebben az alfejezetben a fogyasztót nem keresleti leképezéssel, hanem keresleti függvénnyel jellemezzük. Továbbra is a 6.8 megjegyzésbeli 1. problémára keressük a választ, azaz arra, hogy egy fogyasztót jellemző adott keresleti függvény reprezentál-e valamilyen preferenciát, azaz létezik-e olyan preferencia, amely racionalizálja ezt a keresleti leképezést. Érdekes módon a megoldás a haszonmaximalizálási és a költségminimalizálási koncepció kapcsolatából származik. A válaszadáshoz alapvetően fontos a 3.3 állítás, ami a kiadási függvény deriváltja, és a közönséges keresleti leképezés között teremt kapcsolatot.

Egy fogyasztót jellemezzen egy $\chi : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ keresleti függvény. Abból a célból, hogy egy ezt keresleti függvényt racionalizáló relációt kaphassunk, először is tekintsük a következő, $(\nu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpárral paraméterezett költségminimalizálási feladatsereget:

$$\begin{cases} \langle p, x\rangle \to \min \\ x \in V_\nu \end{cases} \tag{6.1}$$

ahol $V_\nu \subset \mathbb{R}^n_{++}$ valamilyen halmaz.

Jelölje e feladatsereg értékfüggvényét, azaz a kiadási függvényét az $e : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ függvény, azaz amelyre $\forall\ (\nu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$e(\nu, p) := \min\ \{\langle p, x\rangle\ :\ x \in V_\nu\}\,.$$

6.19 Definíció.
Legyen $R \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ az a reláció, amelyre $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n_+$ esetén

$$x_2 R x_1 \ :\Leftrightarrow\ \forall\ \nu \text{ esetén, ha } x_1 \in V_\nu\ \Rightarrow x_2 \in V_\nu\,.$$

Látható, hogy ez az R reláció reflexív és tranzitív.

Ismert, hogy a 3.3 állítás (kevert Shephard-féle azonosság) szerint a közönséges keresleti függvény (a haszonmaximalizálási feladat megoldásfüggvénye) és a kiadási függvény (a költségminimalizálási feladat értékfüggvénye) között fennáll az alábbi kapcsolat: $\forall\ (\nu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\partial_2 u^\wedge(\nu, p) = \chi_M(u^\wedge(\nu, p), p)\ .$$

Ehhez az állításhoz hasonlóan belátható, hogy amennyiben e a második változójában differenciálható, úgy az $R \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ reláció által indukált $\mathcal{X}_R : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezésre $\forall\ (\nu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\partial_2 e(\nu, p) \in \mathcal{X}_R(e(\nu, p), p)\,, \tag{6.2}$$

Ezek szerint ha az $\chi : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ keresleti függvény mellett az $e : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ kiadási függvény $\forall\ (\nu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén teljesíti a

$$\partial_2 v(\nu, p) = \chi(v(\nu, p), p)\ ,$$

parciális differenciálegyenletet, akkor az R reláció gyengén racionalizálja χ-et, azaz $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\chi(\mu, p) \in \mathcal{X}_R(\mu, p)\,.$$

Ezek alapján a problémára a választ két lépésben adjuk meg.
1. Egy fogyasztót jellemző $\chi : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ keresleti függvényhez egy $e : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ kiadási függvényt keresünk. Ez a nehezebb lépés. Ezt a problémát nevezik tulajdonképpen integrálhatóságnak.
2. Az $e : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ kiadási függvényhez egy olyan $V_\nu \subset \mathbb{R}^n_{++}$ halmazt keresünk, hogy a (6.1) feladathoz tartozó v kiadási függvény megegyezzen az e kiadási függvénnyel.

1. lépés

Adott $\chi : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ keresletti függvényhez egy olyan $e : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ függvényt keresünk, amely teljesíti a következő parciális differenciálegyenletet: $\forall\ (\nu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\partial_2 e(\nu, p) = \chi(e(\nu, p), p)\,,$$

tekintsük ezért $\forall\ \nu \in \mathbb{R}_{++}$ mellett tekintsük a következő kezdetiérték-feladatot:

$$\begin{cases} e'_\nu(p) = \chi(e_\nu(p), p) \\ e_\nu(p_0) = \mu_0 \end{cases} \tag{6.3}$$

6.20 Megjegyzés.
E differenciálegyenlet megoldhatóságára vonatkozó feltételt a Slutsky-féle helyettesítési mátrix segítségével kaphatunk. Ismert, hogy a 3.11 állítás szerint a Slutsky-féle helyettesítési mátrix kifejezhető a közönséges keresleti függvény parciális deriváltjai segítségével is: $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$ esetén

$$S(\mu, p) = \partial_2 \chi_M(\mu, p) + \partial_1 \chi_M(\mu, p) \cdot \chi_M(\mu, p)^T \in L(\mathbb{R}^n)\,.$$

Ezek alapján most a keresleti leképezés alapú megközelítésében a Slutsky-féle helyettesítési mátrixot a következőképpen értelmezzük.

6.21 Definíció.
Egy differenciálható $\chi : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ keresletti függvénnyel jellemzett fogyasztó $(\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ paraméterpár melletti **Slutsky-féle helyettesítési mátrixának** nevezzük az

$$S(\mu, p) := \partial_1 \chi(\mu, p) \cdot \chi(\mu, p)^T + \partial_2 \chi(\mu, p) \in L(\mathbb{R}^n)$$

lineáris transzformációt (kvadratikus mátrixot).

6.22 Megjegyzés.
A most bevezetett Slutsky-féle helyettesítési mátrix nem biztos, hogy szimmetrikus és negatív szemidefinit, mivel most nem értelmezhető a 3.9 ekvivalens definíció.

6.23 Állítás.
1. $\forall\ \nu \in \mathbb{R}_{++}$ mellett a (6.3) kezdetiérték-feladat pontosan akkor oldható meg, ha az $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén az $S(\mu, p)$ Slutsky-féle helyettesítési mátrix szimmetrikus, ahol $\mu = e_\nu(p)$.

2. Ha $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén az $S(\mu, p)$ Slutsky-féle helyettesítési mátrix szimmetrikus és negatív szemidefinit, akkor az előző állítás szerint létező $e : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ függvényre teljesül, hogy

(1) $\forall\ p \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén az $e(., p) : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ függvény monoton növekedő,

(2) $\forall\ \nu \in \mathbb{R}_{++}$ esetén az $e(\nu, .) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ függvény

pozitív homogén,

monoton növekedő,

konkáv,

differenciálható.

Bizonyítás.
Csak az 1. szükségességét látjuk be: Mivel χ differenciálható, azért az e'_ν függvény is az, valamint

$$\begin{aligned} e''_\nu(p) &= \partial_1 \chi(e_\nu(p), p) \cdot e'_\nu(p) + \partial_2 \chi(e_\nu(p), p) \\ &= \partial_1 \chi(e_\nu(p), p) \cdot \chi(e_\nu(p), p)^T + \partial_2 \chi(e_\nu(p), p) \\ &= S(e_\nu(p), p) \end{aligned}$$

Mivel $e''_\nu(p)$ szimmetrikus, azért $S(e_\nu(p), p)$ is az. □

2. lépés

A fenti $e : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ kiadási függvényhez egy olyan $V_\nu \subset \mathbb{R}^n_{++}$ halmazt keresünk, hogy a (6.1) feladathoz tartozó v kiadási függvény megegyezzen az e kiadási függvénnyel.

6.24 Definíció.
A fenti $e : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ kiadási függvény mellett legyen $\forall\ \nu \in \mathbb{R}_{++}$ esetén

$$V_\nu := \{x \in \mathbb{R}^n_+ \ : \ \langle ., x \rangle \geq e(\nu, .)\} = \{x \in \mathbb{R}^n_+ \ : \ \langle p, x \rangle \geq e(\nu, p), \ \forall\ p \in \mathbb{R}^n_{++}\}.$$

6.25 Állítás.
Legyen $\nu \in \mathbb{R}_{++}$ tetszőleges. Tegyük fel, hogy az $e(\nu, .) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ függvény

(1) pozitív homogén,

(2) konkáv,

(3) monoton növekedő,

(4) differenciálható.

Ekkor a (6.1) feladatseregnek a fenti V_ν melletti $v(\nu,.)$ értékfüggvénye megegyezik az $e(\nu,.)$ függvénnyel.

Bizonyítás.
Legyen $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges. Az $e(\nu,.)$ függvény tulajdonságai alapján a V_ν halmaz

(1) nemüres,

(2) zárt,

(3) alulról korlátos.

Ezért $\exists\ x_{\nu,p} \in V_\nu$ hogy

$$v(\nu,p) = \langle p, x_{\nu,p}\rangle\,. \tag{6.4}$$

Mivel $\forall\ x \in V_\nu$ esetén $\langle p, x\rangle \geq e(\nu,p)$, azért

$$e(\nu,p) \leq \langle p, x_{\nu,p}\rangle\,.$$

azaz (6.4) szerint

$$e(\nu,p) \leq v(\nu,p)\,. \tag{6.5}$$

Mivel az $e(\nu,.)$ függvény elsőrendben pozitív homogén, azért az Euler-tétel szerint

$$e(\nu,p) = \langle \partial_2 e(\nu,p), p\rangle\,. \tag{6.6}$$

Emiatt, továbbá mivel az $e(\nu,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ függvény konkáv és differenciálható, azért $\forall\ p' \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\begin{array}{rcl} e(\nu,p') & \leq & e(\nu,p) + \langle \partial_2 e(\nu,p), p' - p\rangle \\ & = & \langle \partial_2 e(\nu,p), p\rangle + \langle \partial_2 e(\nu,p), p'\rangle - \langle \partial_2 e(\nu,p), p\rangle \\ & = & \langle \partial_2 e(\nu,p), p'\rangle\,, \end{array}$$

ez igaz $\forall\ p' \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén, így

$$e(\nu,.) \leq \langle ., \partial_2 e(\nu,p)\rangle\,.$$

Mivel $e(\nu,.)$ monoton növekedő, azért $\partial_2 e(\nu,p) \in \mathbb{R}^n_+$. Ezek szerint $\partial_2 e(\nu,p) \in V_\nu$. Ezért

$$\langle p, x_{\nu,p}\rangle \leq \langle p, \partial_2 e(\nu,p)\rangle\,,$$

(6.4) és ismét (6.6) szerint

$$v(\nu,p) \leq e(\nu,p)\,,$$

így (6.5) szerint

$$v(\nu,p) = e(\nu,p)\,.$$

$\square$

6.26 Állítás.
Egy fogyasztót jellemezzen egy olyan $\chi : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ keresleti függvény, amelyre $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén az $S(\mu, p)$ Slutsky-féle helyettesítési mátrix szimmetrikus és negatív szemidefinit. Akkor a fenti $R \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ reláció gyengén racionalizálja az $\chi : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ keresleti függvényt, azaz $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\chi(\mu, p) \in \mathcal{X}_R(\mu, p)\,.$$

Bizonyítás.
Az $\chi : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ keresleti függvény mellett, mivel $\forall\ (\mu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén az $S(\mu, p)$ Slutsky-féle helyettesítési mátrix szimmetrikus és negatív szemidefinit, azért a 6.23. állítás 1. szerint $\exists\ e : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ függvény, amelyre $\forall\ (\nu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\partial_2 e(\nu, p) = \chi(e(\nu, p), p)\,.$$

A 6.23. állítás 2. szerint $\forall\ \nu \in \mathbb{R}_{++}$ esetén az $e(\nu, .) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ függvény pozitív homogén, monoton növekedő, konkáv és differenciálható. Ezért a 6.25. állítás szerint ez az $e(\nu, .)$ függvény megegyezik a (6.1) feladatseregnek a fenti V_ν melletti $v(\nu, .)$ értékfüggvényével, ezért $\forall\ (\nu, p) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\partial_2 e(\nu, p) = \partial_2 v(\nu, p)\,,$$

így a (6.2) szerint

$$\chi(e(\nu, p), p) \in \mathcal{X}_R(v(\nu, p), p)\,.$$

□

6.27 Megjegyzés.
A fentieket összefoglalva azt állapíthatjuk meg, hogy a preferencia alapú megközelítés csupán annyival hordoz több információt egy fogyasztóról keresleti leképezés alapú megközelítéssel szemben, hogy a Slutsky-féle helyettesítési mátrix szimmetrikus és negatív szemidefinit.

6.3 A keresleti leképezés monotonitási tulajdonságai

Ebben az alfejezetben a 6.8 megjegyzésben felvetett 2. problémára keresünk választ. Az egyik kérdésünk az, hogy a keresleti függvénynek illetve leképezésnek milyen monotonitási tulajdonságait lehet definiálni, amelyek jól tükrözik a kereslet törvényét, a másik pedig az, hogy a fogyasztóra tett milyen feltételek vonják maguk után a keresleti függvény illetve leképezés valamilyen monotonitását.

Először tekintsük át, hogy skaláris szorzatos térben a függvényeknek illetve a halmazértékű leképezéseknek hogyan szokták a monotonitását definiálni.

6.28 Definíció.
Legyen $(X, \langle ., . \rangle)$ skaláris szorzatos tér.

1. Egy $f : A \to X$ $(A \subset X)$ függvényt monoton csökkenőnek nevezünk, ha $\forall\ p_1, p_2 \in A$ esetén

$$\langle p_2 - p_1, f(p_2) - f(p_1) \rangle \leq 0\,.$$

Valós függvény esetén ez a közönséges monoton csökkenéssel ekvivalens.

2. Egy $F : A \to \mathcal{P}(X)$ $(A \subset X)$ halmazértékű leképezést monoton csökkenőnek nevezünk, ha $\forall\, p_1, p_2 \in A$ esetén $\forall\, x_1 \in F(p_1),\ x_2 \in F(p_2)$ mellett

$$\langle p_2 - p_1, x_2 - x_1 \rangle \le 0\,.$$

3. Egy $F : A \to \mathcal{P}(X)$ $(A \subset X)$ halmazértékű leképezést kvázimonoton csökkenőnek nevezünk, ha $\forall\, p_1, p_2 \in A$ esetén $\forall\, x_1 \in F(p_1),\ x_2 \in F(p_2)$ mellett

$$\langle p_2 - p_1, x_1 \rangle < 0 \Rightarrow \langle p_2 - p_1, x_2 \rangle \le 0\,.$$

4. Egy $F : A \to \mathcal{P}(X)$ $(A \subset X)$ halmazértékű leképezést valódi kvázimonoton csökkenőnek nevezünk, ha

$$\begin{aligned}
&\forall\, m \in \mathbb{N},\ p_1, \ldots, p_m \in A,\ x_1 \in F(p_1), \ldots, x_m \in F(p_m),\\
&\lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0,\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1,\ \text{esetén teljesül, hogy}\\
&\exists\, i = 1, \ldots, m \text{ index, hogy}\\
&\left\langle p_i, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \right\rangle \ge 1\,.
\end{aligned}$$

6.29 Megjegyzés.
1. Halmazértékű leképezésekre még számos más monotonitási tulajdonságot lehet definiálni, sőt kvázimonotonitáson más fogalmat is szoktak érteni.
2. Most azt szeretnénk leírni, hogy mit jelentenek ezek a keresleti függvények illetve a keresleti leképezések esetén. Az a gondunk, hogy a fogalmak átírásához a jövedelmet rögzíteni kell, például $\mu = 1$-nek.

6.30 Definíció.
Tegyük fel tehát, hogy a fogyasztó jövedelme állandó, például $\mu = 1$, és tekintsük az $\mathcal{X}(1, .) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezést.

1. Amennyiben a fogyasztó keresleti leképezése egyértékű (singleton-értékű), azaz lényegében egy $\chi(1, .) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ függvény, úgy ezt a keresleti leképezést monoton csökkenőnek nevezzük, ha $\forall\, p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\langle\, p_2 - p_1\,,\ \chi(1, p_2) - \chi(1, p_1)\,\rangle \le 0\,.$$

2. Az $\mathcal{X}(1, .) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezést monoton csökkenőnek nevezzük, ha $\forall\, p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén $\forall\, x_1 \in \mathcal{X}(1, p_1),\ x_2 \in \mathcal{X}(1, p_2)$ mellett

$$\langle p_2 - p_1, x_2 - x_1 \rangle \le 0\,.$$

3. Az $\mathcal{X}(1, .) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezést kvázimonoton csökkenőnek nevezzük, ha $\forall\, p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén $\forall\, x_1 \in \mathcal{X}(1, p_1),\ x_2 \in \mathcal{X}(1, p_2)$ mellett

$$\langle p_2 - p_1, x_1 \rangle < 0 \Rightarrow \langle p_2 - p_1, x_2 \rangle \le 0\,.$$

4. Az $\mathcal{X}(1, .) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezést valódi kvázimonoton csökkenőnek nevezünk, ha

$$\begin{aligned}
&\forall\, m \in \mathbb{N},\ p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}^n_{++},\ x_1 \in \mathcal{X}(1, p_1), \ldots, x_m \in \mathcal{X}(1, p_m),\\
&\lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0,\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1,\ \text{esetén teljesül, hogy}\\
&\exists\, i = 1, \ldots, m \text{ index, hogy}\\
&\left\langle p_i, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \right\rangle \ge 1\,.
\end{aligned}$$

6.31 Megjegyzés.
A monoton csökkenés közgazdasági interpretációja elég szerencsésnek mondható abból a szempontból, hogy lehetnek olyan javak, amelyek kereslete növekszik az árak növekedése mellett is.

A keresleti leképezés monotonitási fogalmai és a különböző kinyilvánított preferenciák konzisztenciafeltételei között erős kapcsolat van. A kvázimonotonitásra teljes az egybeesés.

6.32 Állítás.
Egy $\mathcal{X}(1,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezés, amely Walras-típusú, pontosan akkor kvázimonoton csökkenő, ha konzisztens a szigorúan kinyilvánított (feltárt) preferenciával.

Bizonyítás.
Az 6.17. definíció alapján az $\mathcal{X}(1,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezés, konzisztens a szigorúan kinyilvánított preferenciával, ha

$$\begin{aligned}
&\forall\ p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n_{++} \text{ árváltozás mellett, } \forall\ x_1 \in \mathcal{X}(1,p_1),\ x_2 \in \mathcal{X}(1,p_2) \text{ esetén,}\\
&\text{ha } \langle p_2, x_1\rangle < 1 \Rightarrow \langle p_1, x_2\rangle \geq 1\,,\\
&\text{mivel } \mathcal{X}(1,.) \text{ Walras-típusú, azért ez ekvivalens azzal, hogy}\\
&\text{ha } \langle p_2, x_1\rangle < \langle p_1, x_1\rangle \Rightarrow \langle p_1, x_2\rangle \geq \langle p_2, x_2\rangle\,, \text{ azaz}\\
&\text{ha } \langle p_2 - p_1, x_1\rangle < 0 \Rightarrow \langle p_2 - p_1, x_2\rangle \leq 0\,,
\end{aligned}$$

ami a 6.30. definíció 3. szerint $\mathcal{X}(1,.)$ kvázimonotonitását jelenti. □

6.33 Állítás.
Ha egy Walras-típusú $\mathcal{X}(1,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezés valódi kvázimonoton, akkor a kvázimonoton is.

Bizonyítás.
Indirekt módon tegyük fel, hogy $\mathcal{X}(1,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ nem kvázimonoton. Mivel Walras-típusú, azért a 6.32. állítás szerint nem konzisztens a szigorúan kinyilvánított preferenciával, 6.17. definíció alapján

$$\exists\, p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n_{++} \text{ és } \exists\, x_1 \in \mathcal{X}(1,p_1),\ x_2 \in \mathcal{X}(1,p_2), \text{ hogy } \langle p_2, x_1\rangle < 1 \text{ és } \langle p_1, x_2\rangle < 1\,,$$

ekkor

$$\langle p_1, \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\rangle < 1 \ \text{ és } \ \langle p_2, \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\rangle < 1\,,$$

tehát $\mathcal{X}(1,.)$ nem valódi kvázimonoton. □

6.34 Megjegyzés.
Közgazdasági szempontból első látásra nem tűnik nagy problémának a jövedelem állandónak tekintése, hiszen az előbbi fogalmakat úgy interpretálhatjuk, hogy ha a jövedelem nem változik, de az árak nőnek, akkor a kereslet összességében csökken. Azonban a jövedelem állandónak tételezése azt jelenti, hogy a költségvetési feltételben végig oszthatunk a μ jövedelemmel, amit a pénz úgynevezett „semlegességének” szoktak nevezni. Emiatt szükség van olyan fogalmakra, amelyek a jövedelmet is figyelembe veszik.

6.35 Definíció.
1. Amennyiben a fogyasztó keresleti leképezése egyértékű (singleton-értékű), azaz lényegében egy $\chi : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ függvény, úgy azt mondjuk, hogy ez a keresleti leképezés kielégíti a kereslet törvényét, ha $\forall\ (\mu_1, p_1),\ (\mu_2, p_2) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\langle\, p_2 - p_1\,,\, \chi(\mu_2, p_2) - \chi(\mu_1, p_1)\,\rangle \leq 0\,.$$

2. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{X}(1,.) : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezés kielégíti a kereslet törvényét, ha $\forall\, (\mu_1, p_1),\ (\mu_2, p_2) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_{++}$ esetén $\forall\, x_1 \in \mathcal{X}(\mu_1, p_1),\ x_2 \in \mathcal{X}(\mu_2, p_2)$ mellett

$$\langle p_2 - p_1, x_2 - x_1 \rangle \le 0\,.$$

6.3.1 A keresleti leképezés kvázimonotonitása

Ebben az alfejezetben először a közönséges keresleti leképezés kvázimonotonitását vizsgáljuk. A fő célunk azonban a keresleti megfeleletetés kvázimonotonitásának jellemezése. Érdekes, hogy ehhez szükség van a KKM-féle tételre is, ami mint ismert igen erős eszköz, mert ekvivalens a Brouwer-féle fixponttétellel. Végül a keresleti megfeleletetés valódi kvázimonotonitásának a fentihez hasonló jellemzését adjuk meg.

6.36 Megjegyzés.
Ha egy $R \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ reláció gyengén racionalizálja az $\mathcal{X}(1,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezést, akkor az $\mathcal{X}_R(1,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ indukált keresleti leképezés kvázimonotonitásából illeve valódi kvázimonotonitásából következik az $\mathcal{X}(1,.)$ keresleti leképezés kvázimonotonitása illeve valódi kvázimonotonitása, ugyanis ekkor $\forall\, p \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén $\mathcal{X}(1,p) \subset \mathcal{X}_R(1,p)$.

A következőkben arra a kérdésre válaszolunk több lépésben, hogy az R preferencia milyen tulajdonsága biztosítja azt, hogy az általa indukált $\mathcal{X}_R(1,.)$ keresleti leképezés, és így következésképpen az R preferencia által racionalizált $\mathcal{X}(1,.)$ keresleti leképzés kvázimonoton.

Először összefoglaljuk a relációknak az általunk használt legfontosabb tulajdonságait.

6.37 Megjegyzés. (relációk tulajdonságai)
Legyen $R \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ adott reláció.

1. Ismert tulajdonságok: reflexív, teljes, tranzitív.
2. Az R monoton, ha $x < y \Rightarrow x\, R^c\, y$.
3. Az R relációnak nem létezik lokális maximuma, másképpen lokálisan telíthetetlen, ha tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n_+$ pont minden U környezetében van olyan y pont, hogy $\neg(x\, R\, y)$, azaz $x\, R^c\, y$.
4. Az R zárt, ha az $R \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ halmaz zárt a szorzattérben.
5. Az $R \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ reláció felfogható egy $R(.) : \mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ halmazértékű leképezésként is, ahol $\forall\, x \in \mathbb{R}^n_+$ esetén $R(x)$ az R reláció felső nívó halmaza:
$$R(x) = \{y \in \mathbb{R}^n_+ \ : \ y\, R\, x\}\,.$$
Látható, hogy
$$R = \operatorname{graph} R(.) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+ \ : \ y \in R(x)\}\,.$$
Enek a segítségével további tulajdonságok definiálhatók.
6. Az R reláció zárt értékű, ha az $R(.)$ halmazértékű leképezés zárt értékű, azaz $\forall\, x \in \mathbb{R}^n_+$ esetén az $R(x) = \{y \in \mathbb{R}^n_+ \ : \ y\, R\, x\}$ halmaz zárt.
7. Az R konvex értékű, ha az $R(.)$ halmazértékű leképezés konvex értékű, azaz $\forall\, x \in \mathbb{R}^n_+$ esetén az $R(x) = \{y \in \mathbb{R}^n_+ : y\, R\, x\}$ halmaz konvex.

8. Belátható a következő: Ha az R reláció teljes, monoton zárt értékű és konvex értékű, akkor lokálisan telíthetetlen.

6.38 Állítás.
1. Ha az $R \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ reláció lokálisan telíthetlen és konvex értékű, akkor az általa indukált $\mathcal{X}_R(1,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezés kvázimonoton.

2. Ha az $R \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ reláció lokálisan telíthetlen és konvex értékű, valamint gyengén racionalizál egy $\mathcal{X}(1,.)$ keresleti leképezést, akkor ez az $\mathcal{X}(1,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképzés is kvázimonoton.

Bizonyítás.
1. Indirekt módon tegyük fel, hogy az $\mathcal{X}_R(1,.)$ keresleti leképezés nem kvázimonoton, azaz $\exists\ p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n_{++}$ árak és $\exists\ x_1 \in \mathcal{X}_R(1,p_1)$, $x_2 \in \mathcal{X}_R(1,p_2)$, hogy $\langle p_1, x_2\rangle <$ 1 és $\langle p_2, x_1\rangle < 1$. Tekintsük a $z := \frac{x_1+x_2}{2}$ pontot. Mivel R reláció lokálisan telíthetetlen, azért az általa indukált $\mathcal{X}_R(1,.)$ keresleti leképezésre teljesül a Walras-törvény, azért $\langle p_1, x_1\rangle = \langle p_2, x_2\rangle = 1$, így

$$\langle p_1, z\rangle = \frac{1}{2}\langle p_1, x_1\rangle + \frac{1}{2}\langle p_1, x_2\rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\langle p_1, x_2\rangle < 1\,.$$

Ugyanígy $\langle p_2, z\rangle < 1$. Ezért a z pontnak környezete az

$$U := \{\, u \in \mathbb{R}^n_+ \ :\ \langle p_1, u\rangle < 1 \text{ és } \langle p_2, u\rangle < 1\,\}$$

halmaz. Mivel $x_1 \in \mathcal{X}_R(1,p_1)$, $x_2 \in \mathcal{X}_R(1,p_2)$ és $U \subset B(1,p_1) \cap B(1,p_2)$, azért

$$\forall\ u \in U \text{ esetén } x_1\, R\, u \text{ és } x_2\, R\, u\,,$$

mivel az R reláció konvex, azért

$$\forall\ u \in U \text{ esetén } z\, R\, u\,,$$

ami azt jelenti, hogy az R nem telíthetetlen az U környezetben, ami ellenmond a feltevésnek.

2. A 6.36. megjegyzés alapján következik 1.-ből. □

6.39 Megjegyzés.
A 6.38. állítás megfordítása is igaz, amit alpont fő eredményének tekinthetünk. Ennek az állításnak a bizonyítása során többféle relációt definiálunk, amelyek által indukált keresleti leképezések fontos, hogy valódiak, azaz nemüres értékűek legyenek, ami azt jelenti, hogy minden ár mellett lehessen a fogyasztói preferencia szerint legalább egy fogyasztói kosarat választani a költségvetési halmazból. Könnyen adható olyan példa, hogy ezt az R reláció konvexitása és lokális telíthetetlensége általában nem tudja biztosítani. A valódiságot a függelékbeli 7.94 Ky Fan-féle metszet-tétel segítségével tudjuk majd garantálni.

6.40 Állítás. (a keresleti leképezés valódisága I.)
Tegyük fel, hogy az $R \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ reláció kielégíti a következő feltételeket:

(1) *Az $R \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ reláció, pontosabban az $R(.) : \mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ leképezés zárt értékű, azaz $\forall\ x \in \mathbb{R}^n_+$ esetén az $R(x)$ halmaz zárt.*

(2) *Az $R(.) : \mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ leképezés KKM-tulajdonságú:*

$$\forall\ x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n_+ \qquad \mathrm{co}(x_1, \dots, x_m) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} R(x_i).$$

Ekkor az R reláció által indukált $\mathcal{X}_R(1,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezés valódi, azaz nemüres értékű, azaz $\forall\ p \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén $\mathcal{X}_R(1,p) \neq \emptyset$.

BIZONYÍTÁS.
Az $\mathcal{X}_R$ indukált keresleti függvény 6.5. definíciója szerint $\forall\ p \in \mathbb{R}^n_{++}$ esetén

$$\mathcal{X}_R(1,p) = \left(\bigcap_{x \in B(p)} R(x) \right) \cap B(1,p)\,.$$

Ekkor viszont a $B(1,p)$ halmaz kompaktsága, továbbá az R reláció zárt értékű volta és KKM-tulajdonsága miatt a 7.94. állítás (Ky Fan Tétel) alapján azonnal következik a metszet nemüressége. □

6.41 Állítás. (a keresleti leképezés valódisága II.)
Tegyük fel, hogy az $R \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ reláció

(1) *az R reláció teljes,*

(2) *az R reláció monoton,*

(3) *az R reláció, pontosabban az $R(.)$ leképezés konvex értékű,*

(4) *az R reláció, pontosabban az $R(.)$ leképezés zárt értékű.*

Ekkor
1. az $R(.) : \mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ leképezés KKM-tulajdonságú, azaz

$$\forall\ x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n_+ \qquad \mathrm{co}(x_1, \ldots, x_m) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} R(x_i)\,;$$

2. így az R reláció által indukált $\mathcal{X}_R(1,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezés valódi, azaz nemüres értékű.

BIZONYÍTÁS.
1. Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy nem teljesül a KKM-feltétel. Ez azt jelenti, hogy léteznek olyan $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n_+$ pontok és $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$, $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$, amelyekre

$$x := \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \;\notin\; \bigcup_{i=1}^{m} R(x_i)\,.$$

Az $R(\cdot)$ zárt értékűsége miatt $\forall\ i = 1, \ldots, m$ esetén az $W(x_i) := \mathbb{R}^n_+ \setminus R(x_i)$ halmazok nyíltak, és így nyílt a $\cap_i W(x_i)$ metszetük is. Mivel az indirekt feltevés miatt $x \in \cap_i W(x_i)$, ezért a nyíltság miatt van olyan $y \in \cap_i W(x_i)$, amelyre $x < y$ (koordinátánként szigorúan nagyobb). Eszerint $\forall\ i = 1, \ldots, m$ index esetén $y \in W(x_i)$, azaz $y \notin R(x_i)$, másképpen $\forall\ i = 1, \ldots, m$ index esetén $\neg y\, R\, x_i$. Ebből pedig az R teljessége miatt $\forall\, i = 1, \ldots, m$ index esetén $x_i\, R\, y$, azaz $\forall\, i = 1, \ldots, m$ index esetén $x_i \in R(y)$, és így az R konvexitása miatt $x \in R(y)$ azaz $x\, R\, y$. Mivel $y > x$, azért ez ellentmond az R reláció monotonitásának.

2. Következik a fenti 6.40. állításból az 1. alapján. □

A következő állításban jellemezzük a keresleti leképezések kvázimonotonitását:

6.42 Állítás. (a keresleti leképezés kvázimonotonitásának jellemzése)
Legyen az $\mathcal{X}(1,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezés valódi, azaz nemüres értékű, valamint Walras-típusú. Ekkor a következő állítások ekvivalensek.

1. *Az* $\mathcal{X}(1,.)$ *keresleti leképezés kvázimonoton.*
2. *Az* $\mathcal{X}(1,.)$ *keresleti leképezést egy* $R \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ *teljes, monoton, konvex értékű és zárt értékű reláció gyengén racionalizálja.*
3. *Az* $\mathcal{X}(1,.)$ *keresleti leképezést egy* $R \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ *lokálisan telíthetetlen és konvex értékű reláció gyengén racionalizálja.*

BIZONYÍTÁS.
2. $\Rightarrow$ 3.: A 6.37. megjegyzés 8. szerint ha egy reláció teljes, monoton, zárt értékű és konvex értékű, akkor lokálisan telíthetetlen (és konvex értékű) is.

3. $\Rightarrow$ 1.: Ez pontosan a 6.38. állítás 2.

1. $\Rightarrow$ 2.: Tegyük fel, hogy az $\mathcal{X}(1,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezés kvázimonoton, azaz

$$\begin{aligned}
&\forall\, p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n_{++} \text{ árváltozás mellett,}\\
&\forall\, x_1 \in \mathcal{X}(1,p_1),\ x_2 \in \mathcal{X}(1,p_2),\ \text{esetén,}\\
&\text{ha } \langle p_2 - p_1, x_1\rangle < 0 \Rightarrow \langle p_2 - p_1, x_2\rangle \le 0\,.
\end{aligned}$$

Definiáljuk (az $\mathcal{X}(1,.)$ keresleti leképezés segítségével) a következő $S \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ relációt: $\forall\, p_1, p_2 \in R^n_+$ esetén

$$p_1\, S\, p_2 :\Longleftrightarrow \begin{cases} p_1 \in \mathbb{R}^n_+ & \text{ha } p_2 \notin \mathbb{R}^n_{++} \\ \forall\, x \in \mathcal{X}(1,p_2) \text{ esetén } \langle p_2 - p_1, x\rangle \le 0 & \text{ha } p_2 \in \mathbb{R}^n_{++}\,. \end{cases}$$

Belátható, hogy az $S \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ reláció

(1) teljes,

(2) monoton,

(3) konvex értékű,

(4) zárt értékű.

Ugyanis:
(1) Legyen $p_1, p_2 \in R^n_+$ tetszőleges. Ha p_1 illetve $p_2 \notin \mathbb{R}^n_{++}$, akkor $p_2\, R\, p_1$ illetve $p_1\, R\, p_2$. Tegyük fel, hogy $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n_{++}$, valamint $\neg p_1\, S\, p_2$, ekkor $\exists\, x_2 \in \mathcal{X}(1,p_2)$, hogy $\langle p_1 - p_2, x_2\rangle < 0$. Mivel $\mathcal{X}(1,.)$ kvázimonoton, (és $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n_{++}$,) azért $\forall\, x_1 \in \mathcal{X}(1,p_1)$ esetén $\langle p_1 - p_2, x_1\rangle \le 0$, azaz az S definíciója szerint $p_2\, S\, p_1$.

(2) Tegyük fel, hogy $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n_+$, $p_1 < p_2$. Ekkor ha $p_2 \notin \mathbb{R}^n_{++}$ lenne, akkor $p_1 \notin \mathbb{R}^n_+$ lenne, ezért $p_2 \in \mathbb{R}^n_{++}$.
Mivel $\mathcal{X}(1,.)$ valódi, azért $\mathcal{X}(1,p_2) \neq \emptyset$, azaz $\exists\, x_2 \in \mathcal{X}(1,p_2)$.
Mivel $\mathcal{X}(1,.)$ Walras-típusú, azért $\forall\, x_2 \in \mathcal{X}(1,p_2)$ esetén $\langle p_2, x_2\rangle = 1$, ezért $\forall\, x_2 \in \mathcal{X}(1,p_2)$ esetén $x_2 \ge (\neq)\mathbf{0}$.
Mivel $p_1 < p_2$, azért $\forall\, x_2 \in \mathcal{X}(1,p_2)$ esetén $\langle p_2 - p_1, x_2\rangle > 0$, ezért az S definíciója szerint $\neg p_1\, S\, p_2$, azaz $p_1\, S^c\, p_2$.

(3) és (4) A szokásos módon könnyen látható.

Az S felhasználásával definiálunk egy duális keresleti leképezést. Legyen a fogyasztó duális költségvetési jeképezése az a $B^\circ(1,.) : \mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ halmazértékű leképezés, amelyre $\forall\, x \in R^n_{++}$ esetén

$$B^\circ(1,x) := \{p \in \mathbb{R}^n_+ : \langle p, x\rangle \le 1\}\,.$$

A fogyasztó duális keresleti leképezésének az S reláció által indukált $\mathcal{X}_S^\circ(1,.)$: $\mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezést, azaz amelyre $\forall\, x \in R^n_{++}$ esetén

$$\mathcal{X}_S^\circ(1,x) := \{p \in \mathbb{R}^n_+ : p \in B^\circ(1,x) \text{ és } \forall\, q \in B^\circ(1,x) \text{ esetén } pSq\}\,.$$

Mivel az S reláció teljesíti a 6.41. állítás feltételeit azért az általa indukált $\mathcal{X}_S^\circ(1,.)$ duális keresleti leképezés valódi, azaz nemüres értékű.
Továbbá mivel az S reláció teljes, monoton, zárt értékű és konvex értékű, azért a 2. $\Rightarrow$ 3. és a 3. $\Rightarrow$ 1. szerint az általa indukált $\mathcal{X}_S^\circ(1,.)$ duális keresleti leképezés kvázimonoton, (a 6.37. megjegyzés 8. szerint ha egy reláció teljes, monoton, zárt értékű és konvex értékű, akkor lokálisan telíthetetlen (és konvex értékű) is, a 6.38. állítás 1. szerint az általa indukált $\mathcal{X}_S^\circ(1,.)$ duális keresleti leképezés kvázimonoton).
Definiáljuk (mint az előbb az $\mathcal{X}(1,.)$, most az $\mathcal{X}_S^\circ(1,.)$ indukált duális keresleti leképezés segítségével) a következő $R \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ relációt: $\forall\, x_1, x_2 \in R^n_+$ esetén

$$x_1\, R\, x_2 :\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 \in \mathbb{R}^n_+ & \text{ha } x_2 \notin \mathbb{R}^n_{++} \\ \forall\, p \in \mathcal{X}_S^\circ(1,x_2)\ \langle p, x_2 - x_1\rangle \le 0 & \text{ha } x_2 \in \mathbb{R}^n_{++}\,. \end{cases}$$

Belátható, hogy az $R \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ reláció is

(1) teljes,

(2) monoton,

(3) konvex értékű,

(4) zárt értékű.

A bizonyítások ugyanúgy mennek, mint az előbb az S reláció esetén, egyetlen, de lényeges különbséggel. A monotonitás bizonyítása során szükség van a keresleti leképezés valódi voltára. A kiindulási $\mathcal{X}(1,.)$ keresleti leképezésről ezt feltettük. Az $\mathcal{X}_S^\circ(1,.)$ indukált keresleti leképezés valódi voltát azonban az 6.41. állítás, azaz végül is a 7.94. állítás (Ky Fan tétel) biztosítja.

Végül belátjuk, hogy az R reláció gyengén racionalizálja az $\mathcal{X}(1,.)$ keresleti leképezést, azaz ez része az R reláció által indukált keresleti leképezésnek:

$$\begin{aligned} &\mathcal{X}(1,.) \subset \mathcal{X}_R(1,.)\,, \text{ azaz} \\ &\forall\, p \in \mathbb{R}^n_{++} \text{ esetén } \mathcal{X}(1,p) \subset \mathcal{X}_R(1,p)\,. \end{aligned}$$

Legyen $p_1 \in \mathbb{R}^n_{++}$ tetszőleges, és legyen $x_1 \in \mathcal{X}(1,p_1)$. Be kell látni, hogy $x_1 \in \mathcal{X}_R(1,p_1)$, azaz $\forall\, x_2 \in B(1,p_1)$ esetén $x_1\, R\, x_2$.
Ha $x_2 \notin \mathbb{R}^n_{++}$, akkor az R definíciója szerint $x_1\, R\, x_2$.
Ha $x_2 \in \mathbb{R}^n_{++}$, akkor az R definíciója szerint azt kell belátni, hogy $\forall\, p_2 \in \mathcal{X}_S^\circ(1,x_2)$ esetén $\langle p_2, x_2 - x_1\rangle \le 0$.
Legyen $p_2 \in \mathcal{X}_S^\circ(1,X_2)$ tetszőleges, mivel $x_2 \in B(1,p_1)$, azaz $\langle p_1, x_2\rangle \le 1$, azaz $p_1 \in B^\circ(1,x_2)$, azért az $\mathcal{X}_S^\circ(1,.)$ duális keresleti leképezés definíciója szerint $p_2\, S\, p_1$. Mivel $x_1 \in \mathcal{X}(1,p_1)$, azért az S reláció definíciója szerint $\langle p_1 - p_2, x_1\rangle \le 0$. Mivel $p_1 \in \mathcal{X}_S^\circ(1,x_1)$, valamint a $\mathcal{X}(1,.)$ keresleti leképezés Walras-tulajdonságú, azért $\langle p_1, x_1\rangle = 1$. Mivel $p_2 \in \mathcal{X}_S^\circ(1,x_2)$, valamint az S reláció lokálisan telíthetetlen, így az általa indukált $\mathcal{X}_S^\circ(1,.)$ duális keresleti leképezés Walras-tulajdonságú, azért $\langle p_2, x_2\rangle = 1 = \langle p_1, x_1\rangle$. Ezért

$$0 \ge \langle p_1 - p_2, x_1\rangle = \langle p_1, x_1\rangle - \langle p_2, x_1\rangle = \langle p_2, x_2\rangle - \langle p_2, x_1\rangle = \langle p_2, x_2 - x_1\rangle\,,$$

azaz $\langle p_2, x_2 - x_1\rangle \le 0$, azaz $x\, R\, y$. $\square$

6.3.2 A keresleti leképezés valódi kvázimonotonitása

Az előző alpontban a kvázimonoton keresleti megfeleltetés jellemzésének a kulcsa a bevezetett S reláció által indukált $\mathcal{X}_S^\circ$ keresleti leképezés nem üres értékűsége volt, ehhez pedig a 7.94. állítást (Ky Fan tételt) használtuk fel. Ebben az alpontban ennek az erős eszköznek a használatát akarjuk elejteni, amit a valódi kvázimonotonitás fogalom használatával tudunk elérni.

A 6.38. állításnak igaz a következő erősítése.

6.43 Állítás. (az indukált keresleti lek. valódi kvázimonotonitásának jellemzése)
1. Ha az $R \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ reláció lokálisan telíthetlen és konvex értékű, akkor az általa indukált $\mathcal{X}_R(1,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezés valódi kvázimonoton.

2. Ha az $R \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ reláció lokálisan telíthetlen és konvex értékű, valamint racionalizál egy $\mathcal{X}(1,.)$ keresleti leképezést, akkor ez az $\mathcal{X}(1,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképzés is valódi kvázimonoton.

Bizonyítás.
1. Indirekt módon tegyük fel, hogy az $\mathcal{X}_R(1,.)$ keresleti leképezés nem kvázimonoton, azaz

$$\begin{aligned}
&\exists\ m \in \mathbb{N},\ p_1,\dots,p_m \in \mathbb{R}^n_{++},\ x_1 \in \mathcal{X}(1,p_1),\dots,x_m \in \mathcal{X}(1,p_m),\\
&\lambda_1,\dots,\lambda_m > 0,\ \lambda_1+\ldots+\lambda_m = 1,\ \text{hogy}\\
&\forall\ i = 1,\dots,m \text{ indexre}\\
&\langle p_i, \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\rangle < 1\,.
\end{aligned}$$

Ezért a $z := \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ pontnak környezete az

$$U := \{\, u \in \mathbb{R}^n_+ \ :\ \forall\ i = 1,\dots,m \text{ esetén } \langle p_i, u\rangle < 1\,\}$$

halmaz. Mivel $\forall\ i = 1,\dots,m$ esetén $x \in \mathcal{X}_R(1,p_i)$ és $U \subset \cap_{i=1}^m B(1,p_i)$, azért

$$\forall\ i = 1,\dots,m \text{ és } \forall\ u \in U \text{ esetén } x_i\, R\, u\,,$$

mivel az R reláció konvex, azért

$$\forall\ u \in U \text{ esetén } z\, R\, u\,,$$

ami azt jelenti, hogy az R nem telíthetlen az U környezetben, azaz nem lokálisan telíthetlen, ami ellenmondás.

2. A 6.36. megjegyzés alapján következik 1.-ből. □

A következő állítás a 6.42. állítás erősítése, nem tesszük fel benne a keresleti leképezés valódiságát, azaz bármilyen, akár véges halmaz is lehet a valódi (effektív) értelmezési tartománya:

6.44 Állítás. (a keresleti lek. valódi kvázimonotonitásának jellemzése)
Legyen az $\mathcal{X}(1,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezés Walras-típusú. Ekkor a következő állítások ekvivalensek.

1. *Az $\mathcal{X}(1,.)$ keresleti leképezés valódi kvázimonoton.*

2. *Az $\mathcal{X}(1,.)$ keresleti leképezést egy $R \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ reflexív, monoton, konvex értékű és zárt értékű reláció gyengén racionalizálja.*

3. *Az* $\mathcal{X}(1,.)$ *keresleti leképezést egy* $R \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ *lokálisan telíthetetlen és konvex értékű reláció gyengén racionalizálja.*

Bizonyítás.
2. $\Rightarrow$ 3.: Ismét a 6.37. megjegyzés 8. szerint ha egy reláció teljes, monoton, zárt értékű és konvex értékű, akkor lokálisan telíthetetlen (és konvex értékű) is.

3. $\Rightarrow$ 1.: Ez pontosan a 6.43. állítás 2.

1. $\Rightarrow$ 2.: Tegyük fel, hogy az $\mathcal{X}(1,.) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezés kvázimonoton.
Tekintsük az $\mathcal{X}(1,.)$ keresleti leképezéshez tartozó $R_{\mathcal{X}(1,.)}$ kinyilvánított preferenciát. Ez nyilván reflexív reláció.
Tekintsük ennek a relációnak a konvex értékű burkát, azaz a $\operatorname{co} R_{\mathcal{X}(1,.)} \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ relációt.

Belátjuk, hogy az $\mathcal{X}(1,.)$ keresleti leképezés kvázimonotonitásából következik a $\operatorname{co} R_{\mathcal{X}(1,.)}$ preferenciareláció monotonitása.
Ugyanis, indirekt módon tegyük fel, hogy a $\operatorname{co} R_{\mathcal{X}(1,.)}$ reláció nem monoton, azaz $\exists\, y < x$ hogy

$$y \in \operatorname{co} R_{\mathcal{X}(1,.)}(x) = \operatorname{co}\{z \in \mathbb{R}^n_+ \ : \ \exists\, p \in \mathbb{R}^n_{++},\ z \in \mathcal{X}(1,p), x \in B(1,p)\}\,,$$

azaz $\exists\, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}^n_{++}$, hogy $x \in B(1,p_1), \ldots, x \in B(1,p_m)$, valamint $\exists\, z_1 \in \mathcal{X}(1,p_1), \ldots, z_m \in \mathcal{X}(1,p_m)$, és $\exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0,\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$, hogy

$$y = \sum_{i=1}^m \lambda_i z_i\,.$$

Mivel $y < x$ és $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}^n_{++}$, azért $\forall\, i = 1, \ldots, m$ esetén

$$\langle p_i, y\rangle < \langle p_1, x\rangle \le 1\,, \quad \text{azaz} \quad \langle p_i, \sum_{i=1}^m \lambda_i z_i\rangle < 1\,,$$

ami ellentmond $\mathcal{X}$ kvázimonotonitásának.

Végül tekintsük a kinyilvánított preferencia zárt konvex értékű burkát, azaz az

$$R := \operatorname{cl}\operatorname{co} R_{\mathcal{X}(1,.)} \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$$

relációt, amelyre $\forall\, x \in \mathbb{R}^n_+$ esetén $R(x) = \operatorname{cl}\operatorname{co} R_{\mathcal{X}(1,.)}(x)$. A fentiek szerint az R reláció reflexív, tranzitív és monoton, valamint nyilván konvex és zárt értékű.

Be kell még látni, hogy az R reláció racionalizálja a $\mathcal{X}(1,.)$ keresleti leképezést. A 6.14. állítás szerint ehhez elég belátni, hogy $\forall\, x \in \mathbb{R}^n_+$ esetén

$$R_{\mathcal{X}(1,.)}(x) \subset R(x)\,.$$

Mivel $R(x) = \operatorname{cl}\operatorname{co} R_{\mathcal{X}(1,.)}(x)$, azért ez nyilvánvaló. $\square$

Végezetül megjegyezzük, hogy a tétel nem állította a racionalizáló preferencia teljességét. Ez jelenleg még nyitott kérdés: van-e olyan racionalizáló preferencia, amely az állított tulajdonságokon kívül még teljes is.

6.3.3 A kinyilvánított preferencia és a kereslet törvénye

A bevezetőben is említettük, hogy a keresleti leképezés monotonitási fogalmai és a különböző kinyilvánított preferenciák között szoros kapcsolat van. Láttuk, hogy Walras-típusú keresleti leképezés esetén a szigorúan kinyilvánított preferencia konzisztenciafeltétele ekvivalens a kvázimonotonitással. Ebben az alfejezetben a kinyilvánított preferencia konzisztenciafeltétele, azaz a kinyilvánított preferencia gyenge axiómája és a kereslet törvéne közötti kapcsolatot vizsgáljuk.

6.45 Definíció.
Egy $\mathcal{X} : \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezés mellett a

$$(\mu_1, p_1), (\mu_2, p_2) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$$

párokat **kompenzált jövedelem- és árváltozásnak** nevezzük, ha teljesül, hogy $\forall\ x_1 \in \mathcal{X}(\mu_1, p_1)$ esetén

$$\langle p_2, x_1 \rangle = \mu_2\,.$$

6.46 Megjegyzés.
1. Amennyiben az $\mathcal{X}$ keresleti leképezés Walras-típusú, azért ez ekvivalens azzal, hogy $\forall\ x_1 \in \mathcal{X}(\mu_1, p_1)$ esetén $\mu_2 - \mu_1 = \langle p_2 - p_1, x_1 \rangle$, ugyanis $\langle p_1, x_1 \rangle = \mu_1$.

2. Abból, hogy $(\mu_1, p_1), (\mu_2, p_2)$ jövedelem- és árváltozás kompenzált, nem következik, hogy a $(\mu_2, p_2), (\mu_1, p_1)$ is az, mint ahogy a későbbi esetekben is lesz.

3. A 6.10. definícióbeli kinyilvánított preferencia gyenge axiómája kompenzált jövedelem- és árváltozás mellett a következő alakú:

6.47 Definíció. (speciális eset)
Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{X} : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezés konzisztens a kinyilvánított preferenciával kompenzált jövedelem- és árváltozás mellett, másképpen, az keresleti leképezésre teljesül a kinyilvánított preferencia gyenge axiómája kompenzált jövedelem- és árváltozás mellett, ha

$\forall\ (\mu_1, p_1), (\mu_2, p_2) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ kompenzált jövedelem- és árváltozásra,
$\forall\ x_1 \in \mathcal{X}(\mu_1, p_1),\ x_2 \in \mathcal{X}(\mu_2, p_2),\ x_1 \neq x_2$ esetén
$\langle p_1, x_2 \rangle > \mu_1\,.$

Ugyanis a jövedelem- és árváltozás kompenzáltsága miatt $\langle p_2, x_1 \rangle = \mu_2$, így $\leq \mu_2$.

6.48 Állítás.
Egy $\mathcal{X} : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ keresleti leképezés pontosan akkor elégíti ki a kinyilvánított preferencia gyenge axiómáját, ha kielégíti kompenzált jövedelem- és árváltozás mellett.

Bizonyítás.
szükségesség: Nyilvánvaló. (Ha minden árváltozás mellett kielégíti, akkor kompenzált árváltozás mellett is.)

elégségesség: Indirekt módon tegyük fel, hogy $\mathcal{X}$ kielégíti a kinyilvánított preferencia gyenge axiómáját kompenzált jövedelem- és árváltozás mellett, de

$\exists\ (\mu_1, p_1), (\mu_2, p_2) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ olyan jövedelem- és árváltozás, és
$\exists\ x_1 \in \mathcal{X}(\mu_1, p_1),\ x_2 \in \mathcal{X}(\mu_2, p_2),\ x_1 \neq x_2$, hogy
$\langle p_2, x_1 \rangle \leq \mu_2$ és $\langle p_1, x_2 \rangle \leq \mu_1\,.$

Ha $\langle p_2, x_1\rangle = \mu_2$, akkor ez kompenzált árváltozás lenne, ezért a feltétel szerint $\mathcal{X}$ kielégíti a kinyilvánított preferencia gyenge axiómáját, ami ellentmondás. Ezért $\langle p_2, x_1\rangle < \mu_2$.

Belátjuk hogy: $\exists\ \alpha \in (0,1)$, hogy a $p_\alpha := \alpha p_1 + (1-\alpha)p_2$ mellett

$$\langle p_\alpha, x_1\rangle = \langle p_\alpha, x_2\rangle .$$

Ugyanis: Tekintsük azt az $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre $\forall\ \alpha \in [0,1]$ esetén

$$\begin{aligned} f(\alpha) &:= \langle p_\alpha, x_1\rangle - \langle p_\alpha, x_2\rangle \\ &= \langle \alpha p_1 + (1-\alpha)p_2, x_1\rangle - \langle \alpha p_1 + (1-\alpha)p_2, x_2\rangle \\ &= \alpha\langle p_1, x_1\rangle + (1-\alpha)\langle p_2, x_1\rangle - \alpha\langle p_1, x_2\rangle - (1-\alpha)\langle p_2, x_2\rangle \\ &= \alpha(\langle p_1, x_1\rangle - \langle p_1, x_2\rangle) + (1-\alpha)(\langle p_2, x_1\rangle - \langle p_2, x_2\rangle) \\ &= \alpha(\mu_1 - \langle p_1, x_2\rangle) + (1-\alpha)(\langle p_2, x_1\rangle - \mu_2)\,, \end{aligned}$$

ekkor

$$f(0) = \langle p_2, x_1\rangle - \mu_2 < 0\,, \text{ és } f(1) = \mu_1 - \langle p_1, x_2\rangle \geq 0\,,$$

így a Bolzano-tétel szerint $\exists\ \alpha \in [0,1]$, hogy $f(\alpha) = 0$. Jelölje

$$\mu_\alpha := \langle p_\alpha, x_1\rangle = \langle p_\alpha, x_2\rangle\,,$$

ekkor $(\mu_1, p_1), (\mu_\alpha, p_\alpha)$ illetve $(\mu_2, p_2), (\mu_\alpha, p_\alpha)$ kompenzált árváltozások. Legyen $x_\alpha \in \mathcal{X}(\mu_\alpha, p_\alpha)$ tetszőleges, ekkor

$$\begin{aligned} \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2 &= \alpha\langle p_1, x_1\rangle + (1-\alpha)\langle p_2, x_2\rangle \\ &> \alpha\langle p_1, x_1\rangle + (1-\alpha)\langle p_2, x_1\rangle \\ &= \langle p_\alpha, x_1\rangle = \mu_\alpha = \langle p_\alpha, x_\alpha\rangle \\ &= \alpha\langle p_1, x_\alpha\rangle + (1-\alpha)\langle p_2, x_\alpha\rangle\,, \end{aligned}$$

ezért $\langle p_1, x_\alpha\rangle < \mu_1$ vagy $\langle p_2, x_\alpha\rangle < \mu_2$.
1. Ha $\langle p_1, x_\alpha\rangle < \mu_1$, akkor $\langle p_1, x_\alpha\rangle < \langle p_1, x_1\rangle$, ezért $x_1 \neq x_2$, ezek szerint a $(\mu_1, p_1), (\mu_\alpha, p_\alpha)$ kompenzált árváltozxás esetén nem teljesül a kinyilvánított preferencia gyenge axiómája.
2. Ha $\langle p_2, x_\alpha\rangle < \mu_2$, akkor hasonlóan $\langle p_2, x_\alpha\rangle < \langle p_2, x_2\rangle$, ezért $x_1 \neq x_2$, ezek szerint a $(\mu_2, p_2), (\mu_\alpha, p_\alpha)$ kompenzált árváltozxás esetén nem teljesül a kinyilvánított preferencia gyenge axiómája.
Így ellentmondásra jutottunk. □

6.49 Állítás.
1. Egy $\mathcal{X} : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ Walras-típusú keresleti leképezés pontosan akkor elégíti ki a kinyilvánított preferencia gyenge axiómáját kompenzált jövedelem- és árváltozás mellett, ha kielégíti a kereslet törvényét kompenzált árváltozás mellett.

2. Egy $\mathcal{X} : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ Walras-típusú keresleti leképezés pontosan akkor elégíti ki a kinyilvánított preferencia gyenge axiómáját, ha kielégíti a kereslet törvényét kompenzált árváltozás mellett.

Bizonyítás.
1.
szükségesség: Legyen $(\mu_1, p_1), (\mu_2, p_2) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ kompenzált jövedelem- és árváltozás, azaz $\forall\ x_1 \in \mathcal{X}(\mu_1, p_1)$ esetén $\langle p_2, x_1\rangle = \mu_2$. Továbbá legyen $x_1 \in \mathcal{X}(\mu_1, p_1)$, és $x_2 \in \mathcal{X}(\mu_2, p_2)$.
Ha $x_1 = x_2$, akkor nyilván

$$\langle p_2 - p_1, x_2 - x_1\rangle = \text{ így } \leq 0\,.$$

Tegyük fel,hogy $x_1 \neq x_2$, ekkor a kinyilvánított preferencia gyenge axiómája miatt $\langle p_1, x_2 \rangle > \mu_1$. Ekkor

$$\langle p_2 - p_1, x_2 - x_1 \rangle = \langle p_2, x_2 \rangle - \langle p_2, x_1 \rangle + \langle p_1, x_1 \rangle - \langle p_1, x_2 \rangle < 0\,,$$

ugyanis egyrészt $\mathcal{X}$ Walras-tulajdonságú, ezért $\langle p_1, x_1 \rangle = \mu_1$ és $\langle p_2, x_2 \rangle = \mu_2$,
másrészt a kompenzált árváltozás miatt $\langle p_2, x_1 \rangle = \mu_2$,
harmadrészt a kinyilvánított preferencia gyenge axiómája miatt $\langle p_1, x_2 \rangle > \mu_1$.

elégségesség: Indirekt módon tegyük fel, hogy $\mathcal{X}$ nem elégíti ki a kinyilvánított preferencia gyenge axiómáját kompenzált árváltozás mellett, azaz

$\exists\ (\mu_1, p_1), (\mu_2, p_2) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ kompenzált jövedelem- és árváltozás, és
$\exists\ x_1 \in \mathcal{X}(\mu_1, p_1),\ x_2 \in \mathcal{X}(\mu_2, p_2),\ x_1 \neq x_2$ esetén
$\langle p_1, x_2 \rangle \leq \mu_1$.

Ekkor

$$\langle p_2 - p_1, x_2 - x_1 \rangle = \langle p_2, x_2 \rangle - \langle p_2, x_1 \rangle + \langle p_1, x_1 \rangle - \langle p_1, x_2 \rangle < 0\,,$$

ugyanis egyrészt $\mathcal{X}$ Walras-tulajdonságú, ezért $\langle p_1, x_1 \rangle = \mu_1$ és $\langle p_2, x_2 \rangle = \mu_2$,
másrészt a kompenzált árváltozás miatt $\langle p_2, x_1 \rangle = \mu_2$,
harmadrészt a fenti indirekt feltétel miatt $\langle p_1, x_2 \rangle \leq \mu_1$.
Ezek szerint $\mathcal{X}$ nem elégíti ki a kereslet törvényét e kompenzált árváltozás mellett, ami ellentmondás.

2. Az előző 6.48. állítás alapján következik az 1.-ből. $\square$

7. Fejezet

Függelék

Ahogyan a bevezetésben említettük, a Függelékbe olyan matematikai eszközök kerülnek, amelyek gyakorlatilag az általános tárgyalásba is bekerülhetnének, de egyrészt azt nagyon elhúznák, másrészt, és ez a fontosabb indok, megtörnék a leírás közgazdasági témák által meghatározott menetét.

A Függelék első alfejezetében a halmazértékű leképezések különböző folytonossági tulajdonságait vizsgáljuk meg. A dolgozatban, főleg az első két fejezetben láttuk, hogy milyen fontos szerepet töltenek be a halmazértékű leképezések folytonossági tulajdonságai az érzékenységi vizsgálatokban. Ezért célszerűnek látszik a halmazértékű leképezések folytonossági fogalmainak, ha nem is teljeskörű, de egy rövid kerek áttekintése. Az első két fejezet ezzel válik teljessé, ez ad választ arra is, hogy az ottani vizsgálataink miért voltak bizonyos esetekben körülményesek, valamint arra is, hogy a megfelelő közgazdasági modellekben miért volt szükség különböző feltételekre. A halmazértékű analízis alapjait Vietoris fektette le, lásd Vietoris (1923) [41], átfogóan pedig például Michael (1951) [33] monográfiájában található, kitűnő tárgyalás található Hildenbrand (1974) [21] könyvében is. Az alfejezet leginkább Dancs (1980) [9] kéziratának a felhasználásával készült.

A második alfejezet a konvex analízis legalapvetőbb fogalmait és ezek tulajdonságait ismerteti, mert ezekre lépten-nyomon szükség volt a különböző fejezetekben. Ez nem véletlen, hiszen a konvex analízis és a halmazértékű analízis fejlődésének az egyik mozgatórugója éppen a közgazdaságtan volt. Ezért egy bevezető jellegű összefoglalása készült ennek a területnek. A rövidség kedvéért a bizonyítások nagy része nem szerepel, de a felépítés olyan, hogy a szerkezet megtartásával a bizonyítások beilleszthetők. A konvexitás általános elméletével kapcsolatban a Rockafellar (1970) [34] és Ioffe-Tichomirov (1979) [25] referenciákat, valamint a Dancs (1981) [10] és Dancs (1983) [11] kéziratait használtuk.

A harmadik alfejezet a Kuratowski-limesszel és az epi- illetve hypokonvergenciával foglalkozik, ami az 5. Fejezet matematikai háttere.

A negyedik alfejezet a burkológörbe-tételeket tekinti át.

Az ötödik alfejezet Ky Fan-féle metszettétellel foglalkozik, amelyre a 6. Fejezetben a keresleti leképezések monotoni tulajdonságainak vizsgálata alapul.

7.1 A halmazértékű leképezések folytonosságai

Az első pontban leírjuk a halmazrendszereken értelmezett azon topológiákat, amelyek mellett az optimalizációval foglalkozó állítások legnagyobb része jól vizsgálható. A második pontban a bevezetett topológiák melletti folytonossági fogalmakat vizsgáljuk meg. A harmadik pontban az optimalizáció során keletkező függvények folytonosságaival foglalkozunk.

7.1.1 Részhalmazrendszerek topologizálása

Az a célunk, hogy olyan topológiákat vezessünk be egy X topologikus tér részhalmazainak a $\mathcal{P}(X)$ összességén, amelyek természetesen felvetődő kérdésekben alkalmazhatóak. Ilyen topológiák megadására sok lehetőség van, hiszen a "topológiának lenni" burok-képző tulajdonság, ezért $\mathcal{P}(X)$ részhalmazainak tetszőleges rendszere generál egy topológiát: a rendszer topológia-burkát. A most választott topológiák a leggyakrabban használatosak közé tartoznak. Első bevezetőjükről Vietoris (1923) [41] Vietoris-topológiáknak fogjuk őket nevezni, de használatos még az exponenciális topológia elnevezés is. Az első részletes és máig erősen hivatkozott tárgyalás E. Michael dolgozatában található Michael (1951) [33]. A definíciók előtt két jelölést vezetünk be:

7.1 Jelölés.
Legyen (X,τ) topologikus tér. Mint szokásos, jelölje az X halmaz részhalmazainak az összességét $\mathcal{P}(X)$, illetve röviden $\mathcal{P}$, zárt részhalmazának az összességét $\mathcal{F}(X)$, illetve röviden $\mathcal{F}$, nyílt részhalmazának az összességét $\mathcal{G}(X)$, illetve röviden $\mathcal{G}$, kompakt részhalmazának az összességét pedig $\mathcal{K}(X)$, illetve röviden $\mathcal{K}$.

Az X halmaz egy $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ részhalmazainak a rendszere esetén $\forall\ H \subset X$ halmaz mellett jelölje

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_H &:= \{A \in \mathcal{A} : A \cap H \neq \emptyset\}, \\ \mathcal{A}^H &:= \{A \in \mathcal{A} : A \cap H = \emptyset\} = \{A \in \mathcal{A} : A \subset H^c\}. \end{aligned}$$

Szavakban: Az $\mathcal{A}_H$ az $\mathcal{A}$ azon elemeinek a összességét jelenti, amelyek metszik a H halmazt. Az $\mathcal{A}^H$ pedig az $\mathcal{A}$ azon elemeinek az összességét jelenti, amelyek diszjunktak a H halmaztól, másképpen mondva, azon elemeinek az összességét, amelyek részei a H halmaz komplementumának.

Vietoris-topológiák

7.2 Definíció. (alsó-Vietoris-topológia)
Legyen (X,τ) topologikus tér. Az X-beli részhalmazok $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}$ összességén a

$$\begin{aligned} & \{\mathcal{P}_G \ : \ G \in \mathcal{G}\} \\ = & \ \{\{C \in \mathcal{P} : C \cap G \neq \emptyset\} \ : \ G \in \mathcal{G}\} \\ = & \ \{\mathcal{P} \setminus \{C \in \mathcal{P} : C \subset F\} \ : \ F \in \mathcal{F}\} \ \subset \ \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \end{aligned}$$

halmazrendszerek összessége mint szubbázis által generált $\mathcal{P}(X)$-beli topológiát alsó-Vietoris-topológiának, röviden a-V-topológiának nevezzük.

7.3 Megjegyzés.
1. E halmazrendszerek összessége nem metszetzárt, a topológiának egy bázisa:

$$\{\mathcal{P}_{G_1} \cap \ldots \cap \mathcal{P}_{G_n} \ : \ G_1, \ldots, G_n \in \mathcal{G},\ n \in \mathbb{N}\}$$

2. Egy $A \in \mathcal{P}$ halmaz a-V-környezetszubbázisa

$$\begin{aligned} & \{\mathcal{P}_G \ : \ G \in \mathcal{G},\ A \in \mathcal{P}_G\} \\ = & \ \{\{C \in \mathcal{P} : C \cap G \neq \emptyset\} \ : \ G \in \mathcal{G},\ A \cap G \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

7.4 Definíció. (felső-Vietoris-topológia)
Legyen (X,τ) topologikus tér. Az X-beli részhalmazok $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}$ összességén a

$$\begin{aligned} & \{\mathcal{P}^F \ : \ F \in \mathcal{F}\} \\ = & \ \{\{C \in \mathcal{P} : C \cap F = \emptyset\} \ : \ F \in \mathcal{F}\} \\ = & \ \{\{C \in \mathcal{P} : C \subset G\} \ : \ G \in \mathcal{G}\} \ \subset \ \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \end{aligned}$$

halmazrendszerek összessége, mint bázis által generált $\mathcal{P}(X)$-beli topológiát felső-Vietoris-topológiának, röviden f-V-topológiának nevezzük.

7.5 Megjegyzés.
1. E halmazrendszerek összessége metszetzárt, ugyanis látható, hogy $\forall\, F_1,\ F_2 \in \mathcal{F}$ esetén $\mathcal{P}^{F_1} \cap \mathcal{P}^{F_2} = \mathcal{P}^{F_1 \cup F_2}$, valamint $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.

2. Egy $A \in \mathcal{P}$ halmaz f-V-környezetbázisa ezért

$$\begin{aligned} & \{\mathcal{P}^F \ :\ F \in \mathcal{F},\ A \in \mathcal{P}^F\} \\ = \ & \{\{C \in \mathcal{P} : C \cap F = \emptyset\} \ :\ F \in \mathcal{F},\ A \cap F = \emptyset\} \\ = \ & \{\{C \in \mathcal{P} : C \subset G\} \ :\ G \in \mathcal{G},\ A \subset G\}. \end{aligned}$$

7.6 Definíció. (Vietoris-topológia)
Legyen (X,τ) topologikus tér. Az X-beli részhalmazok $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}$ összességén az alsó-Vietoris-topológia szubbázisa és a felső-Vietoris-topológia bázisa által együttesen generált topológiát Vietoris-topológiának, röviden V-topológiának nevezzük.

Zárt-konvergencia-topológiák

7.7 Definíció. (felső-zárt-konvergencia-topológia)
Legyen (X,τ) topologikus tér. Az X-beli részhalmazok $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}$ összességén a

$$\begin{aligned} & \{\mathcal{P}^K \ :\ K \in \mathcal{K}\} \\ = \ & \{\{C \in \mathcal{P} : C \cap K = \emptyset\} \ :\ K \in \mathcal{K}\} \ \subset\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \end{aligned}$$

halmazrendszerek összessége, mint bázis által generált $\mathcal{P}(X)$-beli topológiát felső-zárt-konvergencia-topológiának, röviden f-ZK-topológiának nevezzük.

Az alsó-zárt-konvergencia-topológia (röviden a-ZK-topológia) azonos az alsó-Vietoris-topológiával.

7.8 Megjegyzés.
1. E halmazrendszerek összessége metszetzárt, ugyanis $\forall\, K_1,\ K_2 \in \mathcal{K}$ esetén $\mathcal{P}^{K_1} \cap \mathcal{P}^{K_2} = \mathcal{P}^{K_1 \cup K_2}$, valamint $K_1 \cup K_2 \in \mathcal{K}$.

2. Egy $A \in \mathcal{P}$ halmaz f-ZK-környezetbázisa

$$\begin{aligned} & \{\mathcal{P}^K \ :\ K \in \mathcal{K},\ A \in \mathcal{P}^K\} \\ = \ & \{\{C \in \mathcal{P} : C \cap K = \emptyset\} \ :\ K \in \mathcal{K},\ A \cap K = \emptyset\} \end{aligned}$$

Egy $A \in \mathcal{P}$ halmaz f-V-báziskörnyezete egy olyan

$$\mathcal{P}^K = \{B \in \mathcal{P} : B \cap K = \emptyset\}$$

halmazrendszer, ahol $K \in \mathcal{K}$ olyan kompakt halmaz, amelyre $A \cap K = \emptyset$.

7.9 Definíció. (zárt-konvergencia-topológia)
Legyen (X,τ) topologikus tér. Az X-beli részhalmazok $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}$ összességén az alsó-Vietoris-topológia szubbázisa és a felső-zárt-konvergencia-topológia bázisa által együttesen generált topológiát zárt-konvergencia-topológiának, röviden ZK-topológiának nevezzük.

Hausdorff-topológiák

7.10 Jelölés.
Legyen (X,d) metrikus tér. Egy $A \subset X$ halmaz $\varepsilon > 0$ sugarú paralleltartománya

$$B(A,\varepsilon) := \{x \in X \ : \ d(x,A) < \varepsilon\}\ .$$

7.11 Definíció.
Legyen (X,d) metrikus tér. Az X-beli részhalmazok $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}$ összességén alsó-Hausdorff-topológiának, röviden a-H-topológiának nevezzük azt a topológiát, amelyre $\forall\ A \in \mathcal{P}$ halmaz alsó-Hausdorff-környezetbázisa a következő halmazrendszerek összessége:

$$\{\{C \in \mathcal{P} \ : \ A \subset B(C,\varepsilon)\} \ : \ \varepsilon > 0\}\,.$$

7.12 Megjegyzés.
1. E halmazrendszerek összessége metszetzárt, sőt lánc, ugyanis $\forall\ \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ esetén ha $A \subset B(C,\varepsilon_1)$, akkor $A \subset B(C,\varepsilon_2)$ is, ezért

$$\{C \in \mathcal{P} \ : \ A \subset B(C,\varepsilon_1)\} \ \subset \ \{C \in \mathcal{P} \ : \ A \subset B(C,\varepsilon_2)\}\,.$$

2. Egy $A \in \mathcal{P}$ halmaz a-H-báziskörnyezete egy

$$\{C \in \mathcal{P} \ : \ A \subset B(C,\varepsilon)\}$$

halmazrendszer, ahol $\varepsilon > 0$ adott.

7.13 Definíció.
Legyen (X,d) metrikus tér. Az X-beli részhalmazok $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}$ összességén felső-Hausdorff-topológiának, röviden f-H-topológiának nevezzük azt a topológiát, amelyre $\forall\ A \in \mathcal{P}$ halmaz felső-Hausdorff-környezetbázisa a következő halmazrendszerek összessége:

$$\{\{C \in \mathcal{P} \ : \ C \subset B(A,\varepsilon)\} \ : \ \varepsilon > 0\} = \{\mathcal{P}(B(A,\varepsilon)) \ : \ \varepsilon > 0\}\,.$$

7.14 Megjegyzés.
1. E halmazrendszerek összessége metszetzárt, sőt lánc, ugyanis $\forall\ \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, esetén, ha $C \subset B(A,\varepsilon_1)$ akkor $C \subset B(A,\varepsilon_2)$, ezért

$$\{C \in \mathcal{P} \ : \ C \subset B(A,\varepsilon_1)\} \ \subset \ \{C \in \mathcal{P} \ : \ C \subset B(A,\varepsilon_2)\}$$

2. Egy $A \in \mathcal{P}$ halmaz f-H-báziskörnyezete egy

$$\{C \in \mathcal{P} \ : \ C \subset B(A,\varepsilon)\} = \mathcal{P}(B(A,\varepsilon))$$

halmazrendszer, ahol $\varepsilon > 0$ adott.

7.15 Definíció. (Hausdorff-topológia)
Legyen (X,d) metrikus tér. Az X-beli részhalmazok $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}$ összességén az alsó-Hausdorff-topológia bázisa és a felső-Hausdorff-topológia bázisa által együttesen generált topológiát Hausdorff-topológiának, röviden H-topológiának nevezzük.

7.1.2 A topológiák összehasonlítása

Ebben az alfejezetben a fenti topológiák közötti kapcsolatokat vizsgáljuk meg.

7.16 Állítás.
Legyen (X,d) metrikus tér. Az a-V-topológia durvább, mint az a-H-topológia.

Bizonyítás.
Azt mutatjuk meg, hogy $\forall\ A \in \mathcal{P}$ halmaz esetén az A halmaz egy adott a-V-környezetszubbázisának tetszőleges eleme egyúttal a-H-környezete is.
Legyen $A \in \mathcal{P}$ tetszőleges halmaz, tekintsük az A halmaz egy a-V-szubbáziskörnyezetét, azaz egy olyan

$$\mathcal{P}_G = \{C \in \mathcal{P} : C \cap G \neq \emptyset\}$$

halmazrendszert, ahol $G \in \mathcal{G}$ olyan nyílt halmaz, amelyre $A \cap G \neq \emptyset$. Mivel $A \cap G \neq \emptyset$, azért $\exists\ x \in A \cap G$, mivel $G \in \mathcal{G}$ nyílt, azért $\exists\ \varepsilon_0 > 0$, hogy $B(x,\varepsilon_0) \subset G$.
Az A halmaznak egy a-H-környezete a $\{C \in \mathcal{P}\ :\ C \subset B(A,\varepsilon_0)\}$ halmazrendszer.

Megmutatjuk, hogy

$$\{C \in \mathcal{P}\ :\ C \subset B(A,\varepsilon_0)\}\ \subset\ \{C \in \mathcal{P} : C \cap G \neq \emptyset\},$$

így a $\{C \in \mathcal{P} : C \cap G \neq \emptyset\}$ halmazrendszer az A halmaznak egy a-H-környezete.
Legyen $C \in \{C \in \mathcal{P}\ :\ C \subset B(A,\varepsilon_0)\}$ tetszőleges, azaz $C \in \mathcal{P}$ olyan halmaz, amelyre $C \subset B(A,\varepsilon_0)$. Mivel $x \in A \cap C$, azért $x \in A$, így $x \in B(C,\varepsilon_0)$, ezért $\exists\ y \in C$, hogy $d(x,y) < \varepsilon_0$, emiatt $y \in B(x,\varepsilon_0)$. Mivel $B(x,\varepsilon_0)\ \subset\ G$, azért $y \in G$, így $y \in C \cap G$, ezért $C \cap G \neq \emptyset$, azaz $C \in \{C \in \mathcal{P} : C \cap G \neq \emptyset\}$. □

7.17 Állítás.

1. *Legyen (X,τ) T2 topologikus tér. Ekkor az f-ZK-topológia durvább, mint az f-V-topológia.*
2. *Legyen (X,d) metrikus tér. Ekkor az f-H-topológia durvább, mint az f-V-topológia.*
3. *Legyen (X,d) metrikus tér. Ekkor a zárt halmazokon az f-ZK-topológia durvább, mint az f-H-topológia.*

Bizonyítás.
1. Mivel T2 topologikus térben minden kompakt halmaz zárt, azért ez következik a definícióból.

2. Azt mutatjuk meg, hogy $\forall\ A \in \mathcal{P}$ halmaz esetén az A halmaz egy f-H-környezetbázisának tetszőleges eleme egyúttal f-V-környezete is.
Legyen $A \in \mathcal{P}$ tetszőleges halmaz, tekintsük az A halmaz egy f-H-báziskörnyezetét, azaz tekintsünk egy

$$\{C \in \mathcal{P}\ :\ C \subset B(A,\varepsilon)\}$$

halmazrendszert, ahol $\varepsilon > 0$ tetszőleges adott. Mivel $B(A,\varepsilon)$ nyílt, azért ez a halmazrendszer az $A \in \mathcal{P}$ halmaznak f-V-környezete is.

3. Azt mutatjuk meg, hogy $\forall\ A \in \mathcal{F}$ halmaz esetén az A halmaz egy adott f-ZK-környezetbázisának tetszőleges eleme egyúttal f-H-környezete is.
Legyen $A \in \mathcal{F}$ tetszőleges zárt halmaz, tekintsük az A halmaz egy f-ZK-báziskörnyezetét, azaz egy olyan

$$\mathcal{P}^K = \{C \in \mathcal{P} : C \cap K = \emptyset\}$$

halmazrendszert, ahol $K \in \mathcal{K}$ olyan kompakt halmaz, amelyre $A \cap K = \emptyset$.
Mivel $A \cap K = \emptyset$, továbbá A zárt és K kompakt, azért a távolságuk pozitív, (nem biztos, hogy felvétetik). Jelölje

$$\alpha := \inf_{x \in A,\ y \in K} d(x, y),$$

ekkor $B(A, \alpha) \cap K = \emptyset$. Ekkor $\forall\, C \in \mathcal{P},\ C \subset B(A, \alpha)$ esetén $C \cap K = \emptyset$, ezért

$$\{C \in \mathcal{P}\ :\ C \subset B(A, \alpha)\} \subset \{C \in \mathcal{P} : C \cap K = \emptyset\},$$

azaz a $\mathcal{P}^K$ halmazrendszer tartalmazza az A halmaznak egy f-H-környezetét, így önmaga is f-H-környezete. □

7.18 Állítás.
Legyen (X, d) metrikus tér. A kompakt halmazok $\mathcal{K}$ összességén az a-V-topológia megegyezik az a-H-topológiával.

Bizonyítás.
A fenti 7.16 állításban már láttuk hogy az a-V-topológia durvább, mint az a-H-topológia. Az ellenkező irányhoz azt mutatjuk meg, hogy $\forall\, A \in \mathcal{K}$ halmaz esetén az A halmaz egy a-H-környezetbázisának tetszőleges eleme egyúttal a-V-környezete is.
Legyen $A \in \mathcal{K}$ tetszőleges kompakt halmaz, tekintsük az A halmaz egy a-H-környezetszubbázisának egy tetszőleges elemét, azaz tekintsünk egy

$$\{C \in \mathcal{P}\ :\ A \subset B(C, \varepsilon)\}$$

halmazrendszert, ahol $\varepsilon > 0$ tetszőleges adott.
Mivel az $A \in \mathcal{K}$ kompakt halmaz, azért $\exists\, \{x_1, \dots, x_n\} \subset A$ véges $\varepsilon/3$-háló.
Mivel $B(x_k, \varepsilon/3) \in \mathcal{G}$ nyílt halmaz, másrészt $A \cap B(x_k, \varepsilon/3) \neq \emptyset$, azért a

$$\bigcap_{k=1}^{n} \{C \in \mathcal{P} : C \cap B(x_k, \varepsilon/3) \neq \emptyset\}$$

halmazrendszer az $A \in \mathcal{K}$ halmaznak a-V-környezete.
Megmutatjuk, hogy $\forall\, C_0 \in \cap_{k=1}^{n} \{C \in \mathcal{P} : C \cap B(x_k, \varepsilon/3) \neq \emptyset\}$ esetén $A \subset B(C_0, \varepsilon)$, így $C_0 \in \{C \in \mathcal{P}\ :\ A \subset B(C, \varepsilon)\}$, azaz

$$\bigcap_{k=1}^{n} \{C \in \mathcal{P} : C \cap B(x_k, \varepsilon/3) \neq \emptyset\} \subset \{C \in \mathcal{P}\ :\ A \subset B(C, \varepsilon)\},$$

amiből, következik, hogy a

$$\{C \in \mathcal{P}\ :\ A \subset B(C, \varepsilon)\}$$

halmazrendszer az $A \in \mathcal{K}$ halmaznak a-V-környezete is.
Legyen $C_0 \in \cap_{k=1}^{n} \{C \in \mathcal{P} : C \cap B(x_k, \varepsilon/3) \neq \emptyset\}$ tetszőleges halmaz. Legyen továbbá $x \in A$ tetszőleges. A fentiek szerint $\exists\, x_k$ hogy $d(x, x_k) < \varepsilon/3$, továbbá mivel $C_0 \cap B(x_k, \varepsilon/3) \neq \emptyset$, azért $\exists\, y \in C_0$ hogy $d(x_k, y) < \varepsilon/3$, így

$$d(x, y) < d(x, x_k) + d(x_k, y) < 2/3\varepsilon,$$

ezért $x \in B(C_0, \varepsilon)$, azaz $A \subset B(C_0, \varepsilon)$. □

7.19 Állítás.
Legyen (X, d) metrikus tér. A kompakt halmazok $\mathcal{K}$ összességén az f-V-topológia megegyezik az f-H-topológiával.

Bizonyítás.
A fenti 7.17 állításban már láttuk hogy az f-H-topológia durvább, mint az f-V-topológia.
Az ellenkező irányhoz azt mutatjuk meg, hogy $\forall\ A \in \mathcal{K}$ halmaz esetén az A halmaz egy f-V-környezetbázisának tetszőleges eleme egyúttal f-H-környezete is.
Legyen $A \in \mathcal{K}$ tetszőleges kompakt halmaz, tekintsük az A halmaz egy f-V-környezetbázisának egy tetszőleges elemét, azaz tekintsünk egy

$$\mathcal{P}^F = \{C \in \mathcal{P}\ :\ C \cap F = \emptyset\}$$

halmazrendszert, ahol $F \in \mathcal{F}$ zárt halmaz és $A \cap F = \emptyset$.
Megmutatjuk, hogy A halmaznak létezik olyan f-H báziskörnyezete, amely része az A halmaz fenti f-V-báziskörnyezetének, azaz $\exists\ \varepsilon > 0$, hogy

$$\{C \in \mathcal{P}\ :\ C \subset B(A,\varepsilon)\}\ \subset\ \{C \in \mathcal{P}\ :\ C \cap F = \emptyset\}\,.$$

1. eset: $F = \emptyset$, ekkor $\{C \in \mathcal{P}\ :\ C \cap F = \emptyset\} = \mathcal{P}$, ami nyilván tartalmazza az A halmaznak egy f-H környezetét, így önmaga is az.
2. eset: $F \neq \emptyset$, ekkor mivel $F \in \mathcal{F}$ zárt, $K \in \mathcal{K}$ kompakt és $A \cap F \neq \emptyset$ azért

$$\varepsilon_0 := \inf_{x \in A, y \in F} d(x,y) > 0\,,\ \text{választással}\ B(A,\varepsilon_0) \cap F = \emptyset\,.$$

Ekkor

$$\{C \in \mathcal{P}\ :\ C \subset B(A,\varepsilon_0)\} \subset \{C \in \mathcal{P}\ :\ C \cap F = \emptyset\}\,,$$

ezért $\{C \in \mathcal{P}\ :\ C \cap F = \emptyset\}$ az A halmaznak f-H környezete is. □

7.1.3 A halmazértékű leképezések folytonosságai a fenti topológiákban

A halmazértékű leképezéseknek annyiféle folytonossági fogalma definiálható, ahány topológia definiálható a részhalmazrendszereken.

7.20 Definíció.
Legyen (X,τ_X) topologikus tér, legyen (Y,τ_Y) topologikus tér illetve (Y,d) metrikus tér.
Egy $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezést egy $x \in X$ pontban illetve az X halmazon alsó-Vietoris-, felső-Vietoris-, Vietoris-, alsó-zárt-konvergencia-, felső-zárt-konvergencia-, zárt-konvergencia-, alsó-Hausdorff-, felső-Hausdorff-, Hausdorff-folytonosnak (röviden a-V-, f-V-, V-, a-ZK-, f-ZK-, ZK-, a-H-, f-H-, H-folytonosnak) nevezünk, ha az f függvény folytonos az $x \in X$ pontban illetve az X halmazon, miközben az Y-beli részhalmazok $\mathcal{P}(Y)$ összességén rendre az a-V-, f-V-, V-, a-ZK-, f-ZK-, ZK-, a-H-, f-H-, H-topológia van definiálva.

7.21 Megjegyzés.
A fentiek szerint látható, hogy egy $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezést egy $x \in X$ pontban illetve az X halmazon

1. pontosan akkor Vietoris-folytonos, ha alsó-Vietoris- és felső-Vietoris-folytonos,
2. pontosan akkor Hausdorff-folytonos, ha alsó-Hausdorff- és felső-Hausdorff-folytonos.

7.22 Állítás.
Legyen (X,τ_X) topologikus tér, és (Y,d) metrikus tér. Egy $f : X \to \mathcal{K}(Y)$ kompakt értékű leképezés egy $x \in X$ pontban illetve az X halmazon

1. pontosan akkor alsó-Vietoris-folytonos, ha alsó-Hausdorff-folytonos,

2. pontosan akkor felső-Vietoris-folytonos, ha felső-Hausdorff-folytonos,

3. pontosan akkor Vietoris-folytonos, ha Hausdorff-folytonos.

Bizonyítás.
1. A 7.18 állítás szerint a kompakt halmazokon az a-V-topológia megegyezik az a-H-topológiával.

2. A 7.19 állítás szerint a kompakt halmazokon a f-V-topológia megegyezik a f-H-topológiával.

3. A fenti megjegyzés alapján következik 1. és 2.-ből. □

A következőkben a fenti folytonossági fogalmakat jellemezzük.

7.23 Definíció.
Az $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezéssel vett (gyenge) őspképe egy $A \in \mathcal{P}(Y)$ halmaznak

$$f^{-}(A) := \{x \in X \ : \ f(x) \cap A \neq \emptyset\} \subset X\,.$$

Ez a fogalom nyilván különbözik egy halmaznak egy halmazértékű leképezéssel, mint leképezéssel vett az ősképétől.

7.24 Állítás. (az a-V-folytonosság ekvivalens definíciója)
Legyenek (X, τ_X) és (Y, τ_Y) topologikus terek.
1. Egy $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés egy $x \in X$ pontban pontosan akkor alsó-Vietoris-folytonos, ha $\forall\ G \in \mathcal{G}(Y)$ τ_Y-nyílt halmazra, amelyre $f(x) \cap G \neq \emptyset$, $\exists\ U_x \in \tau_X(x)$ környezete az $x \in X$ pontnak, hogy $\forall\ z \in U_x$ esetén $f(z) \cap G \neq \emptyset$.

2. Egy $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés az X halmazon pontosan akkor alsó-Vietoris-folytonos, ha $\forall\ G \subset Y$ τ_Y-nyílt halmaz

$$f^{-}(G) = \{x \in X \ : \ f(x) \cap G \neq \emptyset\}$$

gyenge-ősképe τ_X-nyílt halmaz.

Bizonyítás.
1. Egy $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés egy $x \in X$ pontban pontosan akkor alsó-Vietoris-folytonos, ha az $f(x) \in \mathcal{P}(Y)$-nak

$$\forall\ \mathcal{P}(Y)_G = \{C \in \mathcal{P}(Y) \ : \ C \cap G \neq \emptyset\},\ G \in \mathcal{G}(Y),\ f(x) \cap G \neq \emptyset$$

szubbáziskörnyezetéhez $\exists\ U_x \in \tau(x)$ környezete az $x \in X$ pontnak, hogy $\forall\ z \in U_x$ esetén $f(z)$-nek $\mathcal{P}(Y)_G = \{C \in \mathcal{P}(Y) \ : \ C \cap G \neq \emptyset\}$ szintén környezete, azaz $f(z) \cap G \neq \emptyset$, ami pontosan a fentieket jelenti.

2. Egy $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés az X halmazon pontosan akkor alsó-Vietoris-folytonos, ha $\forall$ $\mathcal{P}(Y)$-beli a-V-nyílt halmaz ősképe τ_X-nyílt halmaz, ami, mint ismert, ekvivalens azzal, hogy $\forall$ $\mathcal{P}(Y)$-beli a-V-szubbázis ősképe τ_X-nyílt halmaz, azaz $\forall\ \mathcal{P}(Y)_G$, $G \in \mathcal{G}(Y)$ ősképe, azaz az $\{x \in X \ : \ f(x) \in \mathcal{P}(Y)_G\} \subset X$ halmaz τ_X-nyílt, azaz $\forall\ G \subset Y$ τ_Y-nyílt halmaz esetén az $\{x \in X \ : \ f(x) \cap G \neq \emptyset\}$ halmaz τ_X-nyílt. □

7.25 Állítás. (a f-V-folytonosság ekvivalens definíciója)
Legyenek (X, τ_X) és (Y, τ_Y) topologikus terek.
1. Egy $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés egy $x \in X$ pontban pontosan akkor felső-Vietoris-folytonos,

ha $\forall\ F \in \mathcal{F}(Y)$ τ_Y*-zárt halmazra, amelyre* $f(x) \cap F = \emptyset$, $\exists\ U_x \in \tau_X(x)$ *környezete az* $x \in X$ *pontnak, hogy* $\forall\ z \in U_x$ *esetén* $f(z) \cap F = \emptyset$, *illetve*

ha $\forall\ G \in (Y)$ τ_Y*-nyílt halmazra, amelyre* $f(x) \subset G$, $\exists\ U_x \in \tau_X(x)$ *környezete az* $x \in X$ *pontnak, hogy* $\forall\ z \in U_x$ *esetén* $f(z) \subset G$.

2. Egy $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ *halmazértékű leképezés az* X *halmazon pontosan akkor felső-Vietoris-folytonos,*

ha $\forall\ F \subset Y$ τ_Y*-zárt halmaz esetén az* $\{x \in X\ :\ f(x) \cap F = \emptyset\}$ *halmaz* τ_X*-nyílt, illetve*

ha $\forall\ G \subset Y$ τ_Y*-nyílt halmaz esetén az* $\{x \in X\ :\ f(x) \subset G\}$ *halmaz* τ_X*-nyílt.*

Bizonyítás.
1. Egy $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés egy $x \in X$ pontban pontosan akkor felső-Vietoris-folytonos, ha az $f(x) \in \mathcal{P}(Y)$-nak

$$\forall\ \mathcal{P}(Y)^F = \{C \in \mathcal{P}(Y)\ :\ C \cap F = \emptyset\},\ F \in \mathcal{F}(Y),\ f(x) \cap F = \emptyset$$

báziskörnyezetéhez $\exists\ U_x \in \tau(x)$ környezete az $x \in X$ pontnak, hogy $\forall\ z \in U_x$ esetén $f(z)$-nek $\mathcal{P}(Y)^F = \{C \in \mathcal{P}(Y)\ :\ C \cap F = \emptyset\}$ szintén környezete, azaz $f(z) \cap G \neq \emptyset$, ami pontosan a fentieket jelenti.

2. Egy $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés az X halmazon pontosan akkor felső-Vietoris-folytonos, ha $\forall\ \mathcal{P}(Y)$-beli f-V-nyílt halmaz őséképe τ_X-nyílt halmaz, ami, mint ismert, ekvivalens azzal, hogy $\forall\ \mathcal{P}(Y)$-beli f-V-bázis őséképe τ_X-nyílt halmaz, azaz $\forall\ \mathcal{P}(Y)^F$, $F \in \mathcal{F}(Y)$ őséképe, azaz az $\{x \in X\ :\ f(x) \in \mathcal{P}(Y)^F\} \subset X$ halmaz τ_X-nyílt, azaz $\forall\ F \subset Y$ τ_Y-zárt halmaz esetén az $\{x \in X\ :\ f(x) \cap F = \emptyset\}$ halmaz τ_X-nyílt. □

7.26 Definíció.
1. Legyenek X és Y tetszőleges halmazok. Az $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés (gyenge) gráfjának nevezzük a

$$\operatorname{graph} f := \{(x, y) \in X \times Y\ :\ x \in X, y \in f(x)\} \subset X \times Y$$

halmazt.

Ez a fogalom nyilván különbözik a halmazértékű leképezésnek mint leképezésnek a gráfjától.

2. Legyenek (X, τ_X) és (Y, τ_Y) topologikus terek. Az $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezést zárt gráfúnak nevezzük, ha a $\operatorname{graph} f \subset X \times Y$ (gyenge) gráfja zárt halmaz.

7.27 Állítás. (a f-V-folytonosság és a zárt gráfúság)
Legyen (X, τ_X) *és* (Y, τ_Y) *topologikus terek.*
Ha az $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ *zárt gráfú halmazértékű leképezés, és* $\exists\ K \in \mathcal{K}(Y)$ τ_Y*-kompakt halmaz, amelyre* $\forall\ x \in X$ *esetén* $f(x) \subset K$, *akkor* $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ *felső-Vietoris-folytonos.*

Bizonyítás.
Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists\ x \in X$ pont, amelyben az $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ zárt gráfú halmazértékű leképezés nem f-V-folytonos, azaz $\exists\ F \in \mathcal{F}(Y)$ τ_Y-zárt halmaz, amelyre $f(x) \cap F = \emptyset$, és az $x \in X$ pont $\forall\ U \in \tau_X(x)$ környezete esetén $\exists\ z \in U$,

hogy $f(z)\cap F\neq\emptyset$, így $\cup_{z\in U}f(z)\cap F\neq\emptyset$. Mivel $\forall\, z\in X$ esetén $f(z)\subset K$, azért $\cup_{z\in U}f(z)\subset K$. Emiatt az

$$\{\bigcup_{z\in U} f(z)\cap F \;:\; U\in\tau_X(x)\}\subset \mathcal{P}(Y)$$

halmazrendszer $K\cap F$-beli rács. Mivel $K\cap F$ kompakt halmaz, azért $\exists\, y\in K\cap F$ torlódási pontja. Ezek szerint $\forall\, U\in\tau_X(x)$ és $\forall\, V\in\tau_Y(y)$ esetén

$$\bigcup_{z\in U} f(z)\cap F\cap V\neq\emptyset,$$

így $\exists\, u\in U$ és $v\in V$, hogy $v\in f(u)$, azaz $(u,v)\in\operatorname{graph} f$. Összefoglalva ez azt jelenti, hogy (x,y) pont $\forall\, U\times V$ környezete esetén $U\times V\cap\operatorname{graph} f\neq\emptyset$. Mivel $\operatorname{graph} f$ zárt halmaz, azért $(x,y)\in\operatorname{graph} f$, azaz $y\in f(x)$. Mivel $y\in K\cap F\subset F$, és $f(x)\cap F=\emptyset$, azért ez ellentmondás. □

7.28 Állítás. (a zárt gráfúság és a f-V-folytonosság)
Legyen (X,τ_X) topologikus tér, (Y,τ_Y) reguláris topologikus tér.
Ha az $f:X\to\mathcal{P}(Y)$ zárt értékű és felső-Vietoris-folytonos halmazértékű leképezés, akkor zárt gráfú.

Bizonyítás.
Megmutatjuk, hogy a $(\operatorname{graph} f)^c\subset X\times Y$ halmaz nyílt. Legyen $(x,y)\in(\operatorname{graph} f)^c$ tetszőleges pont, ekkor $y\notin f(x)$. Mivel $f(x)\subset Y$ zárt halmaz, és az (Y,τ_Y) topologikus tér reguláris, azért $\exists\, V\in\tau_Y(y)$ zárt környezet, hogy $f(x)\cap V=\emptyset$. Mivel $f:X\to\mathcal{P}(Y)$ f-V-folytonos, azért $\exists\, U\in\tau_X(x)$ környezet, hogy $\forall\, z\in U$ esetén $f(z)\cap V=\emptyset$, így $\forall\, z\in U$ és $y\in V$ esetén $y\notin f(z)$, azaz $(z,y)\in(\operatorname{graph} f)^c$. Így $U\times V\subset(\operatorname{graph} f)^c$, ezért $(\operatorname{graph} f)^c\subset X\times Y$ nyílt halmaz. □

7.29 Állítás. (az a-H-folytonosság ekvivalens definíciója)
Legyen (X,τ_X) topologikus tér, legyen (Y,d) metrikus tér.
Egy $f:X\to\mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés egy $x\in X$ pontban pontosan akkor alsó-Hausdorff-folytonos, ha $\forall\,\varepsilon>0$ esetén, $\exists\, U_x\in\tau_X(x)$ környezete az $x\in X$ pontnak, hogy $\forall\, z\in U_x$ esetén $f(x)\subset B(f(z),\varepsilon)$.

Bizonyítás.
Egy $f:X\to\mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés egy $x\in X$ pontban pontosan akkor alsó-Hausdorff-folytonos, ha az $f(x)\in\mathcal{P}(Y)$ $\forall\,\{C\in\mathcal{P}(Y)\;:\; f(x)\subset B(C,\varepsilon)\}$ báziskörnyezetéhez $\exists\, U_x\in\tau(x)$ környezete az $x\in X$ pontnak, hogy $\forall\, z\in U_x$ esetén

$$f(z)\in\{C\in\mathcal{P}(Y)\;: f(x)\subset B(C,\varepsilon)\},$$

azaz $f(x)\subset B(f(z),\varepsilon)$, ami pontosan a fentieket jelenti. □

7.30 Állítás. (a f-H-folytonosság ekvivalens definíciója)
Legyen (X,τ_X) topologikus tér, legyen (Y,d) metrikus tér.
Egy $f:X\to\mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés egy $x\in X$ pontban pontosan akkor felső-Hausdorff-folytonos, ha $\forall\,\varepsilon>0$ esetén, $\exists\, U_x\in\tau_X(x)$ környezete az $x\in X$ pontnak, hogy $\forall\, z\in U_x$ esetén $f(z)\subset B(f(x),\varepsilon)$.

Bizonyítás.
Egy $f:X\to\mathcal{P}(Y)$ halmazértékű leképezés egy $x\in X$ pontban pontosan akkor felső-Hausdorff-folytonos, ha az $f(x)\in\mathcal{P}(Y)$ $\forall\,\{C\in\mathcal{P}(Y)\;: C\subset B(f(x),\varepsilon)\}$ báziskörnyezetéhez $\exists\, U_x\in\tau(x)$ környezete az $x\in X$ pontnak, hogy $\forall\, z\in U_x$ esetén

$$f(z)\in\{C\in\mathcal{P}(Y)\;: C\subset B(f(x),\varepsilon)\},$$

azaz $f(z)\subset B(f(x),\varepsilon)$, ami pontosan a fentieket jelenti. □

7.1.4 A Berge-tétel

Legyenek (T,τ_T) és (X,τ_X) topologikus terek. Legyen $H : T \to \mathcal{P}(X)$ egy halmazértékű leképezés, ezt a továbbiakban feltételi leképezésnek nevezzük, legyen $f : \operatorname{graph} H \to \mathbb{R}$ egy függvény, ezt a továbbiakban célfüggvénynek nevezzük, valamint tekintsük a következő, $t \in T$ paraméterrel paraméterezett feladatsereget:

$$\begin{cases} f(t,x) \to \max \\ x \in H(t) \end{cases} \tag{7.1}$$

Az (7.1) feladatsereg értékfüggvényének azt az $f^\vee : T \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényt nevezzük, amelyre $\forall\, t \in T$ paraméter esetén

$$f^\vee(t) = \sup_{H(t)} f(t,.)$$

Az (7.1) feladatsereg megoldásleképezésének nevezzük azt az $\mathcal{X} : T \to \mathcal{P}(X)$ halmazértékű leképezést, amelyre $\forall\, t \in T$ paraméter esetén

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(t) &= \operatorname*{argmax}_{H(t)} f(t,.) \\ &= \{x \in H(t) :\ f(t,x) = f^\vee(t)\} = f^{-1}(t,.)(\{f^\vee(t)\})\,. \end{aligned}$$

Látható, hogy ha $\mathcal{X}(t) \neq \emptyset$, akkor $f^\vee(t) = f(t,x)$, ahol $x \in \mathcal{X}(t)$.

7.31 Állítás. (Berge tétel)
1.a. Ha a $H : T \to \mathcal{P}(X)$ halmazértékű leképezés alsó-Vietoris-folytonos, valamint az $f : \operatorname{graph} H \to \mathbb{R}$ függvény alulról félig folytonos, akkor az $f^\vee : T \to \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvény is alulról félig folytonos.
1.b. Ha a $H : T \to \mathcal{P}(X)$ kompakt értékű leképezés és felső-Vietoris-folytonos, valamint az $f : \operatorname{graph} H \to \mathbb{R}$ függvény felülről félig folytonos, akkor az $f^\vee : T \to \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvény is felülről félig folytonos.
1.c. Ha a $H : T \to \mathcal{P}(X)$ kompakt értékű leképezés és Vietoris-folytonos, valamint az $f : \operatorname{graph} H \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor az $f^\vee : T \to \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvény is folytonos.

2.a. Ha a $H : T \to \mathcal{P}(X)$ kompakt értékű leképezés és felső-Vietoris-folytonos, az $f : \operatorname{graph} H \to \mathbb{R}$ függvény felülről félig folytonos, valamint az $f^\vee : T \to \mathbb{R}$ értékfüggvény folytonos, akkor az $\mathcal{X} : T \to \mathcal{P}(X)$ megoldásleképezés is kompakt értékű és felső-Vietoris-folytonos.
2.b. Ha a $H : T \to \mathcal{P}(X)$ kompakt értékű leképezés és Vietoris-folytonos, valamint az $f : \operatorname{graph} H \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor az $\mathcal{X} : T \to \mathcal{P}(X)$ megoldásleképezése is kompakt értékű és felső-Vietoris-folytonos.

Bizonyítás.
1.a. Azt mutatjuk meg, hogy $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ esetén $(f^\vee)^{-1}(\alpha,\infty) \subset T$ nyílt halmaz. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ és $t_0 \in (f^\vee)^{-1}(\alpha,\infty)$ tetszőleges, ekkor $f^\vee$ definíciója miatt $\exists\, x_0 \in H(t_0)$, amelyre $f(t_0,x_0) > \alpha$. Mivel f a.f.f., azért

$$\exists\, U \times V \in (\tau_T \times \tau_X)(t_0,x_0))$$

nyílt környezet, hogy

$$\forall\ (t,x) \in (\operatorname{graph} H) \cap (U \times V))\ \text{esetén}\ f(t,x) > \alpha\,. \tag{7.2}$$

Továbbá mivel $x_0 \in V \cap H(t_0)$, azért $V \cap H(t_0) \neq \emptyset$, ezért H a-V-folytonossága miatt $\exists\, U_0 \in \tau_T(t_0)$, $U_0 \subset U$ környezet, hogy $\forall\, t \in U_0$ esetén $V \cap H(t) \neq \emptyset$, így $\exists\, x \in V \cap H(t)$. Ezek szerint

$$(t, x) \in (\operatorname{graph} H) \cap (U \times V)),$$

emiatt a (7.2) alapján $f(t,x) > \alpha$. Mivel $f(t,x) \leq f^{\vee}(t)$, azért

$$\forall\, t \in U_0 \text{ esetén } f^{\vee}(t) > \alpha\,,$$

azaz $U_0 \subset (f^{\vee})^{-1}(\alpha, \infty)$, azaz $(f^{\vee})^{-1}(\alpha, \infty) \subset T$ nyílt halmaz.

1.b. Azt mutatjuk meg, hogy $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ esetén $(f^{\vee})^{-1}(-\infty, \alpha) \subset T$ nyílt halmaz. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ és $t_0 \in (f^{\vee})^{-1}(-\infty, \alpha)$ tetszőleges.
Amennyiben $H(t_0) = \emptyset$, akkor $\exists\, U_0 \in \tau_T(t_0)$ környezet, hogy $\forall\, t \in U_0$ esetén $H(t) = \emptyset$. Ugyanis ekkor $H(t_0) \subset \emptyset$, mivel H f-V-folytonos, azért $\exists\, U_0 \in \tau_T(t_0)$ környezet, hogy $\forall\, t \in U_0$ esetén $H(t_0) \subset \emptyset$.
Amennyiben $H(t_0) \neq \emptyset$, akkor

$$\exists\, \beta \in \mathbb{R}\,, \text{ hogy } f^{\vee}(t_0) < \beta < \alpha\,,$$

így $f^{\vee}$ definíciója miatt

$$\forall\, x \in H(t_0) \text{ esetén } f(t_0, x) < \beta\,.$$

Mivel f f.f.f., azért $\forall\, x \in H(t_0)$, esetén

$$\exists\, U_x \times V_x \in (\tau_T \times \tau_X)(t_0, x))$$

nyílt környezet, hogy

$$\forall\, (t, z) \in (\operatorname{graph} H) \cap (U_x \times V_x)) \text{ esetén } f(t, z) < \beta\,. \tag{7.3}$$

Mivel

$$\{V_x \;:\; x \in H(t_0)\}$$

nyílt fedése $H(t_0)$-nak, továbbá $H(t_0)$ kompakt halmaz, azért $\exists$ véges sok olyan $x_1, \ldots, x_n \in H(t_0)$, hogy

$$H(t_0) \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{x_k}\,.$$

Mivel H f-V-folytonos, azért $\exists\, U_0 \in \tau_T(t_0)$ környezet, hogy $\forall\, t \in U_0$ esetén

$$H(t) \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{x_k}\,.$$

Ekkor $\forall\, t_1 \in U_1 := U_0 \cap U_{x_1} \cap \ldots \cap U_{x_n} \in \tau_T(t_0)$ esetén is

$$H(t_1) \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{x_k}\,,$$

ezért $\forall\, x \in H(t_1)$ esetén $\exists\, 1 \leq k \leq n$, hogy $x \in V_{x_k}$. Ezek szerint $\forall\, t_1 \in U_1$ és $\forall\, x \in H(t_1)$ esetén

$$(t_1, x) \in (\operatorname{graph} H) \cap (U_{x_k} \times V_{x_k}))\,,$$

emiatt a (7.3) alapján $f(t_1, x) < \beta$. Ezért

$$\forall\, t_1 \in U_1 \text{ esetén } f^{\vee}(t_1) = \sup_{x \in H(t_1)} f(t_1, x) \leq \beta < \alpha\,,$$

azaz $U_1 \subset (f^\vee)^{-1}(-\infty,\alpha)$, azaz $(f^\vee)^{-1}(-\infty,\alpha) \subset T$ nyílt halmaz.

1.c. Ez következik 1.a. és 1.b.-ból.

2.a. Legyen $t_0 \in T$ tetszőleges pont. Legyen $G \subset X$ tetszőleges olyan τ_X-nyílt halmaz, amelyre $\mathcal{X}(t_0) \subset G$.
Amennyiben $\mathcal{X}(t_0) = H(t_0)$, akkor H f-V-folytonossága miatt $\exists\ U_0 \in \tau_T(t_0)$ környezet, hogy $\forall\ t \in U_0$ esetén

$$\mathcal{X}(t) \subset H(t) \subset H(t_0) = \mathcal{X}(t_0)\,,$$

azaz $\mathcal{X}$ f-V-folytonos t_0-ban.
Amennyiben $\mathcal{X}(t_0) \neq H(t_0)$, akkor legyen $x \in H(t_0) \setminus \mathcal{X}(t_0)$ tetszőleges, ekkor $f(t_0,x) < f^\vee(t_0)$. Mivel az f függvény felülről félig folytonos a (t_0,x) pontban és az $f^\vee$ függvény folytonos a t_0 pontban, azért $\exists\ U_x \times V_x \in \tau_T(t_0) \times \tau_X(x)$ környezet, hogy

$$\forall\ (t,z) \in (U_x \times V_x) \cap \operatorname{graph} H \text{ esetén } f(t,z) < f^\vee(t)\,. \tag{7.4}$$

Mivel

$$H(t_0) \subset \left(\bigcup_{x \in H(t_0)\setminus\mathcal{X}(t_0)} V_x \right) \cup G\,,$$

és feltehető, hogy $\forall\ V_x \in \tau_X(x)$ nyílt halmaz, azért ezesetben a

$$\{V_x : x \in H(t_0) \setminus \mathcal{X}(t_0)\} \cup \{G\}$$

halmazrendszer nyílt lefedése a $H(t_0) \subset X$ kompakt halmaznak, ezért kiválasztható belőle véges lefedés, azaz

$$\exists\ x_1,\ldots,x_n \in H(t_0) \setminus \mathcal{X}(t_0)\,, \text{ hogy } H(t_0) \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{x_k} \cup G\,.$$

Mivel a $H : T \to \mathcal{P}(X)$ halmazértékű leképezés felső-Vietoris-folytonos t_0-ban, azért $\exists\ U_1 \in \tau_T(t_0)$ környezet, hogy $\forall\ t \in U_1$ esetén

$$H(t) \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{x_k} \cup G\,.$$

Tekintsük az $U_2 := U_1 \cap U_{x_1} \cap \ldots \cap U_{x_n} \in \tau_T(t_0)$ környezetet. Ekkor $\forall\ t \in U_2$ esetén

$$\mathcal{X}(t) \subset H(t) \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{x_k} \cup G\,.$$

Belátjuk, hogy $\forall\ t \in U_2$ esetén $\mathcal{X}(t) \subset G$, ami azt jelenti, hogy $\mathcal{X}$ f-V-folytonos t_0-ban.
Ugyanis: Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists\, t \in U_2$, amelyre $\exists\, z \in \mathcal{X}(t)$, de $z \notin G$.
Mivel

$$\mathcal{X}(t) \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{x_k} \cup G\,,$$

azért $\exists\ 1 \le k \le n$, hogy $z \in V_{x_k}$. Mivel $t \in U_2 \subset U_{x_k}$, azért $(t,z) \in U_{x_k} \times V_{x_k}$.
Mivel pedig $z \in H(t)$, azért

$$(t,z) \in (U_{x_k} \times V_{x_k}) \cap \operatorname{graph} H\,,$$

így a (7.4) szerint $f(t,z) < f^\vee(t)$, emiatt $z \notin \mathcal{X}(t)$, ami ellentmondás.

2.b. Ez következik 2.a. és 1.c.-ből. $\square$

7.2 Konvex analízis

A következő fogalmakat a konvex illetve az alulról félig folytonos függvényekre vezetjük be. A konkáv illetve a felülről félig folytonos függvényekre is bevezethetők ezekkel párhuzamos fogalmak.

7.32 Definíció.
1. Legyen X egy tetszőleges halmaz. Egy $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, függvény **effektivitási tartományának** nevezzük a következő halmazt:

$$\operatorname{Dom} f := \{x \in X \ : \ f(x) < +\infty\}\,.$$

2. Egy $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, függvényt valódinak nevezünk, ha $\operatorname{Dom} f \neq \emptyset$, és $\forall\ x \in X$ esetén $f(x) > -\infty$.

7.33 Definíció.
Legyen X egy tetszőleges halmaz, $A \subset X$ egy tetszőleges részhalmaza. Egy $f : A \to \mathbb{R}$, függvény **felső kiterjesztésének** nevezzük azt az $\overline{f} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényt, amelyre $\forall\ x \in X$ esetén

$$\overline{f}(x) := \begin{cases} f(x) & : \ x \in A \\ \infty & : \ x \notin A \end{cases}.$$

Bár $\mathcal{D}(f) = X$, azért az „igazi" értelmezési tartománya az effektív tartománya.

7.34 Definíció.
Legyen X egy tetszőleges halmaz, $A \subset X$ egy tetszőleges részhalmaza.
1. Egy $f : A \to \mathbb{R}$, illetve egy $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, függvény **epigráfjának** nevezzük a következő halmazt:

$$\operatorname{epi} f := \{(x,\alpha) \in X \times \mathbb{R} \ : \ x \in A,\ \alpha \geq f(x)\} \ \subset \ X \times \mathbb{R}\,.$$

2. Egy $H \subset X \times \mathbb{R}$ halmazt **epigráf típusúnak** nevezünk, ha

$$\forall\ (x,\alpha) \in H \text{ és } \beta > \alpha \text{ esetén } (x,\beta) \in H\,,$$

másként

$$H = H + (\{\mathbf{0}\} \times \mathbb{R}_+)\,.$$

3. Egy $H \subset X \times \mathbb{R}$ epigráf típusú halmazhoz tartozó függvény az a $\operatorname{func} H : X \to \overline{\mathbb{R}}$, amelyre $\forall\ x \in X$ esetén

$$(\operatorname{func} H)(x) := \inf\,\{\alpha \in \mathbb{R} \ : \ (x,\alpha) \in H\}\,.$$

7.35 Állítás.
$\forall\ f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény esetén

(1) $\operatorname{epi} f$ *epigráf típusú,*

(2) $\operatorname{func} \operatorname{epi} f = f$.

7.36 Definíció.
Egy $(f_i : X \to \overline{\mathbb{R}})_{i\in I}$, ($I$ tetszőleges indexhalmaz) függvény család **felső burkoló függvénye** az az $\bigvee_{i\in I} f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény, amelyre $\forall\ x \in X$ esetén

$$(\bigvee_{i\in I} f_i)(x) := \sup_{i\in I} f_i(x)\,.$$

7.37 Állítás.

$$\operatorname{epi}\left(\bigvee_{i\in I} f_i\right) = \bigcap_{i\in I} \operatorname{epi} f_i\,.$$

7.2.1 Konvex függvények

Ebben a pontban legyen $(X,+,\mathbb{R})$ (valós) vektortér.

7.38 Definíció. (konvex függvény)
Legyen $A \subset X$ konvex halmaz. Egy $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényt **konvexnek** nevezzük, ha teljesülnek a következő ekvivalens feltételek:
1. $\forall\ x_1, x_2 \in \operatorname{Dom} f,\ \lambda \in [0,1]$ esetén

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)\,, \text{ azaz}$$

2. $\forall\ x_1, \dots, x_n \in \operatorname{Dom} f,\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1]$ esetén

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)\,, \text{ azaz}$$

3. az $\operatorname{epi} f \subset X \times \mathbb{R}$ halmaz konvex.

(A definiciók ekvivalenciájának bizonyítása a szokásos módon megy, most elhagyjuk.)

7.39 Állítás.
Legyen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ konvex függvény.

1. Ekkor $\operatorname{Dom} f \subset X$ konvex halmaz.

2. Ha (X,τ) TVT, és $\exists\ x \in X$, hogy $f(x) = -\infty$, akkor $\forall\ x \in \operatorname{int}\operatorname{Dom} f$ esetén $f(x) = -\infty$.

7.40 Állítás.
Ha tetszőleges I indexhalmaz esetén $\forall\ f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény konvex, akkor a $\bigvee_{i\in I} f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$ felső burkoló függvény is konvex.

7.41 Állítás.
1. $\forall\ H \subset X \times \mathbb{R}$ epigráf típusú halmaz esetén $\operatorname{co} H \subset X \times \mathbb{R}$ is epigráf típusú, így $\forall\ f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, függvény esetén a $\operatorname{co}(\operatorname{epi} f) \subset X \times \mathbb{R}$ halmaz epigráf típusú.

7.42 Definíció. (konvex burok)
Legyen $A \subset X$ tetszőleges halmaz. Egy $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, függvény **konvex burkának** vagy **konvexifikációjának** nevezzük a

$$\operatorname{co} f := \operatorname{func}(\operatorname{co}(\operatorname{epi} f))|_{\operatorname{co} A} : \operatorname{co} A \to \overline{\mathbb{R}}$$

függvényt, azaz amelyre $\forall\ x \in \operatorname{co} A$ esetén

$$\operatorname{co} f(x) := \inf\{\alpha \in \mathbb{R}\ :\ (x,\alpha) \in \operatorname{co}\operatorname{epi} f\}\,.$$

7.43 Állítás.
1. $\forall\ f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, ($A \subset X$ tetszőleges halmaz) függvény esetén $\operatorname{co} f : \operatorname{co} A \to \overline{\mathbb{R}}$ konvex függvény, így

2. egy $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, ($A \subset X$ konvex halmaz) függvény pontosan akkor konvex, ha $f = \operatorname{co} f$.

7.2.2 Alulról félig folytonos (alulról zárt) függvények

Ebben a pontban legyen (X,τ) topologikus tér.

7.44 Definíció.
$\overline{\mathbb{R}}$-beli alulról félig folytonossági, röviden a.f.f. topológiának nevezzük azt a $\tau_{a.f.f.}$ topológiát, amelynek a nyílt halmazai:

$$\overline{\mathbb{R}},\ (\alpha,\infty]\,,\ \text{ahol } \alpha\in\overline{\mathbb{R}}\,,\ (\,(\infty,\infty]=\emptyset).$$

7.45 Definíció. (a.f.f. függvény)
Legyen $A\subset X$ tetszőleges halmaz. Egy $f:A\to\overline{\mathbb{R}}$ függvényt **alulról félig folytonosnak**, röviden a.f.f.-nak vagy **alulról zártnak** nevezzük, ha teljesülnek a következő ekvivalens feltételek:
1. f folytonos az a.f.f. topológiára nézve, azaz
2. $\forall\ \alpha\in\mathbb{R}$ esetén az $f^{-1}(\alpha,\infty)=\{x\in X\ :\ f(x)>\alpha\}\subset X$ halmaz nyílt, azaz
3. az $\operatorname{epi} f\subset X\times\mathbb{R}$ halmaz zárt, azaz
2. $\forall\ x_0\in A$ pont mellett
(a) amennyiben $f(x_0)$ véges, úgy $\forall\ \varepsilon>0$ esetén $\exists\ U\in\tau(x_0)$ környezet, hogy $\forall\ x\in U$ esetén $f(x)>f(x_0)-\varepsilon$,
(b) amennyiben $f(x_0)=\infty$, úgy $\forall\ K\in\mathbb{R}$ esetén $\exists\ U\in\tau(x_0)$ környezet, hogy $\forall\ x\in U$ esetén $f(x)>K$,
(c) amennyiben $f(x_0)=-\infty$, úgy minden esetben.

7.46 Állítás.
Ha tetszőleges I indexhalmaz esetén $\forall\ f_i:X\to\overline{\mathbb{R}}$ függvény a.f.f., akkor a $\bigvee_{i\in I} f_i : X\to\overline{\mathbb{R}}$ felső burkoló függvény is a.f.f.

7.47 Állítás.
1. $\forall\ H\subset X\times\mathbb{R}$ epigráf típusú halmaz esetén $\operatorname{cl} H$ is epigráf típusú.
2. $\forall\ f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ függvény esetén a $\operatorname{cl}\operatorname{epi} f\subset X\times\mathbb{R}$ halmaz epigráf típusú.
3. $\forall\ H\subset X\times\mathbb{R}$ zárt epigráf típusú halmaz esetén $\operatorname{epi}\operatorname{func} H=H$.

Bizonyítás.
1. és 2. Nyilvánvaló.

3. $\subset$: Legyen $(x,\alpha)\in\operatorname{epi}\operatorname{func} H$ tetszőleges, ekkor

$$\alpha\geq(\operatorname{func} H)(x)=\inf\,\{\beta\in\mathbb{R}\ :\ (x,\beta)\in H\}\,,$$

ezért

$$\forall\ \varepsilon>0 \text{ esetén } \exists\ (x,\beta)\in H \text{ hogy } \alpha+\varepsilon>\beta\,.$$

Mivel H epigráf típusú, azért

$$\forall\ \varepsilon>0 \text{ esetén } (x,\alpha+\varepsilon)\in H\,.$$

Mivel H zárt, azért $(x,\alpha)\in H$.

$\supset$: Legyen $(x,\alpha)\in H$ tetszőleges, ekkor $\alpha\geq(\operatorname{func} H)(x)$, így

$$(x,\alpha)\in\operatorname{epi}\operatorname{func} H\,.$$

$\square$

7.48 Definíció. (a.f.f. burok)
Legyen $A \subset X$ halmaz. Egy $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény **alulról félig folytonos burkának**, röviden a.f.f. burkának vagy **alulról zárt burkának** nevezzük a

$$\operatorname{cl} f := \operatorname{func}(\operatorname{cl}(\operatorname{epi} f))|_{\operatorname{cl} A} : \operatorname{cl} A \to \overline{\mathbb{R}}$$

függvényt, azaz amelyre $\forall\, x \in \operatorname{cl} A$ esetén

$$\operatorname{cl} f(x) := \inf\{\alpha \in \mathbb{R} \;:\; (x, \alpha) \in \operatorname{cl} \operatorname{epi} f\}\,.$$

7.49 Állítás.
$\forall\, f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subset X)$ függvény esetén

$$\operatorname{epi} \operatorname{cl} f = \operatorname{cl} \operatorname{epi} f\,.$$

BIZONYÍTÁS.
Mivel a fenti 7.47. állítás 2. szerint $\operatorname{cl} \operatorname{epi} f$ epigráf típusú, valamint zárt is, azért a 7.47. állítás 3. szerint $\operatorname{epi}(\operatorname{func}(\operatorname{cl} \operatorname{epi} f)) = \operatorname{cl} \operatorname{epi} f$, azaz $\operatorname{epi}(\operatorname{cl} f) = \operatorname{cl} \operatorname{epi} f$. □

7.50 Állítás.
1. $\forall\, f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ $(A \subset X$ tetszőleges halmaz) függvény esetén $\operatorname{cl} f : \operatorname{cl} A \to \overline{\mathbb{R}}$ a.f.f.

2. Egy $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ $(A \subset X$ zárt halmaz) függvény pontosan akkor a.f.f., ha $f = \operatorname{cl} f$.

BIZONYÍTÁS.
1. Mivel a 7.49. állítás szerint $\operatorname{epi} \operatorname{cl} f = \operatorname{cl} \operatorname{epi} f$, azért a $\operatorname{epi} \operatorname{cl} f$ zárt halmaz.

2. Szükségesség: $f = \operatorname{func}(\operatorname{epi} f) = \operatorname{func}(\operatorname{cl}(\operatorname{epi} f)) = \operatorname{cl} f$. Az elégségesség nyilvánvaló. □

7.51 Állítás. (ekvivalens definíció)
$f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subset X)$ függvény esetén

$$\operatorname{cl} f = \bigvee_{g : \operatorname{cl} A \to \overline{\mathbb{R}} \ \text{a.f.f.},\ g|_A \le f} g\,,$$

következésképpen

$$\operatorname{epi} \operatorname{cl} f = \bigcap_{g : \operatorname{cl} A \to \overline{\mathbb{R}} \ \text{a.f.f.},\ g|_A \le f} \operatorname{epi} g\,.$$

BIZONYÍTÁS.
$\le$: $(\operatorname{cl} f)|_A \le f$ és $\operatorname{cl} f$ alulról félig folytonos.

$\ge$: Legyen $g : \operatorname{cl} A \to \overline{\mathbb{R}}$ alulról félig folytonos függvény, amelyre $g|_A \le f$, ekkor $\operatorname{epi} f \subset \operatorname{epi} g$, mivel pedig $\operatorname{epi} g$ zárt halmaz, azért $\operatorname{cl} \operatorname{epi} f \subset \operatorname{epi} g$, így

$$\operatorname{cl} f = \operatorname{func}(\operatorname{cl} \operatorname{epi} f) \ge \operatorname{func}(\operatorname{epi} g) = g\,,$$

azaz $\operatorname{cl} f \ge g$. □

7.52 Definíció. (Fenchel-féle lezárási operáció)
Legyen (X, τ) TVT. Egy tetszőleges $f : A \to \mathbb{R}$ $(M \subset X)$ függvény **a.f.f. konvex burkának**, másképpen **Fenchel-féle lezárásának** nevezzük a

$$\operatorname{cl} \operatorname{co} f := \operatorname{func} \operatorname{cl} \operatorname{co} \operatorname{epi} f|_{\operatorname{cl} \operatorname{co} A} : \operatorname{cl} A \to \overline{\mathbb{R}}$$

függvényt.

7.2.3 A konjugált függvény

Ebben az alpontban legyen (X, τ) LKT2.

7.53 Definíció. (konjugált függvény)
1. Egy $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény **konjugált függvényének** nevezzük azt az $f^* : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényt, amelyre $\forall\ x^* \in X^*$ esetén

$$\begin{aligned} f^*(x^*) &= \sup_{x\in X} \left(\langle x^*, x\rangle - f(x) \right) \\ &= \sup_{x\in \operatorname{Dom} f} \left(\langle x^*, x\rangle - f(x) \right) . \end{aligned}$$

2. Egy $g : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény **konjugált függvényének** nevezzük azt a $g^* : X \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényt, amelyre $\forall\ x \in X$ esetén

$$g^*(x) = \sup_{x^*\in X^*} \left(\langle x^*, x\rangle - g(x^*) \right)$$

3. Egy $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény **kétszeres konjugált függvényének** nevezzük az

$$f^{**} := (f^*)^* : X \to \overline{\mathbb{R}}$$

függvényt.

7.54 Állítás. (a konjugált tulajdonságai I.)
Legyen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tetszőleges függvény, ekkor

1. az $f^* : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ konjugált függvény konvex és a.f.f.;

2. (Young-Fenchel-egyenlőtlenség) $\forall\ x \in X,\ x^* \in X^*$ esetén

$$f(x) + f^*(x^*) \geq \langle x^*, x\rangle ;$$

3.

$$f \geq f^{**} ;$$

4. $\forall\ g : X \to \overline{\mathbb{R}},\ f \leq g$ függvényre $f^* \geq g^*$;

5. ha még $\operatorname{cl}\operatorname{co} f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ valódi függvény, akkor

$$\operatorname{cl}\operatorname{co} f = f^{**} .$$

7.55 Állítás. (a konjugált tulajdonságai II.)
Legyen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ valódi, konvex és a.f.f. függvény, ekkor

1. az $f^* : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ konjugált függvény is valódi (konvex és a.f.f.);

2. $\forall\ x^* \in X^*$ esetén $\exists\ \beta_{x^*} \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\ x \in X$ mellett

$$f(x) \geq \langle x^*, x\rangle + \beta_{x^*} ;$$

3. (Fenchel-Moreau-tétel)

$$f = f^{**} ,$$

sőt ez az egyenlőség elégséges feltétele is az f valódi, konvex és a.f.f. voltának;

4. f megegyezik az összes nem nagyobb affin függvény szuprémumával:

$$f \ = \ \bigvee \{x^* + \beta \ :\ x^* \in X^*,\ \beta \in \mathbb{R},\ x^* + \beta \leq f\} .$$

7.2.4 A szubderivált

Ebben az alpontban legyen továbbra is $(X, ||.||)$ Banach-tér. Vezessük be az alábbi jelöléseket:

7.56 Jelölés.
1. $\mathcal{K}_c(X^*) := \{ K \subset X^* \ : \ K \neq \emptyset \text{ ,konvex, } \ \text{gyenge}^*\text{-kompakt} \} \subset \mathcal{P}(X)$;
2. $S(X, \mathbb{R}) := \{ f : X \to \mathbb{R} \ : \ f \ \text{ folytonos, szublineáris} \}$;

7.57 Definíció.
Egy $A \subset X$ halmaz **indikátorfüggvényének** nevezzük azt a $\Psi_A : X \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényt, amelyre $\forall\, x \in X$ esetén

$$\Psi_A(x) := \begin{cases} 0 & : x \in A \\ \infty & : x \notin A \end{cases} .$$

7.58 Állítás.
A $\Psi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ indikátorfüggvény pontosan akkor
1. konvex, ha az $A \subset X$ halmaz konvex,
2. a.f.f., ha az $A \subset X$ zárt.

7.59 Definíció.
Egy $A \subset X$ halmaz **(felső) támaszfüggvényének** nevezzük azt a $\sigma_A : X^* \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre $\forall\, x^* \in X^*$ esetén

$$\sigma_A(x^*) := \sup_{x \in A} \langle x^*, x \rangle ,$$

illetve egy $A \subset X^*$ halmaz **(felső) támaszfüggvényének** nevezzük azt a $\sigma_A : X \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre $\forall\, x \in X$ esetén

$$\sigma_A(x) := \sup_{x^* \in A} \langle x^*, x \rangle .$$

7.60 Állítás.
$\forall\, A \subset X^*$ halmaz esetén a $\sigma_A : X \to \mathbb{R}$ függvény szublineáris, továbbá, ha $A \subset X^*$ korlátos, akkor folytonos is, azaz

$$\sigma_A \in S(X, \mathbb{R}) .$$

7.61 Állítás.
$\forall\, A \subset X$ halmaz esetén

$$\Psi_A^* = \sigma_A , \quad \textit{és} \quad \sigma_A^* = \Psi_{\mathrm{cl\,co}\,A} ,$$

azaz konvex, zárt halmaz indikátorfüggvénye és támaszfüggvénye egymás konjugáltjai.

7.62 Definíció.
Egy $f : X \to \mathbb{R}$ függvény **támasztott halmaza**:

$$M_f := \{ x^* \in X^* \ : \ \langle x^*, . \rangle \leq f \} \subset X^* .$$

7.63 Állítás.
$\forall\, f : X \to \mathbb{R}$ folytonos és szublineáris függvény esetén az $M_f \subset X^*$ halmaz nemüres, konvex, gyenge*-kompakt, azaz

$$\forall\, f \in S(X, \mathbb{R}) \ \ \textit{esetén} \ \ M_f \in \mathcal{K}_c(X^*) .$$

Bizonyítás.
Nemüres: a Banach-Hahn-tétel szerint.

Konvex és gyenge*-zárt: a definíció alapján.

Legyen
$$V := \{x \in X \ : \ f(x) < 1\} \ \text{ és } \ W := V \cap (-V)\,,$$
ekkor látható, hogy W nyílt környezete a $\mathbf{0}$-nak, továbbá a *Banach-Alaoglu-tétel* szerint W° gyenge*-kompakt és
$$M_f \subset W^\circ\,,$$
így M_f is gyenge*-kompakt. □

7.64 Állítás. (Hörmander)
Az X^* nemüres, konvex, gyenge*-kompakt részhalmazai, valamint az X-en értelmezett valós értékű, folytonos szublineáris függvények kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők, azaz
$$\exists\ \Phi : \mathcal{K}_c(X^*) \to S(X, \mathbb{R}) \ \ \textit{bijekció}\ ,$$
méghozzá Φ a támaszfüggvényképzés, azaz $\forall\ A \in \mathcal{K}_c(X^*)$ esetén $\Phi(A) = \sigma_A$, az inverze, Φ^{-1} a támaszhalmazképzés, azaz $\forall\ f \in S(X, \mathbb{R})$ esetén $\Phi^{-1}(f) = M_f$. Φ injektivitása azt jelenti, hogy $\forall\ A \in \mathcal{K}_c(X^*)$ esetén
$$A = M_{\sigma_A}\,,$$
Φ szürjektivitása azt jelenti, hogy $\forall\ f \in S(X, \mathbb{R})$ esetén
$$f = \sigma_{M_f}\,.$$
Továbbá Φ művelettartó és rendezéstaró is.

Bizonyítás.
szürjektív: Legyen $f \in S(X, \mathbb{R})$ tetszőleges. Egyrészt az M_f definíciója miatt nyilván $\sigma_{M_f} \le f$, másrészt a *Banach-Hahn-tétel* szerint $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\forall\ (x, f(x) - \varepsilon)$ pont szeparálható az $\operatorname{epi} f$ halmaztól valamilyen nem nulla $x^* \in X^*$ funkcionállal, amiből $\sigma_{M_f} \ge f$.

injektív: Legyenek $U,\ V \in \mathcal{K}_c(X^*)$, $U \neq V$ tetszőleges halmazok és $x_0^* \in U \setminus V$ tetszőleges pont, ekkor a *Banach-Hahn-tétel* szerint az $x_0^* \notin V$ pont szigorúan szeparálható a V halmaztól, azaz $\exists\ x_0 \in X$ nemnulla lineáris funkcionál, hogy $\langle x_0^*, x_0\rangle > \max_V \langle x^*, .\rangle$, ezért
$$\Phi(U)(x_0) = \sigma_U(x_0) = \max_U \langle ., x_0\rangle \ge \langle x^*, x_0\rangle > \max_V \langle ., x_0\rangle = \sigma_V(x_0) = \Phi(V)(x_0)\,,$$
így $\Phi(U) \neq \Phi(V)$.

rendezéstartás: $\forall\ U,\ V \in \mathcal{K}_c$, $U \subset V$ esetén $\Phi(U) = \sigma_U \subset \sigma_V = \Phi(V)$. □

7.65 Állítás.
Ha $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ valódi konvex függvény, akkor

1. $\forall\ x \in \operatorname{Dom} f$ pontban $\forall\ v \in X$ irány mentén differenciálható, azaz $\exists\ f'(x, v)$;

2. az $f'(x, .) : X \to \mathbb{R}$ függvény szublineáris;

3. ha $f : X \to \mathbb{R}$ folytonos az $x \in X$ pontban, akkor az $f'(x, .) : X \to \mathbb{R}$ függvény folytonos.

7.66 Definíció. (szubderivált)
Egy $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ valódi konvex függvény $x \in X$ pontbeli szubderiváltja
1.

$$\partial f(x) := \begin{cases} M_{f'(x,.)} = \{x^* \in X^* \ : \ \langle x^*, v\rangle \le f'(x,v)\} & : \ x \in \operatorname{Dom} f \\ \emptyset & : \ x \notin \operatorname{Dom} f \end{cases};$$

2. ezzel ekvivalens módon:

$$\partial f(x) := \begin{cases} \{x^* \in X^* \ : \ \langle x^*, z - x\rangle \le f(z) - f(x), \forall\, z \in X\} & : \ x \in \operatorname{Dom} f \\ \emptyset & : \ x \notin \operatorname{Dom} f \end{cases};$$

2. ezzel ekvivalens módon:

$$\partial f(x) := \begin{cases} \{x^* \in X^* \ : \ f(x) + f^*(x^*) = \langle x^*, x\rangle\} & : \ x \in \operatorname{Dom} f \\ \emptyset & : \ x \notin \operatorname{Dom} f \end{cases}.$$

7.67 Állítás.
Ha az $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ valódi konvex függvény folytonos az $x \in X$ pontban, akkor

1. $\partial f(x) \subset X^*$ nemüres, konvex, gyenge*-kompakt halmaz;

2. $f'(x,.) = \sigma_{\partial f(x)}$.

7.68 Megjegyzés.
1. Az alfejezetben bevezetett fogalmakkal párhuzamosan bevezethetők a következők: függvény hypográfja, konkáv függvények, felülről félig folytonos függvények, ezekre a függvényekre vonatkozó konjugált fogalom, a konkáv függvények szuperderiváltja.

2. A szubderivált 7.66.1. definíciójához hasonló módon a lokálisan Lipschitz folytonos függvényekre is bevezethető egy deriváltfogalom, a Clarke-féle derivált Clarke (1983) [4].

7.3 A Kuratowski-limesz és az epi- illetve hypokonvergencia

7.3.1 Halmazsorozatok Kuratowski-limeszei topologikus terekben

A fenti 7.1.1 alfejezetben egy (X, τ) topologikus tér részhalmazainak $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}$ összességén különböző topológiákat definiáltunk. Ezekben a topológiák a halmazsorozatok különböző konvergencia fogalmait definiálják. A topológikus terekbeli halmazsorozatoknak e topológiáktól függetlenül is lehet különböző konvergencia fogalmait definiálni. Ebben az alfejezetben a halmazsorozatok Kuratowski-limeszeit definiáljuk és belátjuk egyszerű tulajdonságaikat. Megjegyezzük, hogy speciális esetben a Kuratowski-limeszfogalmak megegyeznek a felső-zárt-konvergencia- illetve az alsó-zárt-konvergencia- (alsó-Vietoris-) topológiák melletti limeszfogalmakkal.

7.69 Definíció. (halmazsorozat Kuratowski-limesz-inferiorja topologikus térben)
Legyen (X, τ) topologikus tér. Az $\left(A_n\right)_{n=0}^{\infty}$ X-beli halmazainak sorozata **Kuratowski-féle limesz-inferiorjának** nevezzük az alábbi ekvivalens módokon megadott

$$\operatorname*{Kc\text{-}liminf}_{n\to\infty} A_n$$

halmazt:

(1) $x \in \text{Kc-liminf}_{n\to\infty} A_n$ pontosan akkor, ha az x pont tetszőleges környezete metszi a sorozat tagjait véges soktól eltekinve:

$$\operatorname*{Kc-liminf}_{n\to\infty} A_n := \{x \ : \ \forall\, V \in \tau(x)\ \exists\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq m\ V \cap A_n \neq \emptyset\}\ .$$

(1/a) $x \in \liminf_{n\to\infty} A_n$ pontosan akkor, ha az x pont tetszőleges báziskörnyezete metszi a sorozat tagjait véges soktól eltekinve:

$$\operatorname*{Kc-liminf}_{n\to\infty} A_n := \{x \ : \ \forall\, V \in \beta(x)\ \exists\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq m\ V \cap A_n \neq \emptyset\}\ .$$

(2) A $\text{Kc-liminf}_{n\to\infty} A_n$ azon F halmazok uniója, amelyekre teljesül, hogy ha egy nyílt halmaz metszi az F halmazt, akkor metszi a sorozat minden tagját véges soktól eltekintve:

$$\operatorname*{Kc-liminf}_{n\to\infty} A_n := \cup\big\{F \ : \ \forall\, G \in \mathcal{G}\,,\ G \cap F \neq \emptyset\ \exists\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq m\ G \cap A_n \neq \emptyset\big\}\,.$$

(2/a) A $\text{Kc-liminf}_{n\to\infty} A_n$ azon F halmazok uniója, amelyekre teljesül, hogy ha a nyílt halmazok egy rögzített bázisának valamely eleme metszi az F halmazt, akkor metszi a sorozat minden tagját véges soktól eltekintve:

$$\operatorname*{Kc-liminf}_{n\to\infty} A_n := \cup\big\{F \ : \ \forall\, G \in \mathcal{B}_0\,,\ G \cap F \neq \emptyset\ \exists\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq m\ G \cap A_n \neq \emptyset\big\}\,.$$

7.70 Definíció. (halmazsorozat Kuratowski-limesz-szuperiorja topologikus térben) Legyen (X, τ) topologikus tér. Az $\big(A_n\big)_{n=0}^{\infty}$ X-beli halmazainak sorozata **Kuratowski-féle limesz-szuperiorjának** nevezzük az alábbi ekvivalens módokon megadott

$$\operatorname*{Kc-limsup}_{n\to\infty} A_n$$

halmazt:

(1) $x \in \text{Kc-limsup}_{n\to\infty} A_n$ pontosan akkor, ha az x pont tetszőleges környezete metszi a sorozat végtelen sok tagját:

$$\operatorname*{Kc-limsup}_{n\to\infty} A_n := \{x \ : \ \forall\, V \in \tau(x)\ \forall\, m \in \mathbb{N}\ \exists\, n \geq m\ V \cap A_n \neq \emptyset\}\ .$$

(1/a) $x \in \limsup_{n\to\infty} A_n$ pontosan akkor, ha az x pont tetszőleges báziskörnyezete metszi a sorozat végtelen sok tagját:

$$\operatorname*{Kc-limsup}_{n\to\infty} A_n := \{x \ : \ \forall\, V \in \beta(x)\ \forall\, m \in \mathbb{N}\ \exists\, n \geq m\ V \cap A_n \neq \emptyset\}\ .$$

(2) A $\limsup_{n\to\infty} A_n$ azon F halmazok uniója, amelyekre teljesül, hogy ha egy nyílt halmaz metszi az F halmazt, akkor metszi a sorozat végtelen sok tagját:

$$\operatorname*{Kc-limsup}_{n\to\infty} A_n := \cup\big\{F \ : \ \forall\, G \in \mathcal{G}\,,\ G \cap F \neq \emptyset\ \forall\, m \in \mathbb{N}\ \exists\, n \geq m\ G \cap A_n \neq \emptyset\big\}\,.$$

(2/a) A $\liminf_{n\to\infty} A_n$ azon F halmazok uniója, amelyekre teljesül, hogy ha a nyílt halmazok egy rögzített bázisának valamely eleme metszi az F halmazt, akkor metszi a sorozat végtelen sok tagját:

$$\operatorname*{Kc-liminf}_{n\to\infty} A_n := \cup\big\{F \ : \ \forall\, G \in \mathcal{B}_0\,,\ G \cap F \neq \emptyset\ \forall\, m \in \mathbb{N}\ \exists\, n \geq m\ G \cap A_n \neq \emptyset\big\}\,.$$

Hangsúlyozni kell, hogy a limesz szuperior definíciója nem duálisa a limesz inferior definíciójának, mivel mindkettőben unió szerepel a (2) alatti definícióban.

A limeszszuperior és limeszinferior birtokában a szokásos módon lehet definiálni a limeszfogalmat:

7.71 Definíció. (halmazsorozat Kuratowski-limesze)
Legyen (X, τ) topologikus tér. Az $\left(A_n\right)_{n=0}^{\infty}$ X-beli halmazainak sorozata **Kuratowski-konvergens**, ha

$$\operatorname{Kc-limsup}_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n \,.$$

A limesz szuperior és limesz inferior közös értékét a sorozat Kuratowski-limeszének mondjuk, jelölése:

$$\operatorname{Kc-lim}_{n\to\infty} A_n \,.$$

A következő tételben felsoroljuk a bevezetett limeszfogalmak legegyszerűbb tulajdonságait.

7.72 Állítás. (a limesz szuperior és limesz inferior tulajdonságai)
Legyen (X, τ) topologikus tér, legyen $\left(A_n\right)_{n=0}^{\infty}$ X-beli halmazok egy sorozata. Ekkor igazak az alábbiak.

1. *A limesz inferior és limesz szuperior zárt halmazok.*
2. $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset \limsup\limits_{n\to\infty} A_n \,.$
3. *Ha minden eléggé nagy n-re $A_n \subset B_n$, akkor*
$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \liminf_{n\to\infty} B_n \quad \textit{és} \quad \limsup_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} B_n \,,$$
azaz röviden: a limesz szuperior és inferior monoton operációk.
4. $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to\infty} \operatorname{cl} A_n$ *és* $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \limsup\limits_{n\to\infty} \operatorname{cl} A_n \,,$
továbbá, ha a sorozat konvergens, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{cl} A_n$
5. *Ha minden nyílt halmazra, (vagy egy bázis elemeire) a „$G \cap A_n \neq \emptyset$ végtelen sok n indexre” állítás maga után vonja a “$G \cap A_n \neq \emptyset$ véges sok n-től eltekintve” állítást, akkor az (A_n) sorozat konvergens.*
6. *A halmaz sorozat limesz szuperiorjára formula is adható:*
$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \operatorname{cl}\left(\bigcup_{n\geq m} A_n\right) .$$
7. *Ha az (A_n) sorozat monoton csökkenő illetve növekedő, akkor konvergens és a limesze*
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{cl} A_n \quad \textit{illetve} \quad \operatorname{cl}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) .$$
8. *Ha (A_{n_k}) tetszőleges részsorozata az (A_n) sorozatnak, akkor*
$$\liminf_{k\to\infty} A_{n_k} \supset \liminf_{n\to\infty} A_n \quad \textit{és} \quad \limsup_{k\to\infty} A_{n_k} \subset \limsup_{n\to\infty} A_n \,,$$
továbbá, ha az $\left(A_{n_k}\right)$ részsorozat konvergens:
$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \lim_{k\to\infty} A_{n_k} \subset \limsup_{n\to\infty} A_n \,.$$

Bizonyítás.
1.a. A limesz inferior zárt: $x \notin \liminf A_n$ pontosan akkor, ha az x pontnak van olyan V nyílt környezete, amelyre végtelen sok n-re $V \cap A_n = \emptyset$. Mivel V minden pontjának környezete, azért $V \cap \liminf_n A_n = \emptyset$, azaz az x ponttal együtt annak egy egész környezete kívül esik a $\liminf_n A_n$ halmazon, tehát a limesz inferior komplementuma nyílt.

1.b. A limesz szuperior zárt: $x \notin \liminf A_n$ pontosan akkor, ha az x pontnak van olyan V nyílt környezete, amelyre véges sok n-től eltekintve $V \cap A_n = \emptyset$. Mivel V minden pontjának környezete, azért $V \cap \liminf_n A_n = \emptyset$, azaz az x ponttal együtt annak egy egész környezete kívül esik a $\limsup_n A_n$ halmazon, tehát a limesz szuperior komplementuma nyílt.

2. és 3. A definícióból nyilvánvalóak.

4. Ha a G nyílt halmaz, akkor az $A \cap G \neq \emptyset$ és $clA \cap G \neq \emptyset$ állítások ekvivalensek. Emiatt ha egy (A_n) sorozatra teljesül a limesz inferior illetve limesz szuperior 2. definíciójának a feltétele, akkor teljesül a $(\operatorname{cl} A_n)$ lezártak sorozatára is, és megfordítva.

5. A limesz inferior és a limesz szuperior 7.69 és 7.70 definícióinak 2. pontja szerint a feltevésből következik, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \subset \liminf_{n\to\infty} A_n \,,$$

a másik irányú tartalmazás pedig a 2. állítás.

6. A limesz szuperior 7.70. definíciójának 2. pontja a következő ekvivalencia sorozattal folytatható:

$$\begin{aligned}
x \in \limsup A_n \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\, V \in \tau(x)\ \forall\, m \in \mathbb{N}\ \exists\, n \geq m \quad V \cap A_n \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow \quad \forall\, V \in \tau(x)\ \forall\, m \in \mathbb{N} \quad V \cap \left(\bigcup_{n \geq m} A_n \right) \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow \quad \forall\, V \in \tau(x)\ \forall\, m \in \mathbb{N} \quad V \cap \operatorname{cl} \left(\bigcup_{n \geq m} A_n \right) \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow \quad \forall\, m \in \mathbb{N} \quad x \in \operatorname{cl} \left(\bigcup_{n \geq m} A_n \right) \\
&\Leftrightarrow \quad x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \operatorname{cl} \left(\bigcup_{n \geq m} A_n \right) .
\end{aligned}$$

7.
Ha az (A_n) sorozat monoton növekedő, és valamilyen G nyílt halmaz esetén végtelen sok n-re $G \cap A_n \neq \emptyset$, akkor ez véges sok n-től eltekintve is teljesül, így az 5. állítás szerint az (A_n) sorozat konvergens.
Ha az (A_n) sorozat monoton fogyó, és valamilyen G nyílt halmaz esetén végtelen sok n-re $G \cap A_n \neq \emptyset$, akkor ez véges sok n-től eltekintve is teljesül, így az 5. állítás szerint az (A_n) sorozat konvergens.
A formulák azonnal adódnak a 6. állításból.

8.
$\liminf_n A_n \subset \liminf_k A_{n_k}$: Ha $x \in \liminf_n A_n$, akkor az x tetszőleges V környezete metszi az (A_n) sorozat tagjait véges soktól eltekintve, így metszi az (A_{n_k}) sorozat tagjait is véges soktól eltekintve, tehát $x \in \liminf_k A_{n_k}$.

$\limsup_k A_{n_k} \subset \limsup_n A_n$: Ha $x \in \limsup_k A_{n_k}$, akkor az x tetszőleges V környezete metszi az (A_{n_k}) sorozat végtelen sok tagját, így metszi az (A_n) sorozat végtelen sok tagját is, tehát $x \in \limsup_n A_n$. □

7.3.2 Függvénysorozatok epi- illetve hypokonvergenciája

A Kuratowski limesz segítségével függvénysorozat epi- illetve hypográfjaira kézenfekvő bevezetni az alábbi konvergencia fogalmat. A fogalom tetszőleges topologikus téren értelmezett függvényekre bevezethető lenne.

7.73 Definíció.
Legyenek $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n \subset \mathbb{R}^n$ illetve $A \subset \mathbb{R}^n$ zárt halmazok. Azt mondjuk, hogy az $f_n : A_n \to \mathbb{R}$ f.f.f. illetve a.f.f. függvényekből álló sorozat **epi-** illetve **hypokonvergál** az $f : A \to \mathbb{R}$ a.f.f. illetve f.f.f. függvényhez, ha

$$\text{Kc-lim}\,\text{epi}\, f_n = \text{epi}\, f \quad \text{illetve} \quad \text{Kc-lim}\,\text{hypo}\, f_n = \text{hypo}\, f \ .$$

(Külön jelölést nem is fontos bevezetni rá.)

7.74 Állítás.
Legyen $X \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges halmaz. Legyen (f_n) $C(X,\mathbb{R})$-beli, azaz folytonos függvényekből álló függvénysorozat, amelyre $\lim f_n = f$ lokálisan egyenletesen. Akkor $\text{Kc-lim}\,\text{hypo}\, f_n = \text{hypo}\, f$.

Bizonyítás.
1. $\text{hypo}\, f \subset \liminf \text{hypo}\, f_n$:
Legyen $(x,\alpha) \in \text{hypo}\, f$, tekintsük ennek egy $U \times (\alpha-\varepsilon, \alpha-\varepsilon)$ környezetét.
Mivel $\lim f_n = f$ (most elég az is, hogy pontonként), azért $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n > n_0$ esetén $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) - \varepsilon$ azaz $\alpha - \varepsilon < f_n(x) - f(x) + \alpha < \alpha - \varepsilon$, ezért

$$(x, f_n(x) - f(x) + \alpha) \in U \times (\alpha-\varepsilon, \alpha-\varepsilon) \,.$$

Ugyanakkor $f_n(x) - f(x) + \alpha \geq f_n(x)$, ezért

$$(x, f_n(x) - f(x) + \alpha) \in \text{hypo}\, f_n \,.$$

Ezek szerint $\forall\, n > n_0$ esetén

$$\text{hypo}\, f_n \cap (U \times (\alpha-\varepsilon, \alpha-\varepsilon)) \neq \emptyset \,,$$

ami azt jelenti, hogy $(x,\alpha) \in \text{Kc-lim}\,\text{hypo}\, f_n$.

2. $\limsup \text{hypo}\, f_n \subset \text{hypo}\, f$:
Tegyük fel, hogy $(x,\alpha) \notin \text{hypo}\, f$, azaz $f(x) < \alpha$, ekkor $\exists\; f(x) < \gamma < \beta < \alpha$, továbbá $\exists\, U$ környezete az x pontnak, amelyen $\lim f_n = f$ egyenletesen. Ekkor $\exists\, U_0 \subset U$ környezete az x pontnak, hogy $\forall\, z \in U_0$ esetén $f(z) < \gamma$, továbbá $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n > n_0$ esetén

$$f_n(z) - f(z) < \beta - \gamma \,, \quad \text{így } f_n(z) < \beta \,,$$

ezért $\forall\, z \in U_0$, $(z,\zeta) \in \text{hypo}\, f_n$ esetén $\zeta < \beta$.
Mivel $\beta < \alpha$, azért $U_0 \times (\beta, \infty)$ az (x,α) pont környezete, és a fentiek szerint $\forall\, n > n_0$ esetén

$$\text{hypo}\, f_n \cap (U_0 \times (\beta,\infty)) = \emptyset \ ,$$

ami azt jelenti, hogy $(x,\alpha) \notin \limsup \text{hypo}\, f_n$. □

7.75 Definíció.
Legyenek $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n \subset \mathbb{R}^n$ illetve $A \subset \mathbb{R}^n$ zárt halmazok. Azt mondjuk, hogy az $f_n : A_n \to \mathbb{R}$ folytonos függvénysorozat **folytonosan tart** az $f : A \to \mathbb{R}$ folytonos függvényhez, ha

(1) $\text{Kc-lim}\, A_n = A$,

(2) $\forall\, x_n \in A_n,\ x \in A,\ x_n \to x$, sorozat esetén $f_n(x_n) \to f(x)$.

Jelölje ezt a konvergenciát: $f_n \to_c f$

7.76 Állítás. (ekvivalens definíció)
A (2) feltétel ekvivalens azzal, hogy $\forall\, x_{n_k} \in A_{n_k},\ x_{n_k} \to x$ *részsorozat esetén* $x \in A$ *és* $f_{n_k}(x_{n_k}) \to f(x)$.

7.77 Állítás. (ekvivalens definíció)
Az $f_n : A_n \to \mathbb{R}$ *folytonos függvénysorozat folytonosan tart az* $f : A \to \mathbb{R}$ *folytonos függvényhez, akkor és csak akkor, ha*

1. $\text{Kc-lim}\,\text{hypo}\,\text{cl}(f)_n = \text{cl}(f)$, *ahol* $\text{cl}(f)_n|_{X_n} := f_n$, $\text{cl}(f)_n|_{X_n^c} := -\infty$,

2. $\text{Kc-lim}\,\text{epi}\,\hat{f}_n = \text{cl}(f)$, *ahol* $\text{cl}(f)_n|_{X_n} := f_n$, $\hat{f}_n|_{X_n^c} := \infty$.

7.78 Állítás.
Legyenek $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *esetén* $H_n,\ K_n \subset \mathbb{R}^n$ *illetve* $H,\ K \subset \mathbb{R}^n$ *konvex, zárt halmazok, amelyekre* $\text{Kc-lim}\, H_n = H$ *illetve* $\text{Kc-lim}\, K_n = K$, *valamint tegyük fel, hogy*

$$\text{int}\, K_0 \cap H_0 \neq \emptyset\ .$$

Akkor $\text{Kc-limsup}(H_n \cap K_n) = H \cap K$.

Bizonyítás.
Először azt látjuk be, hogy

$$\text{Kc-limsup}(H_n \cap K_n) \subset \text{Kc-limsup}\, H_n \cap \text{Kc-limsup}\, K_n = H \cap K\ .$$

Ugyanis a definíció szerint, $\forall\, x \in \text{Kc-limsup}(H_n \cap K_n)$ esetén $\exists\, x_{n_k} \in H_n \cap K_n$, azaz $\exists\, x_{n_k} \in H_n$ és $\exists\, x_{n_k} \in K_n$ részsorozat, amelyre $lim x_{n_k} = x$, ezért $x \in \text{Kc-limsup}\, H_n$ és $x \in \text{Kc-limsup}\, K_n$.

Másodszor azt látjuk be, hogy

$$H \cap K \subset \text{Kc-liminf}\, H_n \cap K_n\ .$$

Ehhez igazoljuk, hogy $\forall\, x \in \text{int}\, K$ esetén $\exists\, B(x,\varepsilon) \subset K$.
Ugyanis: Legyen $x \in \text{int}\, K$ tetszőleges, ekkor $\exists\, B_\infty(x, 2\varepsilon) = \text{co}\{z_1, \ldots, z_m\} \subset K$, a Kc-liminf definíciója szerint $\forall\, z_j$ csúcshoz $\exists\, N_j \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n > N_j$ esetén $z_j \in K_n + B_\infty(\mathbf{0}, \varepsilon)$, mivel a $\forall\, K_n$ konvex halmaz, azért $\forall\, n > N := \max\{N_1, \ldots, N_m\}$, esetén

$$B_\infty(x, 2\varepsilon) = \text{co}\{z_1, \ldots, z_m\} \subset K_n + B_\infty(\mathbf{0}, \varepsilon)\ .$$

Mivel K_n konvex, zárt $B_\infty(\mathbf{0}, \varepsilon)$ korlátos, azért a Rådström-féle törlési szabály szerint, $B_\infty(x, \varepsilon) \subset K_n$.

Belátjuk, hogy $H \cap \text{int}\, K \subset \text{Kc-liminf}\, H_n \cap K_n$.
Ugyanis: Legyen $x \in H \cap \text{int}\, K$ tetszőleges. Ekkor mivel $\text{Kc-liminf}\, H_n = H$, azért $\exists\, x_n \in H_n$ sorozat, amelyre $\lim x_n = x$. Az előbbi állítás miatt $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n > N$ esetén $B_\infty(x, \varepsilon) \subset K_n$, így $\forall\, n > N$ esetén $x_n \in K_n$, ezért $x_n \in H_n \cap K_n$, ami definíció szerint azt jelenti, hogy $x \in \text{Kc-liminf}\, H_n \cap K_n$.

Legyen végül $z \in H \cap K$, valamint továbbra is $x \in H \cap \operatorname{int} K$ tetszőleges. Ekkor mivel $H \cap \operatorname{int} K$ konvex, azért ismert, hogy $\forall\, \lambda \in [0,1)$ esetén

$$\lambda z + (1-\lambda)x \in H \cap \operatorname{int} K \ ,$$

az előzőek szerint $\lambda z + (1-\lambda)x \in \text{Kc-liminf}\, H_n \cap K_n$. Mivel $\text{Kc-liminf}\, H_n \cap K_n$ zárt halmaz, azért $x \in \text{Kc-liminf}\, H_n \cap K_n$. □

7.79 Állítás.
Legyenek $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *esetén* $f_n : \mathbb{R}^n_+ \to [-\infty, +\infty)$ *és* $f : \mathbb{R}^n_+ \to [-\infty, +\infty)$ *f.f.f. és konkáv függvények, amelyekre* $\text{Kc-lim}\, \text{hypo}\, f_n = \text{hypo}\, f$. *Legyenek* $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *esetén* H_n *és* $H \subset \mathbb{R}^n_+$ *konvex, zárt halmazok, amelyekre* $\text{Kc-lim}\, H_n = H$. *Tegyük fel még, hogy*

$$\operatorname{int} \operatorname{Dom} f \cap H \neq \emptyset\,, \ \textit{vagy}\ \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{int} H \neq \emptyset\,.$$

Ekkor

$$\text{Kc-lim}\, \text{hypo}(f_n - \Psi_{H_n}) = \text{hypo}(f - \Psi_H)\,,$$

azaz

$$\text{Kc-lim}(\text{hypo}\, f_n \cap (H_n \times \mathbb{R})) = \text{hypo}\, f \cap (H \times \mathbb{R})\,.$$

Bizonyítás.
A fenti állítás alkalmazásához elég belátni, hogy

$$\operatorname{int} \text{hypo}\, f \cap (H \times \mathbb{R}) \neq \emptyset \ \ \text{vagy} \ \ \text{hypo}\, f \cap \operatorname{int}(H \times \mathbb{R}) \neq \emptyset\ .$$

Ha $\operatorname{int} \operatorname{Dom} f \cap H \neq \emptyset$, akkor legyen $x \in \operatorname{int} \operatorname{Dom} f \cap H$ tetszőleges. Mivel f konkáv, azért folytonos az $x \in \operatorname{int} \operatorname{Dom} f$ pontban, emiatt az x pontnak $\exists\, U$ környezete, hogy $\forall\, z \in U$ esetén $f(z) \geq f(x) - 1$, azaz $U \times (-\infty, f(x)-1) \subset \text{hypo}\, f$, ezért $(x, f(x)-2) \in \operatorname{int} \text{hypo}\, f$, így $(x, f(x)-2) \in \operatorname{int} \text{hypo}\, f \cap (K \times \mathbb{R})$.

Ha $\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{int} H \neq \emptyset$, akkor legyen $x \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{int} H$ tetszőleges, ekkor nyilván $(x, f(x)) \in \text{hypo}\, f \cap \operatorname{int}(K \times \mathbb{R})$. □

7.80 Állítás.
Legyenek $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *esetén* $H_n,\ K_n \subset \mathbb{R}^n$ *illetve* $H,\ K \subset \mathbb{R}^n$ *konvex, zárt halmazok, amelyekre* $\text{Kc-lim}\, H_n = H$ *illetve* $\text{Kc-lim}\, K_n = K$, *valamint tegyük fel, hogy*

$$\operatorname{int} K_0 \cap H_0 \neq \emptyset\,, \quad \textit{vagy} \quad K_0 \cap \operatorname{int} H_0 \neq \emptyset\,.$$

Legyenek $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *esetén* $f_n : H_n \to [-\infty, +\infty)$ *és* $f : H \to [-\infty, +\infty)$ *folytonos függvények, amelyekre* $f_n \to_c f$.
Ekkor

$$f_n|_{H_n \cap K_n} \to_c f|_{H \cap K}\,.$$

7.4 Burkológörbe-tételek

Burkológörbe-tétel feltétel nélküli szélsőértékfeladatra

Legyenek $(X, ||.||)$ és $(Y, ||.||)$ Banach-terek, legyen $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ adott függvény. Tekintsük a következő, $a \in Y$ paraméterrel paraméterezett feladatsereget:

$$\begin{cases} f(x,a) \to \max \\ x \in X \end{cases} \tag{7.5}$$

Az (7.5) feladatsereg értékfüggvénye az az $f^{\vee} : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény, amelyre $\forall\, a \in Y$ esetén

$$f^{\vee}(a) := \sup\{f(x,a) : x \in X\}\,.$$

Az (7.5) feladatsereg megoldásleképezése az a $\mathcal{X} : Y \to \mathcal{P}(X)$ halmazértékű leképezés, amelyre $\forall\, a \in Y$ esetén

$$\mathcal{X}(a) := \operatorname{argmax} f(., a)\,.$$

Amennyiben $\forall\, a \in Y$ esetén a feladatnak pontosan egy megoldása létezik, akkor a megoldásleképezés lényegében egy $\chi : Y \to X$ függvény. Ebben az esetben $\forall\, a \in Y$ esetén

$$f^{\vee}(a) = f(\chi(a), a) = [f \circ (\chi, \mathrm{id}_Y)](a)\,,$$

így

$$f^{\vee} = f \circ (\chi, \mathrm{id}_Y)\,.$$

7.81 Állítás. (burkológörbe-tétel I.)
Tekintsük a (7.5) feladatsereget. Tegyük fel, hogy $\forall\, a \in Y$ esetén a feladatnak pontosan egy megoldása létezik, azaz a megoldásleképezés lényegében egy $\chi : Y \to X$ függvény, amelyről még tegyük fel azt is, hogy differenciálható. Legyen $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ekkor a feladatsereg $f^{\vee} : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvénye is differenciálható, és $\forall\, a \in Y$ esetén

$$(f^{\vee})'(a) = \partial_2 f(\chi(a), a)\,.$$

BIZONYÍTÁS.
Mivel $\forall\, a \in Y$ esetén f és χ differenciálható, azért $f^{\vee} = f \circ (\chi, \mathrm{id}_Y)$ is az, valamint

$$\begin{aligned}
(f^{\vee})'(a) &= (f \circ (\chi, \mathrm{id}_Y))'(a) \\
&= f'(\chi(a), a) \cdot \begin{bmatrix} \chi'(a) \\ \mathrm{id}_Y'(a) \end{bmatrix} \\
&= \partial_1 f(\chi(a), a) \cdot \chi'(a) + \partial_2 f(\chi(a), a) \cdot \mathrm{id}_Y'(a) \\
&= \partial_1 f(\chi(a), a) \cdot \chi'(a) + \partial_2 f(\chi(a), a) \\
&= \partial_2 f(\chi(a), a)\,.
\end{aligned}$$

Az utolsó előtti egyenlőség azért igaz, mert $(\mathrm{id}_Y)'(a) = \mathrm{id}_Y$, ezért

$$\partial_2 f(\chi(a), a) \cdot \mathrm{id}_Y (= \partial_2 f(\chi(a), a) \circ \mathrm{id}_Y) = \partial_2 f(\chi(a), a)\,.$$

Az utolsó egyenlőség pedig azért igaz, mert a $\chi(a)$ az $f(., a) : X \to \mathbb{R}$ függvény szélsőérték-(maximum-)helye, ezért a Fermat-tétel szerint

$$\partial_1 f(\chi(a), a) = (f(., a))'(\chi(a)) = \mathbf{0}_{X^*}\,.$$

□

Burkológörbe-tétel, feltételes szélsőértékfeladatra

Legyenek $(X, ||.||)$, $(Y, ||.||)$ és $(Z, ||.||)$ Banach-terek, legyenek $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ és $F : X \times Y \to Z$ adott függvények. Tekintsük a következő, $a \in Y$ paraméterrel paraméterezett feladatsereget:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, a) \to \max \\ F(x, a) = \mathbf{0}_Z \end{array} \right. \tag{7.6}$$

Az (7.6) feladatsereg értékfüggvénye az az $f^{\vee} : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény, amelyre $\forall\, a \in Y$ esetén

$$f^{\vee}(a) := \sup\{f(x, a) \;:\; x \in X,\ F(x, a) = \mathbf{0}_Z\}\,.$$

A (7.6) feladatsereg megoldásleképezése az a $\mathcal{X} : Y \to \mathcal{P}(X)$ halmazértékű leképezés, amelyre $\forall\ a \in Y$ esetén

$$\mathcal{X}(a) := \operatorname*{argmax}_{F(.,a)^{-1}(\mathbf{0}_Z)} f(.,a)\,.$$

A (7.6) feladatsereg Lagrange-függvénye az az $\mathcal{L} : X \times Z^* \times Y \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\forall\ x \in X, z^* \in Z^*, a \in Y$ esetén

$$\mathcal{L}(x, z^*, a) = f(x,a) - \langle z^*, F(x,a)\rangle\rangle\,.$$

Megemlítjük, feltéve, hogy létezik

$$\partial_3\mathcal{L}(x, z^*, a) = \partial_2 f(x,a) - z^*\ \partial_2 F(x,a)\,.$$

A (7.6) feladatban $\forall\ a \in Y$ esetén egy $\chi(a) \in \mathcal{X}(a)$ megoldáshoz tartozó Lagrange-multiplikátor az a $z^* \in Z^*$, amelyre

$$\partial_1\mathcal{L}(\chi(a), z^*, a) = \partial_1 f(\chi(a),a) - z^*\ \partial_1 F(\chi(a),a) = \mathbf{0}_{X^*}\,.$$

Amennyiben $\forall\ a \in Y$ esetén a feladatnak pontosan egy megoldása létezik, akkor a megoldásleképezés lényegében egy $\chi : Y \to X$ függvény. Ebben az esetben $\forall\ a \in Y$ esetén

$$f^\vee(a) = f(\chi(a),a) = [f \circ (\chi, \mathrm{id}_Y)](a)\,,$$

így

$$f^\vee = f \circ (\chi, \mathrm{id}_Y)\,.$$

Továbbá a feladatsereg Lagrange-multiplikátorfüggvénye az a $\lambda : Y \to Z^*$ függvény, amelyre $\forall\ a \in Y$ esetén $\lambda(a) = z^* \in Z^*$ a feladat $\chi(a)$ megoldásához tartozó multiplikátora, azaz amelyre

$$\partial_1\mathcal{L}(\chi(a), \lambda(a), a) = \partial_1 f(\chi(a),a) - \lambda(a)\ \partial_1 F(\chi(a),a) = \mathbf{0}_{X^*}\,.$$

7.82 Állítás. (burkológörbe-tétel II.)
Tekintsük a (7.6) feladatsereget. Tegyük fel, hogy $\forall\ a \in Y$ esetén a feladatnak pontosan egy megoldása létezik, azaz a megoldásleképezés lényegében egy $\chi : Y \to X$ függvény, amelyről még tegyük fel azt is hogy differenciálható. Tegyük fel, hogy $\forall\ a \in Y$ esetén a feladatra fennállnak a Lagrange-multiplikátortétel feltételei, azaz $f(.,a) : X \times Y \to \mathbb{R}$ és $F(.,a) : X \times Y \to Z$ folytonosan differenciálhatók $\chi(a)$-ban, valamint $\mathcal{R}(\partial_1 F(\chi(a),a)) = Z$. Ekkor a feladatsereg $f^\vee : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvénye differenciálható, és $\forall\ a \in Y$ esetén

$$(f^\vee)'(a) = \partial_3\mathcal{L}(\chi(a), \lambda(a), a) = \partial_2 f(\chi(a),a) - \lambda(a)\ \partial_2 F(\chi(a),a)\ .$$

Bizonyítás.
Mivel $\forall\ a \in Y$ esetén f és χ differenciálható, azért $f^\vee$ is az, valamint

$$\begin{aligned}
(f^\vee)'(a) &= (f \circ (\chi, \mathrm{id}_Y))'(a) \\
&= f'(\chi(a),a) \cdot \begin{bmatrix} \chi'(a) \\ \mathrm{id}'_Y(a) \end{bmatrix} \\
&= \partial_1 f(\chi(a),a) \cdot \chi'(a) + \partial_2 f(\chi(a),a) \cdot \mathrm{id}'_Y(a) \\
&= \partial_1 f(\chi(a),a) \cdot \chi'(a) + \partial_2 f(\chi(a),a) \\
&= \lambda(a) \cdot \partial_1 F(\chi(a),a) \cdot \chi'(a) + \partial_2 f(\chi(a),a) \\
&= -\lambda(a)\partial_2 F(\chi(a),a) + \partial_2 f(\chi(a),a) \\
&= \partial_3\mathcal{L}(\chi(a), \lambda(a), a)\,.
\end{aligned}$$

A negyedik egyenlőség azért igaz, mert $\mathrm{id}_Y'(a) = \mathrm{id}_Y$, ezért

$$\partial_2 f(\chi(a), a) \cdot \mathrm{id}_Y = \partial_2 f(\chi(a), a) \cdot \mathrm{id}_Y'(a) = \partial_2 f(\chi(a), a)\,.$$

Az ötödik egyenlőség azért igaz, mert a $\chi(a)$ a feladat megoldása, így a Lagrange-multiplikátor tétel szerint

$$\begin{aligned}
\mathbf{0}_{X^*} &= \partial_1 \mathcal{L}(\chi(a), \lambda(a), a) \\
&= \partial_1 f(\chi(a), a) - [\partial_1 F(\chi(a), a)]^*(\lambda(a)) \\
&= \partial_1 f(\chi(a), a) - \lambda(a) \cdot \partial_1 F(\chi(a), a)\,.
\end{aligned}$$

A hatodik egyenlőség pedig azért igaz, mert $\forall\ a \in Y$ esetén $F(\chi(a), a) = \mathbf{0}_Z$, így $F \circ (\chi, \mathrm{id}_Y) = \text{konstans}$, ezért

$$\begin{aligned}
\mathbf{0}_{Z^*} &= (F \circ (\chi, \mathrm{id}_Y))'(a) = F'(\chi(a), a) \cdot \begin{bmatrix} \chi'(a) \\ \mathrm{id}_Y \end{bmatrix} \\
&= \partial_1 F(\chi(a), a) \cdot \chi'(a) + \partial_2 F(\chi(a), a) \circ \mathrm{id}_Y \\
&= \partial_1 F(\chi(a), a) \cdot \chi'(a) + \partial_2 F(\chi(a), a)\,.
\end{aligned}$$

□

Burkológörbe-tétel, feltételes szélsőértékfeladatra, speciális eset

Legyenek $(X, ||.||)$ és $(Y, ||.||)$ Banach-terek, legyenek $f : X \to \mathbb{R}$ és $F : X \to Y$ adott fügvények. Tekintsük a következő, $a \in Y$ paraméterrel paraméterezett feladatsereget:

$$\begin{cases} f(x) \to \max \\ F(x) = a \end{cases} \tag{7.7}$$

Az (7.7) feladatsereg értékfüggvénye az az $f^\vee : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény, amelyre $\forall\ a \in Y$ esetén

$$f^\vee(a) := \sup\{f(x)\ :\ x \in X,\ F(x) = a\}\,.$$

A (7.7) feladatsereg megoldásleképezése az a $\mathcal{X} : Y \to \mathcal{P}(X)$ halmazértékű leképezés, amelyre $\forall\ a \in Y$ esetén

$$\mathcal{X}(a) := \operatorname*{argmax}_{F^{-1}(a)} f\,.$$

A (7.7) feladatsereg Lagrange-függvénye az az $\mathcal{L} : X \times Y^* \times Y \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\forall\ x \in X, z^* \in Y^*, a \in Y$ esetén

$$\mathcal{L}(x, z^*, a) = f(x) - \langle z^*, F(x) - a\rangle\,.$$

Megemlítjük, feltéve, hogy létezik

$$\partial_3 \mathcal{L}(x, z^*, a) = z^*\,.$$

A (7.7) feladatban $\forall\, a \in Y$ esetén egy $\chi(a) \in \mathcal{X}(a)$ megoldáshoz tartozó Lagrange-multiplikátor az a $z^* \in Z^*$, amelyre

$$\partial_1 \mathcal{L}(\chi(a), z^*, a) = f'(\chi(a)) - z^*\, F'(\chi(a)) = \mathbf{0}_{X^*}\,.$$

Amennyiben $\forall\ a \in Y$ esetén a feladatnak pontosan egy megoldása létezik, akkor a megoldásleképezés lényegében egy $\chi : Y \to X$ függvény. Ebben az esetben $\forall\ a \in Y$ esetén

$$f^\vee(a) = f(\chi(a)) = (f \circ \chi)(a)\,,$$

így
$$f^{\vee} = f \circ \chi\,.$$
Továbbá a feladatsereg Lagrange-multiplikátorfüggvénye az a $\lambda : Y \to Y^*$ függvény, amelyre $\forall\ a \in Y$ esetén $\lambda(a) = z^* \in Y^*$ a feladat $\chi(a)$ megoldásához tartozó multiplikátora, azaz amelyre
$$\partial_1 \mathcal{L}(\chi(a), \lambda(a), a) = f'(\chi(a)) - \lambda(a)\, F'(\chi(a)) = \mathbf{0}_{X^*}\,.$$

7.83 Állítás. (burkológörbe-tétel III.)
Tekintsük a (7.7) feladatsereget. Tegyük fel, hogy $\forall\ a \in Y$ esetén a feladatnak pontosan egy megoldása létezik, azaz a megoldásleképezés lényegében egy $\chi : Y \to X$ függvény, amelyről még tegyük fel azt is hogy differenciálható. Tegyük fel, hogy $\forall\ a \in Y$ esetén a feladatra fennállnak a Lagrange-multiplikátortétel feltételei, azaz $f : X \to \mathbb{R}$ és $F : X \to Y$ folytonosan differenciálhatók $\chi(a)$-ban, valamint $\mathcal{R}(F'(\chi(a))) = Y$. Ekkor a feladatsereg $f^{\vee} : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvénye differenciálható, és $\forall\ a \in Y$ esetén
$$(f^{\vee})'(a) = \partial_3 \mathcal{L}(\chi(a), \lambda(a), a) = \lambda(a)\,.$$

Bizonyítás.
Az állítás nyílván belátható az előző tételből, de belátható az előző állítás bizonyításához hasonlóan, de kissé egyszerűbben:

Mivel $\forall\ a \in Y$ esetén f és χ differenciálható, azért $f^{\vee}$ is az, valamint
$$\begin{aligned}
(f^{\vee})'(a) &= (f \circ \chi)'(a) \\
&= f'(\chi(a)) \cdot \chi'(a) \\
&= \lambda(a) \cdot F'(\chi(a)) \cdot \chi'(a) \\
&= \lambda(a) \cdot (F \circ \chi)'(a) \\
&= \lambda(a) \circ \mathrm{id}_Y = \lambda(a) \\
&= \partial_3 \mathcal{L}(\chi(a), \lambda(a), a)\,.
\end{aligned}$$
A harmadik egyenlőség azért igaz, mert mivel $\chi(a)$ a feladat megoldása, azért a Lagrange-multiplikátor-tétel szerint
$$\begin{aligned}
\mathbf{0}_{X^*} &= \partial_1 \mathcal{L}(\chi(a), \lambda(a), a) \\
&= f'(\chi(a)) - [F'(\chi(a))]^*(\lambda(a)) \\
&= f'(\chi(a)) - \lambda(a) \cdot F'(\chi(a))\,,
\end{aligned}$$
Az ötödik egyenlőség pedig azért igaz, mert $\forall\ a \in Y$ esetén
$$(F \circ \chi)(a) = F(\chi(a)) = a\,,\ \text{így}\ F \circ \chi = \mathrm{id}_Y\,,$$
ezért
$$(F \circ \chi)'(a) = (\mathrm{id}_Y)'(a) = \mathrm{id}_Y\,.$$
□

7.5 A Ky Fan-féle metszettétel

A KKM-tétel és Brouwer fixponttétele

Először az eredeti Knastner-Kuratowski-Mazurkiewicz tételt — röviden: KKM-tételt — ismertetjük, és megmutatjuk, hogy ekvivalens a Brouwer-féle fixpont tétellel. A KKM-tételt eredetileg arra szánták a szerzők, hogy a Brouwer-tételre egyszerűbb bizonyítást adjanak. Ez kevésbé sikerült, de a KKM-tétel nagyon jó szolgálatot tesz az alkalmazás technikájában.

7.84 Jelölés.
Legyen
$$S_n := \mathrm{co}\{e_1, \ldots, n\} = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \xi_1 + \cdots + \xi_n = 1\}$$
az $\mathbb{R}^n_+$-beli standard szimplex.

7.85 Definíció.
Az $\{F_1, \ldots, F_n\} \in \mathcal{P}(S_n)$ halmazrendszert **KKM-tulajdonságúnak** nevezzük, ha az S_n szimplex zárt részhalmazaiból áll, és
$$\forall\ I \subset \{1, \ldots, n\} \qquad \mathrm{co}\{e_i : i \in I\} \subset \bigcup_{i \in I} F_i\,. \tag{7.8}$$

7.86 Állítás. (KKM-tétel)
Ha az $\{F_1, \ldots, F_n\} \in \mathcal{P}(S_n)$ *halmazrendszer* KKM-*tulajdonságú, akkor*
$$\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset\,.$$

7.87 Állítás. (KKM és a Brouwer-fixponttétel ekvivalenciája)
A KKM-*tétel ekvivalens a Brouwer-féle fixponttétellel.*

Bizonyítás.
A KKM-*tétel implikálja a Brouwer-tételt*:
Megmutatjuk, hogy tetszőleges $f = (f_1, \ldots, f_n) : S_n \to S_n$ folytonos izomorf transzformációnak (automorfizmusnak) van fixpontja.
Definiáljuk az F_i halmazokat a következőképpen:
$$F_i := \{x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in S \ : \ \xi_i \geq f_i(x)\}\,.$$
A folytonosság miatt az F_i halmazok zártak. Belátjuk, hogy KKM-tulajdonságúak. Ugyanis: Indirekt módon tegyük fel, hogy valamilyen $I \subset \{1, \ldots, n\}$ indexhalmazra
$$\mathrm{co}\{e_i \ : \ i \in I\} \ \not\subset \ \bigcup_{i \in I} F_i\,,$$
ekkor van olyan $\tilde{x} \in \mathrm{co}\{e_i \ : \ i \in I\}$, amelyre $\tilde{x} \notin \bigcup_{i \in I} F_i$, ezért
$$\forall\ i \in I \text{ esetén } \tilde{\xi}_i < f_i(\tilde{x})\,,$$
és persze $\tilde{\xi}_i = 0$, ha $i \notin I$. Ezért $\forall\ i = 1, \ldots, n$ indexre $\tilde{\xi}_i \leq f_i(\tilde{x})$, és $\exists\ i = 1, \ldots, n$ index, hogy $\tilde{\xi}_i < f_i(\tilde{x})$. Ezeket összegezve azt kapjuk, hogy:
$$1 = \tilde{\xi}_1 + \ldots + \tilde{\xi}_n < f_1(\tilde{x}) + \ldots + f_n(\tilde{x}) = 1\,,$$
ami ellentmondás.
A 7.86. KKM-tétel szerint $\exists\ \bar{x} \in \bigcap_{i=1}^n F_i \neq \emptyset$, azaz
$$\forall\ i \in \{1, \ldots, n\} \ \text{ esetén } \ \bar{\xi}_i \geq f_i(\bar{x})\,.$$
Látható, hogy
$$\forall\ i \in \{1, \ldots, n\} \text{ esetén } \bar{\xi}_i = f_i(\bar{x})\,, \quad \text{azaz} \quad \bar{\xi} = f(\bar{x})\,,$$
ugyanis ha itt már egyetlen egyenlőtlenségben is szigorú egyenlőtlenség állna fenn, akkor összegezve:
$$1 = \bar{\xi}_1 + \ldots + \bar{\xi}_n > f_1(\bar{x}) + \ldots + f_n(\bar{x}) = 1\,,$$

ami ellentmondás.

A Brouwer-tétel implikálja a KKM-*tételt*:
A Brouwer-tételből megmutatjuk, hogy ha az $\{F_1,\dots,F_n\} \in \mathcal{P}(S_n)$ zárt halmazokból álló rendszerre $\bigcap_{i=1}^n F_i = \emptyset$, akkor nem KKM-tulajdonságú, azaz $\exists\ I \subset \{1,\dots,n\}$ indexhalmaz, hogy

$$\mathrm{co}\{e_i : i \in I\} \not\subset \bigcup_{i\in I} F_i\,.$$

Mivel $\bigcap_i F_i = \emptyset$ és az F_i halmazok zártak, azért $\forall\ x \in S_n$ ponthoz $\exists$ olyan $i \in \{1,\dots,n\}$ index, hogy $d(x,F_i) > 0$, így definiálhatjuk azt az $f : S_n \to S_n$ függvényt, amelyre $\forall\ x \in S_n$ esetén

$$f(x) := \frac{d(x,F_1)e_1 + \ldots + d(x,F_n)e_n}{d(x,F_1) + \ldots + d(x,F_n)}\,.$$

Mivel az $f : S_n \to S_n$ függvény folytonos, azért Brouwer tétele szerint $\exists\ \bar{x}$ fixpontja, azaz

$$\bar{x} = \frac{d(\bar{x},F_1)e_1 + \cdots + d(\bar{x},F_n)e_n}{d(\bar{x},F_1) + \cdots + d(\bar{x},F_n)}. \tag{7.9}$$

Ha vesszük az $I := \{i\ :\ d(\bar{x},F_i) > 0\}$ indexhalmazt, akkor egyrészt mivel

$$d(\bar{x},F_i) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x} \notin F_i\,,$$

azért

$$\bar{x} \notin \bigcup_{i\in I} F_i\,,$$

másrészt a (7.9) alatti egyenlőségből

$$\bar{x} \in \mathrm{co}\{e_i\ :\ i \in I\}\,,$$

így

$$\mathrm{co}\{e_i\ :\ i \in I\}\ \not\subset\ \bigcup_{i\in I} F_i\,,$$

tehát nem teljesül a KKM-tulajdonság. □

Az általános KKM-tétel

Ebben az alpontban a KKM-tételnek egy olyan általánosítását írjuk le, amely igen előnyösen alkalmazható. Az alkalmazhatóság felfedezése, és a tételnek egy ehhez megfelelő formában való átfogalmazása, Ky Fan érdeme Fan (1961) [19]. Enélkül a megközelítés nélkül a KKM tételnek nem lenne olyan centrális a szerepe, és alkalmazása jóval korlátozottabb lenne.

7.88 Definíció. (véges metszet tulajdonságú leképezés)
Legyen A egy tetszőleges halmaz. Egy $G : A \to \mathcal{P}(A)$ halmazértékű leképezést **véges metszet tulajdonságúnak** nevezünk, ha $\forall\ \{x_1,\dots,x_s\} \subset A$ véges részhalmazra teljesül, hogy

$$\bigcap_{i=1}^{s} G(x_i) \neq \emptyset\,. \tag{7.10}$$

7.89 Definíció. (végesen zárt halmaz)
Legyen X egy vektortér. Egy $A \subset X$ halmazt **végesen zártnak** nevezzük, ha $L \subset X$ véges dimenziós affin halmaz esetén az $L \cap A \subset L$ metszet zárt, ahol az $L \subset X$ véges dimenziós affin halmazokon természetesen a véges dimenziós terek szokásos T2 topológiáját vesszük.

7.90 Megjegyzés.
Mivel minden véges dimenziós affin halmaz zárt, azért ha valamilyen vektortér-topológia mellett az $A \subset X$ halmaz zárt, akkor az $A \cap L$ metszet is zárt. Így a végesen-zártság fogalma erősebb bármely vektortér-topológiabeli zártságnál.

7.91 Definíció. (halmazértékű leképezés KKM-tulajdonsága)
Legyen X egy vektortér, $A \subset X$ egy nemüres halmaz. Egy $G : A \to \mathcal{P}(A)$ halmazértékű leképezést **KKM-tulajdonságúnak** nevezünk, ha $\forall\ \{x_1, \dots, x_s\} \subset A$ véges részhalmazra teljesül, hogy

$$\mathrm{co}\{x_1, \dots, x_s\} \ \subset\ \bigcup_{i=1}^{s} G(x_i)\,. \tag{7.11}$$

7.92 Állítás. (KKM-tulajdonság affin független pontokra)
Egy $G : A \to \mathcal{P}(A)$ halmazértékű leképezés pontosan akkor KKM-*tulajdonságú, ha $\forall\ \{x_1, \dots, x_s\} \subset A$ affin független véges halmazra teljesül a (7.11) tartalmazás.*

Bizonyítás.
Nyilvánvalóan csak azt kell belátni, hogy ha affin független, véges, A-beli halmazra teljesül a (7.11) tartalmazás, akkor tetszőleges véges halmazra is teljesül. Legyen $\{x_1, \dots, x_s\} \subset A$ tetszőleges véges részhalmaz. A Caratheodory-tétel alapján

$$\mathrm{co}\{x_1, \dots, x_n\} = \bigcup \{\mathrm{co}\{x_i\ :\ i \in I) : I \subset \{1, \dots, n\}\,,\ \{x_i\ :\ i \in I\}\ \text{affin független}\}\,.$$

Ha a a (7.11) tartalmazás affin függetlenekre teljesül, akkor a fenti halmaz része az

$$\bigcup \left\{ \bigcup_{i \in I} G(x_i)\ :\ I \subset \{1, \dots, n\}\,,\ \{x_i\ :\ i \in I\}\ \text{affin független} \right\},$$

uniónak, ami viszont nyilvánvalóan része az $\bigcup_{i=1}^{n} G(x_i)$ uniónak. □

A KKM leképezések alaptulajdonságát fejezi ki az alábbi tétel:

7.93 Állítás. (KKM-leképezési elv)
Legyen X egy vektortér, $A \subset X$ egy nemüres halmaz. Ha $G : A \to \mathcal{P}(A)$ végesen zárt értékű és KKM-*tulajdonságú leképezés, akkor véges metszet tulajdonságú.*

Bizonyítás.
Az állítás a KKM-tétel és a Brouwer-tétel használatával is bebizonyítható.

A KKM-tétel alkalmazásával:
Legyen $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ egy tetszőleges halmaz. Legyen $f : S_n \to \mathrm{co}\{x_1, \dots, x_n\}$ az a függvény, amelyre $\forall\ l = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in S_n$ esetén

$$f(l) := \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n\,.$$

Az f függvény nyilvánvalóan folytonos a $\mathrm{lin}\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ véges dimenziós tér szokásos topológiájára nézve.
Tekintsük a

$$\{F_i = f^{-1}\left(G(x_i)\right)\ :\ i \in \{1, \dots, n\}\}$$

S_n-beli halmazrendszert.
Belátjuk, hogy az $\{F_1, \dots, F_n\} \in \mathcal{P}(S_n)$ halmazrendszer KKM-tulajdonságú.
Mivel az f függvény folytonos és a $G(x_i)$ halmazok L-ben zártak, azért az F_i halmazok zártak.

F_i halmazok teljesítik a (7.8) alatti KKM-tulajdonságot: Mivel a G halmazértékű leképezés KKM-tulajdonságú, azért $\forall\ \{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\} \subset \{x_1, \dots, x_n\}$ részhalmaz esetén

$$\mathrm{co}\,\{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\} \subset G\,(x_{i_1}) \cup \ldots \cup G\,(x_{i_s})\ ,$$

amiből

$$\begin{aligned} f^{-1}\,(\mathrm{co}\,\{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\}) &\subset f^{-1}\,(G\,(x_{i_1}) \cup \ldots \cup G\,(x_{i_s})) \\ &= f^{-1}\,(G\,(x_{i_1})) \cup \ldots \cup f^{-1}\,(G\,(x_{i_s}))\ . \end{aligned}$$

Mivel $f^{-1}\left(x_{i_j}\right) = e_{i_j}$, azért a baloldali halmazban benne vannak az $e_{i_1}, \dots, e_{i_s}$ vektorok, továbbá mivel konvex halmaz inverz képe is konvex, azért benne van az e_{i_j} vektorok konvex burka is, tehát

$$\mathrm{co}\,\{e_{i_1}, \dots, e_{i_s}\} \subset f^{-1}\,(G\,(x_{i_1})) \cup \ldots \cup f^{-1}\,(G\,(x_{i_s})) = F_{i_1} \cup \cdots \cup F_{i_s}\ ,$$

azaz az $\{F_i = f^{-1}\,(G(x_i))\ :\ i \in \{1, \dots, n\}\}$ halmazrendszer KKM-tulajdonságú. Így 7.86. KKM-tétel szerint van közös pontjuk, azaz

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}\,(G(x_i)) = f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} G(x_i)\right) \neq \emptyset\,,$$

ezért

$$\bigcap_{i=1}^{n} G(x_i) \neq \emptyset\,,$$

azaz igaz a véges metszet tulajdonság.

A Brouwer-tétel használatával:
Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists\ \{x_1, \dots, x_s\} \subset A$ véges halmaz, hogy

$$\bigcap_{i=1}^{n} G(x_i) = \emptyset\,. \tag{7.12}$$

Be fogjuk látni, hogy $\exists\ I \subset \{1, \dots, n\}$ indexhalmaz, hogy az $\{x_i\ :\ i \in I\} \subset A$ véges halmazra nem teljesül a (7.11) KKM-tulajdonság.

Tekintsük az $L := \mathrm{aff}\{x_1, \dots, x_n\}$ véges dimenziós affin halmazt, és azt egy euklideszi (affin) térnek tekintjük, a metrikát d-vel jelölve.
Legyen $\gamma : L \to \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $\forall\ x \in L$ esetén

$$\gamma(x) := \sum_{i=1}^{n} d(x, G(x_i) \cap L)\,.$$

Mivel G végesen zárt értékű, azért a $G(x_i) \cap L$ halmazok zártak az L térben, azért $\forall\ x \in L$ esetén

$$x \in G(x_i) \cap L \ \Leftrightarrow\ d(x, G(x_i) \cap L) = 0\,,$$

így az (7.12) feltevés miatt

$$\forall\ x \in L \ \text{ vektorhoz } \ \exists\ x_i \ \text{ vektor, amelyre } \ d(x, G(x_i) \cap L) > 0\,,$$

ezért a $\gamma : L \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és pozitív. Definiáljuk most azt az $f : \mathrm{co}\{x_1, \dots, x_n\} \to \mathrm{co}\{x_1, \dots, x_n\}$ függvényt, amelyre $\forall\ x \in \mathrm{co}\{x_1, \dots, x_n\}$ esetén

$$f(x) := \frac{1}{\gamma(x)} \sum_{i=1}^{n} d(x, G(x_i) \cap L) \cdot x_i\,.$$

Az f függvény nyilván folytonos. Ezért a Brouwer-féke fixponttétel miatt az f függvénynek $\exists\ \bar{x}$ fixpontja.
Belátjuk, hogy az

$$I := \{i\ :\ d(\bar{x}, G(x_i) \cap L) > 0\}\,.$$

indexhalmazhoz tartozó $\{x_i\ :\ i \in I\}$ halmazra nem teljesül a KKM-feltétel.
Mivel $\bar{x}$ az f függvény fixpontja, azért

$$\bar{x} = \frac{1}{\gamma(\bar{x})} \sum_{i=1}^{n} d(\bar{x}, G(x_i) \cap L) \cdot x_i = \frac{1}{\gamma(\bar{x})} \sum_{i \in I} d(\bar{x}, G(x_i) \cap L) \cdot x_i\,,$$

így a jobboldalt nézve, az $\bar{x}$ pont az $\{x_i\ :\ i \in I\}$ halmaz vektorainak konvex kombinációja, ezért

$$\bar{x} \in \mathrm{co}\{x_i\ : i \in I\}\,.$$

Mivel $\forall\ x \in I$ esetén $d(\bar{x}, G(x_i) \cap L) > 0$, azért $\bar{x} \notin G(x_i) \cap L$, így

$$\bar{x} \notin \bigcup_{i=1}^{n} G(x_i)\,,$$

tehát

$$\mathrm{co}\{x_i\ :\ i \in I\} \not\subset \bigcup_{i \in I} G(x_i)\,.$$

□

A KKM-leképzési elvnek azonnali következménye Ky Fan nevezetes, és jól alkalmazható alábbi tétele, lásd Ky Fan (1961) [19]:

7.94 Állítás. (Ky Fan-féle metszettétel)
Legyen X egy topologikus vektortér, $A \subset X$ egy nemüres halmaz. Ha az $F : A \to \mathcal{P}(A)$ leképezés zárt értékű és KKM-*tulajdonságú leképezés, valamint $\exists\ \bar{x} \in A$, amelyre $F(\bar{x})$ kompakt, akkor*

$$\bigcap_{x \in A} F(x) \neq \emptyset\,.$$

Bizonyítás.
Tekintsük azt a $G : A \to \mathcal{P}(A)$ halmazértékű leképezést, amelyre $\forall\ x \in A$ esetén

$$G(x) := F(x) \cap F(\bar{x})\,.$$

A G leképezésre fennálnak a 7.93. KKM-leképezési elv feltételei, ezért véges metszet tulajdonságú, továbbá G kompakt értékű is, ezért a $G(x)$ halmazok metszete nemüres, így nemüres az $F(x)$ halmazok metszete sem. □

Irodalomjegyzék

[1] G.B. Antonelli. *Sulla Teoria Matematica della Economica Politica.* Nella tipografia del Folchetto, Pisa, 1886.

[2] H. Attouch. *Variational Convergence for Functions and Operators.* Pitman, Boston, 1984.

[3] C. Blackorby and W. E. Diewert. *Expenditure functions, local duality, and second order approximations.* Econometrica, 47(3): pages 579–601, 1979.

[4] Frank H. Clarke. *Optimization and Nonsmoth Analysis.* Wiley-Interscience, New York, 1983.

[5] R. Cornes. *Duality and Modern Economics.* Cambridge Univ. Press, New York etc., 1992.

[6] J.-P. Crouzeix. *Duality between direct and indirect utility functions.* J. of Math. Economics, 12: pages 149–165, 1983.

[7] J.-P. Crouzeix. *Some properties of dini-derivatives of quasiconvex and pseudoconvex functions*, August 1996.

[8] J.-P Crouzeix and P.O. Lindberg. *Additively decomposed quasiconvex function*, 1985.

[9] I. Dancs. *Halmazértékű leképezések analízise.* Kézirat, 1980.

[10] I. Dancs. *Konvexitás algebrai alapjai és alkalmazásai.* Kézirat, 1981.

[11] I. Dancs. *Konvex analízis.* Kézirat, 1983.

[12] I. Dancs. *Bevezetés a matematikai analízisbe.* Aula Kiadó, Budapest, 1992.

[13] A. Deaton and J. Muellbauer. *Economics and Consumer Behavior.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980.

[14] W. E. Diewert. *Applications of Duality Between Direct and Indirect Utility Functions*, volume 2 of *Frontiers of Quantitaive Economics*, Chapter 2, pages 106–171. North-Holland, Amsterdam, 1974.

[15] W. E. Diewert. *Duality Approaches to Microeconomic Theory*, volume 2 of *Handbook in Mathematical Economics*, Chapter 12, pages 535–599. North-Holland, Amsterdam, 1982.

[16] W. E. Diewert. *Applications of Generalized Concavity to Economics*, Chapter 4, pages 101–149. Generalized Concavity. Plenum Press, New York, London, 1988.

[17] A. S. Edlin. *Strict monotonicity in comparative statics.* J. of Economic Theory, 81: pages 201–219, 1998.

[18] A.S. Edlin and C. Shannon. *Strict single crossing and the strict Spence-Mirrlees condition: A comment on monotone comparative statics.* Econometrica, 66(6): pages 1417–1425, 1998.

[19] K. Fan. *A generalization of Tychonoff's fixed point theorem.* Mathematische Annalen, 142: pages 305–310, 1961.

[20] S. D. Flam. *On variational stability in competitive economies.* Set-Valued Analysis, (2): pages 159–173, 1994.

[21] W. Hildenbrand. *Core and Equilibria of a Large Economy.* Princeton Univ. Press, Princeton, 1974.

[22] W. Hildenbrand. *On the "law of demand".* Econometrica, 51(4): pages 997–1019, 1983.

[23] W. Hildenbrand. *Market Demand: Theory and Empirical Evidence.* Princeton Univ. Press, Princeton, 1994.

[24] W. W. Hogan. *Point-to-set maps in mathematical programming.* SIAM Review, 15(3): pages 591–603, July 1973.

[25] A. Ioffe and V. Tichomirov. *Theory of Extremal Problems.* North Holland, Amsterdam, New York, 1979.

[26] R. John. *Quasimonotone individual demand.* Optimization, 47: pages 201-209, 2000.

[27] Z. Kánnai and I. Szabó. *Generalized convexity.* Proc. Of Sixth Conference of Program Designers, Eötvös Loránd University, Budapest, 1990.

[28] Z. Kánnai and I. Szabó. *Viability theorems in Banach spaces.* Pure Mathematics and Applications, 1: pages 25–38, 1990.

[29] D.W. Katzner. *Static Demand Theory.* The Macmillan Company, 1970.

[30] R. Luchetti and F. Patrone. *Closer and upper semicontinuity results in mathematical programing, nash and economic equilibria.* Optimization, 17(5): pages 619–628, 1986.

[31] J.E. Martinez-Legaz. *Convexity of indirect utility functions*, preprint, email address: juanenrique.martinez@uabes.

[32] M.D. Mas-Colell, A. Whinston and Green J.R. *Microeconomic Theory.* Oxfford Univ. Press, New-York, Oxford, 1995.

[33] E. Michael. Topologies on spaces of subsets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, pages 152–182, 1951.

[34] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis.* Princeton Univ. Press, 1970.

[35] P. Samuelson. *Foundations of Economics Analysis.* Harvard University Press, Cambridge, MA, 1947.

[36] I. Szabó. *A Clarke-féle derivált.* Egyetemi doktori értekezés. 1986.

[37] I. Szabó. *The selection problem.* Proc. Of Fifth Conference of Program Designers, Eötvös Loránd University, Budapest, 1989.

[38] I. Szabó. *A Clarke-féle derivált.* Alkalmazott Matematikai Lapok, pages 91–113, 1990.

[39] I. Szabó. *Szélsőértékfeladatok a mikroökonómiában.* Szigma 30(1-2): pages 11–25, 1999.

[40] I. Szabó. *The convexity of the direct and indirect utility function.* Central European Journal of Operation Research, megjelenés alatt.

[41] L. Vietoris. *Bereiche zweiter Ordnung.* Monatschefte fuf Mathematik und Physik, 33: pages 49–62, 1923.

[42] R. J-B. Wets. *A Formula for the Level Sets of Epi-Limits and some Applications*, Mathematical Theories of Optimization. Springer, Berlin, pages 256–268, 1983.

[43] E. Zalai. *Bevezetés a matematikai közgazdaságtanba.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1989.

[44] E. Zalai. *Matematikai közgazdaságtan.* KJK-KERSZÖV Jogi és Üzleti Kiadó Kft., Budapest, 2000.