Zsembery Levente

VOLATILITÁS KOCKÁZAT ÉS VOLATILITÁS KERESKEDÉS

PÉNZÜGYI INTÉZET BEFEKTETÉSEK TANSZÉK

TÉMAVEZETŐ: DR. SZÁZ JÁNOS

BUDAPESTI KÖZGAZDASÁGTUDOMÁNYI ÉS
ÁLLAMIGAZGATÁSI EGYETEM

KÖZGAZDASÁGTANI Ph.D PROGRAM

VOLATILITÁS KOCKÁZAT ÉS VOLATILITÁS KERESKEDÉS

PhD Értekezés

Zsembery Levente

Budapest, 2004.

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke

Táblázatok jegyzéke:

Témavezetőm, Sulyok-Pap Márta emlékének

A volatilitás kockázta – még ha ezt sokan nem is észlelték – az opciókkal egyidős. A pénzügyi piacok fejlődésével egyre újabb és újabb opciós jogok, opciós jogokat tartalmazó értékpapírok illetve befektetési formák jelentek meg. Ezek terjedésével a volatilitás kockázatának kitett intézményi és magánbefektetők száma is gyorsan nőtt.
A piac fejlődésével a tudomány is lépést tartott. Hamar megjelentek azok a kritikák, amelyek a Black – Scholes modell időben állandó volatilitását elemezték. A hetvenes évek végén és főleg a nyolcvanas évek során egyre újabb modellek jelentek meg arról, hogyan lehet a Black – Scholes képletet a változó volatilitás feltételéhez hozzáigazítani.

1. A dolgozat szerkezete

Ezeket a modelleket a dolgozat **első fejezet**ében veszem sorra. Így megvizsgálom, hogyan hatnak az eredeti Black – Scholes környezet egyes feltevései a valóságban, illetve milyen hatásai vannak az egyes volatilitásra vonatkozó feltevéseknek az opció értékére. Ebben a fejezetben folytonos modellekkel foglalkozom. Az egyetlen kivételt a Crouhy – Galai cikke jelenti. Ők véges számú kereskedési időpontot vizsgálva keresték a választ arra a kérdésre, hogy időben determinisztikusan változó volatilitás mellett a Black – Scholes modell milyen árazási hibákhoz vezet.
A vizsgált modellek között voltak *szemi-sztochasztikusak*, mikor a részvényárfolyamot és a volatilitást ugyanazon kockázati tényező befolyásolja. Ilyenek Cox és Ross, Geske, valamint Hobson és Rogers modelljei. Ugyanebben a fejezetben olyan modellekkel is foglalkoztam, amelyekben a volatilitás a részvényárfolyamhoz hasonlóan egy önálló folyamat szerint alakul. Ilyen *sztochasztikus* volatilitás modellek Hull és White, Scott, Wiggins, Johnson és Shanno, valamint Naik modelljei.
Azáltal, hogy az utóbbi modellekben a szerzők a volatilitás véletlenszerű változását tételezték fel, egy újabb fedezendő kockázati tényező került be a képbe. Hogy a kockázatot – legalább elméleti módon – ki tudják küszöbölni, valamilyen feltevéssel kellett éljenek. Az egyik megoldás az volt, hogy feltették, hogy a volatilitás kereskedett termék. (Johnson és Shanno [1987]) Ez azonban ellentmondott a gyakorlatnak. Ezért mások úgy oldották meg a problémát, hogy feltették, hogy a volatilitás kockázata diverzifikálható (Hull és White [1987], Scott [1987], Wiggins [1987]).

Ráadásul a volatilitás jövőbeli alakulását előre jelezni szinte lehetetlen. Ezért egyre többen folyamodtak ahhoz a megoldáshoz, hogy piacon jegyzett opciók árából számolták vissza az annak árában benne foglalt, ún. implicit volatilitást, ezt használva föl más, éppen kibocsátandó opciók értékének meghatározásához.

A kilencvenes években ennél bonyolultabb megoldások kezdtek kialakulni. A szereplőket már nem csupán az érdekelte, hogy adott futamidejű opciók árában mekkora volatilitás érték rejlik, de azt is megvizsgálták, milyen jövőbeli áralakulás lehetett a piac fejében az opciók árának meghatározásakor. Ezeket a modelleket a dolgozat **második fejezete** tartalmazza. Ezek a visszaszámított modellek diszkrét idejűek. Vannak közöttük a *binomiális* – Derman – Kani, Rubinstein –, és vannak a *trinomiális fák* – Derman – Kani – Chriss, Dupire – *módszerére*, és vannak a *véges differenciákra* – Rebonato – *épülő modellek*. Egyes modellek, megfelelően sok opció piaci árát felhasználva arra is alkalmassá váltak, hogy a piac fejében lévő jövőbeli volatilitás alakulásról, az ún. helyi volatilitás felületről is információt nyerhessünk belőlük.

A nyolcvanas évek közepétől az ökonometriai idősor elemzés is harcba szállt a volatilitás előrejelzésére, megalkotva az *ARCH és a GARCH* modelleket, illetve a későbbiekben ezek számos új, a valóságot még pontosabban leíró fajtáját. Ezekkel *a modellekkel dolgozatomban nem foglalkoztam*. Ennek több oka is van. *Egyrészről ezek elemzése kívül esett dolgozatom célkitűzésein*, illetve nehezen illett az általam vizsgált gondolati keretbe. *Másrészről a dolgozat témája,* illetve az önálló kutatás területe *a volatilitás kereskedés, ezen a területen pedig az ARCH-GARCH modellek felhasználásával* – néhány úttörő jellegű munkát leszámítva – *eddig nem nagyon kísérleteztek*. (ld. Heston – Nandi [2000])[1]

A nyolcvanas évek végétől a piacok egyre volatilisebbé váltak. Ez a folyamat a kilencvenes években is folytatódott, így az ebből származó veszteségek gyakorisága is egyre nőtt. A veszteségekkel párhuzamosan pedig egyre gyakrabban jelentkezett az igény a volatilitásnak való kitettség csökkentésére. Ugyanakkor a másik oldalról, a spekulánsok oldaláról is egyre markánsabban jelentkezett az igény arra, hogy annak változására spekulálhassanak, azaz a volatilitással kereskedhessenek. Így jelentek meg az árfolyamok mozgásának irányára spekulálók (az ún. „irány kereskedők" – direction

[1] Dolgozatomban csak egyetlen alkalommal hivatkozom arra, hogy egy általam is vizsgált folyamat tulajdonképpen az EGARCH modell folytonos verziójának tekinthető. Az annak megértéséhez szükséges elméletet ott szeretném röviden ismertetni. A fenti modellek jó és részletes áttekintését adja Varga [2001]

traders) mellett a volatilitás kereskedők is. A kereslet pedig megteremti a maga kínálatát.

A hagyományosnak tekinthető eszközök – összetett opciós pozíciók, opciók delta fedezése – már a hetvenes években rendelkezésre álltak. Ezekkel azonban nem tud mindenki kereskedni. Ezek a termékek ugyanis hozzáértést és a pozíció folyamatos „karbantartását" igénylik. Ennek megfelelően, bár a banki treasury-k számára megfelelőek lehetnek, széles körben azonban nem tudtak elterjedni.

A dolgozat **harmadik fejezet**ében azokat az elméleti és gyakorlati megoldásokat veszem sorra, amelyek célja valamilyen jól árazható és széles körben forgalmazható volatilitás termék kifejlesztése. Mivel a volatilitás „nem létezik", azonnali piacot szervezni rá szinte lehetetlen. Ennek megfelelően a kísérletek is jellemzően a volatilitásra szóló derivatív ügyletekre vonatkoztak. Ebben egyrészt a bankok treasury osztályai, másrészt a mindig újabb és újabb forgalmazható termékek után kutató tőzsdék vettek részt. Úgy tűnik, hogy a termékek egyedi jellege miatt ma a bankok aktívabbak ezeken a piacokon.

A gond –akárcsak a hagyományos termékeknél – ezeknél a derivatívoknál is az volt, hogyan tudja a bevállalt kockázatot a bank megszűntetni, lefedezni. A gondot az okozta, hogy maga a volatilitás nem kereskedett termék. A kezdeményezést a tőzsdék vették át, akik a kilencvenes évek közepétől egymás után vezették be a likvidebb opciók implicit volatilitásaiból összeállított ún. volatilitás indexeket. A cél az volt, hogy ezek szolgálhassanak a derivatívok alaptermékéül. Sajnos ezen indexek értékét szintén csak jegyezték, nem kereskedtek velük, így a valódi arbitrázs a derivatívok árazásakor nem állhatott fönn.

A bemutatott modellek között vannak alapvetően elméleti modellek, és vannak olyanok, amelyek célja a gyakorlati alkalmazhatóság volt. Bemutatom Carr és Madan cikkének alapján, hogyan lehet összetett opciós pozícióval illetve opciók delta fedezésével a volatilitást előállítani. Elemzem Neuberger logaritmikus termékét (log contract), Derman, Kani és Kamal helyi volatilitás felületen alapuló kereskedési modelljét. A volatilitásra szóló derivatív ügyletek elemzésénél Demeterfi – Derman – Kamal – Zou, Whaley, Grünbichler és Longstaff, Detemple és Osakwe, valamint Brenner, Ou és Zhang megoldásait mutattam be részletesebben. Ezek a modellek volatilitásra, mint alaptermékre szóló határidős (és swap), valamint opciós ügyletek árazását mutatják be különböző részvényárfolyam és volatilitás folyamatok mellett.

A bankok különösen aktívnak bizonyultak a volatilitásra szóló termékek forgalmazásában. Az így bevállalt kockázatot pedig a volatilitás szintetikus előállításával igyekeztek lefedezni. Ez azonban – ahogyan az a bemutatott modellekben is jól látszik – nem megy tökéletesen. Abban az esetben, ha a piacon hirtelen nagy változások következnek be, a befektetési bankok nagy veszteségekkel nézhetnek szembe amiatt, hogy saját kockázatukat nem képesek hatékonyan lefedezni.

Egy jó pénzügyi terméknek ugyanis nemcsak a piac számára vonzónak, de egyúttal szintetikusan előállíthatónak is kell lennie. Ezt az ellentmondást igyekszik feloldani Brenner és szerzőtársai cikke. Ők ugyanis volatilitásra szóló opciók helyett egy összetett opciós pozícióra, terpeszre szóló opciókat ajánlanak a befektetési bankoknak. Mivel a terpesz értéke a volatilitás függvénye, a termék lényegét tekintve nem módosul. Viszont a piacon kereskedett elsődleges opciókkal ez a másodlagos opció lényegében nagyobb gond nélkül fedezhetővé válik.

A dolgozat **negyedik, önálló részében** ennek a terméknek az elemzését végeztem el. Egyrészt diszkrét idejű binomiális modellben – ahol mindig van fedezeti stratégia – megvizsgáltam, milyen buktatói lehetnek determinisztikus volatilitás mellett az általuk bemutatott terméknek. Ez összhangban van Brenner és szerzőtársai cikkének első részével, ahol a szerzők determinisztikus volatilitás alakulás mellett határozzák meg az opciók árait. A fejezet második részében különféle részvényárfolyam és volatilitás folyamatok mellett vizsgáltam a termék áralakulását, összevetve egyrészt Brenner és társai eredményeivel, másrészt megvizsgáltam, ez a termék mennyiben tér el Detemple és Osakwe volatilitásra szóló opciójának jellemzőitől.

A későbbi félreértések elkerülése végett már itt, a dolgozat elején szeretném kihangsúlyozni, hogy ***dolgozatomban a volatilitást végig szórás*** – és nem variancia – ***értelemben használom***. Ennek kihangsúlyozása azért szükséges, mert a szakirodalom korántsem egységes ebben a kérdésben, a definíciók gyakran keverednek. A téma szempontjából ez annyiban mellékesnek lehetne tekinteni, hogy ha egy pozíció pozitív módon függ a volatilitástól, akkor a varianciától is, és fordítva. Mint arról a harmadik fejezetben szó lesz, vannak olyan termékek, ahol a volatilitás kereskedés a varianciával való kereskedést jelenti. Ha ilyen kerül elő, jelezni fogom, hogy az ott használt elnevezés a korábbiaktól eltér.

2. A volatilitás termékek lehetséges vásárlói

Vizsgáljuk meg a továbbiakban, hogy kik lehetnek a bankok ügyfelei ezen termékek kereskedése során. Más szóval vegyük sorra, hogy *melyek azok az intézmények illetve piaci szereplők, amelyek nap mint nap volatilitás kockázatnak vannak kitéve*, illetve a volatilitás, vagy egy arra szóló termék vásárlói lehetnek.

Ahogyan az eddig már kiderült, a volatilitás kereskedésben is több céllal lehet részt venni. Az egyik tipikus szereplő a **spekuláns**. De a spekulánsokon belül is több fajta spekuláns létezik. Vannak olyanok, akik a *volatilitás abszolút mértékére* spekulálnak. Az ilyen szereplők tipikusan a volatilitás átlaghoz visszahúzó (mean reverting) jellegéből indulnak ki. Ha az aktuális opciós árakban benne foglalt volatilitás alacsonyabb, mint a korábbi időszakok átlaga, igyekeznek megvenni azt, ha magasabb, rövid pozíciót létesítenek. Vannak azonban az *egyes lejáratok*, illetve az *egyes termékek implicit volatilitásainak különbségére* spekuláló befektetők is.[2] A spekulánsok már a volatilitásra szóló strukturált termékek kialakulása előtt is a piac aktív szereplői voltak. Vagy opciók delta fedezésével, vagy összetett opciós pozíciókkal (alapvetően terpesszel) alakítottak/alakítanak ki olyan pozíciókat, amelyekből a volatilitás emelkedése illetve csökkenése esetén profitálhatnak. Az újabb termékek megjelenése az ő lehetőségeiket is javította.

Sokan azonban nem spekulálni akarnak a volatilitásra, hanem kivédeni annak portfóliójuk értékére gyakorolt negatív hatásait. Ők **fedezeti ügyleteket** kötnek a volatilitásra szóló termékek felhasználásával. Az ő számukra jelentettek igazi előrelépést a tőzsdéken megjelenő, illetve a bankok által kínált volatilitás termékek.[3]

A volatilitás változásának kitettek egyik legjellemzőbb csoportját természetesen azok a bankok illetve egyéb pénzpiaci szereplők képezik, *akik opciókat írtak ki*. Hiába fedezik ugyanis folyamatosan rövid opciós pozíciójukat, a volatilitás változása ellen nincsenek védve. Ráadásul amennyiben a Black – Scholes képlet alapján árazták opciójukat, ezt a kockázatot be sem árazták, hiszen a modell szerint a volatilitás időben állandó, míg a valóságban ez korántsem sincs így.

A rövid opciós pozícióban lévők aránya az utóbbi időben jelentősen növekedett. Nem csupán azokról van szó, akik klasszikus vanilla opciókkal kereskednek. *Egyre több*

---

[2] Poon – Pope [1999] az S&P 100 és S&P 500 indexekre szóló opciók implicit volatilitásainak eltérésében rejlő lehetőségeket vizsgálták, ezek eltéréseire kereskedtek.

termékhez kapcsolódik opciós jog, egyre több alap ad *hozamgaranciát* a befektetőknek. Az elmúlt évben Magyarországon is megjelentek a bull CD-nek is nevezhető garantált hozamot adó befektetési alapok.[4] Ezekben a befektetők a garantált – alacsonyabb – éves hozam mellett egy meghatározott portfólió hozamából is részesedést kapnak. Ezzel a kibocsátó bank lényegében egy short call pozíciót vállal. Ezt az adott alaptermékre szóló opció vételével tudja fedezni. A gondot az jelentheti – mint például a K&H termékének esetében – ha a referenciaportfólió nem kereskedett, hanem több alap összessége. Ekkor a kockázat egyszerű továbbadása nem lehetséges.

Amennyiben egy alap önmagában ad hozamgaranciát – egy referencialapból való részesedés nélkül – lényegében egy put opciót biztosít a befektetőnek, szintén volatilitás kockázatot vállalva be ezáltal. Nem nehéz megjósolni, hogy a jövőben a nyugati gyakorlatnak megfelelően hazánkban is növekedni fog a garanciával „megtámogatott" alapok száma. Mivel azonban a hazai tőzsdei opciós piac egyelőre nem teszi lehetővé a kockázat egyszerű továbbhárítását, itt a magyar bankok treasury-je számára kínálkozik újabb lehetőség a volatilitás kockázat fedezésére.

A volatilitás kockázat azonban nemcsak olyan cégek számára jelent kockázatot, akik valamilyen – akár csak rejtett – opciós pozícióval rendelkeznek. Gyakran fordul elő, hogy egy alapkezelő számára a célkitűzés valamilyen nem állandó összetételű *benchmark portfólió lemásolása* (Demeterfi – Derman – Kamal – Zou [1999]). Ebben az esetben a *volatilitás növekedésével* az általa végrehajtandó *tranzakciók száma is növekszik*, hiszen az árak gyors változása a súlyok módosulásával jár együtt.[5] Ilyen lehet például, ha valaki elé egy több indexből álló portfólió másolását tűzik ki célul úgy, hogy azok egymáshoz viszonyított aránya a portfólión belül állandó legyen.

A tranzakciók számának növekedése az *alap költségeit is növelni fogja*. Ennek a költségnek jelentős része a volatilitás számlájára írható. Amennyiben egy ilyen alapkezelő valamilyen termék keretében megveszi az adott piac vagy piacok volatilitását, a kockázatot mérsékelni tudja. A fedezet természetesen nem lesz tökéletes, de a veszteségek csökkentésére alkalmas lesz.

További gondok forrása lehet, hogy nagy volatilitás esetén a költségek növekedése mellett a „találati arány" is romlik. Azaz hiába kereskedik valaki gyakrabban, a gyors

---

[3] Tőzsdei volatilitásra szóló termék volt például a Deutsche Terminbörse által a VDAX volatilitás indexre szóló határidős ügylet.

[4] Ilyenek a K&H Bank Fix plusz befektetési konstrukciói (2002 vége és 2003 eleje), illetve legutóbb (2003 március) a Citi Bank jelent meg hasonló termékkel a piacon.

árváltozás miatt egyre *kevésbé lesz képes* pontosan *lekövetni a* célul kitűzött *referencia portfólió mozgását*. Ez a veszteség is csökkenthető volatilitásra szóló ügyletek felhasználásával.

De felhasználható lehet egy ilyen termék a *diverzifikáció erősítésére* is. Ahogyan arról a már a CAPM modellben is szó volt, egyre újabb és újabb papírokat a portfólióba választva a diverzifikáció a portfólió kockázatát csökkenti. A globalizáció és az egész világon üzletelő befektetési alapok megjelenésével azonban a diverzifikáció lehetősége csökkent. Egyre gyakrabban fordul elő, hogy az egyik piacon bekövetkező esés a másik piacot is magával rántja, hiszen a befektetési alapok gyakran több piacról egyszerre vonulnak ki, illetve az egyik piac problémái a másikra is jelentős hatást gyakorolnak.

Ugyanakkor azt is megfigyelték, hogy az *árak esése a volatilitás növekedésével jár együtt* és fordítva. Ezáltal a volatilitásra szóló termékek lehetnek azok, amelyek segíteni fogják a diverzifikációt. Nagyobb esések esetén ugyanis egy long volatilitás pozíció az áralakulás veszteségét képes lehet korrigálni.

Egy további érdekes felhasználási területet említ Demeterfi, Derman, Kamal és Zou (Demeterfi – Derman – Kamal – Zou [1999]). Szerintük *a vállalatok fúziójával foglalkozó ún. kockázati arbitrazsőrök* (risk arbitrageur) *illetve fedezeti alapok* (hedge funds) is a felhasználók között lehetnek. Ezek a befektetők ügyletei azon alapulnak, hogy a fúziót tervező cégek részvényeinek értéke közeledni fog egymáshoz, illetve egy meghatározott átváltási arányhoz.[6] Amennyiben a volatilitás hirtelen nagyon megnő, a konvergencia megakad, jelentős veszteségeket okozva a befektetőknek. Mivel ez a kockázat szintén a volatilitás változásából ered, volatilitásra szóló termékkel fedezhetővé válik.

A volatilitásnak való kitettség azonban nemcsak a részvénypiacon érhető tetten. A *hozamgörbe* különböző pontjainak *volatilitása a kötvénybefektetések értékére van erős hatással*. A hozamok gyors változása különösen ott lehet zavaró, *ahol a kötvényhez visszahívási vagy visszaváltási jog kapcsolódik*. Ebben az esetben megint arról van szó, hogy a kötvény eladója illetve vásárlója egy olyan opciós jogot biztosít a másik számára, amelynek értéke a volatilitás függvénye.

Ilyenkor teljesen mértékben kiszámíthatatlanná válik, hogy egy adott papír meddig szerepel a befektető portfóliójában. Különösen zavaró lehet ez olyan esetekben, amikor

[5] Ez a kockázat – szerencsére – a tőzsdeindexeket másoló alapok esetében nem merül fel, hiszen az indexek kialakításánál eleve ügyelnek arra, hogy azok másolhatóak legyenek.
[6] Ilyen ügyleteket folytatott többek között az LTCM is. Részletesen lásd Dunbar [2000]

a kötvény teljes kifizetése „elúszhat” a hozamok gyors változásával. Ilyen például az *amerikai jelzálogkötvények* piaca, amelyeket a hitelfelvevők névértéken bármikor előtörleszthetnek. Hogy az előtörlesztés kockázatát csökkentsék, a jövőbeli pénzáramlásokat különféle csoportokra bontották, megosztva így a befektetők között a visszahívás kockázatát. Az egyik ilyen termékcsoport esetében az egyik befektető csak a kamatokat (IO – interest only), míg a másik csak a törlesztést (PO – principle only) kapja. *Az IO-t vásárló befektető* különösen rossz helyzetben van. A hozamok esésével *befektetésének teljes értékét elveszítheti*.

Szintén egyfajta opciót biztosít a BÉT *határidős államkötvény kontraktusa* is. Ennek alapja ugyanis egy fiktív, a valóságban nem létező kötvény, leszállításkor pedig *az eladó választja ki, hogy melyik kötvény szállítja le*. Ez lesz a legolcsóbban szállítható kötvény (cheapest to delivery) az ún. LSZK (CTD).[7]

Amennyiben a hozamgörbe volatilitása nagy, a legolcsóbban leszállítható kötvény gyorsan változhat, *gyakori kötvénycserére késztetve* ezzel a határidős *arbitrázsügyletekben érintett befektetőket*. Ez egyrészt a *tranzakciós költségeket növeli*, másrészt, ha az adott kötvényből éppen kevesebb van a piacon, vagy a hirtelen túlzott kereslet miatt túlzottan megnő az áruk, *rontja az arbitrázsügyletek hatékonyságát*. Ezek a pontatlanságok mind a befektetők veszteségeiként jelentkeznek. Ugyanakkor egy long volatilitás pozíción nyereségük képződne, csökkentve az alappozíció veszteségeit.

A piac tehát meglehetősen nagy, és mint arról szó volt, egyedi igényekkel rendelkezik. Ennek megfelelően a bankok előnyösebb helyzetben vannak a szabványosított termékeket forgalmazó tőzsdéknél. A tőzsdei kezdeményezések egyelőre nem vezettek sikerre. Bár volatilitás indexeket több tőzsde jegyez, tartósan egyelőre egyetlen termék sem maradt meg a szabványosított piacon.

Volatilitásra szóló tőzsdei termék is csupán egy volt, a frankfurti tőzsde részvényindexére, a DAX-ra szóló opciók implicit volatilitásából számolt VDAX indexre szóló határidős ügylet. Azonban idővel ennek a terméknek a kereskedése megszűnt. Jelenleg a CBOE próbálkozik volatilitásra szóló termékek bevezetésével. Az eredeti tervek szerint a 2003 szeptemberében megkapott engedélyek alapján 2003 negyedik negyedévében egyidejűleg kezdtek volna volatilitásra szóló határidős és

[7] A példa akár az amerikai jelzálogkötvényekhez is köthető lenne, hiszen azokra szintén egy ilyen fiktív kötvény kontraktus szól.

opciós ügyletekkel kereskedni.[8] Az ősz folyamán azonban az időpontot 2004 januárjára módosították. A fogadtatása alapján úgy tűnik, ezúttal egy sikeres volatilitás termék megjelenésére lehet számítani.

A tőzsdén kívüli kereskedelemben elsősorban volatilitásra szóló swap ügyleteket (gyakorlatilag határidős ügyletekről van szó) forgalmaznak, de vannak volatilitásra szóló opciók is (Demeterfi – Derman – Kamal – Zou [1999]). A volatilitásra szóló swap ügyletek gyakran nem közvetlenül a volatilitásra, hanem annak négyzetére, a varianciára szólnak, a termék kifizetése a realizált variancia és az ügylet megkötésekor érvényes variancia függvénye.

A volatilitás kereskedés Magyarországon is megindult. Mivel jelenleg csak a devizaopciók piaca tekinthető elegendően likvidnek, ezen a piacon jegyeznek árat volatilitásra. A kereskedés gyakorlatilag az opciók vásárlásában és delta fedezésében, illetve összetett opciós pozíciók létesítésében merül ki, strukturált termékek egyelőre nem alakultak ki (Asztalos –Golobokov – Kurali – Wolf [2003]).

3. A dolgozat önálló eredményei

Úgy tűnik tehát, hogy a volatilitásra szóló termékek piaca alapvetően a bankok felségterülete marad. Számukra viszont egy, a partnerek számára vonzó termék értékesítésén túl az ezáltal bevállalt kockázat kezelése sem mellékes. Emiatt úgy tűnik, hogy a Brenner és szerzőtársai által ajánlott terpeszre szóló opció a bankok számára is megnyugtató megoldást jelenthet.

Ezért *a dolgozat önálló részében ennek az új terméknek az elemzésével foglalkoztam*. Elemzésemet *mind diszkrét idejű binomiális modellben, mind* pedig *folytonos idejű modellek felhasználásával* elvégeztem. A fő kérdés az volt, hogy egyrészről vajon ez a termék valóban ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkezik-e, mint egy volatilitásra szóló opció, másrészről milyen kockázatokat rejthet magában a kiíró bank számára ez a termék.

A *binomiális modell* (CRR) esetében egyetlen véletlenszerűen változó tényező van, a részvényárfolyam. Ekkor a volatilitás szükségszerűen determinisztikusan alakul. Ezt a modellt két ok miatt vizsgáltam. Egyrészt ilyen környezetben biztosan van fedezeti

[8] Egész pontosan az alaptermék a VIX index, azaz az S&P 500-ra szóló opciók implicit volatilitásainak súlyozásával számított index. A volatilitás indexekről, illetve azok számításáról a harmadik fejezetben lesz szó részletesen.

stratégia, aminek az alakulását vizsgáltam, másrészről összhangban Brenner és szerzőtársai cikkének első részével, determinisztikus volatilitás alakulás mellett kerestem ennek a másodlagos opciónak az értékét.

Folytonos esetben két modellt használtam fel. Az egyik az első fejezetben is bemutatásra kerülő *Hull – White modell*. Ez a modell a szakirodalomban mindenkor egyfajta „etalonnak” számított, sokan mérték eredményeiket ehhez a modellhez. Másrészt ebben az esetben a két folyamat – a részvényárfolyam és a volatilitás – korreláltsága is jól vizsgálható. A másik vizsgált modell a harmadik fejezetben bemutatásra kerülő *Detemple – Osakwe* által felhasznált logaritmikus mean – reverting *modell*. Ez egyrészt – a szerzők által megmutatottan – a részvénypiaci volatilitás jó leírását adja[9], másrészt a szerzők ezen folyamatok mellett volatilitásra szóló opciót áraztak. Így eredményeim az övéikkel is összevethetővé válnak.

(A továbbiakban a Hull – White modellt HW, a Detemple – Osakwe modellt DO rövidítéssel jelölöm. Folyamatok alatt mindig a részvényárfolyam és a volatilitás által követett folyamatot értem.)

A folytonos esetben az eredményeket Monte – Carlo szimulációval kaptam. *A programok elkészítésében és a szimulációval kapcsolatos kérdések megoldásában Benedek Gábor volt segítségemre.*

3.1.Determinisztikus eset

Az eredmények vizsgálatához egy egyszerű kétperiódusos modellt használtam. Az alaptermékül szolgáló – a terpeszt alkotó – opciók a második periódusban élnek, a terpeszre szóló másodlagos opció az első periódusban. Az első időszak részvényalakulását befolyásoló volatilitást σ_1, a másodikét σ_2 jelöli. Hipotéziseim a következőek voltak:

1. *Determinisztikus volatilitás alakulás esetében az árazás során az átlagvolatilitás felhasználása árazási hibához vezet.*

   <u>Alhipotézis:</u> *A két volatilitás érték felcserélése esetén az opció értéke nem lesz ugyanaz.*

2. *Az árazási hiba nem független a terpeszre szóló opció kötési árfolyamától.*

---

[9] A szerzők megjegyzik, hogy tulajdonképpen az EGARCH modell folytonos kiterjesztéséről van szó.

3. *A delta, azaz a fedezeti arány meghatározása során is hibát követünk el, ha minden periódusban az érvényes volatilitás felhasználása helyett a periódusok átlagos volatilitását használjuk fel.*

    Alhipotézis: A két periódus volatilitásának felcserélésével kapott fedezeti arány szintén nem ad azonos értéket az eredetivel.

Miközben az *első hipotézis* teljesült, az *alhipotézis* nem bizonyult igaznak. Ez azt jelenti, hogy az átlagvolatilitás felhasználása esetén az opciót félreárazzuk, ráadásul szisztematikusan túlárazzuk azt. A két periódus volatilitás értékének felcserélése ATM másodlagos opció esetén nem változtat a terpeszre szóló opció értékén. Ettől eltérő kötési árfolyam esetén azonban a két volatilitás felcserélése nem vezet azonos eredményre. A *második hipotézis* szintén igaznak bizonyult. Azt az egyszerű szabályt fogalmazhatjuk meg, hogy a terpeszre szóló call (CoST) értéke OTM esetben a σ_1, ITM esetben a σ_2 értékétől függ erősebben. Azaz a kötési árfolyam változtatásával a két periódus volatilitására való érzékenységünk is módosul. Ez utóbbi összefüggést rövid levezetéssel is igazoltam. A *harmadik hipotézis* esetében mind a fő-, mind az alhipotézis igaznak bizonyult.

3.2.Folytonos eset

A folytonos modellben a terpeszre szóló call opciók mellett az eladási opciókat (PoST) is vizsgáltam. Ezt a terméket korábban Brenner és társai nem vizsgálták. A következő hipotézisek egy része ennek megfelelően a put opciókra fog vonatkozni.

A folytonos esetben tehát két modellt használtam fel. Hull és White modelljében a volatilitás a részvényárfolyamhoz hasonló folyamatot követ, a két folyamat esetenként korrelált egymással. A Detemple – Osakwe modellben a részvényárfolyam „hagyományos” Brown – mozgást követ, míg a volatilitás logaritmusa egy átlaghoz visszahúzó folyamatot.

A vizsgált hipotézisek a következők voltak:

1. *Az induló volatilitás értéke a másodlagos call opciók értékét növeli, a másodlagos putokét csökkenti.*

    Alhipotézis: A másodlagos opció értéke a kezdő volatilitásnak a HW modell mellett konvex, a DO modell esetén konkáv függvénye.

2. *A másodlagos opciók értékét a kötési árfolyam a vanilla opciókéhoz hasonlóan befolyásolja függetlenül a vizsgált folyamat jellegétől.*
3. *A volatilitásnak, mint alapterméknek a volatilitása mind a terpeszre szóló call, mind a terpeszre szóló put értékét növeli.*
4. *A terpeszre szóló opciók értéke erősen függ a két folyamat (részvényárfolyam és volatilitás) közötti korrelációtól, illetve annak erősségétől.*

    1. Alhipotézis: *A HW modell esetén minél közelebb van a két folyamat közötti korrelációs együttható a mínusz egyhez, annál kisebb a terpeszre szóló call, és annál nagyobb a terpeszre szóló put opciók értéke.*

    2. Alhipotézis: *A DO modell esetén a korreláció hatása a HW modellnél tapasztaltakhoz hasonló, de a volatilitás mean reverting jellege miatt a másodlagos opciók árára gyakorolt hatása gyengébb, mint a másik modellnél volt.*
5. *A két folyamat közötti korreláció és a volatilitás volatilitásának hatása összefügg, a két tényező egyidejű növekedése a CoST értékét növeli, a PoST értékét azonban csökkenteni fogja.*

    Alhipotézis: *A volatilitás volatilitásának hatása a HW modell esetén erősebb, a DO modell esetén gyengébb lesz.*
6. *A terpeszre szóló call opció a Detemple és Osakwe által bemutatotthoz hasonlóan fog viselkedni a futamidő változásával, azaz alacsony kezdő volatilitás mellett értékük növekedni, magasabb kezdő volatilitás mellett csökkenni fog annak függvényében.*
7. *A terpeszre szóló put opció esetén hasonlóan a callokhoz, a hátralévő futamidő nagysága egyes szakaszokon növeli, másokon csökkenti a terpeszre szóló opció értékét.*

Az *első hipotézis* igaznak bizonyult, azaz mindkét típusú opció „szabályosan" viselkedett az alaptermék függvényében. Ez arra utal, hogy a volatilitás helyettesíthető terpesszel, legalábbis az alaptermék árának függvényében a hatás hasonló. Az *alhipotézis* megfogalmazásához Detemple és Osakwe írása adta az alapötletet. Az alhipotézis részben igaznak bizonyult. A HW modell esetén a konvexitás a két folyamat korreláltságának függvénye. Negatív korreláltság esetén a CoST a kezdő volatilitás konkáv függvénye lesz. A DO modellben az eredmény nem egyértelmű, míg a putok konvex függvényei lesznek a kezdő volatilitásnak, a másodlagos call opciók esetén szintén a két folyamat korreláltsága határozza meg a függvény jellegét.

Ennek következtében nem lesz minden esetben jellemző az a – vanilla opciókra egyébként jellemző tulajdonság –, hogy az alaptermék, jelen esetben a volatilitás értékének növekedésével a fedezeti arány (abszolút értéke) is növekszik.

A *második hipotézis* is maradéktalanul igaznak bizonyult, tovább erősítve azt az érzést, hogy a terpeszre szóló opció hagyományos opcióként viselkedik.

A *harmadik hipotézisben* a volatilitás volatilitását vizsgáltam. Ez azért lesz fontos, mert amennyiben szintetikusan igyekszünk a fenti másodlagos opciót előállítani, a volatilitás változékonysága gyakoribb újrafedezést tesz szükségessé. Az eredmény ebben az esetben sem független a modelltől. A HW modell keretei között a két folyamat negatív korreláltsága esetén a volatilitás volatilitása negatívan hathat az opció értékére! A DO modell mellett még érdekesebb eredményeket kaptam, a terpeszre szóló put értéke már a két folyamat korreláltságától függetlenül is negatívan viszonyul a volatilitás volatilitásához.

A *negyedik hipotézist* lényegében a harmadik elemzése során megválaszoltuk. Az opció értéke valóban nem független attól, milyen a két folyamat korreláltsága. Az *első alhipotézis* csak részben bizonyult igaznak. A terpeszre szóló call esetében a korreláltság növekedése az opció értékét növelte, minél negatívabb volt a korreláció, a CoST értéke annál kisebb lett. Ugyanakkor a PoST esetében a hatás nem volt egyértelmű. A szimuláció eredményeképpen a sejtésem úgy fogalmazható meg, hogy az ATM közeli opciók esetében a korrelációs együttható növekedése mind a CoST, mind a PoST értékét növeli. A *második alhipotézis* a DO modellre vonatkozott. Azt tapasztaltam, hogy a másodlagos opciók értéke mind a CoST, mind a PoST esetében a két folyamat korreláltságának függvényében „parabolaszerűen” változik. Míg azonban a terpeszre szóló callok esetében a nulla korrelációs együttható esetén a legkisebb az árfolyam, putok esetében éppen itt a legnagyobb az opció értéke.

Az *ötödik hipotézist* és a hozzá kapcsolódó *alhipotézist* együtt kezeltem. Azt tapasztaltam, hogy a válasz a kötési árfolyam függvényében változhat. A valóságot jobban leíró DO modell esetében az összefüggés egyértelműbb; mind a call, mind a put opciók esetében azt tapasztaltam, hogy a volatilitás volatilitásának növelésével a korreláció hatása egyre nagyobb az opció értékére. Annak figyelmen kívül hagyása a volatilitás volatilitásának nagyobb értékei mellett jelentősebb félreárazáshoz vezet.

A hatodik hipotézis nem bizonyult igaznak, míg a hetedik teljesült. Összefoglalóan a két hipotézisről az mondható el, hogy a terpeszre szóló opció a volatilitásra szóló opcióhoz képest jobb tulajdonságokat mutatott, mivel mind a call, mind a put értéke a vanilla opciókhoz hasonlóan viselkedett. Azaz a CoST értéke a futamidő növekedésével – egyes a valóságban nem releváns eseteket leszámítva – nőtt, a terpeszre szóló call időértéke pozitív volt. Ezzel szemben a put opciók időértéke ITM esetben negatívnak adódott, azaz a futamidő növekedésével a másodlagos opciók értéke csökkent.

Az eredményeket összefoglalva az mondható el, hogy a terpeszre szóló opció lényegében volatilitásra szóló opcióként működik. A kapott eredmények nagyvonalakban összhangban vannak Brenner és szerzőtársainak eredményeivel. Azonban egyes esetekben – így az „alaptermék”, a volatilitás volatilitásának esetében – a vanilla opcióktól eltérő tulajdonságokat produkált a termék. Másrészről annak értéke egy további előre nem jelezhető tényezőtől, a két folyamat korreláltságától is erősen függ. Ez úgy interpretálható, hogy bár a terpeszre szóló opció a bankok számára sok tekintetben vonzóbb lehet, mint egy magára a volatilitásra szóló opció, nem állítható elő maradéktalanul szintetikusan.

Detemple és Osakwe eredményeivel összevetve azt tapasztaltam, hogy a terpeszre szóló opció a volatilitásra szóló opciónál több „klasszikus” opciós tulajdonságot mutatott. Azaz a terpeszre szóló opciónak – a korábban elemzett nehézségei mellett – a Brenner és társai által bemutatottakon túl egyéb pozitív tulajdonságai is lehetnek.

I.1. Bevezetés

Gyakorlatilag a Black – Scholes modell megjelenésével egy időben megjelentek a modell kritikái is. A modellel szemben egyik legtöbbet hangoztatott kritika az időben állandó volatilitás feltételezése volt. Abban ugyanis hamar konszenzus alakult ki a piacot ismerők között, hogy a volatilitás nem állandó. Abban a kérdésben azonban, hogy a volatilitás miképpen változik az időben, már korántsem volt ilyen egységes az álláspont. További gondot jelentett, hogy a volatilitás változásának feltételezése a modell, sőt az egész dinamikus delta fedezet alkalmazhatóságával szemben kérdéseket vetett fel.

Amennyiben ugyanis a volatilitás alakulását egy bonyolult folyamattal igyekszünk leírni, a Black – Scholes differenciálegyenletet is módosítani kell, ráadásul semmi sem biztosítja, hogy továbbra is létezni fog zárt képlet az opció értékének meghatározására. Ráadásul, ha a volatilitást egy, a részvény által követett folyamatot meghatározótól független kockázati tényező alakítja, a dinamikus delta fedezettel is gondok lehetnek. Ilyenkor ugyanis az újabb kockázatot egy újabb termékkel kell fedezni.

Erre elvileg két megoldás létezhet. Az *egyik esetben* feltesszük, hogy *létezik egy volatilitásra szóló termék*, azaz a volatilitás maga is kereskedett. Ezzel a kérdéssel a dolgozat egy későbbi része foglalkozik. Itt most csak annyit jegyeznék meg, hogy ez a feltétel a mai napig nem teljesül maradéktalanul a piacon. A *másik lehetséges* dolog, hogy a volatilitásból származó kockázatot *egy másik opció felhasználásával* fedezzük. Ehhez azonban szükség van egy másik, már beárazott opcióra. A kérdés ekkor az, hogy annak az értékét hogyan határozzuk meg. A kör itt bezárult.

A továbbiakban bemutatom, hogy a szakirodalomban milyen megoldások születtek ennek a problémának a kezelésére, és megnézem, ezek mennyire használhatóak a gyakorlatban. Ennek során igyekszem minél teljesebb képet adni. Ezért a fejezetben sorra veszem a legfontosabb, legtöbbet idézett és legeredetibb eredményeket tartalmazó cikkeket azon a szempont szerint elemezve őket, hogy milyen, a volatilitás által követett folyamatot használtak fel és milyen eredményre jutottak.

I.2. Determinisztikus volatilitás

Talán az egyik legegyszerűbb megoldás az, ha a volatilitásról feltesszük, hogy változása csak az idő függvénye. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy a volatilitás alakulása előre ismert, de időben nem állandó. Mivel ezzel a feltevéssel új kockázati elem nem kerül a rendszerbe, a dinamikus delta fedezet továbbra is folytatható. Ennek megfelelően a Black – Scholes differenciálegyenlet sem változik, a zárt képlet is használható. A kérdés az, milyen volatilitást használjunk az opció árazása során.

Amennyiben mi az opciót megvesszük, majd folytonosan delta fedezést hajtunk végre, long gamma pozícióban vagyunk. Ezért ha a részvényárfolyam volatilitása nagyobb, mint az árban benne foglalt volt, nyerünk a pozíción. Ekkor egyetlen árfolyam lépés eredményeként elért eredményünk a következő lesz:

$$P \& L = \frac{1}{2}\Gamma S^2\left[\sigma_t^2 - \sigma_{impl}^2\right]\Delta t \qquad (1.)$$

Az opció futamideje természetesen nem egyetlen lépésből áll. Ennek megfelelően a fedezéssel elérhető összes nyereség, illetve veszteség a következő:

$$P \& L_{teljes} = \frac{1}{2}\sum \Gamma S^2\left[\sigma_t^2 - \sigma_{impl}^2\right]\Delta t \qquad (2.)$$

Az opció természetesen akkor van jól árazva, ha a delta fedezettel sem nyerni, sem veszíteni nem lehet. Ebből az következik, hogy az opció árában benne foglalt varianciának az egyes periódusok varianciája átlagának kell lennie, azaz:

$$\sigma_{impl}^2 T = \sum \sigma_t^2 \Delta t = \sigma_{átlag}^2 T \qquad (3.)$$

Ahogy a lépések hosszát egyre kisebbnek vesszük, az összeadás helyét természetesen az integrál váltja fel. A fenti eredménnyel kapcsolatban azonban több megjegyzést is kell tennünk.[1] Az átlag, mint a volatilitás helyes mértéke csak akkor szerepelhet, ha a 2. egyenletben a ΓS^2 kifejezés értéke állandó. Ez pedig természetesen nem igaz. Ebben az esetben várható értékben jó megoldást fog adni az átlag, azonban a valóságban mindig csak egy „realizáció” valósul meg. Így lehetnek jó és rossz pályák. Ez persze azt jelentheti, hogy az egyének kockázathoz való viszonya beépül az árakba, ami pedig nyilvánvalóan ellentétes a feltételezésekkel.

[1] A kritikai megjegyzéseket részletesebben lásd Rebonato [1999].

Ennek megoldása periódushossz rövidítése lehet. Azaz ha a részvényárfolyam nem csupán néhány alkalommal változik, akkor a fedezetet is gyakrabban kell kiigazítani. Ahogy a periódushosszal tartunk a nullához, úgy az átlag felhasználása egyre kisebb hibához vezet. Összefoglalóan tehát annyit mondhatunk, hogy a Black – Scholes modell feltevései mellett, mikor is feltesszük a folytonos kereskedést és delta fedezetet, az átlag a megfelelő érték lesz. Abban az esetben azonban, ha a fedezetet ritkábban hajtjuk végre, a pozíció nyereséges és veszteséges is lehet.

Rebonato egy további kérdést is vizsgál (Rebonato [1999] 37-41. oldal.). A fedezéshez vajon az opció teljes futamideje alatt érvényes átlag varianciát kell alkalmazni, vagy csupán a hátralévő futamidőre érvényes értékek átlagát. Azaz

$$\sigma^2_{átlag} T = \int_0^T \sigma^2_u \, du \qquad (4.)$$

$$\sigma^2_{átlag} T = \int_t^T \sigma^2_u \, du \qquad (5.)$$

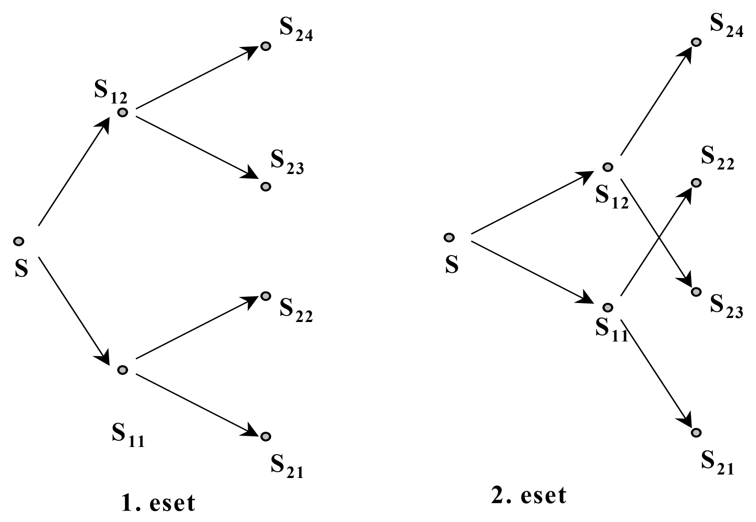
egyenletek közül melyik használható jobban. Rebonato a konvergencia szempontjából kereste a választ, azaz a periódushossz csökkentésével melyik megoldás közelít hamarabb az elméleti értékhez. Azt találta, hogy amennyiben az alaptermék (részvény) áralakulását leíró folyamat várható növekedése (drift) független annak jelenlegi értékétől, a teljes időszakra számított átlag jobb, azaz a 4. egyenlet által adott megoldás hamarabb konvergál az elméleti értékhez. Rebonato megvizsgálta a kérdést arra az esetre is, mikor az alaptermék árfolyama az átlaghoz visszahúzó, ún. mean reverting folyamatot követ. Ebben az esetben viszont azt találta, hogy a dinamikus fedezet az 5. egyenlet alapján számított volatilitás felhasználásával sikeresebb volt. Ebben az esetben ugyanis az alaptermék növekedési üteme és a jelenlegi értéke nem független egymástól. Ez különösen a kamat derivatívok esetén lehet fontos megállapítás.

Az átlag, mint megfelelő mérőszám felhasználásának további kérdéseit Crouhy és Galai elemezték (Crouhy – Galai [1995]). Mondandójukat egy egyszerű binomiális modellben mutatták be. Az opciót kiíró, majd az ebből eredő kockázatukat fedező bankok ugyanis nem minden pillanatban, hanem csupán diszkrét időközönként, általában naponta fedezik újra pozíciójukat. Dolgozatuk középpontjában ennek megfelelően annak vizsgálata állt, hogy a fedezeti arány kiszámításánál vajon a következő fedezésig hátralévő időszak, ha tetszik periódus volatilitását használják-e fel, vagy inkább az opció teljes futamideje alatt érvényes volatilitások átlagának használata a célszerű.

A kérdés tehát tulajdonképpen visszatérés a Rebonato által is vizsgáltakhoz. Ott egyszerűen azzal intéztük el, hogy a lépésköz rövidítése a problémát megoldja. Itt viszont azt a gyakorlatban is igen gyakran felmerülő kérdést tisztázzuk, hogy amennyiben nem tudunk folytonosan kereskedni, akkor milyen megoldással tudjuk a lehetséges veszteséget (vagy szerencsés esetben nyereséget) minimalizálni.

Crouhy és Galai egy binomiális modellt vizsgáltak, ahol a két időszak volatilitása eltérő. Egész pontosan két esetet elemeztek. Az egyikben az első periódus volatilitása volt a nagyobb, a másikban a másiké. A volatilitás értékek, és így az átlagok is azonosak voltak a két esetben. A részvények árfolyamának lehetséges értékeit az 1. ábra tartalmazza. Hasonló jelöléssel az opciók értéke is felírható. A továbbiakban, hogy az egyes eseteket meg tudjuk különböztetni, az alsó indexek mellett egy felső indexet is használunk. Az 1 értelemszerűen az első, a 2 a második folyamatot fogja jelölni.

1. ábra[2]



Nézzük a fedezeti arányokat! A binomiális modellnek megfelelően a delták értékét az opció és a részvény „terjedelmének" hányadosaként számíthatjuk. Így az egy periódus múlva emelkedés esetére érvényes delta értéke:

$$\Delta_{12}^{k} = \frac{C_{24}^{k} - C_{23}^{k}}{S_{24}^{k} - S_{23}^{k}}, \text{ ahol } k=1,2 \qquad (6.)$$

A mai delta értéke pedig

$$\Delta^{k} = \frac{C_{12}^{k} - C_{11}^{k}}{S_{12}^{k} - S_{11}^{k}}, \text{ ahol } k=1,2 \qquad (7.)$$

[2] Forrás: Crouhy – Galai [1995]

Behelyettesítve az opció és részvényárfolyamokat az egyes esetekre a következő deltákat kapjuk:

$$\Delta^1 = \frac{1}{1+r} \cdot \frac{\left[((1+r)-d_2)(C_{24}^1 - C_{22}^1) + (u_2 - (1+r))(C_{23}^1 - C_{21}^1)\right]}{S(u_1 - d_1)(u_2 - d_2)} \quad (8.)$$

$$\Delta^2 = \frac{1}{1+r} \cdot \frac{\left[((1+r)-d_1)(C_{24}^2 - C_{22}^2) + (u_1 - (1+r))(C_{23}^2 - C_{21}^2)\right]}{S(u_1 - d_1)(u_2 - d_2)} \quad (9.)$$

ahol u_1 és u_2 az első, illetve második periódus növekedési üteme az egyes esetekben, d_1 és d_2 hasonlóan a csökkenés mértéke, r pedig az egy periódusra érvényes, itt állandónak feltételezett nagyságú kockázatmentes hozam. A két tört nevezője láthatóan azonos, illetve a fenti ábrán is megfigyelhető, hogy $C_{24}^1 = C_{24}^2$, illetve $C_{21}^1 = C_{21}^2$. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel továbbá, hogy az opció kötési árfolyama mindkét folyamat esetén azonos, és a második periódus két középső értéke közé esik. Ekkor mindkét esetben a két „alsó" részvényárfolyam mellett az opció értéktelen, azaz $C_{21}^1 = C_{22}^1 = C_{42}^2 = C_{23}^2 = 0$. Ezt figyelembe véve az opciók lehetséges értékei a második periódus végén a következők lehetnek:

$$\begin{aligned} C_{24}^1 &= C_{24}^2 = Su_1u_2 - K \\ C_{23}^1 &= Su_1d_2 - K \qquad\qquad (10.) \\ C_{22}^2 &= Sd_1u_2 - K \end{aligned}$$

Ha továbbá feltesszük, hogy a binomiális modell a Cox – Ross – Rubinstein modell, azaz $u = e^{\sigma}$, továbbá $d = 1/u$, akkor a következő érdekes megállapítás tehető. Amennyiben K/S=1, azaz az opció ATM, a két eset deltája azonos, azaz mindegy, milyen sorrendben követik a lehetséges volatilitás értékek egymást.[3] Ha azonban ettől eltér a kötési árfolyam, a két esetben a fedezeti arány nem ugyanaz, így az átlag alapján történő fedezet nem csökkenti nullára pozíciónk kockázatát. Crouhy és Galai azt a további érdekességet találták, hogy a fedezeti aránynak a kötési árfolyamra való „érzékenysége" abban az esetben nagyobb, ha az első volatilitás a nagyobb. A másik esetben a kötési árfolyam jelentősége kisebb.

Folytonos modellben, azaz állandó fedezet mellett ezek a különbségek eltűnnek. Mivel azonban a bankok többsége nem fedezi pozícióját folytonosan, számukra a fedezeti arány kiszámításánál az átlag nem elegendő. Az átlag mellett a következő időszak

[3] Az ATM értéket most úgy értelmeztem, hogy S=K. Természetesen ezt az elnevezést most csak a definíció egyszerűsítése végett alkalmaztam, egyébként ATM-nek akkor nevezünk egy opciót, ha S=PV(K).

volatilitását is figyelembe kell venni, a kettő kombinációja játszik szerepet. Ez különösen a rövidebb futamidejű opciók esetén jelentős.

I.3. Szemi-sztochasztikus volatilitás[4]

Ezek a modellek annyiban különböznek az előzőektől, hogy felteszik a volatilitás véletlenszerű alakulását. Ez azonban nem jelenti egyúttal egy másik véletlen változó bevezetését is, a volatilitás értékét ugyanis a részvényárfolyam függvényének tételezik fel. Ennek megfelelően ezt az esetet nevezik az árfolyam szintjétől függő (level dependent) volatilitás modelljének is. Ebben az esetben könnyebbséget jelent, hogy mivel új kockázati tényező nem kerül a modellbe, az az eddigiekhez hasonlóan kiküszöbölhető. Máshogyan fogalmazva a piac továbbra is teljes lesz, a „hagyományos" delta fedezet továbbra is érvényes.

II.3.1. A CEV (Constant Elasticity of Variance) modell

A konstans rugalmasságú variancia (CEV) modell némileg egyszerűsíti a volatilitás alakulását leíró függvényt. Felteszi ugyanis, hogy a volatilitás értékét befolyásoló két tényező, azaz az idő és a részvényárfolyam hatása egymástól elkülöníthetőek. Azaz a CEV modellek feltevése, hogy a volatilitásra igaz, hogy:

$$\sigma(S,t) = h(S)s(t) \qquad (11.)$$

ahol $h(S) = S^{\beta}$, $\beta \geq 0$. Így a részvényárfolyam által követett folyamat a következőképpen módosul:

$$dS = \mu(t)S\,dt + S^{\beta}s(t)dZ \qquad (12.)$$

A β=0, ½ és 1 értékek esetén egyértelmű zárt képletre visszavezethető megoldás található. Ettől eltérő esetben – ahogyan azt Rebonato megmutatta – a módosított Bessel függvény használatával adható meg az erre a részvényre szóló opció ára (Rebonato [1999] 99-100. oldal).

A CEV modellt használta például Cox és Ross [1976]. Azt találták, hogy ekkor is a

---

[4] A szakirodalomban az alábbiakban bemutatott modellek csoportját helyenként korlátozottan sztochasztikus (restricted-stochastic) volatilitás modellek csoportjának is nevezik.

$$0 = rS\frac{\partial f}{\partial S} - rf - \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(S\,\sigma(S)\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \qquad (13.)$$

egyenlet megoldásával adhatjuk meg az opció értékét. Későbbi tanulmányok[5] úgy találták, hogy Cox és Ross feltevései mellett a Black –Scholes modell az OTM call opciókat alul, míg az ITM-eket túlárazza.

II.3.2. Geske opcióra szóló opciója

Szintén egy, a részvényárfolyam függvényében változó volatilitásra épülő modell Geske többszörös opciós modellje (Geske [1979]). Geske szerint, amennyiben a vállalat részvényeit úgy fogjuk fel, mint egy-egy opciót, akkor a részvényre szóló vételi jog tulajdonképpen egy többszörös opció. Ugyanakkor az opció alaptermékének, azaz a részvénynek a volatilitása sem tekinthető állandónak. Azt ugyanis, többek között a tőkeáttétel is befolyásolni fogja.

Geske modelljében tehát mindennek az alapja a vállalat értékét (Ω) leíró Brown mozgás, állandó volatilitással:

$$d\Omega = \mu_\Omega \Omega\, dt + \sigma_\Omega \Omega\, dZ_\Omega \qquad (14.)$$

A részvény (S), mint egy, a vállalat értékére szóló vételi jog értéke:

$$S = \Omega\, N(k_1) - De^{-r(T_D - t)} N(k_2) \qquad (15.)$$

ahol D a vállalat T_D időpontban lejáró adósságainak értéke[6], továbbá a

$$k_1 = \frac{\ln(\Omega/D) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_\Omega^2\right)(T_D - t)}{\sigma_\Omega \sqrt{T_D - t}} \qquad (16.)$$

$$k_2 = k_1 - \sigma_\Omega \sqrt{T_D - t}$$

Továbbá a részvényárfolyam volatilitására igaz, hogy az a részvényárfolyam negatív függvénye:

$$\sigma_S = \sigma_\Omega \frac{\Omega}{S}\frac{\partial S}{\partial \Omega} > \sigma_\Omega \qquad (17.)$$

Ha a részvényárfolyam nő, a vállalat tőkeáttétele csökken, és ezáltal annak kockázata is mérséklődik. Geske modellje szerint ebben az esetben a részvény hozamának a szórása

---

[5] Idézi Hobson – Rogers [1998]

[6] Geske feltette, hogy a vállalat adósságai elemi kötvény jellegűek, azaz egyetlen időpontban kell fizetnie, akkor válik az összes tartozása esedékessé, és addig kamatfizetési kötelezettsége a vállalatnak nincs.

is mérséklődni fog. Hasonló logikával, ha a részvényárfolyam csökken, a részvény volatilitása növekedni fog.

Geske a Black – Scholes modellt saját modellje egy speciális esetének tekintette. Ha ugyanis a céget tisztán saját tőkéből finanszírozzák (D=0), vagy hiteleinek futamideje végtelen ($T_D=\infty$), az eredeti Black – Scholes modellhez jutunk vissza.

Geske azt találta, hogy amennyiben a valóságot az ő modellje írja le jól, a Black – Scholes képlet az OTM call opciókat alul, míg az ITM vételi jogokat túl fogja árazni. Emellett, ha a fedezeti arányt (delta) az egyes periódusokban a Black – Scholes képlettel számítjuk, adott opció kockázatainak fedezéséhez túl kevés részvényt fogunk felhasználni, így a fedezett portfólió mégsem lesz kockázatmentes.

II.3.3. A Hobson – Rogers modell

Hobson és Rogers egy a múltbeli árfolyam, egész pontosan a historikus log-árak függvényében írták fel a volatilitást (Hobson – Rogers [1998]). Jelölje ennek megfelelően a továbbiakban a diszkontált log-ár folyamatot Z_t, ahol

$$Z_t = \ln\left(S_t\, e^{-rt}\right) \qquad (18.)$$

Definiáljunk továbbá egy F_t^m eltoló (offset) függvényt, amire igaz, hogy

$$F_t^m = \int_0^\infty \psi\, e^{-\psi u}\left(Z_t - Z_{t-u}\right)^m du \qquad (19.)$$

ahol ψ azt az értéket mutatja, amivel a jövőbeli információk jelenbeli értékét kiszámolhatjuk.

Legyen a volatilitás ennek az F_t^m-nek a függvénye. Ekkor igaz, hogy

$$dZ_t = \mu\left(F_t^1 \ldots F_t^n\right)dt + \sigma\left(F_t^1 \ldots F_t^n\right)dw_t \qquad (20.)$$

azaz a részvényárfolyamban bekövetkezett változások a volatilitás értékére is hatással vannak. Hobson és Rogers a fenti egyenletet annyiban egyszerűsítette, hogy feltette, hogy n=1, azaz a volatilitás csak F^1 függvénye. Ekkor igazolható, hogy az eltoló függvényre igaz lesz az alábbi összefüggés:

$$dF_t = \left[\mu(F_t) - \psi F_t\right]dt + \sigma\left(F_t\right)dw_t \qquad (21.)$$

A Feynman – Kac formulát használva Hobson és Rogers a következő differenciálegyenlettel írták le a derivatív (f) értékét:

$$\left(r\,S\frac{\partial f}{\partial S} - rf - \psi F\frac{\partial f}{\partial F} - \frac{\partial f}{\partial t}\right) + \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial F} + \frac{1}{2}S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial F^2} + S\frac{\partial^2 f}{\partial S\partial F}\right)\sigma(F)^2 = 0$$

(22.)

A megoldás peremfeltétele:

$$f(S,F,0) = q(S) \qquad (23.)$$

azaz a kifizetési függvény csak az alaptermék árának függvénye.

Láthatóan akkor, ha a volatilitás időben állandó lenne, a 22. egyenlet éppen a Black – Scholes differenciálegyenletet adná vissza. Hobson és Rogers a továbbiakban numerikus eljárással becsülték meg az opciók értékét, illetve, hogy ellenőrizzék, mennyiben magyarázzák jól a piaci árakat, az így kapott opciós árakból kiszámították a Black – Scholes modell szerinti implicit volatilitásokat. Feltették, hogy a volatilitás a következő módon írható fel a késleltető függvény alapján:

$$\sigma(F) = \eta\sqrt{1+\varepsilon F^2} \wedge \mathrm{N} \qquad (24.)$$

ahol η és ε paraméterek.

Azt találták, hogy modelljük jól írja le a piacon tapasztalható volatilitás mosolyt. Az implicit volatilitás felület a kötési árfolyam konvex függvénye. Ráadásul az is megállapítható, hogy abban az esetben, ha a jelenlegi log-ár a múltbeli átlagánál kisebb, a mosoly negatív lejtésű, míg abban az esetben, ha az F_0 pozitív, a meredekség is pozitív lesz. Ha F_0 nulla, a mosoly „szabályos", azaz közel szimmetrikus lesz.[7]

A modell tehát egyszerű feltevések mellett jól kezelhető, és a valóságot elég jól közelítő megoldást ad.

I.4. Sztochasztikus volatilitás

A volatilitás sztochasztikus alakulását feltételező modellek alapvetően abban különböznek egymástól, hogy milyen feltételezésekkel éltek a volatilitás alakulását leíró folyamatokról. Mivel korábban a determinisztikus, illetve a szemi-sztochasztikus esteket már megvizsgáltuk, itt azok a folyamatok kerülnek elő, ahol a volatilitás értékét egy, a részvények áralakulását befolyásolótól különböző véletlen folyamat alakítja. Ez a

[7] Természetesen amennyiben a volatilitást ennél bonyolultabb függvénnyel akarjuk leírni, a megállapítások is sokkal bonyolultabbak lesz. Ezek a függvények viszont alkalmasak lehetnek nemcsak a mai mosoly leírására, de annak jövőbeli alakulását is modellezni tudják.

folyamat lehet egy, a részvény árát meghatározó véletlen folyamattól független másik Wiener folyamat, de lehet, hogy a két véletlen tényező valamilyen szinten korrelál egymással. Persze az is lehet, hogy a volatilitás értéke, szemben a részvények árfolyamával egy mean reverting folyamatot követ.

Sokan vizsgálták, elemezték a volatilitást, mindenki a folyamat más-más elemét tartotta kiemelésre érdemesnek. Azonban a különbség nem csupán ennyi. Mint arról már szó volt, ha a két véletlen folyamat egymástól többé-kevésbé függetlenül alakul, felmerül a piac teljességének kérdése. Amennyiben ezt elvetjük, a befektetők kockázathoz való viszonya, ha úgy tetszik preferenciái, visszaszivárognak az elemzésbe, így általánosan elfogadott, arbitrázson alapuló ár nem feltétlenül adható. A szerzők többsége ennek megfelelően egyensúlyi modellek kialakításával próbálkozik, a CAPM, vagy éppen az APT modell egyes eseteire visszavezetve az állításokat.

II.4.1. A Hull – White modell

Ezen a területen a talán legkiemelkedőbb cikk Hull és White nevéhez fűződik (Hull – White [1987]). Céljuk a preferenciáktól mentes árazás fenntartása mellett az opció értékének meghatározása volt. A részvény és a volatilitás által követett folyamatok az ő modelljükben a következőek:

$$dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dw \quad (25.)$$

$$dV = \phi V\,dt + \xi V\,dz \quad (26.)$$

ahol $V = \sigma^2$, dw és dz a két, egymással ρ korrelációban lévő Wiener folyamat, μ a részvény várható hozama, ϕ a variancia (volatilitás négyzet) „várható hozama” (várható növekedési üteme), σ a volatilitás, a ξ pedig a variancia (azaz tulajdonképpen a volatilitás) volatilitása.

A fenti egyenletrendszer, bár kétségtelenül szép, a valóság pontos leírásának aligha tekinthető. Mindazonáltal a szakirodalomban – talán éppen áttekinthetősége és viszonylagos egyszerűsége miatt – kitűntetett szerepet tölt be. Annak ellenére, hogy hibái láthatóak, az egyik legtöbbet hivatkozott modellel állunk szemben.

Mivel jelen esetben két véletlen tényező hat az opció értékére, a Black – Scholes differenciálegyenlet ennek megfelelően eggyel több tényező szerinti deriváltat fog tartalmazni. Ráadásul megjelenik a vegyes derivált is. Az f származtatott ügylet értékét leíró egyenlet ebben az esetben a következő alakot ölti:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}+2\rho\sigma^3\xi S\frac{\partial^2 f}{\partial S\partial V}+\xi^2V^2\frac{\partial^2 f}{\partial V^2}\right]-rf=-rS\frac{\partial f}{\partial S}-\left[\phi-\beta_V\left(\mu^*-r\right)\right]\sigma^2\frac{\partial f}{\partial V}$$

(27.)

ahol μ^* a piaci portfólió folytonosan számított várható hozama, β_V pedig a „variancia hozamának" a piaci portfólió hozamára vonatkozó bétája.

Ez azonban várható hozamokat, és ezáltal egyéni preferenciákat tartalmaz. A megoldás az lehet, ha feltesszük, hogy a volatilitásnak nincs szisztematikus hibája, azaz a piaci portfólióra vonatkoztatott bétája nulla. Ez pedig azt jelenti, hogy a volatilitás és a piaci portfólió hozama közötti korreláció nulla.

Ne felejtsük el, hogy a korábbiakban már azt is feltételeztük, hogy a volatilitás és a részvényárfolyam sem korreláltak egymással. Azaz két függetlenségi feltétel van! Egyik a részvényárfolyam és a volatilitás korrelálatlanságáról szól, a másik a piaci portfólió hozama és az alaptermék volatilitása közötti összefüggésekről. Ezen feltevések következtében a 27. egyenlet egyszerűsödik.

Az árazás innen ettől kezdve a „megszokott" úton halad tovább. Azaz vesszük az opció kockázatmentes világbeli várható lejáratkori kifizetésének jelenértékét:

$$f\left(S_t,\sigma_t^2,t\right)=e^{-r(T-t)}\int f\left(S_T,\sigma_T^2,T\right)p\left(S_T\middle|S_t,\sigma_t^2\right)dS_T \qquad (28.)$$

ahol $p\left(S_T\middle|S_t,\sigma_t^2\right)$ a lejáratkori S_T árfolyam t időpontban adott S_t és σ_t értékek melletti feltételes valószínűség eloszlása. Mindezeket felhasználva Hull és White a következő megoldásra jutott:

$$f\left(S_t,\sigma_t^2,t\right)=\int\left[e^{-r(T-t)}\int f(S_T)g\left(S_t\middle|\overline{V}\right)dS_T\right]h\left(\overline{V}\middle|\sigma_t^2\right)d\overline{V} \qquad (29.)$$

Értelmezzük az eredményt! Nézzük a szögletes zárójelen belüli részt! Ez láthatóan egy Black – Scholes ár olyan feltevés esetén, mikor a volatilitás értékét az egyes periódusok volatilitás értékeinek átlaga adja. Ahhoz, hogy ez valóban egy Black – Scholes ár lehessen, az is szükséges, hogy $g\left(S_T\middle|\overline{V}\right)$ lognormális eloszlású legyen. Mivel önmagában S_T eloszlása lognormális, és a részvényárfolyam és a volatilitás, így annak átlaga is függetlenek egymástól, belátható, hogy ez a feltétel teljesülni fog. Nem lehet azonban elégszer hangsúlyozni, hogy amennyiben a függetlenségi feltétel sérül, a képlet nem ad helyes megoldást.

Amennyiben tehát a szögletes zárójelen belüli érték egy opciónak a Black – Scholes képlet alapján számított ára, a képlet egyszerűbb alakra hozható:[8]

$$f\left(S_t, \sigma_t^2, t\right) = \int C\left(\overline{V}\right) h\left(\overline{V} \middle| \sigma_t^2\right) d\overline{V} \qquad (30.)$$

Hull és White úgy találta, hogy ilyen feltevések mellett a Black – Scholes képlet alkalmazásával az ATM opciókat a piac túl, míg az OTM és ITM opciókat alul árazza.
Hull és White dolgozatának egy másik jelentős eredménye, hogy megvizsgálták az opció értékének alakulását olyan feltevés mellett is, hogy a volatilitás mean reverting folyamatot követ. Így a 26. egyenlet a következő alakot ölti:

$$dV = \alpha\left(\overline{V} - V\right)dt + \xi V\, dz \qquad (31.)^9$$

ahol α, ξ és $\overline{V}$ állandók. Azt találták, hogy a 30. egyenlet ebben az esetben is használható. Az opció értékének a Black – Scholes értékhez való viszonya itt is az előbbihez hasonló, azaz az OTM és ITM opciókat alul, az ATM opciókat túl árazza az állandó volatilitáson alapuló modell.
Azokban az esetekben azonban, és itt mindkét folyamatról szó van, ha a részvényárfolyam és a volatilitás korreláltak, a zárt képlet nem használható.[10] Ebben az esetben Monte Carlo szimulációt alkalmaztak. Pozitív korreláció esetén az OTM opciók alul-, míg az ITM-ek túlárazottak voltak, míg negatív korreláció esetén az ellenkezőjét tapasztalták.
Hull és White modelljének jelentősége igen nagy. Nekik sikerült a gyakorlatban is használható modellt teremteniük, aminek nagy hatása volt a későbbiekben mind a piaci gyakorlatra, mind pedig az elméleti modellekre.

II.4.2. Scott mean-reverting modellje

Hull és White modelljéhez nagyon sokban hasonló modellt írt fel Scott (Scott [1987]). A volatilitás, hasonlóan a Hull és White által vizsgált esethez átlaghoz visszahúzó folyamatot követ. Nála azonban a volatilitás volatilitása nem függ annak mai értékétől. Ezen túl abban is eltér az előbbi modelltől, hogy a volatilitásra, és nem a varianciára írta fel a folyamatot. Ennek megfelelően a volatilitás a következő folyamat szerint alakul:

---

[8] A gond ezzel a képlettel csak az, hogy a $h\left(\overline{V} \middle| \sigma_t^2\right)$ eloszlás megadása korántsem triviális. Egy lehetséges megoldást ad meg Hull és White ([1987] 287-288 oldal).

[9] Hull [1999] a 31. egyenletet egy ettől eltérő formában írja fel: $dV = a\left(\overline{V} - V\right)dt + \xi V^{\alpha} S\, dz$, de a folyamat lényege itt is ugyanaz.

$$d\sigma = \alpha(\overline{\sigma} - \sigma)dt + \xi\, dz \qquad (32.)$$

Ebben az esetben a volatilitás akár negatív értéket is felvehetne. Scott ezt azzal intézi el, hogy a variancia ebben az esetben is pozitív, ami viszont már nem okoz gondot. Megoldása ennek ellenére kevésbé általános, mint Hull és White modellje.

A kockázati elemnél kevesebb termék kérdését úgy oldja fel, hogy egyensúlyi modellre építi megoldását. Felteszi, hogy a volatilitásból származó kockázat diverzifikálható. Ross arbitrált árfolyamok modelljére (APT) épít. Az opció várható hozama nála ennek megfelelően

$$E\left(\frac{df}{f}\right) = \left[r + \frac{\partial f}{\partial S}\frac{S}{f}(\mu - r) + \frac{\partial f}{\partial \sigma}\frac{1}{f}\lambda^*\right]dt \qquad (33.)$$

ahol (μ-r) az alaptermék kockázati prémiuma, λ^* az alapterméknek a volatilitás kockázatából adódó kockázati prémiuma. Ennek felhasználásával az opció értékét leíró differenciálegyenlet a következő:

$$-\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \rho\xi\sigma S\frac{\partial^2 f}{\partial S \partial \sigma} + \frac{1}{2}\xi^2\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} - rf + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial \sigma}\left[\beta(\overline{\sigma} - \sigma) - \lambda^*\right] = 0$$

(34.)

Zárt képletet azonban nem sikerült adniuk ennek az egyenletnek a megoldására. Ezért a továbbiakban Monte Carlo szimulációval dolgoztak. Feltették, hogy a volatilitásból származó kockázat diverzifikálható, azaz λ^*=0, továbbá Hull és White megoldásához hasonlóan, hogy a két véletlen folyamat független egymástól, azaz ρ=0. A folyamat paramétereit piaci adatokból becsülték, majd eredményeiket összevetették az ugyanerre a papírra szóló opció piacon jegyezett árfolyamaival.

Úgy találták, hogy az általuk kapott eredmények a piaci adatokat jobban magyarázzák, mint a Black – Scholes értékek. Az általuk kapott opciókból visszaszámított implicit volatilitások nagyon érzékenynek bizonyultak a két folyamat korrelációs együtthatójára. Ezt annál is inkább jelentősnek találták, mert a korreláció értékét Scott nem tudta a piaci adatokból jól becsülni, illetve ennek értéke az opció élete folyamán változhat is.

Hasonlított tehát ez a megoldás a Hull és White által kifejlesztetthez, azonban Scott nem tudott zárt képletet adni. Nála a szimuláció eredményeként a középpontban nem a Black – Scholes értékektől való eltérés, hanem a folyamat paramétereire való érzékenység áll. Ebből a szempontból pedig a korreláció különösen fontosnak bizonyult.

[10] A volatilitás és a piaci portfólió hozamának korrelálatlanságát ebben az esetben is feltették.

II.4.3. Wiggins modellje

Ugyancsak 1987-ben született Wiggins modellje, aki szintén sztochasztikus volatilitás mellett próbálta meg az opció értékét meghatározni (Wiggins [1987]). Mivel ő sem tételezte fel, hogy a volatilitás kereskedett termék, a megoldás során a várakozásokat és a preferenciákat nem hagyhatta figyelmen kívül. Hogy feladatán némileg könnyítsen, megoldását megpróbálta a CAPM modellre visszavezetni.

Ennek megfelelően először egy részvényindexre szóló opció értékét próbálta meghatározni.[11] Feltette továbbá, hogy az opció szintetikus előállítására létrehozott ún. fedezeti portfólió hozama, valamint az alaptermék, jelen esetben a piaci portfólió hozama korrelálatlanok. Ebben az esetben ugyanis igaz az, hogy a fedezeti portfólió bétája nulla, így elvárt hozama a kockázatmentes hozam kell, hogy legyen. Abban az esetben azonban, ha a standard CAPM modell nem áll fenn, illetve, ha az alaptermék nem a piaci portfólió, ez nem lesz igaz. Ekkor felteszi, hogy a fedezeti portfólió plusz kockázata, valamint az alaptermék kockázata korrelálatlanok.

Wiggins az Ito lemma és a kockázat piaci árának felhasználásával írja fel az opció értékét meghatározó differenciálegyenletet. A részvényárfolyamot és a volatilitást leíró differenciálegyenletek a 25-26. egyenletekhez hasonlóak, eltérés abban van, hogy egyrészt Wiggins nem a varianciára, hanem a volatilitásra írta fel a második egyenletet, másrészt a volatilitás várható növekedési ütemét függővé tette a volatilitástól. Így a volatilitást leíró egyenlet a következő formát ölti:

$$d\sigma = \phi(\sigma)dt + \xi\sigma\, dz \quad (35.)$$

Ebből az opció értékét meghatározó differenciálegyenlet a következő:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + rS\frac{\partial f}{\partial S} - rf + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} + \rho\xi\sigma^2 S\frac{\partial^2 f}{\partial S\partial\sigma} + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial \sigma}\left[\phi(\sigma) - (\mu - r)\rho\xi + \lambda\xi\sigma\left(1-\rho^2\right)^{1/2}\right] = 0\end{aligned} \quad (36.)$$

ahol f az opció értéke, r a kockázatmentes hozam, ρ a két folyamat közötti korrelációs együttható, λ pedig a kockázat piaci ára.[12] Láthatóan ebben az esetben a várakozások benne maradnak az egyenletben. Két ponton is: egyrészt benne vannak az adott alaptermék kockázati prémiumában (μ-r), másrészt a kockázat piaci árában. Így

[11] Amennyiben az indexet alkotó részvények árfolyamának eloszlása lognormális, akkor az ezekből felépülő index árfolyamának eloszlása szükségképpen nem lesz az. Éppen ezért Wiggins a lognormalitás feltevését nem használja elemzése során.

[12] Azaz $\lambda = (\mu - r)/\sigma^2$

Wiggins a továbbiakban egy tipikus befektető „tipikus” logaritmikus hasznosságfüggvényét használja fel.
Ilyen feltevések mellett azt találta, hogy amennyiben a részvényárfolyam változásai és a volatilitás változásai korrelálatlanok, az implicit volatilitást kiszámolva megjelenik a smile. Azaz a Black – Scholes árhoz képest az ITM és az OTM opciók többet érnek ezzel a módszerrel árazva. Negatív korreláció esetén az ITM call opció ára meghaladta a Black – Scholes árat, az OTM opcióké elmaradt attól.
Látható tehát, hogy sok tekintetben hasonló eredményt sikerült produkálni Wigginsnek is, mint a Hull – White szerzőpárosnak. Wiggins eljárása azonban inkább csak egy érdekes elméleti megközelítés, semmint a gyakorlatban alkalmazható eljárás. Érdekes mindazonáltal, hogy a korrelálatlan esetben a két kutatás eredménye teljesen egybecseng.

II.4.4. Johnson és Shanno modellje

Johnson és Shanno Wigginshez hasonlóan nem a varianciára, hanem a volatilitásra írták fel a második véletlen folyamatot (Johnson – Shanno [1987]). Náluk azonban a volatilitás várható növekedési üteme nem függ a volatilitástól. Az általuk feltett folyamatok a következőek voltak:

$$dS = \mu S\,dt + \sigma S^{\alpha}\,dw \quad (37.)$$

$$d\sigma = \phi\sigma\,dt + \xi\sigma^{\beta}\,dz \quad (38.)$$

ahol α és $\beta \geq 0$ állandók, a két véletlen tag közötti korrelációt pedig a továbbiakban ρ jelöli.[13] A kérdés ugyanaz, mint az eddigi esetekben, a válasz azonban eltér attól. Most is két kockázati tényezőnk van, azonban Johnson és Shanno ahelyett, hogy a közömbösségekkel, vagy éppen a korreláció értékének megválasztásával próbálták volna megoldani a problémát, feltették, hogy létezik olyan termék, aminek az értéke a volatilitás függvénye. Így létezik olyan termék, minek értékét a

$$dP = \mu_P P\,dt + \sigma_P P^{\beta}\,dw_P \qquad (39.)$$

képlet írja le. Ebben az esetben továbbra is kialakítható, immár az alaptermék, az opció és a volatilitásra szóló termék felhasználásával a kockázatmentes portfólió. A Black – Scholes differenciálegyenlet a következő formát ölti:

[13] Vegyük észre, hogy $\mu_s = \sigma_S = 0$ és α=1 helyettesítéssel éppen a Black – Scholes egyenletet kapjuk vissza.

$$\frac{\partial f}{\partial t}+rS\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^{2\alpha}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}+\left(\phi\sigma+\frac{\xi\sigma^\beta}{\sigma_P P^{\beta-1}}\left(r-\mu_P\right)\right)\frac{\partial f}{\partial\sigma}+\frac{1}{2}\xi^2\sigma^{2\beta}\frac{\partial^2 f}{\partial\sigma^2}+ \\ +\rho\xi\sigma^{1+\beta}S^\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial S\partial\sigma}-rf=0 \qquad (40.)$$

A 40. differenciálegyenlet megoldását Johnson és Shanno Scotthoz hasonlóan Monte Carlo szimulációval végezték. Két, egymással ρ korrelációban lévő véletlen folyamatot generálva 10 000 szimuláció lefuttatásával határozták meg az opciók értékét.[14] Céljuk nem a Black – Scholes értéktől való eltérés mérése, vagy becslése volt, hanem azt vizsgálták, hogyan függ az opciók értéke a kötési árfolyamtól és a két folyamat korreláltságától. Az egyes értékeket gyakran nem abszolút értékben határozták meg, hanem a Black – Scholes képlet alapján számított implicit volatilitással jelölték.

Azt találták, OTM call opciók esetén a korreláció növekedése az implicit volatilitást növelte, míg ATM opcióknál lényegében nem volt hatással rá, illetve hosszabb futamidő esetén némileg csökkentette azt. Eredményük annyiban tehát hasonlít Scott eredményéhez, hogy a korrelációs együttható és az implicit volatilitás nem függetlenek egymástól.

Johnson és Shanno megoldása mindamellett, hogy érdekes, és egy jó példáját adja a Monte Carlo szimuláció alkalmazásának, azzal a meglehetősen kemény feltevéssel él, hogy a volatilitás kereskedett termék, ami nem feltétlenül igaz.

II.4.5. Naik ugrásos volatilitás modellje[15]

Az eddigi folyamatok mindegyike vagy egy tiszta Brown mozgást, vagy egy átlaghoz visszahúzó folyamatot tételezett fel a volatilitásról. Naik ezzel szemben megengedte, hogy a volatilitás ne folytonosan változzon, hanem időnként véletlenszerűen egy másik értékre ugorjon (Naik [1993]). Feltette továbbá, hogy ezekben az időpontokban nemcsak a volatilitás értékében, hanem az alaptermék árát leíró folyamatban is szakadások vannak. Ettől persze a részvényárfolyam és volatilitás korrelálttá válnak.

[14] A szimuláció során a két folyamat „driftjét” egyenlővé tették a kockázatmentes hozammal, az így kapott értékek átlagát pedig a kockázatmentes hozammal visszadiszkontálva számították a call opciók értékét.

[15] Rebonato [1999] Naiknak ezt modelljét a determinisztikus, a szemi-sztochasztikus és a sztochasztikus volatilitás mellett külön negyedik csoportként kezeli. Mivel a sztochasztikus volatilitás modellek között én eddig sem különböztettem meg a volatilitás alakulását meghatározó sztochasztikus folyamat jellegét, ezért a továbbiakban ezt a modellt a harmadik csoport tagjaként kezelem.

Naik két esetet különböztetett meg. Az egyik esetben a volatilitás ugrásából származó kockázat diverzifikálható, azaz az ugrás léte a részvény árfolyamát nem befolyásolja, a piac ezt a kockázatot nem árazza be. A másik megoldásban a volatilitás ugrásának kockázata közvetlenül hat a részvény árfolyamára.

Zárt árazási képletet csak arra az esetre tudott megadni, mikor a volatilitás két lehetséges értéket vehet fel, azaz lehet magas, vagy alacsony. Ha ennél több kimenet lehetséges, zárt képlet nincs, az árazás, mint azt Naik be is mutatta, Monte Carlo szimulációval lehetséges. Nézzük az előbbi esetet! A részvényárfolyam alakuljon a következő folyamat szerint:

$$dS(t) = \mu(t)S(t-1)dt + \sigma(t)S(t-1)dz + \left(e^{y_1(t)} - 1\right)\left(dN(t) - \gamma(t)dt\right) \quad (41.)$$[16]

ahol $y_1(t)$ a részvénynek a volatilitás ugrása esetén realizált hozama[17], dN(t) a „számláló” folyamat, amelynek értéke eggyel változik minden alkalommal, mikor a volatilitás értékében ugrás következik be, míg γ az ugrás gyakorisága.[18]

Minden derivatív értéke kockázatmentes világbeli várható értékének jelenre diszkontált értéke. Ezt Naik a Radon – Nikodym[19] derivatívok segítségével írta át:[20]

$$f(t) = e^{-r(T-t)}E_t^Q g(S(T)) = \frac{e^{-r(T-t)}E_t[\omega(T)g(S(T))]}{\omega(t)} \quad (42.)$$

ahol Q a kockázatmentes mérték, $\omega(T)$ a Radon – Nikodym derivatív értéke a T időpontban, továbbá $\omega(t) = E_t\omega(T)$, míg g(S(T)) a derivatív kifizetési függvénye.[21] Az árazás problémáját így visszavezette a Radon – Nikodym deriváltakra. Azonban ezek is leírhatóak egy folyamattal, ennek ismeretében pedig bármilyen futamidejű derivált árazhatóvá válik a 42. egyenlet felhasználásával. Ez a folyamat a következő lesz:

$$d\omega = \eta_0(t)\omega(t-1)dz + \eta_1(t)\omega(t-1)[dN(t) - \gamma(t)dt] \qquad \eta_1(t) > -1 \quad (43.)$$

---

[16] A továbbiakban alapvetően Naik jelölését követem. Ekkor viszont a zárójeles t érték nem az időtől való függést, hanem az adott időszaki értéket jelöli. Így a t-edik időszaki részvényárfolyam változás például az előző időszaki árfolyam várható hozammal növelt értékét adja, és az adott időszakban érvényes volatilitás értékétől függ.

[17] Amennyiben pl. a volatilitás és a részvényárfolyam ellentétesen változnak ugrás esetében y_1(felfelé)< 0 <y_1(lefelé).

[18] Az ugrás gyakoriságát a szakirodalomban általában λ jelöli. Mivel azonban ezzel korábban a kockázat piaci árát jelöltem, a továbbiakban a γ jelölést használom.

[19] A Radon – Nikodym derivatív értéke $\omega(T) = dQ/dP$, részletesebben lásd Baxter – Rennie [1998] 63-68. oldal.

[20] Itt Naik azt használja fel, hogy a Radon – Nikodym derivált esetén igaz, hogy $E^Q(X_T) = \frac{E^P(\omega(T)X_T)}{\omega(t)}$, ahol Q a kockázatmentes, P a valós világbeli valószínűségeloszlást jelöli, míg X_T a származtatott ügylet lejáratkori kifizetését jelöli. Részletesebben lásd Baxter – Rennie [1998] 63-68. oldal.

[21] Call opciónál például max(0;S-K).

ahol $\eta_0(t)$ a Brown, míg a $\eta_1(t)$ az ugrásos folyamat kockázatának piaci áraként fogható fel. A derivatívok árát így Naik egészen a kockázat piaci áráig vezette vissza. Itt pedig már az a kérdés tehető fel, hogy vajon a kockázat diverzifikálható-e, illetve, hogy van-e piaci ára. Úgy találta, hogy mivel a részvény, azaz az alaptermék kereskedett, a kockázat árát leíró összefüggés a következőképpen módosul:

$$-\left[\eta_0(t)\,\sigma(t) + \gamma(t)\,\eta_1(t)\left(e^{y_1(t)}-1\right)\right] = \left[\mu(t) - r\right] \qquad (44.)$$

Abban az esetben, ha a *volatilitás kockázata diverzifikálható* $(\eta_1(t)=0)$, és a részvényárfolyam folytonos, azaz nincsenek benne a volatilitás változással egy időben ugrások $(y_1(t)=0)$, a K kötési árfolyamú európai call opció ára a következő:

$$C(S,\sigma_{magas},t) = \int_0^{(T-t)} C^*\left(S,K,r,T-t,\sqrt{s(x)/(T-t)}\right)\, p\left(x\middle|\sigma_{nagy}\right)dx \qquad (45.)$$

ahol C* egy call opció ára olyan feltevések mellett, hogy az x értékére teljesül $0 \le x \le T-t$, továbbá $s(x) = \sigma_{nagy}^2 x + \sigma_{kicsi}^2((T-t)-x)$, míg $p\left(x\middle|\sigma_{nagy}\right)$ egy feltételes sűrűségfüggvény, ami azt írja le, hogy az adott időpontban mekkora valószínűséggel nagy a volatilitás, feltéve, hogy kezdetben is magas volt.

A képlethez néhány megjegyzést kell tenni. Egyrészt a fenti egyenlet akkor igaz, ha S(t-1)=S, és σ(t-1)=σ_{nagy}. Amennyiben a kezdő időpontban a volatilitás értéke alacsony, a 45. egyenlet úgy alkalmazható, hogy abban a volatilitás értékeknél annak alacsony értékét használjuk.

A másik, talán lényegesebb megjegyzés a Hull – White modellel való összevetéskor adódik. Vegyük észre, hogy Naik megoldása sokban hasonlít Hull és White eredményéhez. Itt is egy Black – Scholes ár várható értéke szolgáltatja a megoldást. Ez a Black – Scholes érték pedig úgy számítható ki, hogy a volatilitás helyén annak átlagát szerepeltetjük. Továbbá az is igaz, hogy a várható értéket egy, a volatilitás időbeli eloszlását leíró sűrűségfüggvénnyel számítjuk. Az alapvető eltérés az, hogy ott az integrál a volatilitás, itt azonban az idő szerint történik. Ez azonban nem jelent lényegi különbséget, hiszen mindkettő a volatilitás alakulását hivatott bemutatni.

Naik általánosítja a 45. egyenletet. Ez ugyanis csak vételi jog esetére adta meg a megoldást. Tetszőleges g(S(T)) kifizetési függvény esetén a derivatív értéke:

$$f(S,\sigma_{nagy},t) = e^{-r(T-t)} \int_0^{T-t} \int_{-\infty}^{\infty} g\left[S\,e^{r(T-t)-\frac{1}{2}s(x)+y\sqrt{s(x)/T-t}}\right] n(y)\, p\left(x\middle|\sigma_{nagy}\right)dy\,dx \qquad (46.)$$

ahol az n(y) a standard normális eloszlásfüggvény, a többi jelölés pedig a 45. egyenlet jelöléseinek megfelelő.

Naik a fedezési eljárást is megadja a diverzifikálható volatilitás kockázat esetére. Hogy a piac teljes legyen, a részvény és a kockázatmentes eszköz mellé egy másik – nem redundáns – opcióra is szükség van. Jelölje a korábbiaknak megfelelően C a fedezendő opció, C' pedig a fedezésre felhasznált másik opció értékét. A kockázatmentes portfólió felállításához a következő fedezeti arányok szükségesek:

I. a másik opcióból:

$$\Delta_{opció}(t) = \frac{C\left(S,\sigma_{kicsi},t\right) - C\left(S,\sigma_{nagy},t\right)}{C'\left(S,\sigma_{kicsi},t\right) - C'\left(S,\sigma_{nagy},t\right)} \qquad (47.)$$

II. az alaptermékből:

$$\Delta_{részvény}(t) = \frac{\partial C'\left(S,\sigma_{nagy},t\right)}{\partial S} - \Delta_{opció}(t)\frac{\partial C\left(S,\sigma_{nagy},t\right)}{\partial S} \qquad (48.)$$

III. kockázatmentes kötvényből:

$$\left[C'\left(S,\sigma_{nagy},t\right) - \Delta_{részvény}(t)S - \Delta_{opció}(t)C\left(S,\sigma_{nagy},t\right)\right] / B(t) \qquad (49.)$$

ahol B(t) a T időpontban lejáró elemi kötvény t időpontbeli értéke.

Mivel a volatilitás értékében bekövetkező változás ugyanolyan módon hat a két opció értékére, és mivel az alaptermék árában bekövetkező változást a részvény darabszámának módosításával fedezzük, az opciók száma a fedezet során nem változik a volatilitás függvényében. A részvény és a kockázatmentes befektetés értéke tehát módosulni fog, az opciók száma azonban nem.[22]

Abban az esetben, *ha a volatilitás kockázata nem diverzifikálható*, nem adható ennyire „egyszerű" megoldás. Ebben az esetben a volatilitás kockázata hatással van a részvények, illetve a piaci portfólió elvárt hozamára. Így kockázati együtthatók, azaz $\eta_0(t)$ és $\eta_1(t)$ a volatilitás függvényei lesznek.

Ekkor zárt képlet nem adható, az opció – és így minden derivatív ügylet értéke – a 46. egyenlet felhasználásával numerikus eljárással származtatható. Naik bemutatja, hogy a Brown mozgás egy binomiális random walk-kal, míg az ugrásos volatilitás folyamat egy diszkrét Markov lánccal közelíthető.

[22] Természetesen a két opció thetája nem feltétlenül azonos, így az opciók közötti fedezeti arány is módosulni fog az idő múlásával párhuzamosan. A véletlen tényezők azonban nem befolyásolják ezt az arányt.

II.1. Bevezetés

A dolgozat első fejezetében az időben változó volatilitás feltételezése mellett felvázolt opcióárazási modelleket vettem sorra. Bemutattam a probléma megoldására született determinisztikus, szemi-sztochasztikus és sztochasztikus modelleket. Mint láttuk, az utóbbira alapvetően folytonos megoldásokat adtak, feltéve a részvényárfolyam és a volatilitás valamilyen szintű összefüggését.

A továbbiakban egy „visszafelé" haladó modellcsoportot mutatok be, illetve elemzek. A most sorra kerülő modellek az előző fejezet szemi-sztochasztikus modellcsaládjához tartoznak, logikájukban azonban fordítottak. Eddig a kérdés az volt, hogy adott árfolyam-folyamat esetén milyen opciós árat jegyezzünk, a továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy adott opciós árak milyen árfolyam modell eredményeként kaphatóak meg. Ha jobban tetszik, azt vizsgáljuk, mi volt a piaci fejében, mikor az opciók árát meghatározta.

A bemutatandó modellek között vannak binomiális és trinomiális modellek, illetve a véges differenciára emlékeztető megoldások. A közös bennük az, hogy mindegyikük felteszi, hogy a volatilitás értéke a részvényárfolyam függvénye, azaz a volatilitás alakulását meghatározó kockázati elem ugyanaz, mint amelyik a részvényárfolyam alakulását befolyásolja.

Mivel az első fejezetben bemutatott modellek alapvetően folytonosak, azok csak európai opciók árazását teszik lehetővé. A visszaszámított modellek segítségével viszont már amerikai opciók is árazhatóak lesznek időben változó volatilitás mellett. Azaz az ebben a fejezetben bemutatottak az előző fejezet folytatásaként is felfoghatóak.

Ezekkel a visszaszámított fákkal természetesen beárazhatóak más, ugyanezen kockázati tényezőtől függő termékek, pl.: egzotikus opciók is. Van olyan modell (pl.: Rubinstein modellje) aminek célja csak a lehetséges árfolyamok fájának felvázolása, más modellek (pl.: Derman és Kani modelljének) célja az ezen árfolyamokban benne rejlő volatilitás folyamat felvázolása. Amennyiben ezt is sikerül meghatározni, a fa akár volatilitásra szóló termékek árazása során is alkalmazható.

II.2. Implicit binomiális fák

Az implicit fák bemutatása során a legegyszerűbb modell irányából haladunk az egyre bonyolultabbak irányába. Ennek megfelelően előbb Rubinstein modelljét mutatom be, majd ezután kerül sorra a Derman – Kani modell.

Binomiális modell sokféleképpen definiálható annak függvényében, hogy milyen módon adjuk meg az emelkedés, illetve csökkenés mértékét, illetve annak valószínűségét. A modellek között az első, és mivel a lépésköz csökkentésével a Brown mozgáshoz tart, a legnépszerűbb a Cox – Ross – Rubinstein által kifejlesztett, ún. CRR modell (Cox – Ross – Rubinstein [1979]). A CRR modellben az emelkedés mértéke u (up) és a csökkenés mértéke d (down) egymás reciprokai, ahol az emelkedés mértéke, az u az

$$u = e^{\sigma \cdot \sqrt{t}} \qquad (1.)$$

képlet alapján határozódik meg. Az alábbiakban bemutatott modellek kiindulási alapja minden esetben ez a CRR modell, ezért a továbbiakban a binomiális és a CRR modell elnevezéseket gyakran szinonimaként kezelem, bár tudom, hogy ezen túl más binomiális modellek is ismertek.

II.2.1. A Rubinstein modell

A Rubinstein modell célja az opciók árából visszaszámítani, hogy milyen áralakulást feltételezett a piac, mikor a kérdéses opciós árakat meghatározta (Rubinstein [1994]). Ennek megfelelően a modell input paramétere az azonnali részvényárfolyam, az állandónak feltételezett kockázatmentes hozam és a piacon forgalmazott opciók ára, míg az output maga a binomiális fa modellje. Ahhoz azonban, hogy a fa felvázolható legyen, szükség van még egy valószínűségeloszlásra is.

Rubinstein azt feltételezi, hogy a piaci szereplők valamifajta ismerettel (vagy véleménnyel) rendelkeznek arról, hogy n periódus múlva az árfolyamok milyen eloszlást követnek. Az így számított fa n periódus hosszú lesz, és az n-edik periódus végén tapasztalt eloszlás éppen a feltételezett eloszlás lesz. Ezeket felhasználva a fa „végéről" elindulva számítjuk ki a korábban lehetséges árfolyamokat, illetve ezek bekövetkezésének valószínűségét.

A fenti logikának megfelelően a piacon forgalmazott opciók közül csak az n periódus múlva lejáró opciók lesznek a fontosak. A fa kiszámítása során vagy csak call, vagy csak put opciókat használt fel.[1]

A modell esetében a kérdés természetesen az, hogy honnan ismerik a piaci szereplők az n periódus múlva érvényes eloszlást. Rubinstein utalt arra, hogy előtte ezzel a témával már többben foglalkoztak[2], azonban egyik megoldást sem találta megfelelőnek saját modellje szempontjából.[3] Ezért maga is kialakított egy egyszerű eljárást.

Mivel a végső cél egy binomiális fa visszaszámítása, az induló valószínűség eloszláshoz is a binomiális modellt alkalmazta. Egy hagyományos, standard CRR modellből indult ki. Az ATM opciók implicit volatilitásának felhasználásával szerkesztett egy hagyományos CRR fát, majd ennek t_n időszakra érvényes árait és valószínűségeit tekintette a piaci szereplők fejében lévő induló valószínűségeloszlásnak.

Ez a valószínűségeloszlás azonban nincs összhangban az opciós piacon forgó opciók árával. Máshogyan fogalmazva ebben csak az ATM opciók implicit volatilitásának információja szerepel, magának a volatilitás mosolynak az információja nem. Ezért a cél az, hogy azt az eloszlást úgy módosítsuk, hogy az a piacon forgó opciók árával is összhangban legyen.

A modell eredményeként kapott fa természetesen nem lesz a hagyományos CRR fákhoz hasonlóan szabályos, az emelkedés és a csökkenés mértéke a fa egy-egy csomópontjában nem lesznek egymás reciprokai. Ennek oka természetesen az, hogy az eredményeket az opciók árából kiszámítható implicit volatilitás mosoly is befolyásolja.

A továbbiakban legyenek az n periódus múlva (a t_n időpontban) lejáró call opciók árai rendre C_1, C_2, … C_m illetve az ezekhez az opciókhoz tartozó kötési árfolyamok K_1, K_2, … K_m. Legyen a mai időpont t_0, a fa utolsó időpontját jelző jövőbeli időpont pedig t_n. Jelölje S_0 a mai, $S_{n,i}$ az n-edik periódus i-edik szintjén elhelyezkedő csomópontot. Legyen továbbá r a folytonosan számított kockázatmentes hozam, d pedig a folytonosan számított osztalékhozam.[4] Legyen P'_i (i=1-től n-ig) annak valószínűsége, hogy a fán az

---

[1] Mivel a call és a put opció ára a put-call paritáson keresztül kölcsönösen meghatározza egymást, Rubinstein természetesen nem vesztett információt ezzel az egyszerűsítéssel. Ugyanígy igaz, hogy amennyiben egy adott kötési árfolyamra a piacon nincsenek csak call vagy csak put opciók, a put – call paritás segítségével származtathatjuk a számunkra szükséges piaci árat.

[2] Így Longstaff illetve Shimko. Idézi Rubinstein [1994]

[3] Az első esetében a negatív valószínűségek elkerülhetetlenek voltak, míg a másik eljárást Rubinstein bonyolultnak találta.

[4] Rubinstein az opciók árazásához használt volatilitást a piacon lévő opciókból számított implicit volatilitások interpolálásával nyeri, akárcsak a későbbiekben bemutatott Derman – Kani szerzőpáros.

(n,i) pontba jutunk. Nevezzük ezt a továbbiakban kiinduló valószínűségeloszlásnak.[5] Jelölje P az opciós árak felhasználásával becsült valószínűséget. Legyen ez a továbbiakban a becsült valószínűség.

Mindezek ismeretében az első lépés egy, már a piacon jegyzett opciók árával is összhangban lévő valószínűségeloszlás meghatározása, azaz célunk az alábbi függvény megoldása:

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(P_i - P_i^{'}\right)^2 \to \min \qquad (2.)$$

A peremfeltételek pedig a következőek:

$$\sum_{i=1}^{n+1} P_i = 1 \text{ és } P_i \geq 0 \qquad (3.)$$

$$C_j = e^{-r(t_n - t_0)} \sum_{i=1}^{n+1} P_i \max\left(S_{n,i} - K_j, 0\right) \text{ ahol j=1, … m} \quad (4.)$$

$$S_0 = e^{-(r-d)(t_n - t_0)} \sum_{i=1}^{n+1} P_i S_{n,i} \qquad (5.)$$

A fenti célfüggvény megoldásával a valós, az árakban benne foglalt eloszláshoz eső legközelebbit kapjuk meg. A 3. egyenlet biztosítja, hogy a valószínűségek nulla és egy közé essenek, azaz „valódi” valószínűségek legyenek. A 4. azt biztosítja, hogy az eloszlás illeszkedjen a piachoz, azaz jól árazza az adott futamidejű opciókat. Az utolsó peremfeltétel szerint a jövőbeli várható értéknek az osztalékok figyelembe vételével jelenre diszkontált értéke egyezzen meg a mai árfolyammal. Ennek az utolsó feltételnek kettős szerepe van. Egyrészt ez biztosítja, hogy a kapott fa kockázatmentes legyen, hiszen csak a kockázatmentesség feltételezése mellet igaz, hogy a jövőbeli várható árfolyam megegyezik a határidős árfolyammal[6]. A másik szerepe az, hogy elérje, hogy a fa végéről előre felé haladva az utolsó lépésben éppen a mai árfolyamot kapjuk vissza.[7]

Fontos kérdés persze, hogy mennyiben torzítja a becslést az, hogy a standard CRR modell volt a kiindulási alapunk. Rubinstein úgy találta, hogy ez a piacon található opciók árának függvénye. Minél „sűrűbb” az opciók jegyzése, annál kevésbé függ a

[5] Ez tehát „a piac fejében lévő”, hagyományos CRR modell felírásával számított kiinduló valószínűségeloszlás.

[6] A téma részletesebb kifejtését lásd Berlinger [1998].

[7] Valójában Rubinstein eredeti cikkében ennél általánosabb megoldást ad. Az opciók árairól illetve a részvényárfolyamról felteszi, hogy a jegyzett vételi és eladási árfolyamok között van. Azaz olyan feltételek mellett is megadja a megoldást, amikor a piacon nem egyetlen árfolyam van. Ezt a továbbiakban nem vizsgálom.

végső eredmény a kezdeti feltételezésektől.[8] Ugyanez igaz a használt optimalizációs függvényre vonatkozóan is: megfelelő piaci információ esetén az általa is alkalmazott legkisebb négyzetek módszere alkalmas lesz a probléma megoldására.

A fenti eljárás alkalmazásával kiszámítható tehát egy, az opciós árakkal is összhangban lévő t_n időszakra érvényes valószínűségeloszlás. Ebből kell a fát visszafelé haladva megrajzolni. Hogy ezt meg tudja tenni, Rubinstein egy további feltételezéssel, az ún. binomiális utak függetlenségével (binomial path independence – BPI) él. Eszerint minden útnak, amelyik a fa egy adott csomópontjához elvezet, ugyanolyan a valószínűsége. A „becsült" valószínűségeloszlás egyes értékeit, azaz az egyes csomópontok bekövetkezésének valószínűségeit ennek megfelelően el kell osztani az abba a csomópontba vezető utak számával, így meghatározva egyetlen út befutásának valószínűségét.

Ennek megfelelően tehát több, egymással szorosan összefüggő valószínűséget használunk. P-vel jelöltük egy adott pont bekövetkezésének valószínűségét, azaz a *pont-valószínűséget*. Ebbe a pontba azonban több úton juthatunk el. Egy-egy úton való végighaladás valószínűségét nevezzük a továbbiakban *út-valószínűségnek*. A fa egy adott (n,i) pontjába N féle úton juthatunk el, ahol

$$N = \frac{n!}{i!\left(n-i\right)!} \qquad (6.)$$

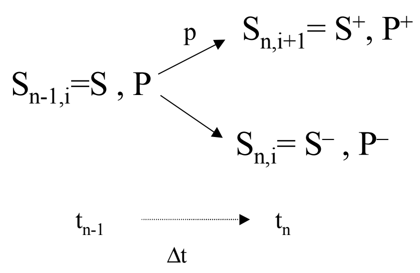
Ennek megfelelően minden egyes úton, ami az adott pontba visz

$$\frac{P_i}{N} = \frac{P_i i!\left(n-i\right)!}{n!} \qquad (7.)$$

út-valószínűséggel haladhatunk végig. Az is igaz ugyanakkor, hogy a fa egyik pontjából tovább haladva, a továbblépés valószínűségének (*emelkedés-valószínűség*) ismeretében az egyes pályák valószínűsége továbbra is ismert. Nézzük a következő ábrát!

[8] Pontosabban, ha az opciók száma elmarad a keresett csomópontok számától, a modell érzékeny lesz a kezdeti feltevésekre.

2. ábra[9]



Az (n-1,i) pontból biztosan tovább lépünk, p valószínűséggel felfelé, (1-p) valószínűséggel lefelé. Ennek megfelelően az alsó és a felső pontba vezető utak valószínűségének összege megadja az (n-1,i) pontba vezető út valószínűségét[10]:

$$P = P^- + P^+ \qquad (8.)$$

A felső pontba vezető út valószínűsége a következő módon származtatható:

$$P^+ = p \cdot P \to p = \frac{P^+}{P} = \frac{P^+}{P^- + P^+} \qquad (9.)^{11}$$

Ugyanakkor a valószínűségek és a második időpontbeli árak (S^+, S^-) ismeretében a forward egyenlet felhasználásával S, az első időszaki árfolyam is számítható:

$$S = e^{-(r-d)\Delta t}\left(pS^+ + (1-p)S^-\right) \qquad (10.)$$

A fent leírtak egyben azt is megadják, hogyan építsük fel a Rubinstein féle binomiális fát. Ismerve a végső valószínűség eloszlást (azaz az árakat és a valószínűségeket) visszafelé haladunk a fán. Kiszámítjuk az utolsó előtti periódus emelkedéseinek és csökkenéseinek valószínűségét, azaz a kis p-ket (9. egyenlet), majd ezek ismeretében 10. felhasználásával kiszámítjuk az egy periódussal korábbi árfolyamokat, illetve 8. alapján az ezekhez tartozó valószínűségeket, a nagy P-ket. Ahogy arról már szó volt, a 5. egyenlet fogja a 10. segítségével biztosítani, hogy visszafelé haladva az azonnali ár megegyezzen az S_0 árfolyammal.[12]

A Rubinstein modell egyszerűsége és könnyen áttekinthetősége azonban elfedi a **módszer néhány hibáját**. Bár az, hogy a rövidebb futamidejű opciókat nem használja fel, egyszerűsíti a modellt, és a gyakorlatban is jól alkalmazhatóvá teszi, ezen információk kihagyása hiányossá is teszi a modellt. Az ezen opciókból visszaszámított

[9] Forrás: Rubinstein [1994]

[10] Figyeljünk oda arra, hogy kétféle valószínűségről van szó! Kis betűvel az egyik pontból a másikba való elmozdulás valószínűségét jelöljük, a nagy betű pedig az adott út valószínűségét jelenti!

[11] Ez természetesen azt jelenti, hogy az emelkedés-valószínűségek szorzata adja az út-valószínűséget. Ezt a kockázatmentes hozammal osztva a jól ismert Arrow – Debreu árakat kapjuk vissza.

rövidebb távú árfolyam alakulás ugyanis nem feltétlenül esik egybe azzal az információval, ami a rövidebb futamidejű opciókban van benne.

A modell másik gyengéje az ugyanazon pontba vezető utak azonos valószínűségének feltételezése. Ez a feltételezés valós körülmények között aligha tartható. Ezen a ponton egészítette ki, illetve általánosította Rubinstein modelljét Jackwerth [1997]. Ő egy súly függvényt rendelt az utakhoz oly módon, hogy eljárásának a Rubinstein modell egy lineáris súlyozású speciális esete.

II.2.2. A DK-modell[13]

A Derman és Kani eljárás, Rubinstein modelljéhez hasonlóan az opciók árát ismertnek véve, az opciók árából határozza meg a binomiális fa minden egyes pontját, illetve azt, hogy milyen módon és milyen valószínűséggel juthatunk el oda (Derman – Kani [1994]). Mivel a fa alakjára ebben az esetben is az opciók árából következtetünk vissza, semmi sem garantálja, hogy az emelkedés és csökkenés mértéke minden egyes pontban azonos lesz. Ennek megfelelően az adott ponthoz tartozó volatilitás, az ún. helyi volatilitás minden egyes periódusban más és más lehet. Ebből viszont az következik, hogy a fa elveszti szép szabályos alakját, „hullámzóvá" válik. A Derman – Kani modellben éppen ezt a „hullámzó" fát próbáljuk meg az opciók árából kikövetkeztetni, és ez a minden periódusban változó volatilitás érték lesz a helyi volatilitás.

A fa felépítését a nulladik időpontból, azaz ma ismert azonnali árfolyamból indítjuk, majd innen haladunk előre periódusról periódusra, minden egyes időbeli lépést azonos Δt nagyságúnak tételezve fel. Az általánosság kedvéért tegyük fel, hogy az első n lépést már megtettünk, és most lépünk tovább az n+1-dik időpontra. Ennek megfelelően ismertek az n-edik időszak árai, illetve ezen árak bekövetkezésének valószínűségei. Legyen a folytonosan számított kockázatmentes forward hozam r. Ennek természetesen szintén adhatnánk egy indexet, hiszen forward hozamról van szó, ami minden egyes Δt lépés után módosul. A továbbiakban ezzel a kérdéssel az egyszerűség kedvéért nem foglalkozunk, feltesszük, hogy a kockázatmentes hozam minden periódusban ugyanakkora.[14]

---

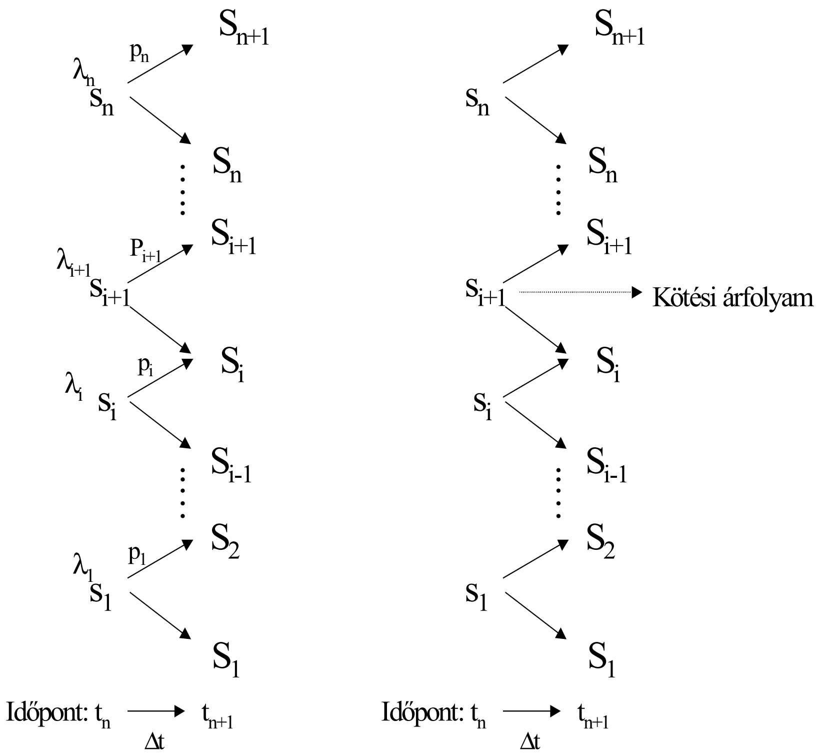
[12] Rubinstein nem vetette el annak lehetőségét sem, hogy a piaci szereplők, amennyiben saját várakozásuk van az n periódus múlvai valószínűségeloszlásra, azt figyelembe is vehessék. Egy ilyen eljárást részletesebben mutatott be Chriss [1997]. Részletesebben lásd Zsembery [2003].

[13] Az alábbi rész Derman – Kani [1994] cikke alapján készült.

[14] Vegyük észre, hogy ez a tiszta várakozási elmélet esetében gyakorlatilag a vízszintes hozamgörbe feltételezésével azonos.

Az n+1-dik időpontban összesen n+1 csomópontunk van, és azokban n+1 ismeretlen S_i árfolyam. Jelölje tehát i a szintet, azaz azt, hogy az n+1-dik időszakban milyen „magasan" vagyunk. Legyen S_1 a legalacsonyabb, S_{n+1} pedig a legmagasabb árfolyam ebben a periódusban. Jelölje s_i az n-edik időszakban érvényes (már ismert) spot árfolyamot az i-edik szinten.

3. ábra[15]



Jelölje p_i annak valószínűségét, hogy az árfolyam az n-edik időszaki i-edik szintről emelkedik. A csökkenés valószínűsége természetesen $1-p_i$. Legyen továbbá λ_i az (n,i) csomópontban érvényes Arrow – Debreu (a továbbiakban AD) ár.[16] A fa felépítését és a fenti változók elhelyezkedését a 3. ábra bal oldala mutatja

Összesen tehát 2n+1 változónk van: n+1 jövőbeli részvényárfolyam, és n darab valószínűség. Ennek meghatározásához, hogy az egyenletrendszer jól determinált legyen, éppen 2n+1 egyenletre van szükségünk. Ehhez fel fogjuk használni az n darab határidős árfolyamot (F_i), valamint n darab s_i kötési árfolyamú opció árfolyamát.

A határidős árfolyamok számítása egyszerű, legyen az s_i-ből számított forward árfolyam[17]

[15] Forrás: Derman – Kani [1994]

[16] Ezt a korábbi valószínűségek szorzatának diszkontált értékeként fogjuk megkapni minden egyes időpontban. Az Arrow – Debreu árakat szokták még állapotáraknak, vagy Green függvénynek is nevezni.

[17] Az osztalékoktól ezen a ponton tekintsünk el

$$F_i = s_i e^{r\Delta t} \qquad (11.)$$

Az opciókról feltételezzük, hogy ma bocsátják ki őket, és az n+1-dik periódusban fognak lejárni, az árazásukhoz felhasznált volatilitás pedig éppen a piacon meghatározott implicit volatilitás. Ha a piacon nem jegyeznek adott lejáratra és kötési árfolyamra opciót, mi magunk határozzuk meg a hiányzó opció árát, ezt szerepeltetve „piaci” értékként. Az árazáshoz szükséges egyetlen ismeretlen paraméter a volatilitás, amit az implicit volatilitás függvény felhasználásával kapunk meg.

Kötési árfolyamuk s_i, azaz mindig az abban a pontban érvényes árfolyam, ahonnan továbblépni szándékozunk (ld. 3. ábra jobb oldala).[18] Derman és Kani OTM opciók felhasználását javasolja, mert abban már csak a volatilitás és az idő értéke szerepel.[19] Ezért a „középső” (azaz a mai) árfolyam alatt a put, attól felfelé a call opciókat fogjuk használni.[20]

Adva van már tehát 2n egyenlet, n határidős és n opciós árfolyam. A hiányzó egy szabadságfokot a CRR modell fogja megadni. Használjuk fel a CRR modell azon feltevését, hogy a fel-, illetve a lefelé a mozdulás mértékének szorzata egy (centring condition).

A számítás során minden periódusban középről indulunk. Ha az adott periódusban páratlan pont van, a középső árfolyam a mai árfolyammal lesz azonos. Ha páros, a két középső árfolyam logaritmusának számtani átlagát tesszük egyenlővé a mai árfolyam logaritmusával, azaz[21]

$$\ln S_0 = \frac{\ln S_1 + \ln S_2}{2} \rightarrow \ln S_0^2 = \ln\left(S_1 \cdot S_2\right) \rightarrow S_0^2 = S_1 \cdot S_2 \qquad (12.)$$

Nézzük ezek után a fát meghatározó egyenleteket! A fa meghatározásánál a kérdés a valószínűségek és az árfolyamok megadása lesz, ezért a cél mind a határidős ügyletek, mind az opciók esetében az, hogyan tudjuk azok értékét e két tényező függvényében kifejezni. Ennek során felhasználjuk, hogy az opciók árából visszaszámított fa

[18] Természetesen az opciók „piaci” árát többféleképpen is megkaphatjuk. Használhatjuk a binomiális és a Black – Scholes képletet is. Rebonato [1999] bemutatta, hogy a folytonos megközelítés használata, bár kétségkívül gyorsabb lehet, zajt okoz, numerikus hibát generál.

[19] Ezeknek az opcióknak már csak görbületi értékük van. Részletesebben lásd Száz [1999], illetve Száz [2003].

[20] Mert a mai árfolyam alatti kötési árfolyamú putok, illetve az afeletti kötési árfolyamú callok lesznek OTM-ek.

[21] Persze páratlan pont esetén más lehetőségünk is lehetne. Derman és Kani utal rá, hogy a „középső árfolyam” lehet a mai azonnali, de lehet az adott időpontra számított határidős árfolyam is. A továbbiakban Derman és Kani eredeti modellje szerint haladva használjuk fel a jelenlegi azonnali árfolyamot.

kockázatmentes. Így igaznak kell lenni annak is, hogy a jövőbeli, prompt árfolyam várható értéke megegyezik a határidős árfolyammal. Azaz:

$$F_i = p_i \cdot S_{i+1} + (1 - p_i) \cdot S_i \qquad (13.)$$

Mivel a határidős árfolyamok értékét a 11. egyenletben lévő képlettel kiszámolhatjuk, a 13. egyenletben az ismeretlen éppen a keresett valószínűség, illetve a jövőbeli (n+1 periódusbeli árfolyam) lehet.

Az opciók ára a piacról ismert. A cél ezek értékét a valószínűségek és a jövőbeli részvényárfolyamok függvényében felírni, hogy ezáltal utóbbiak számíthatóak legyenek. Az opciók értékének felírásához ennek megfelelően az Arrow – Debreu (AD) papírokat, illetve azok árát fogjuk felhasználni.[22] Így az opció értéke:

$$C(K, t_{n+1}) = e^{-r\Delta t} \sum_{j=1}^{n} \left[\lambda_j p_j + \lambda_{j+1} (1 - p_{j+1}) \right] \max(S_{j+1} - K, 0) \quad (14.)$$

Mivel a cél a fenti egyenlet jobb oldalán szereplő értékek explicit módon történő kifejezése, ezért az egyenletet át kell rendeznünk. A $K=s_i$ helyettesítést elvégezve, és a fenti képletben az S_{i+1} értékhez tartozó kifizetést elkülönítve, továbbá felhasználva a határidős árfolyamokra vonatkozó 13. egyenletet a 14. egyenlet a következőképpen módosul:[23]

$$e^{r\Delta t} C(s_i, t_{n+1}) = \lambda_i p_i (S_{i+1} - s_i) + \sum_{j=i+1}^{n} \lambda_j (F_j - s_i) \qquad (15.)$$

Mivel a szumma jel mögött csupa ismert tényezőt található így annak értéke minden pontban a már meglévő adatokból számítható. Ezért a továbbiakban ezt az egyszerűség kedvéért csak egy Σ-val fogjuk jelölni.

Mivel tehát mind a határidős árfolyamok, mind az opciók ára ismert, a 13. és a 15. egyenleteket szimultán módon megoldhatjuk, kifejezve S_{i+1}, valamint p_i értékeket.

$$S_{i+1} = \frac{S_i \cdot \left[e^{r\Delta t} \cdot C(s_i, t_{n+1}) - \Sigma \right] - \lambda_i s_i (F_i - S_i)}{\left[e^{r\Delta t} C(s_i t_{n+1}) - \Sigma \right] - \lambda_i (F_i - S_i)} \qquad (16.)$$

$$p_i = \frac{F_i - S_i}{S_{i+1} - S_i} \qquad (17.)$$

[22] Ne feledjük, hogy az opciók nem az n-edik, hanem az n+1-edik időszakban járnak le, míg az ismert AD papír árak az n-edik időszakhoz tartoznak. Ezért az opciók árának felírásánál az AD árakat a valószínűségek és a diszkontfaktor felhasználásával kell átszámítani.

[23] Legyen $K=s_i$. Írjuk fel a lehetséges árfolyamokat a következő módon:
$S_1 < S_2 < \ldots < S_{i-1} < s_i < S_{i+1} < \ldots < S_{n+1}$
Ennek megfelelően az opció kifizetésfüggvénye s_i alatt, azaz j=i-ig nulla lesz.

Ha S_i értékét ismernénk, az S_{i+1} és p_i értékeket, illetve ez utóbbiból λ_i értékeket könnyen kiszámíthatnánk. Ezt a hiányzó szabadságfokot a CRR modell már említett centralitási feltétele fogja szolgáltatni.

Az eljárás tehát a következő: ha az adott időperiódusban páratlan csomópont van, a középső értéket tegyük egyenlővé a mai árfolyammal, így S_i adott, a fán fel-, illetve lefelé haladva a szükséges értékek meghatározhatóak. Amennyiben az adott időszakban páros elemünk van, a 12. egyenletet fogjuk felhasználni.

Legyen $S=s_i$, azaz az előző periódus – ami páratlan elemet tartalmaz – középső pontja. Ezt a feltételt felhasználva és a 16. egyenletbe helyettesítve

$$S_{i+1} = \frac{S\left[e^{r\Delta t}C\left(S, t_{n+1}\right) + \lambda_i S - \Sigma\right]}{\lambda_i F_i - e^{r\Delta t}C\left(S, t_{n+1}\right) + \Sigma}, \text{ ahol } i=n/2. \qquad (18.)$$

A középső pontok alatti értékeket, mint arról már szó volt, nem a call, hanem a put opciókkal határozzuk meg. A képlet ebben az esetben a következőképpen módosul:

$$S_i = \frac{S_{i+1}\left[e^{r\Delta t}P\left(s_i, t_{n+1}\right) - \Sigma\right] + \lambda_i s_i\left(F_i - S_{i+1}\right)}{\left[e^{r\Delta t}P\left(s_i, t_{n+1}\right) - \Sigma\right] + \lambda_i\left(F_i - S_{i+1}\right)} \qquad (19.)$$

ahol Σ ebben az esetben a put opciónak megfelelően a

$$\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j\left(s_i - F_j\right) \qquad (20.).$$

Ha ezeken a lépéseken végigmegyünk, sikerül a volatilitás mosoly felhasználásával, azzal összeillő módon felvázolni a kockázatmentes binomiális fát.

Ebből a fából aztán a részvényárfolyamok és valószínűségek segítségével az adott pontban érvényes helyi volatilitás (local volatility) már kiszámítható. Legyen a mai árfolyam S_0, áremelkedés esetén a következő időszaki árfolyam legyen S_u, csökkenés esetén S_d. Az éves szintre arányosított hozam ezekben az esetekben:

$$r = \frac{1}{t_1 - t_0}\ln\left(\frac{S_u}{S_0}\right), \text{ illetve } \qquad r = \frac{1}{t_1 - t_0}\ln\left(\frac{S_d}{S_0}\right) \qquad (21.)$$

Innen a várható hozam:

$$r = \frac{p}{t_1 - t_0}\ln\left(\frac{S_u}{S_0}\right) + \frac{1\text{-p}}{t_1 - t_0}\ln\left(\frac{S_d}{S_0}\right) \qquad (22.)$$

A hozam helyi szórása pedig:

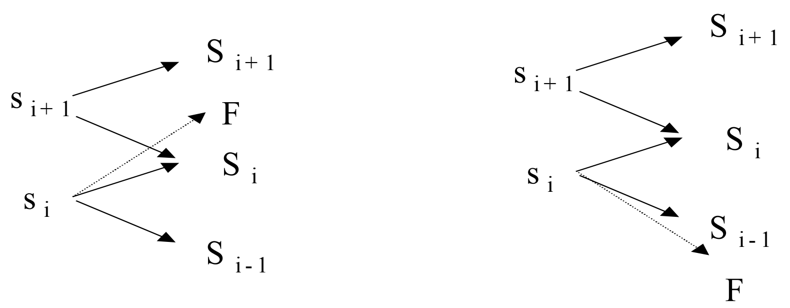
$$\sigma_{loc} = \frac{1}{\sqrt{t_1 - t_0}}\sqrt{p(1-p)}\ln\left(\frac{S_u}{S_d}\right) \qquad (23.)$$

Ennek megfelelően a fa, illetve az egyes csomópontokhoz tartozó valószínűségek ismeretében a helyi volatilitások kiszámíthatóak minden egyes pontban.[24]
A fenti eljárással a piaci árakhoz illeszkedő kockázatmentes fát kaptunk. Gyakorlatilag azt határoztuk meg, hogy a piac milyen jövőbeli részvényárfolyam mozgást „tervez”. Ennek megfelelően a kiszámított árfolyamokból és valószínűségekből meghatározható, hogy a piac milyen jövőbeli kockázatmentes valószínűség eloszlást használ az opciók árazása során.[25]

II.2.2.1. A DK fa arbitrázsmentessége

A kérdés ezek után az, hogy a fa arbitrázsmentes-e, azaz igaz-e az, hogy a valószínűségeknek nulla és egy közé esnek. Ez a kijelentés azonos azzal, hogy a határidős áraknak, amelyek a fa kockázatmentes jellege miatt megegyeznek a jövőben várható azonnali árfolyamokkal, a következő időszak felső és alsó árfolyamai közé kell esniük (ld. 17. egyenlet). Ha a piaci adatokból számított részvényárfolyam a fenti feltételt megsérti, valami mással kell helyettesíteni. Több fajta megoldás létezhet, amivel a „rossz” valószínűséget egy „jó” valószínűségre cseréljük ki. Egy természetes, és a CRR modellhez illeszkedő megoldás lehet, ha az árfolyamot úgy módosítjuk, hogy a két árfolyam közötti távolság az előző időszak meghatározott pontjai közötti távolsággal legyen azonos.

4. ábra[26]



Ennek megfelelően, ha a határidős árfolyam a felső árfolyamnál is nagyobb (4. ábra bal oldala), a korrigált felső árfolyam legyen:

$$S_i' = \frac{s_{i+1} S_{i-1}}{s_i} \qquad (24.)$$

[24] A helyi volatilitás számításáról részletesebben lásd Száz [1999]
[25] A fentiekben elmondottak arra a feltevésre épültek, hogy az implicit fát európai opciók felhasználásával számítjuk ki. Chriss bemutatja a fenti modell egy olyan kiterjesztését, ahol az input árak mind európai, mind amerikai opciók árai lehetnek. Chriss [1997] 369-379 oldal

Ha a határidős árfolyam az alsó árfolyamnál kisebb lenne (4. ábra jobb oldala), a korrigált alsó árfolyam legyen

$$S_i^{'} = \frac{S_{i+1} s_i}{s_{i+1}} \qquad (25.)$$

Előfordulhat azonban olyan eset is, amikor ez a képlet továbbra sem szolgáltat „jó", nulla és egy közé eső valószínűségeket. Ebben az esetben az árfolyamot más módszerrel kell változtatni oly módon, hogy továbbra is ügyelünk arra, hogy a határidős árfolyam éppen a kívánt tartományba essen.[27] Természetesen ha túl sok csomópontban hajtunk végre efféle módosítást, az nagymértékben torzítja a modellből nyert információt. Így azzal a kiinduló célkitűzéssel ütközünk, hogy minél több piaci információt gyűjtsünk össze.[28]

A negatív valószínűségek kiküszöbölésének egy másik lehetséges megoldása, ha binomiális helyett trinomiális fákat alkalmazunk az implicit információk feltárására. Ezt Derman, Kani és Chriss végezték el.[29]

II.2.3. A Derman – Kani és a Rubinstein eljárások különbségei

A most bemutatott két eljárás sok tekintetben hasonlít, nagyon sokban azonban különbözik egymástól.

Derman és Kani egy egész sor opció árát használja fel az implicit fa meghatározásához, míg Rubinstein csak az adott időpontban lejáró opciókét. Ennek megfelelően az ő modelljéből származó információk nem függenek a rövidebb lejáratú opciók árától, így azok árazásához, értékeléséhez a Rubinstein féle fa felhasználható.

Céljuk is más. *A DK szerzőpáros célja* nemcsak egy implicit fa, hanem az ahhoz kapcsolódó *helyi volatilitás függvény feltárása*. Ezért használnak OTM opciókat. Céljuk az, hogy minél kevesebb feltételezéssel éljenek a részvényárfolyam által követett folyamatot illetően, de minél többet tudjanak meg a volatilitásról.

Rubinstein modellje a BPI feltételezést figyelembe véve sokkal keményebb feltételezésekkel indít. Ugyanakkor az ő eljárása egyszerűbb, és nem kell attól sem

[26] Forrás: Derman – Kani [1994]

[27] Az alkalmazandó eljárásokról részletesebben lásd Chriss [1997] 383. oldal

[28] Természetesen a rossz csomópontok kicserélésének hatása a fa különböző pontjain nem azonos. Ha a fa szélén hajtunk végre korrekciót, a hatás kisebb lesz. Ezekhez az értékekhez ugyanis kisebbek a csomópontokhoz tartozó Arrow – Debreu árak, mivel ezen esetek bekövetkezésének valószínűsége is kisebb. Ritkábban jutunk el ezekbe a pontokba, így az opció értékére gyakorolt hatásuk is kicsi.

[29] Ez a fejezet későbbi részében, a trinomiális fák között kerül bemutatásra.

félni, hogy a DK modellhez hasonlóan rossz valószínűségek csúsznak be a számításba. *Célja* azonban *nem annyira a volatilitás ismerete, mint egy opciók árazására alkalmas modell megalkotása*.

Derman és Kani modelljének input adataként mind európai, mind amerikai opciók felhasználhatóak. Rubinstein modellje azonban csak európai opciókra támaszkodik, azok közül is vagy csak a call, vagy csak a put opciókat használja fel. Ugyanakkor *a Rubinstein modell nem standard európai opciókból is megkonstruálható*.

A DK modellben az eloszlás a végeredmény, az „output”, míg *a Rubinstein modellben* a bemenő paraméter, *az „input”*. Ez utóbbinak az az előnye, hogy a modell felhasználói könnyebben belevihetik egyéni véleményüket, a lejáratkori eloszlásra vonatkozó várakozásaikat. A piacról származó objektív és a szubjektív elemek keveredhetnek.

II.3. Az implicit trinomiális fák[30]

II.3.1. Dupire modellje

Azt, hogy binomiális fák helyett trinomiális fákat alkalmazzunk, illetve ezek segítségével fedjük fel a piaci árakban benne foglalt információkat, először Dupire vetette fel (Dupire [1994]). Dupire előbb arra adott választ, hogyan lehet a helyi volatilitás felületet a mai opciós árakból kikövetkeztetni, majd ennek az ismeretében adott egy lehetséges modellt, az ezzel a felülettel összhangban lévő fa felépítésére, illetve az ahhoz tartozó valószínűségek kiszámítására. Feltette, hogy a részvényárfolyam által követett folytonos folyamat az alábbi egyenlettel írható fel:

$$dS = \mu \cdot S \cdot dt + \sigma(S,t) \cdot S \cdot dZ \qquad (26.)$$

A Black – Scholes egyenlet megoldásához peremfeltételkén az opció értékének egy jövőbeli eloszlására van szükség, amire a gyakorlatban az opció értékének lejáratkori értékét szoktuk felhasználni. Az opció értékét innen visszafelé haladva határozzuk meg.[31] Dupire a BS egyenlet duálisára, az ún. Fokker – Planck egyenletre tér át. Ez a

[30] A fenti témát részletesen tárgyalja Derman – Kani – Chriss [1996], Dupire [1994], illetve Rebonato [1999]. A dolgozat alábbi része az eredeti cikkek alapján készült.

[31] Ezért szokták a BS egyenletet Kolmogorov féle „backward” egyenletnek is nevezni.

jelenben ismert paraméterek, így az opciók lejárati ideje (T), illetve az opció kötési árfolyama szerepelnek:[32]

$$\left(\frac{\partial C}{\partial T}+(r-d)K\frac{\partial C}{\partial K}+\frac{1}{2}{\sigma_{K,t}}^2K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}\right)=-dC \qquad (27.)$$

Dupire az egyszerűség kedvéért felteszi, hogy a kamatláb és az osztalékhozam nulla, így a fenti egyenlet a következő formát ölti:

$$\frac{\partial C}{\partial T}+\frac{1}{2}{\sigma_{K,t}}^2K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}=0 \qquad (28.)$$

Innen a helyi volatilitás felület minden jövőbeli t=T időpontban $K=S_t$ helyettesítéssel kiszámítható.[33]

Dupire ezen folytonos modell elméleti alapjait követve vázolta fel saját fáját. A fa megkonstruálására egy olyan eljárást javasol, ami nem a sztochasztikus folyamatokon alapul. A kérdés alapvetően az, hogy a fa felépítésénél milyen idő és milyen árfolyamlépéseket használjunk. Az árfolyamlépésnek az idő lépésköz nagyságához viszonyított arány adja meg, hogy mennyire legyen a fa nyitott.[34] Ez az arány természetesen attól függ, hogy milyen a helyi volatilitás felület. Az aránynak olyannak kell lennie, hogy azzal összhangban legyen.

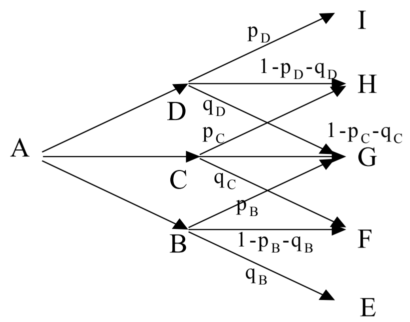
Dupire ezzel gyakorlatilag „önkényes módon" felvázol egy fát[35], amelyben a hiányzó adatokat, azaz az átmenetek valószínűségét – vagy ami adott kockázatmentes kamatláb esetén ezzel egyenértékű, az AD árakat – a piacon található opciók árából számítja vissza. Amennyiben a piacon minden lehetséges kötési árfolyamú opció árát ismerjük, gyakorlatilag minden jövőbeli valószínűségeloszlást is ismertnek vehetünk (Dupire [1994] 19. oldal). Ezeknek az ismeretében a fa még hiányzó paraméterei egy egyszer előre, egyszer hátrafelé irányuló módszerrel kiszámíthatóak. Nézzük az 5. ábrát! Tegyük fel, hogy a második és a harmadik időszak közötti átmenetet vizsgáljuk.

A második és a harmadik periódusban az egyes árfolyamokat már ismerjük, illetve tudjuk az egyes időpontokban az eloszlásokat. Az E ponthoz tartozó AD ár a valószínűség eloszlásból ismert, mert ide csak egy úton juthatunk el. Ebből pedig a

[32] A két felírás közötti különbség lénygében az, hogy a Kolmogorov féle egyenlet esetén peremfeltételt, a Fokker – Planck egyenletnél kezdeti érték feltételt adunk meg.
[33] Az eljárás ezen részének ismertetése egy kicsit elnagyoltnak tűnhet. Elégedjünk meg ezen a ponton ennyivel. A dolgozat későbbi részében Rebonato numerikus eljárását ismertetve egy ehhez nagyon hasonló eljárással találkozunk. A számítás menete ott részletesebben is elő fog kerülni.
[34] Ez gyakorlatilag ugyanaz, mint a hagyományos CRR modellben adott időbeli lépésköz esetén mekkora u értéket használjunk.
[35] Önkényesnek azért nevezném az eljárást, mert egyértelmű explicit megoldást nem ad rá, csak a fő csapásirányt jelzi.

lefelé mozdulás valószínűsége, azaz q_B számítható. Ezt előrefelé haladva (forward) számítjuk ki. B-ből három pontba mehetünk tovább. Minden pont árfolyama ismert, csak a valószínűség kell. B értéke a három AD ár, illetve a mozdulás valószínűségek ismeretében számítható. A három út valószínűségének összege 1, így q_B ismeretében a p_B és $(1-p_B-q_B)$ kiszámíthatóak (visszafelé – backward). Az F-hez tartozó valószínűség eloszlás megfelelő értéke ismert. Ide két úton juthatunk el.

5. ábra[36]



Mivel a vízszintesen érkezés valószínűsége ismert, innen q_C is adódik. A p_C, illetve a C pontból a vízszintes elmozdulás valószínűsége p_B-hez hasonlóan származtatható.

II.3.2. A DKC modell

Dupire eljárásához hasonlóan módosította Derman, Kani és Chriss az eredeti DK modellt, kiterjesztve azt trinomiális fákra is (Derman – Kani – Chriss [1996]). Ezáltal a modellben több szabad változó marad, aminek segítségével a modell jobban igazodhat a valósághoz. A binomiális modellnél ugyanis egyetlen szabadságfok volt, amelyet a CRR modell centralitási feltételével feltevésével kötöttünk le. A többfelé ágazó fánál több szabadságfokunk van, ami lehetővé teszi, hogy a modellt úgy alakíthassuk, hogy ne legyen arbitrázslehetőség, illetve az implicit volatilitás felület megfelelően sima legyen.[37]

Egy trinomiális modellben öt ismeretlenünk van: a három jövőbeli árfolyam (S_u, S_m, S_d), az emelkedés és a csökkenés valószínűsége (a középső árfolyam valószínűsége maradék elven ezekből adódik), míg a részvényárfolyam várható értéke illetve varianciája csak kettőt határoz meg ezek közül. Mivel a fa kockázatsemleges, a várható érték megegyezik a határidős árfolyammal, azaz

---

[36] Forrás: Dupire [1994]

[37] Ráadásul a periódusok számát növelve, azaz a folytonos modellhez tartva a különböző több elágazású fák ugyanahhoz a folytonos folyamathoz tartanak. Lásd Derman – Kani – Chriss [1996] 2. oldal

$$pS_u + qS_d + (1-p-q)S_m = F_0 = S_0 e^{(r-\delta)\Delta t} \quad (29.)$$

ahol δ az adott részvény éves osztalékhozama. Ha a részvényárfolyam volatilitása adott periódusban σ, akkor az árfolyamokra és a valószínűségekre nézve igaznak kell lennie annak, hogy

$$p(S_u - F_0)^2 + q(S_d - F_0)^2 + (1-p-q)(S_m - F_0)^2 = F_0^2 \sigma^2 \Delta t + \mathrm{O}(\Delta t) \quad (30.)$$

ahol $\mathrm{O}(\Delta t)$ a Δt-nél magasabb hatványú tagokat tartalmazza. A maradék három szabadságfok lekötése tetszőleges. Több megoldás képzelhető el. A DKC szerzőtrió végül a CRR modell trinomiális változatát alkalmazza.[38] Eszerint

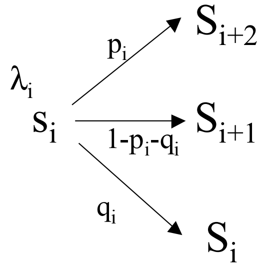
$$S_u = Se^{\sigma\sqrt{2\Delta t}}$$
$$S_m = S$$
$$S_d = Se^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}} \quad (31.)$$
$$p = \left(\frac{e^{r\Delta t/2} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}} \right)^2$$
$$q = \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{r\Delta t/2}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}} \right)^2$$

A trinomiális fa felépítése tehát két jól elkülönülő szakaszból áll. Előbb meghatározunk egy részvényárfolyam szcenáriót, majd ezt felhasználva következtetünk vissza az opciós árakban rejlő helyi volatilitás értékekre. A részvényárfolyam alakulásának megválasztása, azaz az első lépés ebből a szempontból akár önkényesnek is nevezhető. A cél ugyanis elsősorban nem árazás, hanem az implicit helyi volatilitás felület felfedése.

A fenti trinomiális megközelítést alkalmazva a modell felépítése a továbbiakban szinte azonos az eredeti DK modellel. Ugyanúgy OTM call, illetve put opciókat használunk fel a modell alkalmazása során, ugyanúgy a határidős, illetve az opciós árak adják meg az ismeretlenek kiszámításához szükséges egyenleteket. Az átmenet valószínűségek kiszámítása során alkalmazott paramétereket a 6. ábra szemlélteti.

[38] Ez azt jelenti, hogy a három lehetséges jövőbeli csomópontot azok az értékek jelentik, amelyek egy hagyományos binomiális CRR modellben álltak volna elő két lépés után, feltéve, hogy a volatilitás a két periódusban azonos.

6. ábra[39]



A jelölések megegyeznek a DK modell tárgyalása során használtakkal. E szerint a jelölés szerint a 29. egyenlőséget újrafogalmazva igaznak kell lenni minden pontban, hogy

$p_i S_{i+2} + (1 - p_i - q_i) S_{i+1} + q_i S_i = F_i$ (32.)

Az opciók árára fenn kell, hogy álljon a következő összefüggés:

$C(K, t_{n+1}) = e^{-r\Delta t} \sum_j \{\lambda_{j-2} p_{j-2} + \lambda_{j-1}(1 - p_{j-1} - q_{j-1}) + \lambda_j q_j\} \max(S_j - K, 0)$ (33.)[40]

Az eredeti DK logika szerint haladva legyen a kötési árfolyam minden pontban egyenlő a következő periódus középső árával, azaz K=S_{i+1}. Ezt, illetve a 29. egyenletet felhasználva az ismert azonnali és határidős árak függvényében az előző egyenlet a következőképpen írható át:

$$e^{r\Delta t} C(S_{i+1}, t_{n+1}) = \lambda_i p_i (S_{i+2} - S_{i+1}) + \sum_{j=i+1}^{2n} \lambda_j (F_j - S_{i+1}) \qquad (34.)$$

Mivel a részvényárfolyam alakulásáról feltettük, hogy előre ismert, a fenti egyenletben csak egyetlen ismeretlen, a valószínűség szerepel:

$$p_i = \frac{e^{r\Delta t} C(S_{i+1}, t_{n+1}) - \sum_{j=i+1}^{2n} (F_j - S_{i+1})}{\lambda_i (S_{i+2} - S_{i+1})} \qquad (35.)$$

Az 32. egyenlet felhasználásával a lefelé mozdulás valószínűsége:

$$q_i = \frac{F_i - p_i (S_{i+2} - S_{i+1}) - S_{i+1}}{S_i - S_{i+1}} \qquad (36.)$$

[39] Forrás: Derman – Kani – Chriss [1996]

[40] Ne feledjük, hogy a call értékét mindig a kötési árfolyam feletti pontokban realizált nyereség adja. Mivel minden ilyen pontba három pontból juthatunk el, ezért a kapcsos zárójelen belül három tag szerepel. Lentről a fenti jelölés szerint a j-2-dik, középről a j-1-dik, fentről a j-edik pontból érkezünk. Mivel a lambdák továbbra is az Arrow – Debreu árakat jelölik, így a szumma jel utáni értéket csak egyetlen periódussal kell visszadiszkontálni.

Akárcsak az eredeti binomiális modellben a jelenleginél alacsonyabb jövőbeli árfolyamoknál a put opciókat használták fel. Így szükség van a fenti egyenletek „putos” verziójára is:

$$q_i = \frac{e^{r\Delta t} P(S_{i+1}, t_{n+1}) - \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j (S_{i+1} - F_j)}{\lambda_i (S_{i+1} - S_i)} \qquad (37.)$$

$$p_i = \frac{F_i + q_i (S_{i+1} - S_i) - S_{i+1}}{S_{i+2} - S_{i+1}} \quad (38.)$$

Ezek ismeretében pedig a 30. egyenletet alkalmazva a helyi volatilitás érték kiszámítható.[41]

Akárcsak a hagyományos DK keretben, itt is meg kell vizsgálni, melyek azok az esetek, amelyek arbitrázs lehetőségekhez vezethetnek, vagy ahol a fa bármi más formában nem viselkedik „jól”. *A probléma* természetesen ebben az esetben is akkor jelentkezik, *ha* valamelyik *valószínűség a fa bármely pontján negatívnak adódik*. Rebonato szerint ez *két okból* következhet be.

A binomiális modellhez hasonlóan itt is előfordulhat, hogy a határidős árfolyam a felső árfolyamnál nagyobb, vagy az alsó árfolyamnál kisebb lesz, így nincs olyan pozitív súly, ami mellett a jövőbeli árfolyamok várható értéke az azonnali árfolyammal egyezne meg.[42] Mivel ebben a modellben *a részvényárfolyam lehetséges értékeinek megválasztása önkényes*, a negatív valószínűség azt is jelentheti, hogy a jövőbeli részvényárfolyam, valamint a kockázatmentes hozam és a periódus hossza nincsenek összhangban. Így mélyebb közgazdasági értelmezés ennek a problémának nem feltétlenül adható.

Másrészt a negatív valószínűség a nem megfelelő input opciós áraknak is betudható. Mivel az opció értékét meghatározó többi változót ismertnek vettük, az opció árában lévő minden egyéb hatás és piaci tökéletlenség a volatilitásban csapódik le. Egy nagyon nagy, vagy éppen nagyon kicsi opciós ár nagyon nagy, vagy nagyon kicsi helyi volatilitást eredményezhet, ami – nem lévén összhangban a periódus hosszával –

[41] Természetesen a magasabb kitevőjű tagok elhagyása esetén ez az eredmény csak közelítő lesz, tartalmaz némi pontatlanságot.

[42] Ez a probléma azonos az explicit véges differenciák módszere során tapasztalt stabilitási problémával. Részletesebben lásd: Rebonato [1999] 110. oldal.

negatív valószínűségekhez vezethet. Itt megint oda jutottunk vissza, hogy a periódushossz módosításra szorul.[43]

A fenti problémák egy része láthatóan abból a tényből származik, hogy a részvényárfolyam lehetséges alakulása önkényesen kerül megállapításra. Derman, Kani és Chriss ennek megfelelően egy olyan „korrekciót” javasol, aminek éppen a részvényárfolyam által befutott fa átalakítása, torzítása a célja.

A fa tulajdonképpen kétdimenziós. A vízszintes „tengelyen” az idő, a függőlegesen a részvényárfolyam változik. Az eredeti modellben mind az idő, mind az árfolyam azonos módon változik, azaz Δt, illetve logaritmikus skálán számolva Δs az egész fán azonos. Ezeket addig érdemes módosítani, míg az eredményként előálló helyi volatilitás felület elég simává nem válik.[44]

Rebonato a fenti modellt vetette alá elemzésnek, amiben azt vizsgálta, hogy a DKC modell mennyire hatékony az implicit volatilitás felület feltárásában (Rebonato [1999] 113-127. oldal). Az általa megadott felülettel meghatározta az opciók árát, majd a fenti módszerrel igyekezett újra előállítani a volatilitás felületet. Megvizsgálta, hogy egy időtől, vagy csak kötési árfolyamtól függő implicit volatilitás felület esetén milyen helyi volatilitás felületet kap vissza, és mennyiben van ez összhangban az elméleti, illetve a gyakorlati eredményekkel.

Első lépésként egy *olyan implicit felülettel számolt, ami csak az időtől függ*. Egy ilyen felület esetén az árfolyamtól való függésnek nem szabadna megjelennie. Ez különösen a széleken, és a rövid futamidők esetén jelentkezett. Ez a probléma közgazdasági okokkal nem magyarázható, egyértelműen az alkalmazott eljárás numerikus hibájának tudható be. A hatás pedig annál erősebbnek bizonyult, minél erősebb volt az időtől való függés, minél meredekebb volt az implicit volatilitás felület.

Ennek a tesztnek a párjaként megvizsgálta azt az esetet, *mikor csak árfolyamtól függ* az implicit felület. Ez a teszt azért is érdekesebb az előzőnél, mert a DKC szerzőtrió eredeti

[43] Rebonato megemlít egy harmadik problémát is (Rebonato [1999] 111. oldal). Eszerint, ha a kötési árfolyamot a középső árfolyamtól távolítjuk, de megmarad az alsó és a felső pontok között, a kötési árfolyam távolodásával az opciók kifizetése adott pontban egyre nagyobb lesz, egész pontosan lineárisan változik a kötési árfolyam módosulásával. Mivel az árazást AD papírokkal hajtjuk végre, azok értéke pedig változatlan, az opció értéke gyakorlatilag lineárisan fog változni a kötési árfolyam módosulásával. Tudjuk azonban, hogy a valóságban ez opció értékének kötési árfolyamra vonatkozó konvexitása miatt nem így van. Ennek megfelelően a valószínűségek nem válnak ugyan negatívvá, a helyi volatilitás becslése azonban torzul. A modell az opció értékének kötési árfolyamra vonatkozó konvexitását figyelmen kívül hagyja.

[44] Itt csak az eljárás lényegének bemutatása a célom. Az eljárást részletesen lásd: Derman – Kani – Chriss [1996] B függelék.

cikkükben is egy ilyen felülettel szemléltették az általuk leírtakat. Az eredmény itt is hasonló volt, a helyi volatilitás mind az időtől, mind a kötési árfolyamtól függővé vált.
Ha az implicit volatilitás mindkét tényező függvényeként állt elő, nagyon hasonló ábrát kapott eredményül. A legfőbb kifogása tehát az a modell ellen, hogy a helyi volatilitások becslése során a modell numerikus hibákat generál. Mivel ennek az eljárásnak a célja éppen a helyi volatilitások felfedése, amit aztán később amerikai opciók vagy bonyolultabb derivatívok árazása során használhatunk fel, ez a hiba igen jelentősnek mondható.
Rebonato ennek megfelelően egy másik numerikus eljárást javasol, ahol a fenti hibák nem jelennek meg. A trinomiális modell használata helyett az ahhoz sok tekintetben hasonló véges differenciák módszerét használja fel. Az opciók árazásához használt véges differenciák módszere visszafelé haladva próbálja meghatározni az opciók árát oly módon, hogy a lehetséges árfolyamok illetve jövőbeli időpontok számát egy véges értékben korlátozza, a kétdimenziós felületet egy ráccsal helyettesíti. Ezen rácspontok alapján definiálja a BS differenciálegyenletben szereplő delta, gamma és theta értékeket, és ezek segítségével mintegy differencia egyenlet szerűen közelíti meg a BS differenciálegyenletet azon esetekben, mikor ez utóbbi megoldására zárt képlet nem áll rendelkezésre.
A Rebonato által javasolt eljárás hasonlatos ehhez abban az értelemben, hogy a differenciálegyenletek helyett azok diszkrét verzióját alkalmazva ad meg egy numerikus eljárást a volatilitás felület feltérképezéséhez.

II.4. A helyi volatilitás feltárása véges differenciákkal

II.4.1. Rebonato modellje

A Rebonato által javasolt eljárás tehát kiszűri azokat a numerikus hibákat, amelyek a DKC modellben még előfordulhatnak. A modell azonban abból a szempontból gyengébb, hogy nem ad a helyi volatilitás felület meghatározásához zárt képletet, célja „csupán” a felület minél kisebb hibával történő becslése. Nézzük meg, milyen feltevésekkel dolgozik a Rebonato, illetve azt, milyen fontos megjegyzések fűzhetőek ezekhez a feltevésekhez! (Rebonato [1999])[45]

<u>1. feltétel:</u> a részvényárfolyam a következő folyamatot követi:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu(S_t, t) + \sigma(S_t, t)dz(t) \quad (39.)$$

ahol μ az adott részvénytől elvárt hozam, dz pedig egy Wiener folyamat.

- *1. megjegyzés:* Figyeljünk arra, hogy a helyi volatilitás továbbra is az időnek és az alaptermék árfolyamának függvénye, akárcsak az implicit fák esetében. Nem függvénye azonban az opció kötési árfolyamának. Ezzel szemben az opciók implicit volatilitása a kötési árfolyam függvényében adott. Azaz a kötési árfolyamtól függő implicit volatilitást előállítani képes helyi volatilitásokat keresünk.
- *2. megjegyzés:* Ennek megfelelően, ha a jövőbeli részvényárfolyam ismert, ismert a jövőbeli helyi volatilitás is.
- *3. megjegyzés:* A fenti egyenletben csak egyetlen bizonytalansági tényező van, a Wiener folyamat, hiszen ugyanez a folyamat mozgatja a helyi volatilitást is. Azaz a piac teljes, tehát – ahogy arról az első fejezetben is szó volt – nincs szükségünk újabb termékre ahhoz, hogy az alaptermékre szóló opciót árazni tudjunk.

<u>2. feltétel:</u> Tegyük fel, hogy végtelen számú kötési árfolyamú, illetve lejáratú opció mai árát ismerjük. Tegyük fel, hogy ezeket a piaci gyakorlatnak megfelelően implicit volatilitásuknak megfelelően jegyzik: $\sigma_{impl}(0,T)$

- *4. megjegyzés:* A valóságban természetesen a 2. feltétel nem állja meg a helyét, csak véges számú opcióval kereskednek még a legnagyobb piacokon is. Ezért ezekből az adatokból egy megfelelően sima és differenciálható felületet kell képeznünk. Ezen belül a kötési árfolyam szerint kétszer, a hátralévő futamidő szerint egyszer deriválhatónak kell lennie.

  Ezen a ponton Rebonato modellje erősebb feltevésekkel él, mint az implicit fa modellek. Ott is feltételként fogalmazódott meg a megfelelő simaság, de ennek alapvetően közgazdasági okai voltak. Ilyen többszöri differenciálhatóságot nem tételeznek fel a modellek. Amennyiben viszont ez a simaság nem áll fenn, a helyi volatilitás felületben szakadások lesznek. Az, hogy ez kérdés nem merült fel az implicit fák esetén, rámutat arra, hogy miből származhattak az előző modellek során

[45] A dolgozat ezen része Rebonato [1999] 129-135. oldalai alapján készült.

fellépő numerikus hibák. Ezeket tehát Rebonato kiküszöböli, ugyanakkor egy másik, nem éppen gyenge feltételt támaszt.

- *5. megjegyzés:* Amennyiben a részvényárfolyam a 39. egyenletben leírt folyamatot követi, a BS differenciálegyenlet nem lesz megoldható a put, illetve a call opciók lejáratkori értékére tett peremfeltételek mellett. Így a továbbiakban nem lesz igaz az sem, hogy az implicit volatilitás (variancia) a helyi volatilitások (varianciák) összege, azaz:[46]

$$\sigma^2_{impl}(0,T) \neq \int_0^T \sigma^2(S_u, u)du \qquad (40.)$$

- *6. megjegyzés:* Az opciós piacon kereskedők számára az a fontos, hogyan viselkednek az opciók árában benne foglalt implicit volatilitások, hiszen ezek lényegében a jövőbeli opciós árak egyszerű jegyzési formáját jelentik. A jövőbeli várható implicit volatilitások meghatározásához azonban tovább kell számolni.
    - Meg kell határozni a helyi volatilitás felületet;
    - Feltételezve, hogy ennek jövőre vonatkozó adatai a későbbi azonnali értékeknek felelnek meg, ki kell számolni a jövőbeli opciós árakat;
    - Ebből kell meghatározni a jövőbeli implicit volatilitásokat;
    - Végül megvizsgálni, hogyan viselkednek az implicit volatilitások.

A modell feltételeinek és az azzal kapcsolatos értelmező és kritikai megjegyzések után nézzük meg részletesen a Rebonato által felvázolt eljárást! Vegyünk egy t időpontban értékelt, T időpontban lejáró K kötési árfolyamú call opciót. Legyen az alaptermék mai árfolyama S. Mivel a piac teljes, a kockázatsemleges árazás továbbra is lehetséges, de a BS képlet már nem elegendő. Ugyankkor a kérdéses call opció értékének a BS parciális differenciálegyenletet ki kell elégítenie. Eszerint:

$$\left(\frac{\partial C_{K,T}(t,S)}{\partial t} + (r-d)S\frac{\partial C_{K,T}(t,S)}{\partial S} + \frac{1}{2}{\sigma_{S,t}}^2 S^2 \frac{\partial^2 C_{K,T}(t,S)}{\partial S^2}\right) = rC_{K,T}(t,S) \quad (41.)$$

ahol d az alaptermék folytonosan számított osztalékhozamát, $C_{K,T}(t,S)$ pedig a call értékét jelöli. Ezt az egyenletet a már ismerős Kolmogorov „backward” egyenlet. Megoldásához szükség van az opció értékének egy jövőbeli eloszlására. Ez tipikusan a lejáratkori árfolyam szokott lenni, amit peremfeltételként csatolunk az egyenlethez. Innen visszafelé haladva határozzuk meg az opció értékét.

[46] A diszkrét modellben nem okoz gondot a dolog, be tudjuk árazni, tehát van megoldás. Folytonos modellben azonban nincs zárt képletünk, így az implicit volatilitás nem értelmezhető ezen módszerrel.

Az opciók árát ismerjük a piacról. Amennyiben a görög betűk (theta, delta, gamma) értékét is ismernénk, az egyetlen ismeretlen a fenti egyenletben a helyi volatilitás függvény lenne. Ezzel a megoldással az a gond, hogy mivel a hagyományos BS egyenlet nem áll fenn, a hagyományos delta, gamma és theta értékek sem használhatóak fel az egyenlet megoldásához. Az információk kiszűrhetőek lennének az implicit volatilitás felületből, de ahhoz viszont azt kellene tudnunk, hogy milyen az implicit volatilitás függvény viselkedése az alaptermék árfolyama illetve az idő függvényében. Azaz időben állandó-e, vagy éppen „ragadós" valamilyen értelemben.[47] Ehhez viszont éppen a keresendő helyi volatilitás felület ismeretére lenne szükség. Itt a kör bezárult.

Megoldást adhat azonban az, ha a fenti differenciálegyenlet duálisára, a Fokker – Planck „forward" egyenletre térünk át. Ennek megoldása során a jelenben ismert paraméterek szükségesek, és innen haladunk előre[48].

$$\left(\frac{\partial C_{K,T}(t,S)}{\partial T}+(r-d)K\frac{\partial C_{K,T}(t,S)}{\partial K}+\frac{1}{2}\sigma_{K,t}{}^{2}K^{2}\frac{\partial^{2}C_{K,T}(t,S)}{\partial K^{2}}\right)=-dC_{K,T}(t,S) \qquad (42.)$$

Az értékeléskori időt (t) most is a lejáratig hátralévő idő (T) váltotta fel, míg az alaptermék árfolyama helyett a kötési árfolyam szerepel. Legyen t=0. Mivel zárt képlet továbbra sincs, a fenti deriváltak nem határozhatóak meg. Megadható azonban egy numerikus közelítő eljárás, ezek kiszámítására. Így legyen:

$$\frac{\partial C_{K,T}(0,S)}{\partial K}=\frac{C_{K+\Delta K,T}\left(0,S,\sigma_{impl}(0,K+\Delta K)\right)-C_{K,T}\left(0,S,\sigma_{impl}(0,K)\right)}{\Delta K} \qquad (43.)$$

$$\frac{\partial^{2}C_{K,T}(0,S)}{\partial K^{2}}=\frac{C_{K+\Delta K,T}\left(0,S,\sigma_{impl}(0,K+\Delta K)\right)+C_{K-\Delta K,T}\left(0,S,\sigma_{impl}(0,K-\Delta K)\right)-2C_{K,T}\left(0,S,\sigma_{impl}(0,K)\right)}{\Delta K^{2}} \qquad (44.)$$[49]

$$\frac{\partial C_{K,T}(0,S)}{\partial T}=\frac{C_{K,T+\Delta T}\left(0,S,\sigma_{impl}(0,K)\right)-C_{K,T}\left(0,S,\sigma_{impl}(0,K)\right)}{\Delta T} \qquad (45.)$$

Figyeljünk arra, hogy jelen egyenletekben nemcsak a kötési árfolyamot változtatjuk, hanem ennek megfelelően az implicit volatilitásokat. Éppen ezért volt szükség a második feltételre, hogy minden pontban tudjunk egy implicit volatilitást mondani. A 43-45. egyenleteket a 42-be helyettesítve kifejezhetjük a volatilitást:

---

[47] Ezzel a kérdéssel a fejezet egy későbbi részében még részletesebben foglalkozom.

[48] Vegyük észre, hogy Rebonato megoldásának logikája nagyon hasonlít Dupire módszeréhez.

[49] Az opció értékének kötési árfolyam szerinti második deriváltja megegyezik az alaptermék árának sűrűségfüggvényével, azaz:

$$\frac{\partial^{2}C_{K,T}(0,S)}{\partial K^{2}}=\Phi(t=T,S_{t}=K)$$

$$\sigma_{K,T}^{2} = 2\frac{\dfrac{\partial C_{K,T}(0,S)}{\partial T} + (r-d)K\dfrac{\partial C_{K,T}(0,S)}{\partial K} + dC_{K,T}(0,S)}{\dfrac{\partial^2 C_{K,T}(0,S)}{\partial K^2}K^2} \quad (46.)$$

Ez a helyi volatilitás függvény minden jövőbeli T (t=T) időpontban minden K (S_t=K) árfolyam mellett megadja a helyi volatilitás értékét. Ez az eljárás, bár koncepcionálisan teljesen megegyezik a DKC eljárással, annál sokkal simább helyi volatilitás felületet szolgáltat.

Rebonato ezzel módszerrel elvégezte ugyanazokat a teszteket, amelyeket korábban a DKC modellel. Míg a DKC modell esetén azt tapasztalta, hogy numerikus hibák miatt a csupán időtől függő implicit felület esetén a helyi felület az árfolyamtól is függővé vált, addig ennél a módszernél ilyen hibák nem léptek fel. Ez a tulajdonság akkor sem „romlott el”, ha meredekebb implicit volatilitás felületet használt.[50]

Ahogy arról már szó volt, a helyi volatilitás felület „végét” mint jövőre vonatkozó előrejelzést felhasználva megbecsülhetjük, hogyan fog kinézni az implicit volatilitás felület a jövőben. Kérdés csak az, hogy milyen implicit volatilitás felületet implikálnak a mai implicit felületek, illetve az ezekből előálló helyi volatilitás felületek. A devizapiacokon előforduló, és a korábbiakban (1987. előtt) a részvénypiacokra is jellemző szimmetrikus felületet felhasználva Rebonato érdekes következtetésekre jutott (Rebonato [1999] 161 – 174. oldal).

1. Az arbitrázs elkerülése végett az implicit volatilitás felületnek egyre kevésbé „mosolygósnak” kell lennie, azaz az idővel fordított arányban kell változnia.
2. Az ebből számított helyi volatilitás felület egyre jobban ellaposodik, a felület végén gyakorlatilag az árfolyamtól való függés eltűnik.
3. A helyi volatilitás felület ennek megfelelően képtelen lesz előre jelezni a jövőbeli implicit volatilitást.
4. Ha a fenti feltételek fennállnak, és a jövőbeli azonnali volatilitás valóban úgy néz ki, mint a mai felület vége, az implicit volatilitás nemhogy időben nem lesz állandó, de egyenesen el is tűnik.

Rebonato eljárását tehát azért fejlesztette ki, hogy a DKC modell alkalmazása során tapasztalt numerikus hibákat kiküszöbölje. Keményebb feltevésekkel dolgozott, mint Derman, Kani és Chriss, de modellje jobban viselkedett minden implicit volatilitás

50 A teszt eredményeit részletesebben lásd Rebonato [1999] 135 – 153. oldal.

függvény esetén, mint a DKC modell. Eljárása abból a szempontból, hogy a Fokker – Planck egyenletet részesített előnyben, inkább Dupire modelljével mutat rokon vonásokat. Azonban Rebonato nem foglalkozott a faszerkesztéssel, a véges differenciák módszerét alkalmazta.

II.4.2. A véges differenciák egy másik formája

A Rebonato mellett mások is próbálkoztak a véges differenciák felhasználásával. Dumas, Whaley és Fleming Rebonatóhoz hasonlóan feltették, hogy a volatilitás két tényezőnek, az árfolyamnak, és az időnek a függvényében alakul (Dumas – Whaley – Fleming [1998]).[51] Ebben az esetben, mint arról már volt szó, a BS differenciálegyenlet még fennáll, azonban maga a BS képlet már nem alkalmazható. A megoldás során ők is a differenciálegyenletet közelítettek differenciaegyenlet felhasználásával. Céljuk az volt, hogy megvizsgálják, mennyire stabil a helyi volatilitás felület, illetve mennyire alkalmas előrejelzésekhez.

A korábban elmondottakhoz hasonlóan ők is a Fokker – Planck forward egyenletet alkalmazták. Öt lehetséges helyi volatilitás függvényt definiáltak:

$$
\begin{aligned}
&I. \quad \sigma = a_0 \\
&II. \quad \sigma = a_0 + a_1 K + a_2 K^2 \\
&III. \quad \sigma = a_0 + a_1 K + a_2 K^2 + a_3 T + a_5 KT \\
&IV. \quad \sigma = a_0 + a_1 K + a_2 K^2 + a_3 T + a_4 T^2 + a_5 KT
\end{aligned}
\qquad (47.)
$$

Az ötödik függvény a II. III. illetve a IV. függvényt váltogatta aszerint, hogy az adott mintában hány különböző futamidejű opció található.[52] Azt vizsgálták, melyik függvény alkalmazása esetén tér el a piacon tapasztalható opciós ár a lehető legkevésbé a modell által adottól.

Vizsgálataik szerint a legjobbnak *ebből a szempontból a IV. modell bizonyult*, minden tekintetben jobb volt, mint az első egyenlet, ráadásul a becslési hiba a futamidők növelésével egyre csökkent. *Mindegyik helyi volatilitás függvény jobban teljesített, mint a* sima Black – Scholes feltételre építő *első egyenlet*. Abban az esetben azonban, *ha a helyi volatilitás függvényeket előrejelzésre használjuk, az eredmény messze nem ilyen*

[51] Érdekes, hogy az ő elnevezésükben az implicit helyi volatilitás függvény a determinisztikus volatilitás függvény elnevezést kapta, bár természetesen nem arról van szó, hogy a volatilitás determinisztikusan alakul, csak akkor, ha a részvényárfolyam alakulása már ismert.

[52] Vegyük észre, hogy az első egyenlet gyakorlatilag az állandó volatilitás feltevését jelenti., azaz a BS feltételekkel egyezik meg.

jó. Minél bonyolultabb a modell, annál kevésbé volt alkalmas az adott időszakban az opciós árak előrejelzésére.

A dolgozat harmadik eredménye a *fedezeti arányok*ra vonatkozott, és hasonlóan az előrejelzésekhez, azt az eredményt hozta, hogy *minél egyszerűbb egy modell, annál jobb*. Ennek megfelelően a hagyományos BS modell hetenkénti egyszeri újrafedezéssel jobb eredményt adott a vizsgált időszakban, mint bármelyik más, mégoly bonyolult helyi volatilitás függvény.

II.5. A helyi volatilitás felület

Ahogy arról már szó volt, a modellek eredményeinek felhasználásánál nem mellékes, hogyan alakul a helyi volatilitás felület a részvényárfolyam, illetve az idő változásának függvényében. Ennek vizsgálata során a hozamgörbe elméletek jelenthetnek támpontot számunkra.

Térjünk vissza a Derman – Kani modellhez! Láttuk, hogy míg az *implicit volatilitás* a mai időpont és az opció lejárata közötti (több periódusból álló) időszak volatilitását mutatja, a *helyi volatilitás* egyetlen periódus volatilitását adja meg. A kettő közötti különbség hasonló a kötvények lejáratig számított hozama és az egyperiódusos forward kamatlábak közötti eltéréshez.

Ennek megfelelően az eljárás is hasonló, mint mikor a kötvények lejáratig számított hozamából egy periódusos forward hozamokat számítunk. Ott is piaci árakat használunk, célunk ott is olyan értékek kikövetkeztetése, amivel a számított árfolyamok a lehető legkisebb mértékben térnek el a kötvények piaci árától.

Ha az opciót lejáratáig megtartjuk, és a volatilitás valóban megegyezik az implicittel, akkor a folytonos dinamikus delta-fedezés során realizált hozam éppen a kockázatmentes hozammal fog megegyezni. Ha azonban csak az opció futamidejénél rövidebb ideig folytatjuk ezt a stratégiát, a realizált hozam ennél magasabb lehet. Az arbitrazsőrt tehát az opció egész futamideje érdekli, a spekulánst azonban nem feltétlenül![53]

[53] A harmadik fejezetben, a volatilitás kereskedés áttekintése során éppen ezekkel a spekulációs és arbitrázs stratégiákkal foglalkozom.

A kötvényeknél a fedezeti ügyletkötőt illetve az arbitrazsőrt nem a hozamgörbe valós jövőbeli alakja érdekli, hanem az, hogyan viszonyul a most kiszámított hozamgörbével beárazott kötvény ára a többi kötvényéhez. A spekuláns arra kíváncsi, hogyan alakul a hozamgörbe a jövőben, illetve, ha a várakozási elmélet szerint kereskedünk, mennyire becsli jól a forward görbe a jövőbeli hozamokat.
Hasonlóan a helyi volatilitás sem a spekuláns, hanem a fedezeti ügyletet kötő, illetve az arbitrazsőr számára fontos. A spekulánst az izgatja, mennyire jelzi ez jól előre a jövőbeli volatilitást. A helyi volatilitásra való spekulációnak ennek megfelelően például a horizontális különbözet, vagy éppen a pillangó lesz a megfelelő eszköze.[54]

II.5.1. Az implicit és a helyi volatilitás

Érdekes piaci megfigyelés, hogy a helyi volatilitás és az árfolyam fordított irányban változnak. Magasabb árfolyam mellett a volatilitás kisebb, az árak esésével pedig nő. Az implicit és a helyi volatilitás közötti viszonyról ennél több hüvelykujj szabályt állíthatunk fel (Derman – Kani – Zou [1995]).[55]

> *<u>1. szabály:</u> a helyi volatilitás az árfolyam függvényében megközelítőleg kétszer olyan gyorsan változik, mint az implicit volatilitás.*

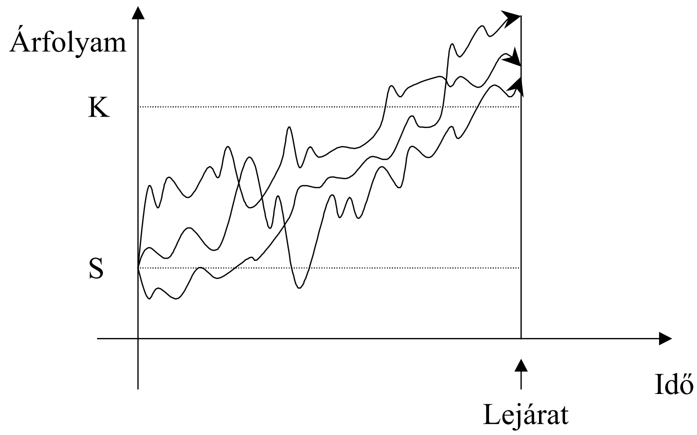
Nézzünk egy egyszerű bizonyítást! Vegyünk egy egyszerű esetet, ahol a helyi volatilitás nem függ az időtől, csak az árfolyamtól. Így a korábbi $\sigma(S,t)$ függvény helyett csak $\sigma(S)$ szerepel. Legyen továbbá ez az összefüggés lineáris, azaz:

$$\sigma(S) = \sigma_0 + \beta \cdot S \qquad (48.)$$

Nézzük egy OTM call opció implicit volatilitását! Legyen a jelenlegi részvényárfolyam S, a kötési árfolyam K (ld. 7. ábra). Jelölje az implicit volatilitást $\sigma_{impl}(S,K)$. Minden olyan lehetséges út, amelyik hozzájárul az opció értékéhez, átmegy az S és a K közötti tartományon. Ennek megfelelően ezen utaknak mindegyikének a volatilitása függ a kérdéses tartomány helyi volatilitásától.

[54] Ezekben az esetekben tehát az opciók kötési árfolyama megegyezik, csak lejáratukban különböznek. Az eredő ennek megfelelően az opciók időértékének különbözete. Ha a hozam megfelelően kicsi, azaz r elég közel van nullához, a pozíció értéke szinte csak a volatilitás függvénye. A téma részletes és szemléletes bemutatása Száz [1999] 359-374. oldalain olvasható.

7. ábra[56]



Ne feledjük, hogy az idő nem változtat a helyi volatilitáson, az csak az árfolyam függvénye. Így ha S-ből K fölé jutunk, minden e közötti árfolyamon át kell, hogy menjünk, így minden helyi volatilitásnak hatása kell, hogy legyen az adott útvonal volatilitására. Ennek megfelelően egy K kötési árfolyamú opció implicit volatilitása közelítőleg a helyi volatilitások összege kell, hogy legyen. Azaz:

$$\sigma_{impl}(S,K) \approx \frac{1}{K-S}\int_S^K \sigma(S)dS \qquad (49.)$$

A 48. egyenletet ebbe behelyettesítve a következőket kapjuk:

$$\sigma_{impl}(S,K) \approx \sigma_0 + \frac{\beta}{2}(S+K) \qquad (50.)$$

A 48. és az 50. egyenletet összevetve éppen az első hüvelykujjszabályt látjuk viszont.

Az első szabályra, amely szerint tehát a helyi volatilitás az implicitnél gyorsabban változik, szintén találunk analógiát a kötvénypiacon. A kötvények árfolyamából visszaszámított IRR hozamgörbe szintén lassabban változik, mint forward hozamgörbe.[57]

A korábban felrajzolt fa azonban másra is használható. Ha az idő múlásával a helyi volatilitás felülete nem változik, azaz új információ a volatilitásról nem érkezik, és az alaptermék árfolyama időben változik, gyakorlatilag a fán haladunk előre. A későbbi „azonnali” piaci szituációt a mai fa „vége” fogja tükrözni, ahogyan a várakozási elmélet szerint a forward kamatlábak előrejelzik a jövőbeli azonnali kamatlábakat. Az akkorra

---

[55] A fejezet ezen részében Derman – Kani – Zou [1995] cikkére támaszkodtam. Ők az egyszerűség kedvéért a folytonos modell jelöléseit használták, de mint megjegyezték, a megállapítások lényegét tekintve nem különböznek attól, mintha diszkrét modellt alkalmazták volna.

[56] Forrás: Derman – Kani – Zou [1995]

[57] A hozamgörbék időbeli áralakulásáról és érzékenységéről részletesebben lásd Makara [2000]

becsült helyi volatilitásokból pedig kiszámíthatjuk egy akkor kibocsátandó opció árát, abból pedig a Black – Scholes képlet segítségével az akkori implicit volatilitást.
Amennyiben a helyi volatilitás és az árfolyam negatívan korreláltak, egy adott árfolyamú opció implicit volatilitása az árfolyam emelkedésével csökken, illetve fordítva, az árfolyam csökkenésével az implicit volatilitás nő. Innen egy másik heurisztikus szabály állítható fel:

> *<u>2. szabály:</u> az opciók implicit volatilitása közelítőleg ugyanúgy változik a piaci árak változásával, mint a kötési árfolyamok változásával.*

Azaz ha a mai volatilitás mosoly olyan, hogy egy száz forintos kötési árfolyamú opcióhoz képest egy száztíz forintos implicit volatilitása három százalékkal magasabb, akkor a százas kötési árfolyamú implicit volatilitása ugyanekkora lesz, ha a részvényárfolyam tíz forinttal megemelkedik.
Nézzünk egy, az előzőekhez hasonlóan egyszerű bizonyítást! A 50. egyenlet éppen azt mutatja, hogy az alaptermék árfolyama és a kötési árfolyam hasonló módon befolyásolja az adott futamidejű opciók implicit volatilitását. Ez pedig éppen a fenti állítással azonos.
Ha a helyi volatilitás és a kötési árfolyam negatív módon korrelált, és az implicit volatilitás a helyiek összegeként adódik, ebből már következik az a kijelentés is, hogy az implicit volatilitás a kötési árfolyammal ugyancsak inverz kapcsolatban van. Azaz magasabb árfolyam mellett az implicit volatilitás is kisebb lesz.
A helyi volatilitás és az árfolyam közötti negatív korreláció feltételezése azonban a fedezeti arányra (Δ) is hatással van. Egy CRR modellben a fa szabályos, míg a DK modell által „előállított" fa hullámzó. A kitettséget, azaz a deltát az opció illetve az alaptermék árfolyamának „terjedelme" határozza meg:

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} \quad (51.)$$

Jelölje az implicit fa esetén az opció lehetséges értékeit $C_u^{'}$ illetve $C_d^{'}$. Mivel az implicit volatilitás és a részvényárfolyam is negatív módon korrelál egymással, $C_u^{'} < C_u$ és $C_d^{'} > C_d$. Ebből pedig $\left(C_u^{'} - C_d^{'}\right) < \left(C_u - C_d\right)$ következik. Eszerint viszont a kitettség, és így a fedezeti arány a call és a put opcióknál az árfolyam és a volatilitás negatív korrelációja esetén kisebb, mint a CRR modellben. Derman, Kani és Zou ennek megfelelően felállítottak egy harmadik szabályt is.

3. szabály: *Ha az alaptermék árfolyama és a volatilitás nem független egymástól, a delta korrigált értéke a*

$\Delta = \Delta_{BS} + V_{BS} \cdot \beta$ (52.)

Ahol Δ_{BS} az eredeti Black – Scholes módszerrel számított deltát, a V_{BS} a Black – Scholes feltevései alapján számított vegát jelöli, míg a β megegyezik a már korábban is használt béta értékkel, azaz azt mutatja meg, hogy az implicit volatilitás és az alaptermék árfolyama milyen viszonyban vannak egymással. A piacon megfigyelt negatív összefüggés esetén a béta értéke negatív, azaz a delta, azaz a kitettség tényleg alacsonyabb, mint a „hagyományos” feltételek mellett számított.

A fenti eredményt könnyen megkapjuk. Jelölje az opció értékét az implicit volatilitás felület feltételezése mellett $C(S, \Sigma(S,K), r, t, K)$. A delta ennek részvényárfolyam szerinti első deriváltja, azaz

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial \Sigma} \cdot \frac{\partial \Sigma}{\partial S} = \Delta_{BS} + V_{BS} \cdot \frac{\partial \Sigma}{\partial S} \quad (53.)$$

Felhasználva az 50. egyenletet, mely szerint az implicit volatilitásra a kötési árfolyam és az alaptermék árfolyama megközelítőleg azonos hatással bír, az előző egyenlet a következőképpen írható át:

$$\Delta = \Delta_{BS} + V_{BS} \cdot \frac{\partial \Sigma}{\partial S} \approx \Delta_{BS} + V_{BS} \cdot \frac{\partial \Sigma}{\partial K} = \Delta_{BS} + V_{BS} \cdot \beta \quad (54.)$$

Ez pedig éppen a fenti állítás.

II.5.2. Az implicit volatilitás változása az alaptermék árának függvényében

A kérdés ezek után már csak az, hogy a fenti implicit fa modell, illetve az a mögött meghúzódó volatilitás struktúra mennyiben tükrözi vissza a valóságot, azaz valóban úgy változik-e a volatilitás az alaptermék árfolyamának és a kötési árfolyamnak a függvényében, ahogy azt a modell mutatja. Derman az S&P 500 indexre szóló opciókat elemezve próbálta megválaszolni a kérdést (Derman [1999]).

Az 1987-es krach után a volatilitás – mosoly alakja megváltozott, sokkal inkább egy grimaszhoz vált hasonlatossá, a korábban a kötési árfolyam függvényében jellemzően parabolikus alak csökkenővé vált (Hull [1998], Derman [1999], Rebonato [2000]).[58] Ez a grimasz (skew) ráadásul bizonyos szakaszokon elég jól közelíthető lineáris függvénnyel. Legyen a továbbiakban az implicit volatilitást leíró függvény a következő:

$$\sigma_{impl}(K,t) = \sigma_{impl}^{ATM}(t) - \beta(t)(K - S_0) \quad (55.)$$

ahol $\sigma_{impl}(K,t)$ a K kötési árfolyamú, t hátralévő futamidejű opció implicit volatilitása, $\sigma_{impl}^{ATM}(t)$ a t futamidejű ATM opció implicit volatilitása, S_0 az alaptermék jelenlegi ára, $\beta(t)$ pedig a grimasz meredekségét jelző paraméter.[59]

Legalább három válasz adható arra a kérdésre, hogyan változik az implicit volatilitás az árfolyam függvényében. Ezekben az elméletekben valami mindig „állandónak", azaz az adott változásra érzéketlennek tűnik. Nevezzük ezeket a tényezőket a pénzügyes terminológiában elfogadott módon „ragadósnak" (sticky).

II.5.2.1. A ragadós kötési árfolyam szabálya

Az ezt az elméletet leíró függvény nagyon hasonlít a 48. egyenlethez:

$$\sigma_{impl}(S,K,t) = \sigma_{impl}^{ATM}(t) - \beta(t)(K - S_0) \qquad (56.)$$

A különbség „csupán" annyi, hogy ez minden alaptermék árfolyam mellett fennáll, azaz ezen elmélet szerint az implicit volatilitás független az alaptermék árától.[60] Ahogy az árfolyam változik, mindegyik opciónak változatlan marad az implicit volatilitása. A binomiális modell megközelítésében ez annyit jelent, hogy minden opciónak van a nulla időpontban egy implicit volatilitása, és abból minden opcióra *külön-külön* felrajzolható egy fa. Ha az alaptermék árfolyama változik, a fák nem módosulnak, csak az egyes fákon megyünk lejjebb vagy feljebb. Mivel a fák teljesen megfelelnek a hagyományos BS logikának, a delták sem térhetnek el attól, azaz a BS féle fedezeti arány továbbra is megfelelő számunkra.

Ha azt vizsgáljuk, hogyan változik az ATM opciók implicit volatilitása, az alaptermék árfolyamának változásával mindig más és más kötési árfolyamú opciót vizsgálunk. Mivel más kötési árfolyam esetén más az implicit volatilitás, e szerint az elmélet szerint

---

[58] Egyesek a grimasz alakját a kötési árfolyam függvényében hiperbolikusan csökkenőnek, mások lineárisan csökkenőnek tételezik fel.

[59] Figyeljünk arra, hogy ebben az egyenletben az alaptermék árfolyama nem jelenik meg magyarázó változóként.

[60] Az egyenlet jobb oldalán ennek megfelelően az S nem is szerepel, csak a jelenbeli árfolyam, ennek is csupán annyi a szerepe, hogy kijelöli, melyik opció lesz az ATM. Ahogy Derman szellemesen

az ATM opciók implicit volatilitása az alaptermék árának függvényében folyamatosan változik, méghozzá az árfolyam növekedésével ellentétes irányban, a „grimasz" formájának megfelelően.

Összefoglalva tehát az adott kötési árfolyamú opciók implicit volatilitása független az alaptermék árfolyamától, az ATM opcióké azzal negatív kapcsolatban áll. A fedezeti arány azonban megfelel a BS feltételek melletti fedezeti aránynak.

II.5.2.2. A ragadós delta szabálya

A ragadós delta szabálya azt mondja, hogy az implicit volatilitás adott delta mellett állandó, volatilitás értéke annak függvénye, hogy az opció mekkora belső értékkel bír (moneyness).[61] Mivel az opció deltája is ennek a belső értéknek a függvénye, ezért a deltát használjuk ennek mérésére. A szabály ennek megfelelően a

$$\sigma_{impl}(S,K,t) = \sigma_{impl}^{ATM}(t) - \beta(t)\left(\frac{K}{S} - 1\right)S_0 \qquad (57.)$$

képlettel írható le.

Látható, hogy az implicit volatilitás csak K és S viszonyának a függvénye. *Ha az opció ATM*, a jobboldal második tagja nulla, azaz *a volatilitás állandó*. Az egyenlet az S értékétől abból a szempontból független, hogy teljesen mindegy, milyen S árfolyam mellett ITM mondjuk 20%-kal egy opció. Ha ugyanis ilyen mértékben ITM, akkor az implicit volatilitása minden árfolyam mellett ugyanakkora lesz. A kérdés csak a belső érték, azaz a delta nagysága.

A másik fontos megállapítás, hogy *az implicit volatilitás és az árfolyam változása egymással pozitív viszonyban áll*. Tehát minél magasabb az alaptermék árfolyama, annál nagyobb lesz az arra szóló opciók implicit volatilitása.[62]

Az alaptermék árfolyamának változása így duplán fejti ki hatását az opció értékére. Egyrészt az árfolyam növekedése maga is növeli az opció értékét, másrészt a volatilitást is megnöveli, ami szintén növeli azt. Ebből pedig már látható, hogy a hagyományos BS feltételek melletti delta nem lesz jó mérőszáma a kitettségnek. Ha ez a szabály írja le pontosan a világot, a fedezeti arány a BS világbelinél nagyobb lesz.

---

megfogalmazza, ez tulajdonképpen a „szegény ember kísérlete arra, hogy a Black – Scholes modellt megtartsa".

[61] Ennek megfelelően gyakran sticky – moneyness szabályról is beszélnek. Nagyságát a K/S arány mutatja meg.

Összefoglalva tehát, azt ATM opciók volatilitása állandó, egy adott opció volatilitása pedig az alaptermék árfolyamával azonos irányban változik. A delta ennek megfelelően a Black – Scholes világ deltájánál nagyobb lesz.[63]

II.5.2.3. A ragadós implicit fa modellje

Derman szerint a harmadik lehetséges válasz maga a DK modell. Ez a helyi volatilitásokat tartalmazza, és így ezekből a jövőbeli implicit volatilitások is származtathatóak. Ez a fa magában hordozza a volatilitás változásának lehetőségét. Ennek megfelelően, ha az alaptermék árfolyama módosul, a fán mozgunk előre, annak jellege és meredeksége nem változik. Új fára nincs szükség, akár ugyanazon opciót, akár a mindenkori ATM opciót vizsgáljuk. Ami változatlan marad, az a fa, innen a modell elnevezése.

Mivel a tapasztalatok szerint a volatilitás „grimasz" negatív meredekségű, ugyanez lesz jellemző a helyi volatilitásokat leíró függvényre, és innen ugyanez adódik a jövőbeli implicit volatilitásokra is.

Eszerint ezt a modellt a

$$\sigma_{impl}(S,K,t)=\sigma_{impl}^{ATM}(t)-\beta(t)(K+S) \qquad (58.)$$

egyenlőséggel tudjuk leírni. Az ATM opciók implicit volatilitása megegyezik a helyi volatilitás értékével, így ez szintén az alaptermék árának negatív függvénye lesz.[64] A fedezeti arányról is szó volt korábban, eszerint a fedezeti arány a BS értéknél kisebb.

II.5.2.4. Választás a szabályok között

Derman az 1997 szeptembere és 1998 novembere közötti időszakot vizsgálva azt próbálta eldönteni, melyik szabály állja meg a helyét a valóságban (Derman [1999]). Tapasztalata szerint egyik szabály sem egyeduralkodó. Volt időszak, mikor az egyik, volt, mikor a másik írta le legjobban a piac működését. Az első, a ragadós kötési árfolyam szabálya akkor állta meg a helyét, mikor a vizsgált S&P 500 index értéke egy

[62] Ez azzal, a korábban említett piaci megfigyeléssel ellentétes, mely szerint a kettő között negatív kapcsolat áll fenn.

[63] Rebonato ugyanezt a megközelítést „lebegő mosolynak" (floating smile) nevezi. Az elnevezést azzal indokolja, hogy az árfolyam változásával az opciók belső értéke, és így az összes opció implicit volatilitása folyamatosan változik, miközben a mosoly jellege nem módosul, csak arrébb „lebeg". Részletesebben lásd: Rebonato [1999] 82. oldal

adott sávon belül maradt hosszabb ideig. Nagyobb esések után az árfolyam és a volatilitás szinte mindig ellentétesen változtak, ami a DK modell állításait tűnik igazolni. Végül azokban a periódusokban, mikor az árfolyam egy elég határozott felfelé trendhez simult, a második, a ragadós – delta modellje tűnt helyesnek.

Ez utóbbi állítás azonban igencsak gyenge lábakon áll. Ugyanis ezekben az időszakokban az implicit volatilitás szinte minden opció esetén változatlannak tűnt, ami azt jelentette, hogy az ATM opciók volatilitása csökken, szemben a modell állításával, mely szerint az független attól. Derman azonban úgy véli, ez a hatás nem igazán magyarázható, ezért magyarázat hiányában függetlennek tekinti a két tényezőt egymástól.

Rebonato a FTSE index 1998 nyári alakulását vizsgálva úgy találta, hogy abban az időben az index elmozdulása és az implicit volatilitás elmozdulása azonos irányú volt, ezért szerinte adott időszakban a ragadós delta – illetve, ahogyan ő nevezi, a lebegő mosoly – elmélete írta le a piac viselkedését (Rebonato [1999] 83-85 oldal).

[64] Méghozzá az 1. szabálynak megfelelően kétszer olyan gyorsan változó függvénye.

III.1. Bevezetés

A dolgozat harmadik részében a volatilitás kereskedés témakörét járom körül. A harmadik fejezet első részében azt nézem végig, milyen elméleti megoldások születtek a volatilitás adásvételére. Ezek a modellek gyakran a valóságtól idegen feltevésekkel élnek, az elméletileg helyes megoldást keresik az opció hátralévő futamideje, vagy éppen a jövő egy kiválasztott periódusa volatilitásának előállítására. A fejezet második része azokat a megoldásokat veszi számba, amelyeket a gyakorlatban is alkalmaznak, illetve amelyek a gyakorlatban is alkalmazhatóak lennének. Ilyenek például az volatilitásra szóló határidős, swap és opciós ügyletek, valamint a volatilitás indexek.

III.2. A volatilitás kereskedés

A volatilitás kereskedés során a cél olyan pozíció felépítése, amelynek kifizetése a volatilitás függvénye. Máshogyan fogalmazva egy olyan pozíciót kell létrehozni, amelynek árfolyama nem az alaptermék árától, hanem az alaptermék árának változékonyságától függ. Ehhez viszont olyan termékre van szükség, amely az alaptermék árának nem lineáris függvénye, azaz olyan termékre, amelynek gammája[1] nullától különböző. Ha a volatilitástól pozitív irányban függő pozíciót akarok, azaz „veszem” a volatilitást, pozitív gammára van szükségem, ha el akarom adni, negatívra. Ezt a pozíciót ugyanakkor úgy kell felépíteni, hogy értéke ne függjön az alaptermék árától, azaz a deltája[2] nulla legyen.

Ehhez opciókra van szükségünk, méghozzá olyan opciós pozíciókra, amelyek értéke az alaptermék árától a lehető leginkább független.[3] Az első megoldás könnyen adja magát: opció vételével és egyidejűleg alaptermékkel történő dinamikus delta fedezésével egy volatilitás pozíció építhető fel. Mivel a volatilitást vettük, ezúttal egy long volatilitás

[1] Gamma: a származtatott termék értékének alaptermék ára szerint vett második parciális deriváltja.
[2] Delta: a származtatott termék értékének alaptermék ára szerint vett első parciális deriváltja.
[3] Természetesen más termék is megfelelő lenne, amelynek értéke az alaptermék nem lineáris függvénye. Ilyen lehet például a kötvény, amelyik „alaptermékének”, a hozamnak nem lineáris függvénye. Az itt elmondottak ennek megfelelően a kötvénypiacra is átültethetőek lennének. Mivel azonban a hozam, azaz az „alaptermék” nem kereskedett, ez a megoldás a gyakorlatban nem jellemző. A volatilitásra spekuláló,

pozíciót sikerült létrehozni függetlenül attól, hogy vételi vagy eladási opció volt a kiindulási alap. A gyakorlatban azonban az alaptermék és a volatilitás mellett az opció értékét meghatározó tényezők közül a kamatláb is véletlenszerűen változik. Hogy a kamatláb hatását is a lehető legkisebbre csökkentsék, a delta fedezést nem az alaptermékkel, hanem arra szóló határidős ügyletekkel hajtják végre.[4] Így a pozíció már csak az időnek és a volatilitásnak a függvénye lesz. Mivel az alaptermék ára folyamatosan változik, ezt a pozíciót folyamatosan ki kell igazítani.[5]

A másik egyszerű pozíció a két opció vételével felépíthető terpesz. Ennek előállításához egy-egy ugyanolyan kötési árfolyamú és futamidejű call és put opciót veszünk, illetve adunk el. A gyakorlatban ez a megoldás az elterjedtebb, az interneten se szeri se száma azoknak az oldalaknak, amelyeken brókercégek és befektetési bankok ajánlják ügyfeleiknek ezt a kombinációt, ha a volatilitásban akarnak pozíciót felvenni.[6] Ennek során igyekeznek olyan lejáratot és kötési árfolyamot választani, hogy a pozíció deltája minél közelebb legyen a delta semleges állapothoz. Gyakran nem azonos számú call és put opciót vásárolva igyekeznek az alaptermék árának való kitettséget csökkenteni. Így nem annyira terpeszről beszélhetünk, hanem inkább ahhoz hasonló összetett opciós pozícióról.

Len Yates például azt javasolja, hogy mikor volatilitást veszünk, minél hosszabb futamidejű opciókkal kereskedjünk (Len Yates [2003/a], [2003/b]). Ekkor ugyanis az idő múlásával lassabban „kopik" a pozíciónk értéke, nagyobb az esélye a volatilitás emelkedésének, azaz annak, hogy profitot realizálhassunk. A kötési árfolyam tekintetében a minél inkább ATM közeli opciókat ajánlja. Ekkor ugyanis – amellett, hogy a deltánk nulla közelében van egy-egy opció megvásárlásával – a részvényárfolyam erőteljes elmozdulásából is profitálni tudunk. A maximális veszteség természetesen nem lehet nagyobb, mint az opciókért kifizetett összeg, azaz veszteségünk korlátozott.

A volatilitás eladása esetén azonban short pozíciót veszünk fel, ami óriási veszteséget tud okozni számunkra. Ezért a piaci gyakorlat az, hogy OTM opciók eladásával hozzuk létre a pozíciót. Mivel mind a call, mind a put opció OTM, a részvényárfolyamnak „van

vagy azt fedezési céllal vásárló befektetők tipikusan opciókkal kereskednek. Ezért a továbbiakban én is csak ezzel az esettel foglalkozom.

[4] Amennyiben call opcióval hozzuk létre a pozíciót, annak értéke a kamat pozitív függvénye lesz. Mivel a delta fedezés során az alapterméket el kellene adni, és ezt jelenleg határidős ügylettel helyettesítjük, ennek során a kamattól negatív módon függő pozíciót veszünk fel. A két hatás egymás ellen hat, ezáltal a kamatkitettségünk csökken, illetve megszűnik. Put opciók esetén a hatás fordított.

[5] A volatilitás kereskedés kérdését részletesen, bár alapszinten tárgyalja Connolly [1997]

helye", nem kerülünk azonnali vesztes pozícióba az egyik vagy másik opció kapcsán. Ezáltal természetesen nem lesz azonos a két opció kötési árfolyama, hiszen egy ugyanolyan kötési árfolyamú call és put opció nem lehet egyszerre OTM. Ebből viszont az következik, hogy a pozíció delta semlegesítéséhez nem azonos számú call és put opciót fogunk eladni. Ezért itt inkább összetett opciós pozícióról, mintsem pusztán egy terpeszről van szó. Azáltal persze, hogy a kötési árfolyamok az alaptermék mai árától távol esnek, csökken az opciók vegája[7], azaz a volatilitásra való érzékenysége. Ezt úgy foglalhatnánk össze, hogy bár csökkent a pozitív hozam nagysága, de ugyanakkor valószínűsége növekedett.

A továbbiakban nézzük meg, milyen elméleti modellek születtek a volatilitás előállítására. Ennek során előbb az összetett opciós pozíciókról lesz szó, majd az opciók dinamikus delta fedezését nézzük át. Megvizsgálunk egy érdekes javaslatot, Neuberger ún. logaritmikus szerződését. Majd megnézzük, milyen pozíció felvételét javasolták a Goldman Sachs stratégái Derman, Kani és Kamal az helyi volatilitásra való spekuláció felépítésére. Az alábbi alfejezetben nagy részben támaszkodtam a volatilitás kereskedés elméleti oldalát legrészletesebben tárgyaló Carr és Madan cikkére (Carr – Madan [1997]).

III.3. Elméleti modellek a volatilitás előállítására

III.3.1. Egy alternatív eljárás a volatilitás előrejelzésére – volatilitás kereskedés opciókkal

Ahogyan arról már többször szó esett, az opcióárazás egyik legbizonytalanabb tényezője a volatilitás. Mivel ez a paraméter ismeretlen, csak becsülni tudjuk, mekkora lesz a jövőben. A becslésre leggyakrabban az ún. historikus volatilitást használjuk fel, vagy a piacon forgalmazott opciók árából visszaszámítva próbáljuk meghatározni azt.

[6] Például az egyik legismertebb, Len Yates oldala: www.optionvue.com
[7] Vega: a származtatott termék értékének a volatilitás szerint vett első parciális deriváltja

Ezekből az implicit volatilitás értékekből aztán akár visszaszámított modelleket is építhetünk.

A piacon a jövő „előrejelzésére" használt implicit volatilitást leggyakrabban az ATM opciók árából számítják ki, mivel ezek (az OTM opciók mellett) a leglikvidebbek a piacon, így a legtöbb piaci információ is várhatóan ezek árában található meg. Ez persze önmagában is ellentmond a BS modell feltételezésének, miszerint a volatilitás állandó, hiszen akkor minden opció árából ugyanazt a volatilitást kellene megkapnunk. Az implicit volatilitás felhasználásával szembeni legfontosabb érv azonban valószínűleg az, hogy kiszámítása eleve feltételezi, hogy a Black – Scholes modell jól írja le a valóságot.

Carr és Madan egy alternatív eljárást mutat be, amely szintén a jövőbeli volatilitást hivatott előre jelezni, de meghatározása során nem tételezik fel sem a volatilitás állandóságát, sem azt, hogy az alaptermék által követett folyamat folytonos (Carr – Madan [1999]).[8] Ráadásul az általuk felvázolt volatilitás előrejelzési modell a volatilitás előállítására is alkalmas lesz.

Vegyünk egy egyperiódusos modellt! Tegyük fel, hogy a nulladik időpontban, azaz ma befektetünk, és a befektetés egy jövőbeli T időpontban fog fizetni. A köztes időszakban nem tudunk kereskedni. Tegyük fel továbbá azt, hogy létezik egy kockázatos eszközre szóló olyan határidős ügylet, amelyik T időpont után, T' időpontban jár le. Mindezek mellett erre a határidős ügyletre vonatkozó európai opciós ügylet is van a piacon, tetszőleges kötési árfolyammal.[9]

Már Breeden és Litzenberger megmutatták, hogy a fenti feltételek mellett a befektető a nulladik időpontban az opciós piacon felvett statikus pozíció segítségével tetszőleges sima jövőbeli kifizetési függvényt előállíthat, így egy, csak a volatilitástól függő kifizetési függvényt is (Breeden és Litzenberger [1978]). Ez az eljárás tehát, bár elméleti megoldást ad, megmutatja, hogy végtelen kötési árfolyam esetén hogyan állítható elő a volatilitás.

Legyen tehát a cél egy kizárólag a volatilitástól függő kifizetési függvény előállítása. Ezt a kifizetési függvényt a továbbiakban $f(F_T)$-vel jelöljük. Megmutatható, hogy

---

[8] Eljárásuk során ők is a már korábban említett Breeden és Litzenberger [1978] eredményeihez nyúltak vissza.

[9] A végtelen számú kötési árfolyam léte kicsit erősnek tűnhet, tulajdonképpen a folytonos kereskedéshez hasonló feltételről van szó. A másik megjegyzés az alaptermékkel kapcsolatos. A gyakorlatban is sokszor előfordul, hogy az opciós ügylet alapterméke nem az azonnali termék, hanem egy arra szóló határidős ügylet. Ennek több oka lehet. Egyrészt az a már említett tény, hogy így a kamatkockázatot is minimalizáljuk, másrészt a delta fedezés során a határidős ügylet megkötésének tranzakciós költsége is lényegesen alacsonyabb lehet, mint a részvény vásárlása, illetve eladása.

bármilyen kétszer folytonosan differenciálható kifizetési függvény átírható a következő formára (Carr – Madan [1999] 1. függelék):

$$f(F_T) = f(\kappa) + f'(\kappa)[\max(F_T - \kappa, 0) - \max(\kappa - F_T, 0)] + \int_0^{\kappa} f''(K)\max(K - F_T, 0)dK$$

$$+ \int_{\kappa}^{\infty} f''(K)\max(F_t - K, 0)dK \qquad (1.)$$

minden κ tetszőleges nemnegatív számra. Így a volatilitástól függő kifizetési függvény is előállítható.

Mivel a fenti értékek a függvény T-edik időszaki értékét jelölik, T-edik időszaki pénzben vannak kifejezve. Ennek megfelelően a következő értelmezés adható nekik: a jobboldal első tagja $f(\kappa)$ darab egy forint névértékű elemi kötvényt jelöl, a második tagja $f'[\kappa]$ darab κ kötési árfolyamú call és ugyanennyi put különbsége, a harmadik tag, az összes κ-nál kisebb kötési árfolyamú, kötési árfolyamonként $f''(K)$ darab putból, a negyedik pedig az összes κ-nál nagyobb, kötési árfolyamonként $f''(K)$ darab callból álló opciós pozíció értéke.

A volatilitás pozíciót tehát opciók és elemi kötvények felhasználásával építjük fel, ezért összetett opciós pozícióról is beszélhetünk. Nekünk azonban a pozíció felépítésénél a lejárat előtti értékek lesznek fontosak.

Ha a piacon nincs arbitrázslehetőség, akkor a fenti összefüggésnek jelenértékben is teljesülnie kell. Az f függvény mai értékét PV_0^f -fel, az elemi kötvény mai árfolyamát B_0-lal, az opciók mai értékét $P_0(K)$-val illetve $C_0(K)$-val jelölve igaznak kell lennie a következő összefüggésnek:

$$PV_0^f = f(\kappa)B_0 + f'(\kappa)[C_0(\kappa) - P_0(\kappa)] + \int_0^{\kappa} f''(K)P_0(K)dK + \int_{\kappa}^{\infty} f''(K)C_0(K)dK \qquad (2.)$$

Ne felejtsük, hogy az alaptermék által követett folyamatra semmilyen feltevést nem tettünk. Azaz a folyamat pontos meghatározása nélkül sikerült csak a volatilitástól függő pozíciót felépíteni.

Carr és Madan a fenti eredmények alapján egy **másik feladatot** is igyekeznek megoldani. Bemutatták, hogy a fenti módszerrel **a jövőbeli volatilitás értéke**, azaz az alaptermék hozamának szórása is **előrejelezhetővé válik**. Ehhez két dolgot használtak fel. *Egyrészt* azt, hogy a volatilitás szórás[10], *másrészt* azt, hogy a kockázatmentes hozamot állandónak feltételezve[11], a mai és a T-edik időpontbeli határidős árfolyamok hányadosának logaritmusa, $\ln(F_T/F_0)$ az alaptermék folytonosan számított hozamát adja meg.[12]

Ennek megfelelően a [0,T] időszak hozamának varianciája (volatilitás négyzete):

$$Var_0\left[\ln\left(\frac{F_T}{F_0}\right)\right] = E_0\left\{\ln\left(\frac{F_T}{F_0}\right) - E_0\left[\ln\left(\frac{F_T}{F_0}\right)\right]\right\}^2 \qquad (3.)$$

A várhatóérték meghatározásához felhasználjuk, hogy kockázatmentes világban egy termék jövőbeli kifizetésének várható értéke megegyezik az adott termék határidős árával. Carr és Madan megjegyzik, hogy megfelelő kockázatmentes mérték mellett a határidős árak martingál folyamatot követnek. A mérték, azaz a valószínűségek eloszlása természetesen a fedezés gyakoriságának is függvénye.[13] Így adott gyakoriság mellett ez a mérték egyértelműen meghatározható.

Felhasználjuk tehát, hogy kockázatmentes világban a hozam várható értéke megegyezik egy olyan portfólió határidős árával, amelyiknek a T időpontbeli kifizetése éppen $\ln(F_T/F_0)$. Azaz egy olyan terméket keresünk, aminek éppen ez lesz a jövőbeli kifizetése. Ennek a jelenbeli értékét véve, majd ebből a határidős árfolyamot kiszámítva a kívánt eredményhez jutunk.

Vegyük észre, hogy itt most egy másik kifizetési függvényre vonatkozóan ugyanazt az eljárást alkalmazzuk, mint tettük előbb a volatilitás pozíció felépítése során. Ennek megfelelően ismét az 1. és 2. egyenleteket fogjuk felhasználni.

Legyen tehát a jövőbeli kifizetési függvény $f_m(F) = \ln(F_T / F_0)$.[14] Ennek mai értéke a 2. egyenletet felhasználva fejezhető ki tetszőleges κ mellett. A kifizetési függvény második deriváltja

[10] Ne felejtsük el a bevezetőben tett megjegyzést, hogy a dolgozatban a volatilitás alatt a szórást értem. Az olyan termékeknél, ahol a volatilitással való kereskedés valójában a varianciával való kereskedést jelenti, jelezni fogom.

[11] Ez a feltevés, ha explicit módon nem is, de az opciók árazásán keresztül végig jelen van Carr és Madan [1999] cikkében.

[12] Ha ugyanis a kockázatmentes hozam állandó, a határidős termék árfolyamát csak az alaptermék áralakulása befolyásolja. Így a határidős árfolyam két időpontbeli értéke közötti különbség csak az alaptermék árváltozásának függvénye, ezekből pedig az alaptermék hozama számítható.

[13] Például binomiális modellben nem ugyanaz a valószínűség eloszlás, ha évente egy, vagy évente két periódust tételezünk fel. Első esetben eleve csak két, a másodikban három kimenet létezik, így a valószínűségek sem lehetnek ugyanazok. Ha azonban a periódus hosszát megválasztottuk, a kockázatmentes valószínűség eloszlás egyértelmű.

[14] Az m index ebben az esetben a várható értékre (mean) utal. Ne feledjük, hogy ez még T-edik időpontbeli pénzben van kifejezve.

$$f_m''(K)=\frac{-1}{K^2} \qquad (4.)$$

lesz. Mivel a 2. egyenletnek κ minden nemnegatív értéke mellett fenn kell állnia, válasszuk meg ezt úgy, hogy a 2. egyenlet a lehető legegyszerűbb formát öltse: tegyük fel, hogy κ=F_0. Ezzel a 2. egyenlet első két tagja nullává válik.[15] Így a jelenbeli érték

$$PV_0^{f_m}=-\int_0^{F_0}\frac{1}{K^2}P_0(K)dK-\int_{F_0}^{\infty}\frac{1}{K^2}C_0(K)dK \qquad (5.)$$

Nekünk ennek határidős árfolyamára van szükségünk, ami megegyezik a hozam várható értékével:

$$\boldsymbol{F}=E_0\left[\ln\left(\frac{F_T}{F_0}\right)\right]=-\int_0^{F_0}\frac{1}{K^2}P_0^F(K,T)dK-\int_{F_0}^{\infty}\frac{1}{K^2}C_0^F(K,T)dK \qquad (6.)$$

ahol a $P_0^F(K,T)$, illetve a $C_0^F(K,T)$értékek a K kötési árfolyamú opciókra szóló T időpontban lejáró határidős ügyletek árát jelölik.

Megvan tehát a várható érték, de a végső cél a variancia (illetve a volatilitás) meghatározása. Ezt az előzőekhez hasonlóan határozhatjuk meg. Legyen a kifizetési függvény

$$f_v(F)=\left[\ln\left(\frac{F_t}{F_0}\right)-\boldsymbol{F}\right]^2 \qquad (7.)^{16}$$

Ez ismét csak T-edik időszaki pénzben van megadva. Ennek mai értékét ismét a 2. egyenlet adja meg. A kifizetési függvény második deriváltja ebben az esetben

$$f_v''(K)=\frac{2}{K^2}\left[1-\ln\left(\frac{K}{F_0}\right)+\boldsymbol{F}\right] \qquad (8.)$$

A 2. egyenletben κ továbbra is tetszőleges. Ismét válasszuk meg úgy κ értékét, hogy az egyenlet első két tagja nullává váljon. A $\kappa=F_0e^{\boldsymbol{F}}$ helyettesítést elvégezve a kifizetési függvénynek mind az értéke (első tag), mind a meredeksége (második tag) nullává válik. Nekünk ennek határidős árfolyamára van szükség. A határidős árat véve

$$Var_0\left[\ln\left(\frac{F_T}{F_0}\right)\right]=\int_0^{F_0e^{\boldsymbol{F}}}\frac{2}{K^2}\left[1-\ln\left(\frac{K}{F_0}\right)+\boldsymbol{F}\right]P_0^F(K,T)dK+\int_{F_0e^{\boldsymbol{F}}}^{\infty}\frac{2}{K^2}\left[1-\ln\left(\frac{K}{F_0}\right)+\boldsymbol{F}\right]C_0^F(K,T)dK$$

(9.)

[15] Mivel ln(1)=0, és (ln(K/F))'=(1/K-1/F)

[16] A kifizetési függvény v indexe ebben az esetben a varianciára utal.

Ez pedig éppen az, amit kerestünk: a hozam varianciája, azaz a volatilitás négyzete. **Ez** a historikus és az implicit volatilitáson túl **a jövőben realizált volatilitásnak egy harmadik becslése lehet**. Carr és Madan megjegyzik, hogy az előrejelzésen túl ez a képlet a volatilitás kockázat piaci árának kiszámítására is alkalmas, ha a fenti értéket az időszak végén összevetjük a végül realizált volatilitással.[17]

Carr és Madan tehát látszólag két, egymástól független problémát oldott meg: megadta egyrészt a volatilitás pozíció felépítésének, másrészt a volatilitás előrejelzésének egy alternatív módját. A két eredmény azonban nem független. *A volatilitás becslését* ugyanis *szintén egy összetett opciós pozícióval oldották meg*. *Ennek megvásárlása* természetesen ugyanúgy *egy long volatilitás pozíció felépítését jelenti*, annak kifizetése ugyanúgy csak a volatilitás függvénye lesz.

Elemezzük, és vessük össze az eredményt a korábban elmondottakkal! A volatilitás megvételének egyik legegyszerűbb módszere egy long terpesz (straddle) pozíció létesítése, azaz egyidejűleg egy ugyanolyan kötési árfolyamú és futamidejű vételi, illetve eladási jog vásárlása. Ennek az egyszerű pozíciónak azonban két hátránya is van. *Ha az árfolyam a kötési árfolyamtól*, és mivel az opciók tipikusan ATM-ek, ezért egyben a mai árfolyamtól *eltávolodik, a volatilitás változására való érzékenység erősen csökken*. *Emellett* a részvényárfolyam alakulásnak való kitettségünk – *a deltánk – egyre nő*.

A fenti 9. egyenlet éppen ennek a problémának a megoldására ad javaslatot. Ez ugyanis nemcsak a volatilitás előrejelzésére, hanem *egy volatilitásra spekuláló pozíció felépítésére is alkalmas*. Itt is azonos kötési árfolyamú opciók egyidejű vételével építjük fel a pozíciót. Az eredmény *a sima terpesztől abban különbözik*, *hogy* nem egy-egy, hanem *végtelen számú call, illetve put opció vásárolunk*.[18]

Mivel a gyakorlatban nem forgalmaznak végtelen számú kötési árfolyamra opciót, az eredmény úgy interpretálható, hogy minden lehetséges kötési árfolyam mellett kell opciót vásárolni. Az így kialakított portfólió esetén *bármilyen messze is megy a részvényárfolyam kezdeti értékétől, a volatilitásra való érzékenységünk nem csökken*. Ugyanakkor *megmarad az a probléma, hogy az árfolyamnak való kitettségünk nagyon megnövekedhet*.

[17] Ennek jelentősége a fejezet második részében lesz látható, mikor a volatilitásra szóló opciók kerülnek sorra. Ezek alapterméke ugyanis nem feltétlenül kereskedett, így az alaptermék, azaz a volatilitás kockázatának piaci árára szükség lehet.

[18] Ennek megfelelően a 9. egyenletben integráljel szerepel.

Hogy a kép teljes legyen, nézzük meg, miben tér el a most bemutatott módszer a „klasszikus” delta alapú fedezés módszerétől!

III.3.2. Volatilitás kereskedés opciók részvényekkel történő fedezésével

A fent bemutatott pozíción túl a volatilitás előállítható opciók és alaptermékek egyidejű vásárlásával, illetve az opció dinamikus fedezésével is. Míg azonban *az előző esetben semmilyen feltevést nem kellett megfogalmaznunk az alaptermék árfolyama, illetve volatilitása által követett folyamatról*, addig *most bizonyos megszorításokkal kell élnünk*. Így feltesszük, hogy *a befektetők folyamatosan kereskednek*, *a kockázatmentes hozam időben állandó*, és *a határidős alaptermék által követett folyamat egy folytonos szemi-martingál*[19] *folyamat*. Fenntartjuk ugyanakkor azt a feltevésünket, hogy *a határidős árfolyam volatilitása egy* tetszőleges, de *ismeretlen folyamat szerint alakul*.

Persze vállalkozhatnánk a volatilitás által követett folyamat előrejelzésére, ennek azonban több következménye lenne. Az *egyik* az, hogy a delta alapú fedezés során nemcsak a részvényárfolyam, hanem a volatilitás változásának megfelelően is módosítani kellene a pozíciónkat, ami a költségek erőteljes növekedésével járna. *Másrészt* korántsem biztos, hogy jól jeleznénk előre a volatilitás alakulását, ami a fedezés során egy plusz beépített hibát jelentene. Ennek megfelelően a továbbiakban alapvetően az alaptermék árfolyamának változására koncentrálunk, a fedezeti arány meghatározásakor a volatilitást figyelmen kívül hagyjuk.

Mivel azonban a volatilitás nem állandó, a folyamatos fedezés hibát fog eredményezni, ami a delta hedge lezárásánál nyereségként vagy veszteségként jelentkezik.

Jelölje a továbbiakban $\Upsilon(F,t,\sigma)$ egy európai típusú opció Black modell szerint számított értékét, ahol F az alaptermék jelenbeli, t időpontban érvényes határidős árfolyama, σ pedig az ennek az értéknek a kiszámításához felhasznált volatilitás érték. Tegyük fel továbbá, hogy a dinamikus fedezést nem az opció „egész életén át” folytatjuk, hanem csak egy tetszőleges (T,T’) időszakon át. Feltesszük még, hogy az

---

[19] Tulajdonképpen a pénzügyek során vizsgált folyamatok szinte mindegyike szemi-martingál folyamat. Az általánosított Wiener folyamat két részből áll, egy determinisztikus és egy sztochasztikus tagból. A sztochasztikus tag egy martingál folyamat, a determinisztikus azonban nem. A kettő együttesét ezért nevezzük szemi-martingálnak.
Az alaptermék folyamatára a vonatkozóan azért kell valamiféle feltevéssel élnünk, mivel a stratégia ezúttal dinamikus lesz, magát az alapterméket fogjuk felhasználni a delta fedezéshez. Eddig az alaptermék nem került felhasználásra, illetve maga a stratégia is statikus volt. Emiatt az alaptermék által követett folyamat jellege sem volt fontos.

alaptermékül szolgáló határidős kötés ennél később, a T” időpontban jár le, ahol $T'' \geq T'$.

A továbbiakban tehát T és T’ időpontok közötti delta fedezést vizsgáljuk. Tegyük fel, hogy most vagyunk a T időpontban, amikor a befektető elad egy európai típusú opciót, aminek Black értéke $\Upsilon(F_T, T, \sigma_h)$[20], továbbá vesz delta, azaz $\partial\Upsilon / \partial F$ számú határidős kötést. Az $\Upsilon(F_t, t, \sigma_h)e^{r(T'-t)}$ értékre az Ito – lemmát alkalmazva Carr és Madan a következőket kapták:

$$\Upsilon(F_{T'}, T', \sigma_h) = \Upsilon(F_T, T, \sigma_h)e^{r(T'-T)} + \int_T^{T'} e^{r(T'-t)} \frac{\partial\Upsilon(F_t, t, \sigma_h)}{\partial F} dF_t + \int_T^{T'} e^{r(T'-t)} \left[-r\Upsilon(F_t, t, \sigma_h) + \frac{\partial\Upsilon(F_t, t, \sigma_h)}{\partial t} \right] dt +$$
$$+ \int_T^{T'} e^{r(T'-t)} \frac{F_t^2 \sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2\Upsilon(F_t, t, \sigma_h)}{\partial F^2} dt$$

(10.)

Azaz a T’ időpontbeli érték a T időpontbeli értéknek és az azóta bekövetkezett változásoknak az összege. A változások pedig két okból, az alaptermék árának változása és az idő múlása miatt következhettek be.

Ugyanakkor az $\Upsilon(F, t, \sigma_h)$ értékre definíció szerint fenn kell állnia a Black differenciálegyenletnek. Eszerint:

$$-r\Upsilon(F, t, \sigma_h) + \frac{\partial\Upsilon(F, t, \sigma_h)}{\partial t} = -\frac{F^2 \sigma_h^2}{2} \frac{\partial^2\Upsilon(F, t, \sigma_h)}{\partial F^2} \qquad (11.)$$

Jelölje a korábbiaknak megfelelően a T’ időpontban esedékes kifizetési függvényt a következő módon

$$f(F) = \Upsilon(F, T', \sigma_h) \quad (12.)$$

A 11. és a 12. egyenleteket a 10. egyenletbe helyettesítve, és az egyenletet átrendezve a következőket kapjuk:

$$f(F_{T'}) + \int_T^{T'} e^{r(T'-t)} \frac{F_t^2}{2} \frac{\partial^2\Upsilon(F_t, t, \sigma_h)}{\partial F^2} (\sigma_h^2 - \sigma_t^2) dt = \Upsilon(F_T, T, \sigma_h)e^{r(T'-T)} + \int_T^{T'} e^{r(T'-t)} \frac{\partial\Upsilon(F_t, t, \sigma_h)}{\partial F} dF_t$$

(13.)

Értelmezzük a megkapott egyenletet! A jobboldalon a befektetés T’ időszaki értéke *áll*, azaz *a dinamikus stratégia végső értéke*. Ez egyrészt tartalmazza a T-edik időszakban vett $\Upsilon(F_T, T, \sigma_h)$ értékű kockázatmentes elemi kötvény lejáratkori értékét, másrészt a $\partial\Upsilon / \partial F$ darab határidős kötésben meglévő dinamikus pozíció értékét a T’ időpontban.

[20] A h index az opció árazásához felhasznált, és így a fedezés (hedge) alapját képező volatilitást jelöli. Mivel az opció lehet call és put is, ezért C, illetve P helyett a Y jelölést használom. Mivel határidős szerződésre szól az ügylet, az eredeti Black – Scholes képlet helyett a Black formulát alkalmazzuk.

Mivel a két oldal egyenlő, ezért ennek *megfelelően a baloldalon is a stratégia lejáratkori értékének kell állnia*. *A baloldal első tagja a stratégia* T-edik időszakban megcélzott értéke, *kifizetési függvénye*. Ebből viszont már következik, hogy *a baloldal integrálos kifejezése lesz a megcélzott értéktől való eltérés*. *Ez* a korábbiakból következően pedig nem más, mint *a volatilitás változásának hatása*.

Ha a kezdetben fedezésre felhasznált volatilitás, σ_h megegyezett volna minden egyes időszakban a realizált σ_t értékkel, akkor éppen a kezdetben megcélzott kifizetéshez jutottunk volna a fenti stratégia által.

Mivel a konvex kifizetési függvénnyel rendelkező derivatívok gammája sosem negatív, ezért opciók esetén, ha a fedezésre felhasznált volatilitás meghaladja a valós volatilitást, a fenti pozíció az árfolyam által bejárt úttól függetlenül mindig nyereséges lesz. Ha ellenben elmarad attól, veszteségünk képződik.

Nem független azonban a bejárt úttól az, hogy végül mekkora nyereséggel, illetve vesztességgel szállunk ki a fenti ügyletből. *A delta alapú fedezés, tehát annyival jobb, mint* az előző statikus, *tisztán opciókból felépített pozíció, hogy az alaptermék árának való kitettségünk megszűnik. Nem változott azonban meg az útvonalra való érzékenység*. Az a befektető, aki csak a volatilitás változásába akar fektetni, nyilvánvalóan ezt a kockázatot is szeretné megszűntetni.

Az egyik lehetőség a volatilitás sztochasztikus alakulására vonatkozó feltevéssel élni. Ez azonban, mint arról már korábban szó volt, költséges és nem feltétlenül hatékonyabb. *A másik* lehetőség az, *ha egy olyan jövőbeli* $f(\cdot)$ *kifizetési függvényt definiálunk, aminek eredményeként* a 13. egyenlet baloldalának *integrálos tagjából eltűnik a határidős árfolyam*. Erre a problémára adott egy lehetséges megoldást Neuberger, aki azt javasolta, hogy opció helyett egy olyan terméket használjunk, amelyik lejáratkor az alaptermék árának logaritmusát fizeti.

III.3.3. Neuberger logaritmikus szerződése

Neuberger dolgozatában egy általánosan használható volatilitás termék megalkotásának lehetőségét kereste (Neuberger [1994]). *A hagyományos deltafedezést azonban elvetette*. A fedezett opció esetén ugyanis a pozíció végső értéke nem független az alaptermék, vagy annak határidős árfolyama által bejárt úttól. Ennek oka az, hogy a valóság és a Black – Scholes világ nemcsak a volatilitás időbeli változásában tér el egymástól. A valóságban az árfolyam alakulás nem feltétlenül folytonos, kisebb – nagyobb ugrások is lehetségesek, az árfolyamok sem lognormális eloszlásúak, és a folytonos deltafedezés sem lehetséges. Ezen túl egy további gond lehet, hogy a piac, főleg alacsonyabb likviditás mellett befolyásolható, az árfolyam manipulálhatóvá válik (Neuberger [1994] 77. oldal).

Ezért a fentiek helyett az ún. logaritmikus szerződés használatát javasolta, ami *lejáratkor az alaptermék határidős árfolyamának logaritmusát fizeti ki*. Tegyük fel, hogy a határidős árfolyam geometriai Brown mozgást követ állandó σ volatilitás mellett. Ekkor az Ito – lemma alkalmazásával a logaritmikus szerződés fair ára a t időpontban (Neuberger [1994]):

$$L_t = Ln\, F_t - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t) \qquad (14.)$$

Ezt ez értéket F_t szerint deriválva megkapjuk a logaritmikus szerződés deltáját:

$$\Delta_L = \frac{1}{F_t} \qquad (15.)$$

Azonnal szembe ötlik a logaritmikus szerződés egy előnye: *a fedezeti arány független a volatilitástól*, annak értéke mindig az éppen érvényes határidős árfolyam reciproka. Ez fogja biztosítani, hogy ha a logaritmikus szerződést dinamikusan fedezzük, akkor annak értéke csak a realizált volatilitás függvénye lesz. A logaritmikus szerződést eladva, és delta számú határidős szerződést véve bemutatható (Neuberger [1994] függelék), hogy a befektető nyeresége / vesztesége a fenti ügyletből éppen a következő lesz:

$$P \,\&\, L = \frac{1}{2}\left(\sigma_{impl}^2 - \sigma_{realizált}^2\right)T \quad (16.)$$

ahol σ_{impl} a logaritmikus szerződésben benne foglalt implicit volatilitás, míg a $\sigma_{realizált}$ az adott időszak realizált volatilitását mutatja.

Ne felejtsük el, hogy Neuberger feltételrendszere némiképpen különbözik az eddig elmondottaktól. Ő *a volatilitás állandóságát tételezi fel*. Ennek megfelelően minden egyes pillanatban ugyanaz a volatilitás hajtja a sztochasztikus folyamatot, szemben a korábban elmondottakkal, ahol minden egyes időpontban más volatilitás lehet. Itt éppen ezért a két volatilitás különbségét csak beszoroztuk az idő hosszával, ott az integrálját vettük a különböző időszakok eltéréseinek.

A későbbiekben ennek megfelelően *Neuberger feloldotta a volatilitás állandóságára vonatkozó feltevését*, így az előző egyenletet is módosítania kellett. *A fedezeti arány nem* *változik*, hiszen abban a volatilitás nem játszott szerepet, de *a végső nyereség / vesz*teség értékét mutató *függvény* a következő lesz:

$$P \& L = \int_0^T \frac{1}{2}\left(\sigma_{impl}^2 - \sigma_t^2\right)dt \qquad (17.)$$

Ez már hasonlít a 13. egyenlet baloldalának második tagjához, kivéve persze azt, hogy *értéke független a határidős árfolyam, mint alaptermék által bejárt úttól*. De különbséget fedezhetünk fel abban is, hogy ott a volatilitás a fedezeti arányt befolyásolta, míg itt ez nem következik be.
A piacon azonban nem jegyeznek logaritmikus szerződéseket, így Neuberger eljárásának csak a logikáját tudjuk átvenni, megoldását nem teljes egészében.

Carr – Madan és Neuberger eredményeit összekapcsolva azt mondhatjuk, hogy használjunk továbbra is opciókat a logaritmikus szerződés helyett. Azonban ezek segítségével alakítsunk ki olyan jövőbeli $f(F_T)$ kifizetési függvényt, ami az alaptermék árfolyamának logaritmusát fizeti ki. Így bár a felhasznált opciók fedezése nem független a volatilitástól, és valamilyen σ_h használata továbbra is szükséges lesz, a pozíciónk értéke független lesz a határidős árfolyam által bejárt úttól.

III.3.4. A realizált volatilitás „előállítása”[21]

A korábban megvizsgált pozíció nyeresége, illetve vesztesége attól függött, hogy az opció megvásárláskori implicit, fedezésre felhasznált volatilitása valamint a fedezés során realizált volatilitás hogyan viszonyul egymáshoz. A fenti stratégia kisebb módosításával azonban egy *olyan pozíció is* létrehozható, ami nem a különbséget, hanem *pontosan a realizált*, illetve előre tekintve éppen a jövőbeli *volatilitást fizeti ki*.
Végezzük a dinamikus fedezést úgy, hogy a volatilitásról tegyük fel, hogy nulla, azaz a 13. egyenletben a σ_h=0 helyettesítést hajtsuk végre. Ekkor az egyenlet a következőképpen írható át:

$$\int_T^{T'} \frac{F_t^2}{2} f''(F_t)\sigma_t^2 dt = f(F_{T'}) - f(F_T) - \int_T^{T'} f'(F_t)dF_t \qquad (18.)$$

Vegyük észre, hogy az előző egyenletben szereplő $Y(\cdot)e^{r(T'-t)}$ helyett mindenütt a jövőbeli, a T' időpontbeli kifizetési függvény, $f(\cdot)$ szerepel. Azaz a képlet nem változott, csak a felírás formája, a jelölés. A baloldal láthatóan egyrészt a realizált volatilitás, másrészt az alaptermék által bejárt út függvénye. Hogy ezzel tudjunk foglalkozni, olyan $f(\cdot)$ kifizetési függvényeket vizsgálunk a későbbiekben, amelyek esetén a jobboldal egyszerűsödik, a függvény értéke és az első deriváltja (meredeksége) nullává válik.

A jobboldalt értelmezve a követendő stratégia is látható. A jobboldal első tagja egy olyan (statikus) opciós pozíciót feltételez, amelyik T' időpontban jár le, kifizetése pedig éppen $f(F_{T'})$. A második tag egy szintén statikus opciós pozíció, amelyik a T-edik időpontban jár le, és $-e^{-r(T'-T)}f(F_T)$ forintot fizet.[22] A harmadik elem pedig a T és T' időpontok között fenntartott, $-e^{-r(T'-t)}f'(F_t)$ darab határidős ügyletet tartalmazó dinamikus pozíció értékét mutatja.

Vegyünk tehát *hosszabb futamidejű opciókat, adjunk el rövidebb futamidejű opciókat, a két csoport lejárata közötti időben pedig hajtsunk végre dinamikus delta fedezést*. Amíg mindkét futamidejű opció él, (azaz t<T), a két opciós pozíció a volatilitásnak a portfóliónkra gyakorolt hatását kioltja. A „játék" akkor kezdődik, ha már csak a hosszabb futamidejű opciók élnek. Amit realizálunk, az éppen T és T' időpontok közötti volatilitás. Ha a volatilitást el szeretnénk adni, akkor természetesen a rövidebb futamidejű opciókban kell long, a hosszabb futamidejűekben pedig short pozíciót létesíteni.

Ha csak a hosszabb futamidejű opciót vesszük, és a dinamikus semlegesítést már ma megkezdjük, a mától számított időszak volatilitását realizáljuk. Annak, hogy a semlegesítést $\sigma_h=0$ feltétel mellett hajtjuk végre, csak az a jelentősége, hogy nem a két volatilitás különbségét, hanem éppen a realizáltat „vesszük meg" az ügylet által.

Ne feledjük azonban, hogy a *pozíciónk még mindig függ az alaptermék árfolyama által bejárt úttól*. Ezért ha ezt is ki akarjuk küszöbölni, akkor *olyan kifizetési függvényre van szükség, amelyik ezt a problémát is orvosolja*.

Tetszőleges függvényt definiálhatunk ezek után, a cél az, hogy az alaptermék által követett árfolyam úttól független legyen, és ha lehet a függvény értéke és meredeksége nulla legyen.

---

[21] Ez a rész Carr és Madan [1999] IV. fejezete alapján készült.

[22] Ne felejtsük el, hogy az $f(\cdot)$ értékek T' időszaki pénzben vannak kifejezve! Ezért kell ezt az értéket visszadiszkontálni.

Carr és Madan a következő kifizetési függvényt javasolta:[23]

$$\Phi(F) \equiv 2\left[\ln\left(\frac{\kappa}{F}\right) + \frac{F}{\kappa} - 1\right] \quad (19.)$$

ahol κ tetszőleges véges pozitív szám. A függvény első és második deriváltja a következőképpen néz ki:

$$\Phi'(F) = 2\left[\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{F}\right] \quad (20.)$$

$$\Phi''(F) = \frac{2}{F^2} \quad (21.)$$

Ha κ=F feltételezéssel élünk, akkor mind a 19., mind a 20. egyenlet nullává válik. A 19-21. egyenleteket a 18.-ba helyettesítve a következőket kapjuk:

$$\int_T^{T'} \sigma_t^2 dt = 2\left[\ln\left(\frac{\kappa}{F_{T'}}\right) + \frac{F_{T'}}{\kappa} - 1\right] - 2\left[\ln\left(\frac{\kappa}{F_T}\right) + \frac{F_T}{\kappa} - 1\right] - 2\int_T^{T'}\left[\frac{1}{K} - \frac{1}{F_t}\right] dF_t \qquad (22.)$$

A T és T' időszakok között realizált volatilitást tehát három tagból állítottuk össze. A nulladik időszakban vettük a hosszabb, eladtuk a rövidebb lejáratú opciókat, a két időpont között pedig dinamikus delta fedezést folytattunk.

Hogy azt is meg tudjuk mondani, mennyibe került ennek a pozíciónak az előállítása, vegyük sorra a 22. egyenlet jobb oldalának tagjait! Az első és második tag jövőbeli kifizetési függvények értékét jelöli. Ezek meghatározásához a 2. egyenlethez kell visszakanyarodnunk. A harmadik tag a határidős ügylettel végrehajtott dinamikus fedezés jövőbeli kifizetése. Ennek a költsége ma nulla, így ezzel nem kell foglalkoznunk.

A 19-21. egyenleteket a másodikba helyettesítve a 18. egyenlet jobb oldalának első két tagjára általánosan a következő összefüggést kapjuk:

$$2\left[\ln\left(\frac{\kappa}{F}\right) + \frac{F}{\kappa} - 1\right] = \int_0^{\kappa} \frac{2}{K^2} \max(K - F, 0) dK + \int_{\kappa}^{\infty} \frac{2}{K^2} \max(K - F, 0) dK \qquad (23.)$$

Ebből az összes jelenbeli költség a következő:

$$Ktg = \int_0^{\kappa} \frac{2}{K^2} P_0(K,T') dK + \int_{\kappa}^{\infty} \frac{2}{K^2} C_0(K,T') dK - e^{-r(T'-T)}\left[\int_0^{\kappa} \frac{2}{K^2} P_0(K,T) dK + \int_{\kappa}^{\infty} \frac{2}{K^2} C_0(K,T) dK\right] \quad (24.)$$

Ennyibe kerül tehát ma a jövőbeli T és T' időszakok közötti realizált volatilitás megvásárlása, míg a végső kifizetést a 22. egyenlet tartalmazza.

[23] A megoldás Neubergerhez hasonlóan itt is valamiféle logaritmikus függvény használata.

Hasonlóan a korábban bemutatottakhoz, ez a fent levezetett egyenlet nemcsak a volatilitás kereskedés megértéséhez, de a jövőbeli volatilitás előrejelzésére is alkalmas. A 22. Egyenlet baloldalán egy adott időintervallum realizált volatilitása áll.

Kanyarodjunk el innen egy kicsit Rebonato definíciójához (Rebonato [1999] 16 – 17. oldal). Ő a jövőbeli T és T' időpontok közötti időszak így meghatározott varianciáját sztochasztikus varianciának nevezi. Ha a mai és a T-edik időpont közötti értékét, illetve ennek négyzetgyökét Black – volatilitásnak nevezi. Ennek értéke azonban előre nem ismert, ezt az opciók implicit volatilitásával teszi egyenlővé! Ott a logika tehát az, hogy az implicit volatilitást fogja fel valamifajta becslésként, illetve a jövőbeli helyi volatilitás értékek összegeként.

A logika most is ehhez hasonló. Csak míg ott az implicit volatilitásból próbáltunk a helyi volatilitás értékére következtetni, itt az opciók árából becsüljük a jövőbeli volatilitást. Ennek megfelelően a jövőre becsült volatilitás, $\sigma^2_{becsült}(T,T')$ a 24. egyenlet jövőértékeként számítható:

$$\begin{aligned}\sigma^2_{becsült}(T,T') &= e^{rT'}\left[\int_0^{\kappa}\frac{2}{K^2}P_0(K,T')dK + \int_{\kappa}^{\infty}\frac{2}{K^2}C_0(K,T')dK\right] \\ &- e^{rT}\left[\int_0^{\kappa}\frac{2}{K^2}P_0(K,T)dK + \int_{\kappa}^{\infty}\frac{2}{K^2}C_0(K,T)dK\right]\end{aligned} \qquad (25.)$$

A fenti logikát folytatva tulajdonképpen tetszőleges számú jövőbeli kifizetési függvény definiálható, így tetszőleges jövőbeli volatilitás előállítható. Carr és Madan maguk is több esetet definiálnak (pl. adott árfolyamsáv varianciáját, ami érdekes lehet sávos devizaárfolyam esetére).

III.3.5. Tesztek és kereskedési stratégiák a gyakorlatban

A több opció egyidejű adásvételével és deltafedezésével előállítható delta semleges, a volatilitás változására alapozó stratégia nyereségességét vizsgálta például Welch és Culumovic [1995]. Stratégiájuk alapja az volt, hogy akkor kezdtek kereskedni, mikor két call opció implicit volatilitása egymástól jelentős mértékben eltért.[24] Az 1987-1989-es periódust vizsgálva ara jutottak, hogy a volatilitásra való spekuláció / arbitrázs

[24] Igazándiból az opciók, illetve az alaptermékül szolgáló részvények árából az implicit volatilitások lehetséges sávját határozták meg. Amennyiben a két sáv nem fedett át, azt jelzésként értékelték, ahol a nagyobb volatilitású opciót eladni, a kisebbet tartalmazót venni kellett a delta semlegesség fenntartása mellett. Számításaikat mind vertikális, mind horizontális, mind diagonális különbözetekre elvégezték.

nyereséges ügylet lehetett azok számára, akik alacsony tranzakciós költségek mellett kereskedhettek. Különösen jelentős volt az opciók egymáshoz képesti félreárazása az 1987-es krach előtt, de a profitszerzés lehetősége ezután is fennmaradt.

A piacon természetesen nagyon sokfajta stratégia definiálható. Érdekes lehet például két termék volatilitása közötti különbség előállítása, vagy egy részvény és egy index volatilitásának különbsége. A volatilitás relatív mértéke, azaz két különböző termékre szóló opció volatilitásának aránya az opciók egymáshoz képesti félreárazásáról tanúskodhat. Érdekes tesztet végzett el Poon és Pope [1999]. Az S&P 100-as és az S&P 500-as indexekre szóló opciók implicit volatilitásait vetették össze. Mivel a 100-as indexben szereplő papírok az 500-as index kapitalizációjának is jelentős hányadát alkotják, volatilitásuk nagymértékben nem térhet el egymástól. Ha ez mégis megesett, a nagyobb volatilitású opciót véve, és a kisebbet eladva próbáltak nyereséget realizálni. Az ő stratégiájuk tehát nem egy-egy termék volatilitásának, hanem két termék relatív volatilitásának mértékére vonatkozott.

Stratégiájuk valamilyen mértékben az opciós piacok hatékonyságát is teszteli, amennyiben a nagy nyereségek jelentős relatív félreárazásra utalnak. Azt találták, hogy a két opciós piac együttes hatékonysága meglehetősen alacsony, a fenti eljárással még a tranzakciós költségek levonása esetén is lehetett profitot realizálni. Különösen olyan kereskedési stratégia esetén lehetett nyerni, ahol a piaci szereplő egész nap, folyamatosan üzletelt, pozícióját gyakran változtatta.

III.3.6. Az idő dimenziójának Derman – Kani – Kamal (DKK) féle kiterjesztése

Eddig azzal a feltevéssel éltünk, hogy csak néhány lejáratra, de végtelen kötési árfolyamra jegyeznek a piacon opciókat. Ennek a gondolatnak a kiterjesztése az lehet, ha a lejáratokra is *feltesszük, hogy végtelen lehetséges lejárat létezik*. Ebben az esetben a korábban megfogalmazott logikát úgy folytathatnánk, hogy az összes jövőbeli (T,T’) intervallum volatilitása potenciális „áruként” szerepelhet. Ennek megfelelően az összes jövőbeli helyi volatilitás előállítható a korábban bemutatotthoz hasonló opciós pozíciók felhasználásával.

Ha minden lehetséges lejáratra jegyeznének opciókat, akkor a hosszabb futamidejűt megvéve, a rövidebben eladva, és a két időpont között dinamikus fedezést végrehajtva, az adott, most már tetszőlegesen megválasztott időintervallum volatilitása előállítható.

Két lejáratot egymáshoz egészen közel választva, akár egy adott pillanat volatilitása is kereskedhetővé válik.

Derman, Kani és Kamal diszkrét idejű modelljükben próbálták bemutatni azt, miként lehet az egyes periódusok volatilitásának alakulására szóló spekulációs pozíciót felépíteni. A korábbi visszaszámított modellek logikájának megfelelően nem egy-egy időintervallum, hanem az *egy-egy csomóponthoz tartozó helyi volatilitást próbálták meg előállítani opciók segítségével* (Kani – Derman – Kamal [1996]).

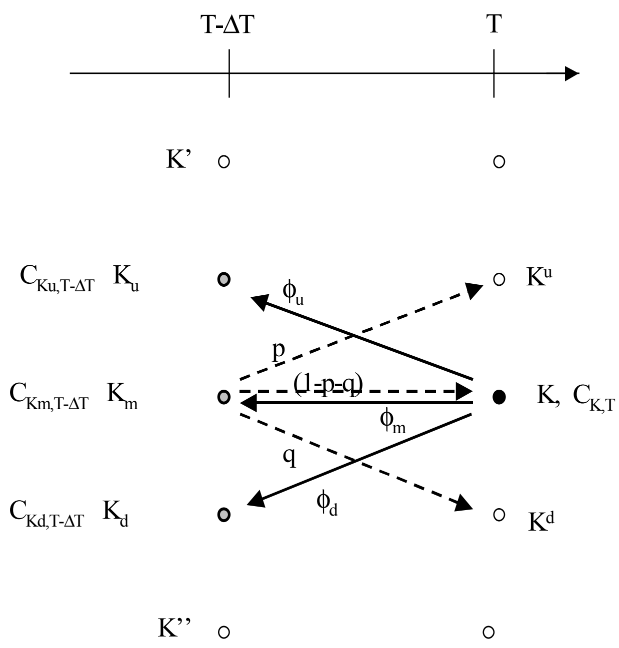
Mivel a helyi volatilitás mindig csomópontokhoz köthető, így nem egyszerűen az opciók lejáratát, hanem kötési árfolyamait is figyelembe kell venni a pozíció felépítése során. Kani, Derman és Kamal a Derman, Kani és Chriss által megalkotott implicit trinomiális fát vette kiindulási pontnak. Ezen a fán mutatták meg, hogyan lehet tetszőleges jövőbeli helyi volatilitással kereskedni, illetve hogyan lehet ezek változásának opciós portfólionkra gyakorolt hatását semlegesíteni. Mivel trinomiális modell az alap, egy-egy pontból három másikba léphetünk tovább, illetve egy adott pontba három másikból érkezhetünk. Ennek megfelelően a T-edik időszaki opció mellé a horizontális spread felépítése során három másik, T-ΔT időpontban lejáró opció szükséges, ha nem csupán az időpontot, de az ár szintjét is meg akarjuk határozni.

Azaz egy hosszabb futamidejű opció megvásárlásával, és háromfajta, egy periódussal rövidebb futamidejű opció egyidejű eladásával olyan pozíciót alakítottunk ki, amely nyereséges lesz, ha a helyi volatilitás értéke nő, veszteséges, ha csökken. Nevezzük ezt az összetett opciós pozíciót volatilitás alappozíciónak.[25]

Az alappozíció értékét jelölje $A_{K,T}(t,S)$, ami az alappozíció t-beli, az alaptermék S árfolyama melletti értékét fogja jelenteni, ahol a hosszabb futamidejű, K kötési árfolyamú opció T időpontban jár le. A három rövidebb futamidejű opció közül a középső kötési árfolyama legyen K_m, illetve a közvetlenül K_m alatti, illetve feletti két árfolyam, azaz K_u illetve K_d. A jelöléseket az 8. ábra tartalmazza.

[25] Derman, Kani és Kamal a gadget kifejezést használják a fenti pozícióra. Mivel a helyi volatilitásra szóló ügyletek során ez a kiindulási pont, ezért használom az alappozíció elnevezést.

8. ábra[26]



Kössük meg úgy az alappozíciót, azaz válasszuk meg úgy a súlyokat, hogy az alappozíció értéke legyen nulla a T-ΔT időpontban, illetve minden azt megelőző periódusban.[27] Azaz:

$$A_{K,T}(t,S) = C_{K,T}(t,S) - \phi_u C_{K_u,T-\Delta T}(t,S) - \phi_m C_{K_m,T-\Delta T}(t,S) - \phi_d C_{K_d,T-\Delta T}(t,S) = 0 \qquad (26.)$$

ahol ϕ_i az egyes opciók súlyát jelenti.

Az alappozíció felépítéséhez éppen ennek a három ismeretlennek a meghatározására van szükség. Ezek értéke természetesen nem független attól, hogy a T-ΔT időpontban milyen csomópontban vagyunk. Ha ma K_d-ben, vagy az alatt vagyunk, akkor az opció biztos, hogy értéktelenül fog lejárni, hiszen a kötési árfolyama $K=K_m$, és ennél magasabbra egy periódus alatt már nincs lehetőség elmozdulni. Ugyanígy értéktelenül járnak le a rövidebb futamidejű opciók is, hiszen a legalacsonyabb kötési árfolyam is éppen K_d. Mindez azt jelenti, hogy bármilyen súlyt alkalmazhatunk, mivel az összes összetevő értéke nulla, az alappozíció értéke is az lesz.

Amennyiben az árfolyam a T-ΔT időpontban K_d-nél nagyobb, minden árfolyam esetén külön egyenletet fogunk kapni a súlyok meghatározásához. Ha az árfolyam K_m, a T futamidejű opciónak csak az árfolyam felfelé mozdulása esetén lesz értéke, ezért a T-ΔT időpontbeli értéke $e^{-rT}p\left(K^u - K\right)$ lesz. A T-ΔT időpontban lejáró opciók közül csak a

[26] Forrás: Kani – Derman – Kamal [1996]

[27] Ez a két feltétel ugyanazt jelenti. Ha egyszer egy jövőbeli időpontra vonatkoztatva a pozíció értéke nulla, akkor az azt megelőző időpontra ezt az értéket visszadiszkontálva nem adhat nullától eltérő értéket.

legalacsonyabb kötési árfolyamúnak lesz pozitív az értéke, $(K_m - K_d)$. Ebből éppen ϕ_d darabbal rendelkezünk. Ezért ebben az esetben a 26. egyenlet a következő alakot ölti:

$$\phi_d(K_m - K_d) = e^{-r\Delta T} p(K^u - K) \qquad (27.)$$

Ha T-ΔT-ben K_u-ban vagyunk, a hosszabb futamidejű opció biztos, hogy értékesen fog lejárni, ezért értéke gyakorlatilag egy határidős ügylet értékével lesz azonos, míg a rövidebb futamidejű opciók közül már kettő értéke lesz pozitív, így az egyenlet:

$$\phi_m(K_u - K_m) + \phi_d(K_u - K_d) = K_u e^{-\delta\Delta T} - Ke^{-r\Delta T} \qquad (28.)$$

Ugyanígy K' esetén:

$$\phi_u(K' - K_u) + \phi_m(K' - K_m) + \phi_d(K' - K_d) = K' e^{-\delta\Delta T} - Ke^{-r\Delta T} \quad (29.)$$

A 28. és a 29. egyenletekben a zárójelek felbontása és a két egyenlet egymásból való kivonása után a következőket kapjuk:

$$\phi_u + \phi_m + \phi_d = e^{-\delta\Delta T} \qquad (30.)$$

$$\phi_u K_u + \phi_m K_m + \phi_d K_d = Ke^{-r\Delta T} \qquad (31.)$$

Derman, Kani és Kamal a 30. egyenletet normalizálási, a 31. egyenletet várható érték feltételnek nevezi.

A fenti egyenleteknek természetesen megvan a maguk put opcióra épülő párja is. A DKK modellben, megfelelően a korábban bemutatott DK és DKC modellekhez mindekét opció felhasználásra kerül. A szerzők többször utalnak rá, hogy szerintük a volatilitásról a legtöbb információ az OTM opciókból szerezhető, ezért mindkét opció OTM típusai kerülnek felhasználásra.[28] A 27. egyenletből ϕ_d, putra épülő párjából a ϕ_u értéke határozható meg:

$$\begin{aligned} \phi_d &= e^{-r\Delta T} p \frac{(K^u - K)}{(K_m - K_d)} \\ \phi_u &= e^{-r\Delta T} q \frac{(K - K_d)}{(K_u - K_m)} \end{aligned} \qquad (32.)$$

Ezek mellett a súlyok mellett az alappozíció értéke tehát T-ΔT-ben, illetve minden azt megelőző időpontban nulla lesz.

A fenti ϕ súlyok úgy kerültek meghatározásra, hogy az alappozíció értéke nulla legyen. Ebben az esetben azonban *az egyenletnek létezik egy másik olvasata is*. *A hosszabb futamidejű opció értéke megegyezik három rövidebb futamidejű opció értékével*, azaz

[28] Érdekes, hogy Carr és Madan pedig az ATM opciókra esküsznek. A dolgozatban nem célom ezen irányzatok között igazságot tenni.

gyakorlatilag a hosszabb futamidejű opció egy dekompozícióját, felbontását adtuk meg. Ez az egyezőség mindaddig fennáll, míg az adott helyi volatilitás értéke meg nem változik.

Természetesen lehetőség van arra, hogy ne csupán egyetlen periódus, hanem tetszőlegesen több periódus volatilitás értékét állítsuk elő, illetve ezek ellen fedezzük magunkat. Ebben az esetben a súlyok már nemcsak egyetlen helyi volatilitás, hanem volatilitások sorozatának, sőt útjainak függvényében alakulnak, amelyek a két időpontot és kötési árfolyamot összekötik. Ez olyan lesz, mint a „hagyományos", a fa vége felé mutató valószínűségek esetében a több periódus múlvai értékek bekövetkezésének valószínűsége. A valószínűségek összege természetesen ebben az esetben is egy lesz. Tulajdonképpen, ahogy a II. fejezetben a Rubinstein modellben kiemeltük, az átmenet valószínűségek helyett út valószínűségekkel számolunk.

A dekompozíció természetesen ebben az esetben is igaz, csak nem három, hanem több, és rövidebb futamidejű opció összegére bontjuk fel az alappozíció hosszabb opcióját. És ugyanígy változatlanul igaz, hogy az alappozíció értéke mindaddig nulla, amíg a köztes helyi volatilitások nem változnak.

Az alappozíciók természetesen egymással is kombinálhatóak, több tartható, így ha megfelelő kötési árfolyam és lejárat áll rendelkezésünkre, a fa bármely részének helyi volatilitásának változása ellen védekezhetünk, illetve ennek bármely részfelülete kereskedhető.

III.4. Volatilitásra szóló termékek

Az eddigiekben áttekintettük, hogy opciók felhasználásával, illetve az ún. logaritmikus szerződés alkalmazásával hogyan tudunk olyan pozíciót előállítani, aminek kifizetése részben vagy teljes egészében az alaptermék volatilitásának jövőbeli alakulásától függ. A felvázolt modellek jellemzően elméletiek voltak, nemegyszer olyan feltevéssel éltünk, ami a gyakorlati életben nem állhat fenn (pl.: folyamatos kereskedés és fedezés, végtelen számú, különböző kötési árfolyamú opció). A bevezető fejezetben sorra vettük azokat a szereplőket, akik számára a volatilitás kockázatot jelenthet, és ezért a volatilitás vevői lehetnek.

Sajnos azonban számukra az eddig bemutatott eszközök nem biztos, hogy megoldást jelentenek. Ezek ugyanis azt követelik meg, hogy ezeknél a cégeknél, alapkezelőknél legyenek olyan emberek, akik idejük jelentős részében delta fedezéssel, illetve az összetett pozíciók kiigazításával foglalkoznak. Ennek azonban gyakran nemcsak az emberi, de az anyagi és informatikai feltételei is hiányoznak. Emellett az is előfordulhat, hogy a befektetési alap szabályzata eleve nem teszi lehetővé a volatilitásnak a fent bemutatott előállítását. Ezért a piac tovább kutatott. A szintetikusan előállított termékek jók a spekulánsok számára, a fedezeti ügyletet kötni szándékozók viszont ennél egyszerűben kezelhető termékek kialakulását igényelték. Mivel a termékek egyedi igényekre szabottak, a bankok treasury-jei számára jelentenek ezek a termékek jó terepet.

Így a továbbiakban a volatilitásra szóló származtatott (határidős, swap, opciós) ügyletek kérdését nézzük végig. Ahogyan a piac igénye jelentkezett ezekre a termékekre, úgy jelentkeztek egyre újabb és újabb árazási modellek.

Azonban ezen termékek vizsgálata során nem elégedhetünk meg pusztán az árazás vizsgálatával, a termékek szintetikus előállításáról is szólni kell. Egy további fontos kérdés, hogy mire is szólnak valójában ezek a szerződések. Gyakran előfordul ugyanis, hogy a szerződések nem a volatilitásra, hanem a varianciára szólnak. Ahogy azt már láttuk, ennek előállítása gyakorta egyszerűbb, viszont ekkor az opcióárazás során tanultakat is kicsit másképpen kell alkalmazni.

A volatilitásra, akárcsak a többi alaptermékre, többféle származtatott ügylet képzelhető el. Így határidős ügyletek, swapok, illetve opciók. A volatilitásra – illetve varianciára szóló – tőzsdén kívüli ügyleteket a gyakorlatban a swap elnevezéssel illetik annak ellenére, hogy jellemzően egyetlen jövőbeli kifizetésről történik megállapodás, azaz tulajdonképpen határidős ügylettől van szó. Ennek megfelelően különbséget tenni a swap és a határidős ügyletek között ezen alaptermék esetén nincsen sok értelme, illetve a különbségtétel esetleges.

Ráadásul volatilitásról lévén szó, a határidős árfolyam meghatározása, mint az azonnali érték felkamatoztatott értéke az arbitrázs összefüggés problémája miatt aligha használható módszer. Ennek megfelelően azt az értéket keressük, amely mellett a határidős ügylet, vagy ha jobban tetszik a swap értéke a megkötés pillanatában nulla. A továbbiakban a terminológia tekintetében a szerzők szóhasználatát követem. Mivel a piacon alapvetően tőzsdén kívüli volatilitás kereskedésről beszélhetünk, a swap ügyletek elnevezés a gyakoribb.[29] Természetesen az egyik ügyletről elmondottak a másikra is érvényesek.

A derivatív ügyletek árazása során nagyon fontos, hogy az alaptermék kereskedett, illetve hogy annak áralakulása megfigyelhető legyen. Ebből a szempontból a volatilitás piacon a helyzet sajátos. A volatilitás mosoly léte ugyanis azt mutatja, hogy attól függően, hogy milyen kötési árfolyamú opciókat vizsgálunk, más és más lesz az implicit volatilitás, így ezeknek a termékeknek nemcsak az árazása sajátos, de az alaptermék áralakulásának nyomon követése sem egyszerű.

A fedezés, mint azt többen megmutatták (például Detemple és Osakwe [2000]), ha nem is könnyű, de lehetséges, de ahhoz nem elegendő már az alaptermék és egy hitelügylet, de kellenek az alaptermékre szóló opciók is. Három termék kombinálásával tudták a volatilitásra szóló termékeket előállítani.

Az alaptermék, azaz a volatilitás áralakulásának nyomon követhetőségét a tőzsdék igyekeztek megoldani. Több tőzsde is létrehozta a saját volatilitás indexét, amelynek célja az volt, hogy egyfajta referencia értékként szolgáljanak a volatilitásra szóló termékek árazása során. Másrészről azt is remélték, hogy amennyiben rájuk vonatkozóan megfelelően sok derivatív ügylet (pl. határidős és opciós ügylet) kerül forgalmazásra, akkor ezekkel akár a szintetikus előállítás is könnyebben megvalósítható lesz.

Ennek megfelelően mielőtt megvizsgálnánk a volatilitásra szóló termékek előállításának és árazásának módszereit, essék néhány szó az ún. volatilitás indexekről, melyek a volatilitás kereskedés első fázisát jelentették a piacon.

III.4.1. A volatilitás indexek

Az opciók árából számított implicit volatilitás sajnos csak az adott futamidejű, illetve adott kötési árfolyamú opciókra nézve bír információs értékkel. Ennek megfelelően nem egy piaci mutató. Ezért ahogyan a tőzsdeindexekkel a részvénypiac, a kötvényindexekkel pedig a kötvénypiac mozgását próbálják meg jellemezni, ehhez hasonlóan merült fel egy, az opciós piac egészét jellemző, ún. volatilitás index bevezetésének igénye. Ezt a típusú indexet ma már a világ több tőzsdéjén több termékre jegyzik, esetenként pedig kereskedni is lehet rá.

[29] Ebben az értelemben a swap a forward ügylet szinonimájaként is szerepelhet.

A tőzsdéken jegyzett volatilitás indexek alapja nem a piaci realizált volatilitás, hanem kiemelt opciók implicit volatilitásainak súlyozott átlaga. Ilyen index például a CBOE VIX indexe, vagy a Deutsche Terminbörse 1994. decemberében indított VDAX indexe. Az előbbi az S&P 500-ra szóló call és put opciók, az utóbbi a DAX indexre szóló call és put opciók implicit volatilitásának indexe.[30] Legutóbb az AMEX vezette be népszerű, a Nasdaq indexet másoló QQQ portfólióra szóló opciók indexét, az ún. QQV volatilitás indexet. Nézzük meg röviden, hogyan épülnek fel ezek a termékek!

A DAX-ra szóló opciókból több volatilitás indexet is számítanak (Guide to the Volatility Indices of Deutsche Börse [1997]). Vannak az ún. al-indexek, amelyek külön – külön az egyes lejáratokhoz kötődnek. Ezek az adott lejáratú, az ATM értéket közrefogó kötési árfolyamokhoz tartozó call és put opciók implicit volatilitásának átlagaként adódnak.

Az aggregált VDAX index esetében megpróbálják az értéket a lejárati időpontoktól függetlenné tenni. Ezt a 45 naphoz legközelebb lévő, már kiszámításra került al-indexek átlagolásával számítják.[31] A súlyokat a kitűzött negyvenöt napos időponttól való eltérések jelentik, a volatilitás értékét éves szintre kerekítik.

A CBOE-n forgalmazott VIX index a VDAX-hoz hasonlóan a lejárattól független próbál maradni (Whaley [1993], illetve Whaley [2000], illetve a változtatások után The White Book of VIX [2003]). Itt azonban az egyes al-indexeket nem jegyzik, csak a végső, aggregált index értékét. A névleges időpont, amire az implicit volatilitás értékeit átlagolják, a CBOE-n harminc naptári nap. 2003 szeptembere előtt az index az ehhez legközelebb lévő két időpont ATM-hez legközelebb lévő call és put opciók implicit volatilitásának súlyozott értékeként adódott.[32] Hogy a termék még több piaci szereplő számára legyen vonzó, 2003 szeptemberében módosítottak az indexszámítási metóduson.

Egyrészt az ATM opciók használatról áttértek a (forward) OTM opciókra. Eszerint a határidős árfolyam feletti kötési árfolyamok esetén a call, az alatt a put opciók értékét

[30] A VIX index korábban (2003. szeptembere előtt) az S&P 100-as indexre szólt. Mivel azonban a leglikvidebb opciós termékké az S&P 500-ra szóló opciók váltak, illetve mivel ez az index lett a legnépszerűbb amerikai referencia index (benchmark), a CBOE az utóbbi indexre történő áttérés mellett döntött. Részletsebben lásd The White Book of VIX [2003]

[31] A kereskedés kezdeti szakaszában, hogy minél hamarabb tudjanak VDAX értéket számítani, nemcsak a 45 naphoz legközelebbi lejáratok, hanem bármilyen már kereskedett lejárat felhasználható. Természetesen, ahogy a kereskedés beindul, ezeket az értékeket a közelebbi lejáratok értékeire cserélik fel.

[32] Kivételt képeznek azok a lejáratok, ahol a kifutásig nyolc, vagy annál kevesebb nap van hátra. Ekkor ugyanis a piac gyakran abnormálisan viselkedik, ami az index értékét összezavarná. Ezért ezeket az értékeket a számításnál kihagyják. Ez szeptemberben sem változott.

veszik figyelembe. Ez összhangban van azzal a második fejezetben is említett ténnyel, hogy ezen opcióknak már csak görbületi értékük van, így értéküket szinte kizárólag a volatilitás határozza meg. Emellett azt sem szabad elfelejteni, hogy ezek az opciók általában a leglikvidebbek között vannak a piacon, így a legtöbb friss információt tartalmazzák. Szeptembertől a számítás során – szemben a korábbiakkal – az összes olyan opciót felhasználják, amelyre a piacon kötés született, azaz a felhasznált opciók kötési árfolyamára és a kötési árfolyamok számára semmilyen korlátozás nincs.

A másik jelentős változás, hogy – mint arról már szó volt – az S&P 100 helyett az S&P 500 lett a számítás alapja.

A harmadik alapvető változtatás a volatilitás kiszámításának módjában érhető tetten. Korábban – akárcsak a VDAX számításakor – a Black – Scholes formulát alkalmazták.[33] Ez a módszer azonban – ha csak implicit módon is – feltette, hogy a Black – Scholes modell feltételei teljesülnek. Hogy a részvény és a volatilitás által követett folyamatoktól függetlenné tegyék a volatilitás meghatározását, egy összetett opciós pozíció értékeként igyekeznek a jövőben az implicit volatilitás meghatározni. Az új számítási forma egy, a volatilitás swapok árazása során használt eljárásra támaszkodik. Eszerint annak az összetett opciós pozíciónak az értékét kell meghatározni, amely az összes piacon forgalmazott OTM opciót tartalmazza, feltéve, hogy az egyes opciók súlya kötési árfolyamuk négyzetének reciprokával arányos. Hogy ez az eljárás érthető, az áttérés pedig jobban indokolható legyen, vizsgáljuk meg a volatilitás, illetve variancia swapok árazási módszereit.

III.4.2. A variancia swapok[34]

A kereskedett volatilitásra szóló termékek közül az elsők a bankok által az OTC piacon forgalmazott variancia swapok voltak (Demeterfi – Derman – Kamal – Zou [1999]). Mivel a gyakorlatban a varianciára szóló swap ügylet lényegében egy határidős ügylet, a központi kérdés annak megválaszolása, hogy milyen árat rögzítsünk a szerződésben. Gondot jelent azonban, hogy a volatilitás, illetve a variancia nem kereskedett.

Az egyik módszer természetesen a piacon forgó opciók implicit volatilitása, illetve ennek négyzete lehet. Ennek a hibája az, hogy feltételezi a Black – Scholes modell teljesülését, amit sok piaci szereplő szeretne mellőzni. Ezért választották a bankok a

[33] Illetve, mivel amerikai opciókról volt szó a CRR modellt.

[34] A fejezet megírásában Demeterfi – Derman – Kamal – Zou [1999]-re támaszkodtam.

másik megoldás, azaz kerestek egy olyan terméket, amelynek értéke csak a variancia függvénye, így elméletileg alapterméknek tekinthető. Ennek kockázatmentes világbeli várható értéke, mint a határidős árfolyam megfelelő lehet ezen szerződések árazásakor. A fair határidős ár tehát

$$K_{\mathrm{var}} = E\left(\sigma^2\right) \quad (33.)$$

ahol K_{var} a határidős szerződésben szereplő variancia érték (ha úgy tetszik kötési árfolyam), σ^2 pedig a szerződésben meghatározott termék jövőbeli varianciája. Ez utóbbira az is igaz, hogy

$$\sigma^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \sigma^2(t,...)\,dt \quad (34.)$$

ahol $\sigma^2(t,...)$ azt jelöl, hogy a variancia értéke az időn túl akár egyéb tényezőktől is függhet. A két egyenletet egymásba írva:

$$K_{\mathrm{var}} = \frac{1}{T}E\left[\int_0^T \sigma^2(t,...)dt\right] \qquad (35.)$$

adódik. A fair határidős ár meghatározása során Demeterfi és szerzőtársai csak annyi feltevéssel éltek, hogy a termék árfolyama valamilyen diffúz folyamat szerint alakul, azaz teljesül, hogy

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu(t,...)\,dt + \sigma(t,...)\,dZ_t \ (36.)$$

Ekkor azonban az Ito – lemma alapján igaz, hogy

$$d\ \ln S_t = \left(\mu - \tfrac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma\ dZ_t \quad (37.)$$

A két egyenletet egymásból kivonva

$$\frac{dS_t}{S_t} - d\ \ln S_t = \frac{1}{2}\sigma^2 dt \qquad (38.)$$

adódik. Ezt a 35. egyenletbe helyettesítve a következőket kapjuk.

$$K_{\mathrm{var}} = \frac{2}{T}E\left[\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - \ln\frac{S_T}{S}\right] \quad (39.)$$ [35]

Demeterfi és szerzőtársai megmutatták, hogy a fenti szögletes zárójelben lévő kifizetési függvény előállítható egy olyan összetett opciós pozícióval, amely csak OTM opciókból áll össze. Az egyes opcióknak az opciós portfólióban lévő súlya kötési árfolyamuk négyzetével fordítottan arányos, azaz minden opcióból $1/K^2$ darabot veszünk

(Demeterfi – Derman – Kamal – Zou [1999] A függelék).[36] Az OTM opciók a második fejezetben bemutatott Derman – Kani modellhez hasonlóan kerülnek kiválasztásra. Azaz azoknál a kötési árfolyamoknál, amelyek az adott lejárathoz tartozó határidős árfolyamot meghaladják, a call, míg az alatti kötési árfolyamok mellett a put értékeket vesszük figyelembe.

Ha tehát variancia swapot akarunk kötni, akkor a szerződésben szereplő kötési árfolyamot a

$$K_{\text{var}} = \frac{2}{T}\left[rT - \left(\frac{S}{S^*} e^{rT} - 1 \right) - \ln\frac{S^*}{S} + e^{rt} \int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} P(K) dK \ + e^{rt} \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} C(K) dK \right] \qquad (40.)$$

képlet határozza meg, ahol P(K) és C(K) adott kötési árfolyamú put illetve call opciók árát jelöli, míg S^* az a kitűntetett árfolyam, amelyhez képest az OTM opciók meghatározódnak. Amennyiben a forward árfolyamhoz képest határozzuk meg az OTM értékeket, a fenti egyenletben a szögletes zárójelben csak a két integrálos tag marad.

Mivel a piacon végtelen kötési árfolyamra nem jegyeznek opciókat, a szerzők a fenti súlyok módosítását javasolják oly módon, hogy a tört számlálójában vegyük figyelembe az ATM kötési árfolyamtól való eltérést (Demeterfi – Derman – Kamal – Zou [1999] 38-39 oldal).

A fenti módon egy olyan ár határozható meg, amelyik a swapot jegyző bank költségeit is tükrözi. Ennyibe kerül ugyanis az összetett opciós pozíció megvásárlásával a fenti variancia felület előállítása. Hogy a variancia swapot előállítsuk, ahhoz a fent bemutatott – statikus – opciós pozíciót kell felépíteni, dinamikus fedezést egyedül az alaptermék piacán kell folytatni annak érdekében, hogy a delta semleges pozíciót a későbbiekben is fenn lehessen tartani. Ha a piacon valóban minden árfolyamra jegyeznének opciókat, a 40. egyenlet éppen a fair árat adná meg.

Az előbb bemutatott eredményeket érdemes még egy szempontból összefoglalni. A kérdés az, hogy mennyiben lehet a volatilitásra szóló derivatív termékeket szintetikusan előállítani. A variancia, mint az látható volt, statikus opciós pozícióval előállítható. Amennyiben a származtatott ügylet a varianciára szól, és az alaptermékében lineáris, magyarul variancia swapról – azaz variancia határidős ügyletről – van szó, az opciókkal való statikus replikáció megoldható. Ha az alaptermék a volatilitás, hiába csak határidős ügylet előállítása a kérdés, a varianciának nem lineáris függvényeként áll elő a

---

[35] A zárójel második tagja jól láthatóan egy logaritmikus szerződés, ld. Neuberger [1994].

[36] Ennek az opciós portfóliónak a kifizetési függvénye az alaptermék árától független, csak a variancia függvénye.

volatilitás, így a volatilitás swap sem. Emiatt az opciókkal folyamatosan kereskedni kell. Amennyiben a származtatott ügylet nem lineáris, tehát például opcióról van szó, hiába a variancia az alaptermék, a szintetikus előállítás szükségszerűen dinamikus lesz (Carr – Lee [2003]). Ezek alapján nem véletlen, hogy az első elterjedt volatilitás termék éppen a variancia swap volt. A későbbiekben természetesen a volatilitás swapok is elterjedtek, ezek azonban a fejlődés következő lépcsőjét jelentették, mivel az ügyletben résztvevő bankra a korábbiakhoz képest többlet feladatot róttak (Carr – Lee [2003]).[37]

Ezen a ponton kell visszatérnem a VIX index módosításáról elmondottakhoz. A VIX értéke a volatilitás értéke. Ezt – ahogyan arról már szó volt – a korábbiakhoz hasonlóan, $1/K^2$ súllyal kialakított opciós portfólió értékeként számolt variancia gyökeként határozzák meg. A VIX értéke ennek megfelelően mindig a „fair ár” értékét fogja közvetíteni.

Az áttérés okai egyértelműek. Egyrészt a VIX index ezek után az OTC piacon *kötött swap szerződések alapjául szolgálhat*, a szerződésben az éppen aktuális VIX értéket kell figyelembe venni. *Másrészről a* bevezetni szándékozott *VIX-re szóló határidős ügyletek alkalmasak lehetnek a bankok számára, hogy a swapok keretében bevállalt kockázatot fedezzék*. Ezzel a likviditás erősen nőhet. *Harmadrészt, a VIX értéke* a korábban bemutatottaknak megfelelően – *statikus opciós pozícióval – előállítható lesz*, illetve az erre szóló derivatívok alapterméke, ha nem is tökéletesen, de előállíthatóvá válik.[38] *Negyedrész*t újra meg kell említeni azt, a kiinduláskor megfogalmazott igényt, hogy *a VIX értéke független legyen a Black – Scholes modell feltevéseitől*. Mindezek alapján feltehetjük, hogy egy reményteljes piac nyitása előtt állunk.

A swapokról szól fejezet végén meg kell említeni azt is, hogy ezen termékek – az OTC piacok hagyományaihoz híven – rendkívül sok változatban jelentek meg az utóbbi években. Így megjelentek a felsőági variancia swapok (upside variance swap), az alsóági variancia swapok (downside variance swap), illetve a folyosó variancia swapok (corridor variance swap) is. Mindhárom esetben a kifizetést meghatározó variancia kalkuláció során bizonyos, egy előre meghatározott értéket meghaladó, vagy attól elmaradó árfolyamértékeket figyelmen kívül hagynak. Így például a felsőági variancia

[37] A volatilitásra és a varianciára szóló ügyletek szerződési ajánlatai, illetve pontos kontraktusleírásai Carr és Lee [2003] cikkében szerepelnek. Érdekes, hogy mind a variancia, mind a volatilitás swap alapterméke az az S&P 500 index, ami a közelmúltbeli változások után a VIX index alapja is lett.

swap esetén azokat az árfolyamokat, amikor a napi nyitó és záróár is az előre meghatározott alsó küszöb alatt helyezkedik el, nem veszik figyelembe, azaz ezek az értékek nem hatnak a futamidő alatt realizált variancia értékére.[39]
Ugyancsak sokféle definíció használt a realizált varianciára vonatkozóan. Eddig csak a legegyszerűbb eseteket vizsgáltuk, mikor a kifizetés egy előre rögzített, és egy, a lejáratkor historikusan számolt variancia, esetenként volatilitás függvénye. Vannak azonban olyan esetek, mikor ettől eltérő módon szerződnek a felek. Így a szerződés szólhat a kötési árfolyam és egy meghatározott opció – tipikusan a mindenkori ATM opció – implicit volatilitásának eltérésére, de vannak olyan szerződések is, ahol a realizált volatilitás meghatározott időpontok helyi volatilitásainak átlagaként áll elő.[40]

III.4.3. A volatilitásra szóló termékek árazásának kérdései

A bemutatott, OTC piacon kereskedett volatilitás, illetve variancia swapok a volatilitás piac manapság leglikvidebb termékeit jelentik. A tőzsdéken azonban egyelőre nem jegyeznek volatilitásra szóló termékeket. A következőkben azokat a cikkeket veszem sorra, melyek a volatilitás kereskedését valamilyen, tőzsdén is forgalmazható határidős vagy opciós ügylet keretében igyekeznek megoldani. A kérdés természetesen ebben az esetben is az, hogy *milyen folyamatot követ a fenti termékek alapterméke, a volatilitás, illetve, hogy egyáltalán kereskedett-e*. Amennyiben a volatilitás is Wiener folyamatot követ, és ráadásul kereskedett, a hagyományos fedezési logikát követve az erre szóló származtatott ügyletek értéke meghatározható. *Amennyiben nem kereskedett, fontos kérdés, hogy a piac más módon beárazza-e a volatilitást.* Ha igen, továbbra is be tudjuk árazni a volatilitásra szóló származtatott termékeket. Ha nem, pontos árat nem tudunk meghatározni.[41] A most következő modellek tehát alapvetően a „hagyományos" opcióárazási módszertant követik, ennek megfelelően mind az árfolyam, mind a volatilitás által követett folyamat jellegére vonatkozóan feltevésekkel élnek, majd

[38] ez attól is függ, hogy a 2004 januárjában bevezetni szándékozott termékek alapterméke a volatilitás vagy a variancia lesz-e. A jelenlegi tervek szerint először a volatilitásra szóló ügyletekkel kezdenek kereskedni.
[39] A fenti termékekről, illetve árazásuk kérdéseiről lásd Carr – Lewis [2002]
[40] Ezekről a termékekről, illetve a fenti definícióknak az árazásra gyakorolt hatásairól lásd Howison – Rafailidis – Rasmussen [2002]
[41] Természetesen itt is igaz az, ami általában a derivatív termékek árazásánál megállapítható, miszerint ha az alaptermék nem Wiener folyamatot, vagy esetleg adott, állandó nagyságú ugrásokkal tarkított ugrásos folyamatot követ, egyértelmű árazási képlet nem feltétlenül adható.

ezekből kiindulva próbálnak meg opciós árat, illetve fedezeti stratégiát keresni a volatilitás termékekre vonatkozóan.

III.4.3.1 Whaley modellje

Az egyik első megoldást Whaley adta (Whaley [1993]). Ő feltételezte, hogy a részvény árfolyama és annak volatilitása is véletlenszerűen alakul, ahol a két folyamatot két, egymástól független Wiener folyamat alakítja. Feltette továbbá, hogy a volatilitás határidős ügyletek keretében kereskedett.[42]

A volatilitás által követett folyamat tehát a következő lesz:

$$dV = \mu V dt + \xi V dZ \quad (41.)$$

ahol V a volatilitást, μ annak várható növekedését, ξ a volatilitás volatilitását, Z pedig egy Wiener folyamatot jelöl.

Ennek megfelelően a problémát visszavezette a Black modellre, ahol feltételezte, hogy a határidős árfolyam megegyezik a volatilitás, esetleg a volatilitás index azonnali értékével. Innen az opció értéke:

$$c_V = e^{-rT}\left[VN(d_1) - KN(d_2)\right] \quad (42.)$$

ahol

$$d_1 = \frac{\ln(V/K) + 0{,}5\xi^2 T}{\xi\sqrt{T}} \qquad (43.)$$
$$d_2 = d_1 - \xi\sqrt{T}$$

Whaley modelljének realitása megkérdőjelezhető. Legnagyobb hibájának azt találom, hogy egyszerűsítései több helyütt pontatlansághoz vezetnek. Miközben ugyanis felteszi, hogy a volatilitás a részvényárfolyamtól független folyamatot követ, a részvényre szóló opciókat a volatilitás állandóságát feltételező eredeti Black – Scholes modellel árazza be.

Ugyanezt a hibát követi el azzal, hogy a volatilitás indexre szóló határidős árfolyam felhasználását javasolja. A volatilitás indexek értékét ugyanis a Black –Scholes, illetve a CRR modellből számítjuk ki, amelyekben a volatilitás determinisztikus, így opciók árazására korlátozottan alkalmas.

---

[42] A feltevés nem annyira hipotetikus, mint amennyire annak tűnik. 1998-ban a német derivatív piacon elkezdtek kereskedni a három hónapos volatilitás al-indexre szóló határidős ügyletekkel. Az ügylet sajnos nem bizonyult sikeresnek, így később megszűntették azt. Mint arról szó volt, jelenleg a CBOE készül volatilitásra (a VIX indexre) szóló határidős termék bevezetésére.

Egy további probléma, amelyet részben már maga Whaley is jelzett, hogy megkérdőjelezhető, hogy a volatilitás valóban ilyen véletlenszerű folyamat szerint alakul-e. A piaci tapasztalatok szerint ez nem feltétlenül igaz. Természetesen a volatilitás derivatív értéke és árazási képlete nem lesz független attól a folyamattól, ami a volatilitás jövőbeli alakulását írja le. Ahány folyamatot definiálunk, gyakorlatilag annyi árazási képlet származtatható. A kérdés ezek után az, milyen folyamatot követ a volatilitás.

Engle és Patton arra kereste a választ, milyennek is kell lennie egy „jó" volatilitás modellnek. Ők a tapasztalatok alapján öt fontos jellemzőjét vázolták fel (Engle – Patton [2001]). A volatilitásra egyrészt az jellemző, hogy bár időben erőteljesen változik, egy *hosszú távú értékhez próbál* folyamatosan *visszatérni*. Eszerint a volatilitást egy-egy véletlen piaci hatás eltéríti szokásos mértékétől, annak hatása elmúlásával a volatilitás egy, a normális üzletmenet esetén szokásos értékhez közelít. Röviden: a volatilitás mean reverting folyamatot követ.

Másrészt, *részvényárfolyam és a volatilitás között negatív kapcsolat* figyelhető meg, azaz az új híreknek aszimmetrikus a volatilitásra gyakorolt hatásuk. Az árfolyam emelkedését kiváltó hírek a volatilitás értékét csökkentik, az árfolyamesést eredményező döntések növelik azt.

Harmadrészt megjegyzik, hogy a *volatilitás „időtálló"*. Azaz ha egy időszakban nagy volt a volatilitás, annak értéke csak lassan csökken, ugyanígy egy nyugodtabb periódus után lassan kezd emelkedni az.

További fontos tulajdonságként említik, hogy a *hozamok eloszlása eltér a normálistól*, az abban szereplőnél sokkal nagyobb az extrém értékek bekövetkezésének valószínűsége. Más szóval az eloszlás kurtózisa a normálisénál nagyobb. Ennek pedig a hozamok szórására, azaz a volatilitásra is hatással kell lennie.

A *volatilitás modellek* ötödik fontos jellemzője, hogy *rosszul tesztelhetőek*, hiszen a kérdéses termék értéke a piacon nem figyelhető meg. Számíthatunk historikus és implicit volatilitást, de a pillanati volatilitás értéke nem figyelhető meg.

Mindezek alapján kellene egy „jó", azaz a valóságot jól közelítő, ugyanakkor matematikailag is jól kezelhető volatilitás modellt építeni, illetve ezt alapul véve az erre szóló határidős és opciós ügyletek értékét meghatározni. Az utóbbi években több próbálkozás volt árazási képletek meghatározására (Grünbichler – Longstaff [1996], Detemple – Osakwe [2001]). Egységesen elfogadott folyamat, és az arra szóló derivatívok egységesen elfogadott árazási képlete természetesen továbbra sincs. Ugyanígy nincs a fenti, a volatilitás modellel szemben támasztott követelések mindegyikének megfelelő folyamat melletti árazási képlet sem. A szerzők több modellt vázoltak, illetve erre több árazási képletet adtak, mindenki szabadon választhat, hogy adott időpontban adott termék piacának melyik modell adja jó leírását.

III.4.4. Grünbichler és Longstaff mean reverting modellje

Grünbichler és Longstaff egy mean reverting folyamatot alapul véve próbálta meghatározni a volatilitás derivatívok értékét (Grünbichler – Longstaff [1996]). *Feltették, hogy* bár az alaptermék, azaz *a volatilitás* előállítható opciók segítségével, önmagában *nem kereskedett*. Ennek megfelelően a termékek árazásánál figyelemmel kell lenni arra, hogy azok *az arbitrázs összefüggések, amelyek a hagyományos származtatott termékeknél fennállnak, itt nem játszanak szerepet*. Ez pedig azt jelenti, hogy nemcsak az opciók, hanem a határidős ügyletek értéke is függeni fog attól, hogy az alaptermék – azaz jelen esetben a volatilitás – milyen folyamatot követ,

Modelljükben a volatilitás a következő folyamat szerint alakul:

$$dV = (\alpha - \kappa V)dt + \xi\sqrt{V}dZ \quad (44.)$$

ahol V jelöli a volatilitás értékét (ami jelen esetben a varianciának felel meg), α, a volatilitás hosszú távú értéke, κ, az átlaghoz való visszahúzás erőssége (sebessége) és ξ, a volatilitás volatilitása konstansok, Z pedig egy Wiener folyamat.[43] Egyes tanulmányok megállapítják, hogy az bár opciók implicit volatilitása és a piaci volatilitás közötti kapcsolat nem állandó, az implicit volatilitás szintén hasonló folyamatot fog követni (idézi Grünbichler – Longstaff [1996] 987-988. oldal). Nézzük meg, hogy ennek a folyamatnak megfelelően milyen árazási képletek adhatóak a volatilitásra szóló derivatív ügyletekre!

A 36. egyenletből következik, hogy a volatilitás sosem lehet negatív, hiszen a véletlen hatása a volatilitás jelenlegi értékével arányos. Ha a volatilitás értéke elérné a nullát, az egyenlet első tagja pozitív, a második nulla lesz, így a volatilitás értéke azonnal újra pozitív értéket vesz fel.

---

[43] A fenti folyamat logikáját tekintve megegyezik a Hull és White [1987] által leírtakkal, de a látszólagos hasonlóság különbségeket is magában rejt. Az ő képletükben a volatilitás a részvényárfolyamtól is függ, náluk a részvény és annak volatilitása által követett folyamatok kapcsolata is fontos. Vö. I fejezet 31. egyenlet és 15. lábjegyzet.

Továbbá ha a fenti folyamatot tételezzük fel, a V hosszú távon stacioner gamma eloszlású, melynek várható értéke α/κ, varianciája $\alpha\xi^2/\ 2\kappa^2$ (Grünbichler – Longstaff [1996] 988. oldal).

Mivel a továbbiakban bemutatásra kerülő származtatott ügyletek *alapterméke nem kereskedett, a kockázat piaci árára vonatkozóan kell feltevéssel élnünk.* Ennek megfelelően tételezzük fel, hogy a piac beárazza a kockázatot, méghozzá úgy, hogy *a kockázati prémium legyen arányos a kockázat mértékével. Azaz legyen a prémium egyenlő ζV-vel.*[44]

Grünbichler és Longstaff a most bemutatandó képletek levezetése során feltette, hogy *a piac egyebeket tekintve tökéletes, a folyamatos kereskedés lehetősége fennáll, a kockázatmentes hozam pedig állandó.*[45]

Jelölje a továbbiakban $A(V,T)$ a volatilitásra szóló, T idő múlva lejáró származtatott termék mai értékét, $B(V_T)$ annak lejáratkori értékét.

Mint minden származtatott ügylet értékére, erre is fenn kell állnia, hogy:

$$A(V,T) = e^{-rT} E[B(V_T)] \qquad (45.)$$

ahol a várható értéket a kockázatmentes világbeli (risk adjusted) folyamatot felhasználva kell meghatározni:

$$dV = (\alpha - \beta V)dt + \xi\sqrt{V}dZ \qquad (46.)$$

ahol $\beta = \kappa + \zeta$.

III.4.4.1 A volatilitásra szóló határidős szerződések

Mint minden határidős ügyletre, erre is fenn kell állnia, hogy a határidős árfolyam az alaptermék árfolyamának kockázatmentes világban érvényes várható értékével egyezik meg, azaz:

$$F(V,T) = E[V_T] \qquad (47.)$$

Innen a volatilitásra szóló határidős árfolyam a következő:

$$F(V,T) = (\alpha/\beta)\left(1 - e^{-\beta T}\right) + e^{-\beta T} V \qquad (48.)$$

Látható, hogy a határidős árfolyam éppen V hosszú távú várható értékének és aktuális értékének súlyozott átlaga. A súlyok értéke azonban láthatóan az idő függvénye. Ahogy

[44] Emlékezzünk vissza Carr és Madan a fejezet elején bemutatott eredményeire, mely szerint a statikus opciós pozícióval előállított pozíció alkalmas lehet a volatilitás kockázata piaci árának megbecsülésére.

a határidős ügylet futamideje csökken, azaz ahogy a T tart nullához, úgy tart az $e^{-\beta T}$ értéke az egyhez. *A futamidő növelésével* viszont, éppen ellenkezően az előzőekkel*, a jelenbeli volatilitás hatása a határidős ügylet értékére erősen csökken*. Ennek következményeként pedig a hosszabb futamidejű, volatilitásra szóló határidős szerződések gyakorlatilag érzéketlenné válnak a volatilitás mai értékére, *így fedezésre kevésbé alkalmas*ak.

Ez a sajátos hatás természetesen a volatilitás által követett folyamat jellegéből következik. Akármekkora legyen is a mai volatilitás, olyan hosszú idő van még hátra az ügylet kifutásáig, hogy addig nagy valószínűséggel a hosszú távú átlag felé mozdulunk el, azaz a mai értéktől távol kerülhetünk. Így annak hatása a pozíció értékére elenyésző.

A határidős kötés egy másik furcsasága az, hogy *V értékének csökkenése csak egy ideig csökkenti a határidős kötés értékét*. Hiába válik V, azaz az alaptermék értéke nullává, nem történik meg ugyanez a határidős ügylettel. A 48. egyenletben ugyanis az első tag független V-től, így a határidős kötés értéke a volatilitás függvényében alulról korlátos.

Ez a furcsaság természetesen megint csak a volatilitásra tett feltevésekből következik. Ahogy arról korábban szó volt, a volatilitás nem vehet fel negatív értéket, sőt nulla értékét is azonnal pozitív értéknek kell követnie. Ebben az esetben pedig hiába is csökken a volatilitás erősen, a határidős ár nem lesz nulla. Itt szeretnék arra emlékeztetni, hogy az alaptermék, volatilitás nem kereskedett termék. Abban az esetben ez ugyanis nem állhatna fenn, hiszen az azonnali arbitrázslehetőséget jelentene.

Egy további érdekesség adódik, ha a bázist vizsgáljuk meg. Legyen a továbbiakban a bázis a közelebbi és a távolabbi, jelen esetben az azonnali és a határidős ár különbsége. Ez jelen esetben a következőképpen néz ki:

$$V - F(V,T) = V - (\alpha / \beta)\left(1 - e^{-\beta T}\right) + e^{-\beta T} V = (V - \alpha / \beta)\left(1 - e^{-\beta T}\right) \quad (49.)$$

Ez az idő rövidülésével az azonnali érték és a hosszú távú várható érték különbségéhez, annak növelésével a nullához tart. Attól függően, hogy az azonnali érték hogyan viszonyul a hosszú távú egyensúlyi értékhez, *a bázis értéke lehet negatív és pozitív is.* A hagyományos, kereskedett termékekre szóló ügyletek esetében a bázis nem szokott előjelet váltani.[46] Annak értéke vagy pozitív, vagy negatív, nem ingadozik nap mint nap.

---

[45] Ez utóbbi feltételnek az egyszerűségen túl az lesz a következménye, hogy a futures és a forward árak meg fognak egyezni egymással.

[46] A határidős ügylet futamideje alatt osztalékot nem fizető részvény bázisa például minden esetben negatív, míg egy devizaügylet bázisa lehet negatív és pozitív is a kamatlábak arányának függvényében. Így például ha a kamatlábak változnak, a bázis értéke pozitívból negatívvá válhat, vagy fordítva, de ez

Érdekes lehet megvizsgálni, milyen folyamattal írható le a határidős árfolyam alakulása. Az Ito – lemmát alkalmazva a következő összefüggést kapjuk:

$dF = \xi\, e^{-\beta(T-t)}\sqrt{V}dZ$ (50.)

Ezzel kapcsolatban tehetünk *néhány fontos megállapítást*. A β, és ezen keresztül *a kockázat piaci ára* láthatóan *benne maradt az egyenletben*. Hiába térünk át tehát a volatilitásról az arra szóló határidős ügylet árfolyamára, a kockázat piaci árára szükségünk van. A másik fontos megjegyzés az, hogy a *F nem független az időtől*, szemben a V alakulását leíró folyamattal. Harmadrészt *F nem lognormális eloszlású*[47], így a Black modell nem alkalmazható a határidős ügyletre szóló derivatívok árazására.

III.4.4.2 A volatilitásra szóló opciók

Mint minden opcióra, a volatilitásra szóló opcióra is igaznak kell lennie, hogy

$C(V,K,T) = e^{-rT}E[\max(0, V_T - K)]$ (51.)

Innen a fenti mean reverting folyamat esetén az opció értéke a következő képlettel számítható (Grünbichler – Longstaff [1996] 992. oldal):

$$C(V,K,T) = e^{-rT}e^{-\beta T}VQ(\gamma K|\nu+4,\lambda) + e^{-rT}(\alpha/\beta)(1-e^{-\beta T})Q(\gamma K|\nu+2,\lambda) - e^{-rT}KQ(\gamma K|\nu,\lambda)$$ (52.)

ahol $Q(\cdot|\nu+i,\lambda)$ egy nem centrális chi-négyzet eloszlás komplementer eloszlásfüggvénye ν+i szabadságfokkal λ nem-centralitási együttható mellett. Mint látható, az opció a hagyományos opciókhoz hasonlóan itt is az alaptermék árának, a lejáratig hátralévő időnek, a kockázatmentes hozamnak és a kötési árfolyamnak a függvénye. Emellett az alaptermék áralakulását leíró folyamat paramétereinek – α, β és ξ – ismeretére van még szükség az opció értékének meghatározásához.[48]

A put opciók értékének meghatározása ebben az esetben is a put – call paritás felhasználásával történhet. A paritáshoz azonban néhány pontosító megjegyzést kell fűznöm. A put – call paritást két formában is használják. Egyik esetben a határidős és az

nem túl gyakori. Természetesen részvényeknél is előfordulhat az előjelcsere, amennyiben például a részvény kifizeti jelentős mértékű osztalékát. Mindazonáltal igen ritka, hogy a bázis olyan gyakran váltson előjelet, mint a fenti esetben.

[47] Nem lehet lognormális eloszlású, mivel a gamma eloszlása V szerepel benne. Bár a Wiener folyamat normális eloszlású, a két folyamat összege nem lehet lognormális.

[48] Grünbichler és Longstaff a fenti, chi-négyzet eloszlás alkalmazása helyett bemutatja a Sankaran által kifejlesztett közelítő eljárás alkalmazását. Eszerint javasolják a chi-négyzet eloszlást normális eloszlással közelíteni. Ekkor ugyanis a call és a put opciók értéke a Black – Scholes eljárások alkalmazásához

opciós piac közötti egyensúlyt leírva a call és put opciók árai, illetve a határidős árfolyam és a kötési árfolyam közötti összefüggésként írva fel azt. Máskor ennek jelenértékét véve, a jobb oldalon az azonnali árfolyamot (mint a határidős árfolyam jelenértékét), és a kötési árfolyam jelenértékét szerepeltetik.

Ebben az esetben azonban a két összefüggés nem vezet azonos eredményre. Mint azt a határidős ügyletnél előkerült, a határidős árfolyam jelenértéke nem feltétlenül azonos az azonnali árfolyammal, hiszen a volatilitásról feltettük, hogy a hosszú távú átlaghoz visszahúzó folyamatot követ. Számunkra viszont az a fontos, hogy az opció lejáratakor milyen értéket vehet fel a határidős kötés, ezért a put – call paritásban ennek megfelelően a határidős árfolyam jelenértékét, és nem a volatilitás azonnali értékét fogjuk szerepeltetni. Azaz a paritást jelen esetben a

$$P(V,K,T) - C(V,K,T) = e^{-rT} F(V,T) + e^{-rT} K \qquad (53.)$$

formában fogjuk használni.

III.4.4.3 A call és put opciók sajátosságai

Az call opciók árazási képlete alapján azonban más érdekességek is megállapíthatók a volatilitásra szóló opciókról.

Az első érdekesség itt is az, mint a határidős ügyleteknél, *azaz hiába lesz értéktelen az alaptermék, az arra szóló opció értéke mégsem nulla*. Természetesen ez a sajátosság megint csak a mean reverting folyamatból, és abból a tényből fakad, hogy az alaptermék nem kereskedett. Ez viszont azt jelenti, hogy *az opció értéke megszegi a hagyományos opciók esetén fennálló felső korlát szabályt*, azaz az opció érhet többet, mint az alaptermék.

A hosszú távú átlaghoz való visszahúzást *a másik oldalról* szemlélve az is elmondható, hogy hiába nagyon magas a jelenlegi volatilitás, a folyamat logikájából következően ennek idővel csökkennie kell. Ez viszont azt jelenti, hogy *magas jelenbeli volatilitás mellett sem lesz olyan magas az opció árfolyama, mint egy hagyományos termékre szóló opcióé*. Azaz a volatilitásra szóló *opciók lejárat előtti értéke* lejáratkori értékük, azaz *belső értékük alatt lesz*. Ez azt jelenti, hogy *ezen opciók időértéke negatív*. Minél nagyobb ugyanis a hátralévő futamidő, annál nagyobb eséllyel csökken a volatilitás, így csökkentve az opció értékét is.

---

hasonlóan a sok szempontból kényelmesebb normális eloszlás keretei között valósulhat meg.

Ebből a megállapításból aztán már könnyen eljuthatunk oda, hogy a volatilitásra szóló opciók értéke nem egyértelműen növekvő függvénye az időnek. Más szóval *a theta értéke kötési árfolyam függvényében előjelet vált*. Az OTM opciók thetája negatív, míg az ITM opcióké pozitív.

Ugyancsak észrevehető az 52. egyenletből, hogy a határidős ügyletekhez hasonlóan, *a termék árfolyamának volatilitástól való függése az idővel fordítottan arányos*. Azaz ahogy csökken az opció futamidejéből hátralévő idő, úgy nő az opciónak a volatilitásra való érzékenysége, és így fedezésre való alkalmassága.

Egy további fontos észrevétel az opciók deltájára vonatkozik. Az 52. egyenlet volatilitás szerinti deriváltját véve látható, *hogy a Q értékének függvényében a delta nagysága felülről korlátos*. Ha ugyanis a Q értéke egyet vesz fel, a delta értéke nem lehet nagyobb, mint $e^{-(r+\beta)T}$. Sőt, mint látható, ez a felső korlát időben sem állandó, ahogy a hátralévő futamidő csökken, a delta értéke egyre nő.

Grünbichler és Longstaff a vega értékét is megvizsgálták. Azt találták, *hogy a vega mindenütt pozitív*, a legnagyobb a lejárathoz közeli opcióknál, és a futamidő növekedésével egyre csökken.

Az alaptermék által követett folyamat egy további következménye, *hogy az alaptermék árfolyama és a kötési árfolyam nem hatása nem szimmetrikus*. A hagyományos opcióknál az opció értékére nem önmagában K és az alaptermék árfolyama vannak hatással, hanem az, hogy mekkora belső értékkel rendelkezik az opció, azaz a két tényező aránya játszik szerepet. Itt a helyzet annyiban más, hogy a K növelése mind a rövid, mind a hosszú futamidejű opciók értékére hatással van, addig *a V növekedésének a hosszú futamidejű opciókra gyakorolt hatása elenyésző*. Azaz a volatilitásra szóló opció esetén az opció belső értékét (moneyness) is át kell értelmeznünk.

A kockázatmentes hozamra való érzékenység is másképpen működik, mint a hagyományos call opció esetében. Ott a kamatláb növekedése az opció értékét növeli, hiszen értékének alsó korlátja is nő. Itt *a kamatláb növekedése az e^{-rT} értékét csökkenti, és ezáltal az opciók értéke is csökken*.

A put opciók esetére is megfogalmazhatóak bizonyos összefüggések. *A putok esetén is előfordulhat negatív időérték*, azaz, hogy egy opció értéke belső értékétől elmarad. Ez az eshetőség már a hagyományos opciók esetén is fennállhat, ott azonban kizárólag a kamatveszteségekből fakad. Itt viszont figyelembe kel venni azt is, hogy hosszabb

Részletesebben lásd Grünbichler – Longstaff [1996] 993. oldal hátralévő futamidő esetén nagyobb valószínűséggel emelkedik a volatilitás értéke ismét olyan tartományba, ahol már nem nyerünk az opcióval.

A callokhoz hasonlóan *a putok deltája is csökken a T növekedésével*, értéke a nullához tart. Érdekes azonban a putok és a callok értéke közötti összefüggés. A put – call paritást a V szerint deriválva a következő összefüggést kapjuk:

$$\Delta_{call} - \Delta_{put} = e^{-(r+\beta)T} \quad (54.)$$

Azaz a két delta különbsége jelenleg nem egy, hanem a call opciók deltája által felvehető maximális érték. Ez az érték pedig a hosszú futamidejű opciók esetén meglehetősen alacsony, azaz fedezésre a hosszú futamidejű put opciók sem megfelelőek.

A vega a put opciók esetében is pozitív, a theta mind pozitív, mind negatív értéket felvehet. A kockázatmentes hozam növekedése a put opció értékére is csökkentőleg hat, ami nem olyan meglepő, hiszen a hagyományos opciók esetén is ez a helyzet.

III.4.5. Detemple és Osakwe modellje

Detemple és Osakwe több folyamatot vizsgáltak,[49] elemzésük középpontjába azonban az ún. logaritmikus mean reverting folyamatot (mean-reveting log process) állították (Detemple – Osakwe [2001]).

$$d\ln(V) = (\alpha - \lambda \ln(V))dt + \xi\, dZ \qquad (55.)$$

ahol V a volatilitás aktuális értéke (szórás értelemben használva) , ξ a volatilitás volatilitása, α a hosszú távú volatilitás érték, λ pedig a visszahúzás sebessége. Az őáltaluk alapul vett folyamat annyiban több, mint a Grünbichler – Longstaff szerzőpáros által használt folyamat, hogy a volatilitás korábban felsorolt tulajdonságai közül a volatilitás „időtállóságát” is kezelni tudja. Bebizonyítható ugyanis, hogy a fenti folyamat az EGARCH modell folytonos kiterjesztése, a fenti egyenlet paraméterei pedig ennek megfelelően az EGARCH folyamat paramétereinek függvényeként számíthatóak.[50]

---

[49] Többek között a Grünbichler és Longstaff által vizsgált folyamatot is. Ezen folyamat vizsgálata során tett megállapításaik igazolták Grünbichler és Longstaff eredményeit.

[50] Ahogyan arról a bevezetőben már szó volt, a dolgozatban az ARCH-GARCH modellekkel nem foglalkozom. A Detemple – Osakwe modellel kapcsolatban azonban mégis kell tennem egy kis kitérőt. A szerzők az általuk használt modellre úgy tekintenek, mint amelyik a valóság jó leírását adja. Ezt azzal indokolják, hogy a modell az EGARCH folytonos kiterjesztése.

Korábban Engle és Patton cikkének bemutatása során vettem sorra hogy melyek azok a tulajdonságok, amelyekkel egy, a valóságot jól leírni szándékozó volatilitás modellnek rendelkeznie kell. Az egyik ilyen, Detemple és Osakwe a határidős kötés értékével és sajátosságaival nem foglalkoztak, dolgozatukban az opciók árazására koncentráltak.[51] Ilyen folyamat mellet egy európai volatilitás opció értéke a következőképpen számítható ki:

$$C^{Eu}(V,X) = e^{-rT}\left[V^{\phi_T} e^{\frac{\alpha}{\lambda}(1-\phi_T)+\frac{1}{2}a_T^2} N(d_T + a_T) - KN(d_T)\right] \qquad (56.)$$

ahol

$$\phi_t = e^{-\lambda t}$$

$$a_t = \frac{\xi}{\sqrt{2\lambda}}\left(1-\phi_t^2\right)^{1/2} \qquad (57.)$$

$$d_T = d(V,K,T) = \frac{1}{a_T}\left[\phi_T \ln(V) - \ln(K) + \frac{\alpha}{\lambda}(1-\phi_T)\right]$$

Mindezek után nézzük meg, milyen sajátosságaik vannak az európai opcióknak!

a) $\lim_{t \to T} C_t(V_t) = \max(V_T - K, 0)$ (58.)

b) $\lim_{T \to \infty} C_t(V_t) = 0$ (59.)

c) $\lim_{V_t \to 0} C_t(V_t) = 0$ (60.)

Az első egyenlet azt mutatja, hogy *a volatilitásra szóló opciók értéke*, akárcsak a hagyományos opcióké, *a lejárathoz közeledve a lejáratkori kifizetéshez tart*. A második megállapítás szerint, *ahogy az opció hátralévő futamideje nő, értéke a nullához tart*. A harmadik szerint, *ahogy a volatilitás tart a nullához, az opció értéke is nullához közelít*.

---

a volatilitás „időtállósága”, azaz például, hogy a volatilitás nem csökken egyik pillanatról a másikra túl gyorsan le, a korábbi időszakok volatilitása hat a későbbi időszakok értékére. Ezt a GARCH modellek teljesítik.

Ugyanakkor a volatilitás adatsorát vizsgálva az is jellemző, hogy annak értéke minden rövidtávú változása mellett egy hosszú távú értékhez „igyekszik” visszatérni, azaz a volatilitás folyamat mean reverting jellegű. Ezt a GARCH modellek szintén teljesítik.

Emellett a piacon az is megfigyelhető, hogy a volatilitás a termék árának változására nem azonos módon érzékeny az árak csökkenése és emelkedése esetén: a negatív sokkok, azaz az ár esése mellett a volatilitás változása jelentősebb, mint akkor, ha az árak emelkednek. Ezt a tulajdonságot a GARCH modellek nem képesek kezelni. Ezt küszöböli ki az EGARCH modell, ahol a volatilitás változása nem szimmetrikus az árváltozásokban. Ezt a hatást szokták Black definíciója alapján tőkeáttételi hatásnak (leverage effect) is nevezni.

A Detemple és Osakwe tehát azért használják ezt a modellt, mert ez egy olyan modell (az EGARCH) folytonos kiterjesztése, ami a korábban bemutatott tulajdonságok legtöbbjével rendelkezik, és így a valóság igen jó leírását adja.

Itt jegyezném meg, hogy ezzel a tulajdonsággal az EGARCH modellek mellett a TGARCH, azaz threshold GARCH modellek is rendelkeznek. Az ARCH – GARCH modellekről részletesebben lásd Varga [2001], Drobetz [2003], Franke – Härdle – Hafner [2003]

[51] Cikkükben nemcsak az európai, hanem az amerikai opciók árazását is bemutatták. Ehhez nem binomiális modellt használtak, hanem az európai opció értékét, és a korai lehívás jogának értékét összeadva határozták meg ezek értékét. Mivel a cikkben a dolgozat szempontjából fontos megjegyzéseket az európai opciókra tették, az amerikai opciók árazásával nem foglalkozom részletesen.

Vegyük észre, hogy ez a megállapítás ellentétes Grünbichler és Longstaff megállapításával, azaz a két folyamat nem vezetett azonos eredményre. Náluk az átlaghoz történő visszahúzásnak köszönhetően még ebben az esetben sem volt nulla az opció értéke. Az eltérés alapvető oka abban áll, hogy míg az előzőekben a véletlen tag hatása additív volt, itt multiplikatív, ugyanis az 55. egyenlet a logaritmus változását írja le.

Az opció parciális deriváltjait vizsgálva a gamma értéke mutat sajátosságot.

$$\frac{\partial^2 C_t(V_t)}{\partial V_t^2} = e^{-r(T-t)} \phi_{T-t} V_t^{\phi_{T-t}-2} e^{\frac{\alpha}{\lambda}(1-\phi_{T-t})+\frac{1}{2}a_{T-t}^2} N(d_T + a_{T-t}) \left[(\phi_{T-t} - 1) N(d_T + a_{T-t}) + N'(d_T + a_{T-t}) \frac{\phi_{T-t}}{a_{T-t}} \right]$$

(61.)

A hagyományos opcióknál a gamma értéke mindig pozitív, egyenes következményeként annak, hogy az opció értéke az alaptermék árának konvex függvénye. Az 53. egyenletben a kifejezés első részével itt sincsen probléma. A szögletes zárójelben lévő kifejezés azonban nem mindig pozitív. A ϕ értéke egynél kisebb,[52] így nagy V érték esetén a szögletes zárójel első tagja a második tagot meghaladja, így a gamma értéke negatív lesz. Ez pedig azt jelenti, hogy *az opció értéke az alaptermék, jelen esetben a volatilitás értékének konkáv függvénye lesz.* Ez az érdekes eredmény alapvetően a folyamat hosszú távú átlaghoz visszahúzó jellegéből adódik. Már Merton megmutatta, hogy abban az esetben, ha az alaptermék ára változásának, azaz a hozamnak az eloszlása nem független annak mai értékétől, az opció értéke nem feltétlenül lesz ezen változó értékének konvex függvénye (Merton [1973]). Ez minden olyan esetben fenn fog állni, ha a volatilitás a hosszú távú átlaghoz visszahúzó folyamatot követ. Mégsem lesz minden esetben jellemző a konkáv jelleg. Ez ugyanis csak akkor következik be, ha további növekedési potenciál az alaptermék értékének növekedésével egyre kisebb lesz (Detemple – Osakwe [2001] 36. oldal).

Az opció értékének konkáv jellegéből következően a call deltájára nem lesz igaz az, hogy az az alaptermék értékének növekvő függvénye. A delta az inflexiós pontig folyamatosan nő, majd csökkenni kezd.

Mindezek által *a konkáv jellegnek két fontos következménye van*. *Egyrészt, ha az opciókat más feltételezések mellett árazzuk*, miközben a valós folyamatra ez a logaritmikus visszahúzás a jellemző, akkor *az opciókat félreárazzuk*. *Másrészt a fedezeti arányok sem lesznek megfelelőek.*

[52] Lásd 57. egyenlet

Ahogy a volatilitás értéke tart a végtelenhez, azaz az újabb emelkedés valószínűsége tart a nullához, *az opció értéke kisebb lesz, mint belső értéke, azaz a call opció időértéke negatív lesz*. Ez az eredmény szintén hasonlít az előző folyamat vizsgálata során tapasztaltakra.

III.4.6. A volatilitásra szóló opciók alternatívája: a terpeszre (straddle) szóló opció

A volatilitásra szóló opciók kétségtelenül jó eszközt nyújtanak a volatilitás adásvételére. Ezek által lehetővé válhat a volatilitásra való spekuláció, illetve a nagyobb opciós pozíciókat tartó befektetők számára a volatilitás kockázatának kezelése. Sőt, árazási képleteink is vannak a volatilitás valós piaci mozgását elég jól modellező folyamatok esetére is.

Egy jó termékkel szemben azonban csak az egyik követelmény az, hogy árazni tudjuk. Ugyanilyen fontos a piaci sikerhez, hogy a replikálható legyen. Azaz azok, akik ezt a terméket a piacon eladják, valamilyen módon biztosítani tudják magukat a bevállalt kockázatok ellen. A volatilitásra szóló opciók legnagyobb hibája, hogy alaptermékük nem kereskedett, azt előállítani csak közelítőleg, három termék felhasználásával lehet.

Éppen ezen megfontolások alapján javasolta Brenner, Ou és Zhang, hogy az opció alapterméke ne maga a volatilitás, hanem egy arra érzékeny termék, egy ATM kötési árfolyamú terpesz (straddle) legyen (Brenner – Ou – Zhang [2001]). Ennek nagy előnye, hogy kereskedett, a volatilitásra spekuláló befektetők már régóta használják, ismerik.

A kontraktus felépítése a következő. Az opció jogosultja annak lejáratakor, a T_1 időpontban egy ATM terpeszt vehet, ami egy későbbi, T_2 időpontban ját le. A gond csak az, hogy ma nem tudjuk, mi is lesz T_1 időpontban az ATM érték. Az árazási képlet megadásánál a megoldás visszavezethető már ismert problémákra, így látható, hogy itt tulajdonképpen két egzotikus opció „keresztezéséről" van szó: egyszerre kell alkalmazni az összetett opciók (opcióra szóló opciók) és a jövőben kezdődő (forward start) opciók árazása során használtakat.[53]

[53] Vegyük észre, hogy Brenner, Ou és Zhang Carrhoz és Madanhoz hasonlóan azzal néz szembe, hogy a jövőbeli volatilitás ismeretlen, de arra kellene kereskedni. Az opciókból felállított terpesz használatának kockázata az, hogy az alaptermék árának erőteljes változása esetén az opciók volatilitásra való érzékenysége jelentősen csökken. Carr és Madan ezt úgy küszöbölte ki, hogy végtelen számú kötési árfolyamra kötött opciókat, hogy a kitettség sose csökkenjen le. Brenner és szerzőtársai viszont egy, a jövőben ATM opciókból álló terpeszt alkalmaztak ugyanezen probléma megoldására.

Az összetett opciók árazását először Geske oldotta meg, nála azonban a volatilitás állandó (Geske [1979]).[54] Minket természetesen nem ez érdekel, hanem az az eset, mikor a volatilitás változik, így az ott elmondottakat módosítani kell. Brenner, Ou és Zhang modelljüket az időben determinisztikusan és sztochasztikusan változó volatilitás esetére is kiterjesztették.

III.4.6.1 Az opció árazása determinisztikusan változó volatilitás esetén

Tegyük fel, hogy a volatilitás csak egyszer változik a jövőben, méghozzá éppen a T_1 időpontban. Legyen a nulladik időpont és T_1 között a volatilitás σ_1, a T_1 és a T_2 időpont között σ_2. Jelölje továbbá az alapterméknek illetve az opcióknak az egyes időpontokban érvényes árfolyamát S_0, C_0 és P_0 (t=0), S_1, C_1 és P_1 ($t=T_1$), illetve S_2, C_2 és P_2 ($t=T_2$). Jelölje továbbá a terpesz értékét G.

A T_2 időpontban, mikor a terpesz lejár, értéke a következő lesz:

$$G_2 = C_2 + P_2 = \max\left[S_2 - S_1 e^{r(T_2-T_1)}, 0\right] + \max\left[S_1 e^{r(T_2-T_1)} - S_2, 0\right] \qquad (62.)$$

felhasználva, hogy a T_1 időpontban érvényes ATM kötési árfolyamon, azaz $K = S_1 e^{r(T_2-T_1)}$ mellett köttetett meg a terpesz.

Ha viszont a T_1 időpontban kerül meghatározásra a terpesz kötési árfolyama, akkor ebben az időpontban, ATM opciókról lévén szó, a call és a put opció éréke meg fog egyezni. Így a terpesz értéke az egyik opció érékének kétszerese. Megmutatható,[55] hogy $t=T_1$ időpontban az opciók értéke közelítőleg:

$$C_1 = P_1 \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma_2 \sqrt{T_2 - T_1} S_1 \qquad (63.)$$

a terpesz értéke pedig

$$G_1 \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sigma_2 \sqrt{T_2 - T_1}\, S_1 = \alpha\, S_1 \qquad (64.)$$

ahol $\alpha = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sigma_2 \sqrt{T_2 - T_1}$ (65.)

Azaz a terpesz két tényezőnek, a részvényárfolyamnak és a volatilitásnak a függvénye. A terpesz relatív értéke, azaz a G_1/S_1 érték ennek megfelelően csak a volatilitás

---

[54] Ld. I. fejezet. Az összetett opciókat (compound options) a továbbiakban gyakran másodlagos opcióknak fogom nevezni.

[55] Lásd Brenner és Subrahmanyam: A Simple Formula to Compute the Implied Standard Deviation, idézi Brenner – Ou – Zhang [2001] 8. oldal

függvénye lesz. Jelölje az erre a terpeszre szóló K_{ST} kötési árfolyamú call opció értékét C_{ST}. Ennek kifizetése T_1 időpontban.

$$C^{ST} = \max[G_1 - K_{ST}, 0] = \max[\alpha S_1 - K_{ST}, 0] = \alpha \max\left[S_1 - \frac{K_{ST}}{\alpha}, 0\right] \qquad (66.)$$

Feltéve, hogy a Black – Scholes modell feltételei fennállnak, a $t \le T_1$ időpontban egy terpeszre szóló opció értéke a következő:

$$C_t^{ST} = \alpha S_t N(d_1) - K_{ST} e^{-r(T_1 - t)} N(d_2) \qquad (67.)$$

ahol $d_1 = \dfrac{\ln\left(\alpha S_1 / K_{ST}\, e^{-r(T_1-t)}\right) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 (T_1 - t)}{\sigma_1 \sqrt{T_1 - t}}$ $\qquad d_2 = d_1 - \sigma_1 \sqrt{T_1 - t} \qquad$ (68.)

A 67-68. képletek szerint látszólag az opció értékét csak σ_1 befolyásolja. Ne feledkezzünk azonban meg az alfáról, amelyen keresztül a második időszak volatilitása is hat az opció értékére (ld. 65. egyenlet). Hogy melyik mekkora hatással, azt a vega, jelen esetben a két vega meghatározása által kaphatjuk meg. Ezek a következők:[56]

$$\Lambda_1 = \frac{\partial C^{ST}}{\partial \sigma_1} = S_t \sqrt{T_1 - t}\, N'(d_1) \qquad (69.)$$

Mivel a d_1 értékére az α által a második periódus volatilitása is hatással van, így az első periódus vegáját a σ_2 értéke is érinteni fogja. Mivel az, hogy a terpeszre szóló opció mennyit fog érni T_1 időpontban, nem független attól, hogy a rákövetkező periódusnak mekkora a volatilitása, ennek áthúzódó hatása is érthetővé válik.

A második vega értéke a következő lesz:

$$\Lambda_2 = \frac{\partial C_t^{ST}}{\partial \sigma_2} = S_t\, N(d_1) \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma_2} = S_t\, N(d_1) \sqrt{T_2 - T_1}\, N'(d_1(T_1)) \qquad (70.)$$

ahol $d_1(T_1) = \frac{1}{2}\sigma_2 \sqrt{T_2 - T_1}$ $\qquad$ (71.)

ahol $N'(d_1(T_1))$ a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényének T_1-beli értéke

Ne feledjük, hogy a d_1-ben az első periódus volatilitása is benne van, azaz a kapcsolat szimmetrikus abban az értelemben, *hogy mindkét időszak volatilitása hat a másik szerint számított vegára*.

[56] A vegát a szakirodalomban gyakran lambdának is nevezik. Jelölésként, mivel a V korábban a volatilitást jelölte, a nagy lambdát fogom használni.

III.4.6.2 Az opció árazása sztochasztikusan változó volatilitás esetén

Ahhoz, hogy a sztochasztikus volatilitás melletti értéket is meg tudjuk határozni, először ebben az esetben is szükség van egy, a volatilitás alakulását leíró folyamatra. Brenner, Ou és Zhang, az eddigiekhez hasonlóan egy átlaghoz visszahúzó folyamatot választottak. Megoldásuk azonban eltér az eddig tárgyaltaktól. Bár náluk is egy Wiener folyamat képezi a sztochasztikus tagot, a véletlen elem nagysága független a volatilitás adott időszaki értékétől.[57]

Legyen tehát az alaptermék, illetve a volatilitás által követett folyamat a következő:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t dZ_t^1 \qquad (72.)$$

$$d\sigma_t = \delta(\theta - \sigma_t)dt + \xi dZ_t^2 \qquad (73.)$$

ahol θ a volatilitás hosszú távú átlaga, δ az ehhez az átlaghoz való visszahúzás sebessége, ξ a volatilitás volatilitása, Z^1 és Z^2 pedig két független Wiener folyamat.

A szerzők két megoldást is adnak a problémára. Az első megoldás az egyszerűbb, gyakorlatilag a determinisztikus modellt használja fel. Eszerint, ha a volatilitás a fenti folyamatot követi, akkor annak T időpontbeli várható értéke

$$\sigma_T = \theta + (\sigma_t - \theta)e^{-\delta(T-t)} \qquad (74.)$$

Ekkor a T_1 és a T_2, illetve a nulladik időpont és a T_1 közötti volatilitások átlaga kiszámítható:

$$\sigma_2 = \sqrt{\int_{T_1}^{T_2} \sigma_\tau^2 d\tau} = \sqrt{\theta^2 + 2\theta(\sigma_{T_1} - \theta)\frac{1 - e^{-\delta(T_2 - T_1)}}{\delta(T_2 - T_1)} + (\sigma_{T_1} - \theta)^2 \frac{1 - e^{-2\delta(T_2 - T_1)}}{2\delta(T_2 - T_1)}} \qquad (75.)$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\int_0^{T_1} \sigma_\tau^2 d\tau} = \sqrt{\theta^2 + 2\theta(\sigma_0 - \theta)\frac{1 - e^{-\delta T_1}}{\delta T_1} + (\sigma_0 - \theta)^2 \frac{1 - e^{-2T_1}}{2\delta T_1}} \qquad (76.)$$

Ezeket az értékeket a 67-68. egyenletekbe behelyettesítve megkapjuk a terpeszre szóló opciók közelítő – ahogyan a szerzők nevezik, benchmark – értékét.

Pontos megoldást azonban akkor kapunk, ha nemcsak az átlagokat vesszük figyelembe. A megoldás most is hasonló lesz a determinisztikus esethez, zárt képlet azonban ebben

[57] Ezzel a folyamattal Detemple és Osakwe is foglalkozott, ők az átlaghoz visszahúzó Gauss folyamatnak nevezték (mean-reverting Gaussian process). Mivel azonban nem találták a valóságot elég hűen tükrözőnek, az árazási képlet megadásán túl részletesebben nem tárgyalták.
A Brenner és társai által használt folyamat tulajdonképpen a kamatlábaknál használt Vasicek modell adaptációja. Emiatt ezen modell és a Grünbichler – Longstaff által használt folyamat közötti folyamat közötti különbség a kamatlábaknál a Vasicek és a Cox – Ingersoll – Ross modellek közötti különbséghez hasonlítható leginkább.

az esetben nem adható. Az opció árazási formáját úgy írjuk fel, mint a jövőbeli várható kifizetés jelenértékét, majd értékét numerikus eljárással számítjuk ki.

Az opció nulladik időszaki értéke a következő:[58]

$$C_0^{ST} = \int_0^{\infty} H\left(\sigma_{T_1}\right) f\left(\sigma_{T_1} \middle| \sigma_0\right) d\sigma_{T_1} \qquad (77.)$$

illetve $$H\left(\sigma_{T_1}\right) = \mathrm{A}\left(\sigma_{T_1}\right) e^{-rT_1} \int_{\frac{K_{ST}}{\mathrm{A}\left(\sigma_{T_1}\right)}}^{\infty} \left(S_1 - \frac{K_{ST}}{\mathrm{A}\left(\sigma_{T_1}\right)} \right) f\left(S_1 \middle| S_0\right) dS_1 \qquad (78.)$$

ahol A a determinisztikus modell α értékének sztochasztikus modellbeli megfelelője. A modell láthatóan hasonlít az előzőre, az eltérést alapvetően a 77. egyenlet adja. A második szakasz volatilitása most is az *'A'* értékében bújik meg. Ennek láthatóan a terpesz értékére van hatása, és ezen keresztül hat az opció árára. Ha az első periódusban a volatilitás értéke állandó lenne, elég lenne a 78. egyenlet. Mivel azonban ez is változhat, ezért az opció értéke a volatilitás T_1 időpontbeli valószínűség eloszlásától is függeni fog.

A szerzők megvizsgálták, hogy mennyiben tér el ez a megoldás a Black – Scholes modell, azaz az állandó volatilitás alkalmazása esetén kapott eredménytől. Eredményeik szerint az opció értéke, és így annak a Black – Scholes értéktől való eltérése többek között az opció kötési árfolyamától is függ.

Alacsony kötési árfolyam mellett a kezdeti volatilitás értékének növelése csökkenti, magas kötési árfolyam mellett növeli az opció értékét. A volatilitás volatilitásának növelése minden kötési árfolyam mellett növeli az opció értékét. Ennek megfelelően a Black –Scholes modell alkalmazása a terpeszre szóló opciók jelentős félreárazásához vezet.

[58] A dolgozat céljának megfelelően itt csak a modell kivonatos ismertetésére volt mód. A részletesebb levezetést lásd Brenner – Ou – Zhang [2001] 10-17. oldal.

IV.1. Bevezető

A dolgozat utolsó részében *célom Brennerék modelljének részletes elemzése*. Ők cikkükben előbb determinisztikus, majd sztochasztikus volatilitás alakulás mellett igyekeztek az általuk javasolt termék árának és tulajdonságainak bemutatására. Dolgozatomban én is ezt a sorrendet követem.

Az általuk bemutatott *terpeszre szóló opció* tulajdonképpen *egy volatilitásra szóló opciót helyettesít*. A volatilitásra szóló opciók árazása során ugyanis folyamatosan abba a problémába ütköztünk, hogy maga az alaptermék nem kereskedett. Ebben a modellben a terpesz a volatilitást helyettesíti. Mivel ez kereskedett, a másodlagos opciónak, mint volatilitásra szóló opciónak *az alapterméke is kereskedett lesz*.

Ennek megfelelően az utolsó fejezetben *arra keresem a választ, hogy* a terpeszre szóló opció *mennyiben helyettesítője a volatilitásra szóló opciónak*. Azaz mennyire függvénye a volatilitásnak, illetve mennyiben viselkedik opcióként. Mivel a folytonos esetben felhasznált egyik folyamatot Detemple és Osakwe maguk is volatilitásra szóló opciók árazására használták fel, a kapott eredmény összevethető lesz az őáltaluk megfigyeltekkel is.

A fejezet **első részében** *diszkrét idejű binomiális (CRR) modellben* mutatom be, mit jelent az a Brennerék által hangoztatott állítás, hogy a terpeszre szóló opció dinamikus stratégiával előállítható. A sztochasztika azonban csak a részvényárfolyamra jellemző, a volatilitásról felteszem, hogy determinisztikusan alakul.

Természetesen a determinisztikus eset a gyakorlatban kevésbé használható, célom ezzel a fejezettel a fedezési stratégia bemutatása és pontosítása. Megvizsgálom, hogy determinisztikus volatilitás alakulás esetén az átlagos volatilitás használata jelent-e hibát az árazásban.

Az erre vonatkozó **hipotéziseim a következők voltak**:

1. *Determinisztikus volatilitás alakulás esetében az árazás során az átlagvolatilitás felhasználása árazási hibához vezet.*

    <u>*Alhipotézis:*</u> *A két volatilitás érték felcserélése esetén az opció értéke nem lesz ugyanaz.*

2. *Az átlagvolatilitás felhasználásával elkövetett árazási hiba nem független a terpeszre szóló opció kötési árfolyamától.*
3. *A delta, azaz a fedezeti arány meghatározása során is hibát követünk el, ha minden periódusban érvényes volatilitás felhasználása helyett a periódusok átlagos volatilitását használjuk fel.*

   <u>Alhipotézis:</u> A két periódus volatilitásának felcserélésével kapott fedezeti arány szintén nem ad azonos értéket az eredetivel.

A fejezet **második része** arra keresi a választ, hogy mennyiben helytállóak a Brenner és szerzőtársai által felállított összefüggések akkor, *ha az alaptermék árfolyama és annak volatilitása* nem az általuk leírt, hanem *más, a szakirodalomban elterjedtebb*, illetve egy, a gyakorlati tesztek során a valóságot pontosabban visszaadó *sztochasztikus folyamat szerint alakul*. A két vizsgált modell a Hull és White által használt hagyományos Brown mozgás, és a Detemple és Osakwe által vizsgált logaritmikus mean-reverting folyamat voltak. A dolgozat korábbi részeiben mindkét folyamatot bemutattam már. A dolgozat ezen részében megvizsgálom egy Brenner és társai által nem elemzett termék, a terpeszre szóló put opció tulajdonságait is.

Hipotéziseim illetve alhipotéziseim a következőek voltak:

1. *Az induló volatilitás értéke a másodlagos call opciók értékét növeli, a másodlagos putokét csökkenti.*

   <u>Alhipotézis:</u> A másodlagos opció értéke a kezdő volatilitásnak a HW modell mellett konvex, a DO modell esetén konkáv függvénye.
2. *A másodlagos opciók értékét a kötési árfolyam a vanilla opciókéhoz hasonlóan befolyásolja függetlenül a vizsgált folyamat jellegétől.*
3. *A volatilitásnak, mint alapterméknek a volatilitása mind a terpeszre szóló call, mind a terpeszre szóló put értékét növeli.*
4. *A terpeszre szóló opciók értéke erősen függ a két folyamat közötti korrelációtól, illetve annak erősségétől.*

   <u>1. Alhipotézis:</u> A HW modell esetén minél közelebb van a két folyamat közötti korrelációs együttható a mínusz egyhez, annál kisebb a terpeszre szóló call, és annál nagyobb a terpeszre szóló put opciók értéke.

   <u>2. Alhipotézis:</u> A DO modell esetén a korreláció hatása a HW modellnél tapasztaltakhoz hasonló, de a volatilitás mean reverting jellege miatt a

másodlagos opciók árára gyakorolt hatása gyengébb, mint a másik modellnél volt.

5. *A két folyamat közötti korreláció és a volatilitás volatilitásának hatása összefügg, a két tényező egyidejű növekedése a CoST értékét növeli, a PoST értékét azonban csökkenteni fogja.*

   Alhipotézis: A volatilitás volatilitásának hatása a HW modell esetén erősebb, a DO modell esetén gyengébb lesz.

A folytonos eset vizsgálatának utolsó lépéseként *a DO modell melletti értékeket hasonlítom össz*e a Detemple és Osakwe által *ugyanezen folyamat mellett beárazott volatilitásra szóló opció értékével*. Az eredmény gyakorlatilag azt mutatja meg, miben más egy volatilitásra és egy terpeszre, mint a volatilitás reprezentálójára szóló opció közötti eltérés.

Az erre vonatkozó **hipotéziseim a következők**:

6. *A terpeszre szóló call opció a Detemple és Osakwe által bemutatotthoz hasonlóan fog viselkedni a futamidő változásával, azaz alacsony kezdő volatilitás mellett értékük növekedni, magasabb kezdő volatilitás mellett csökkenni fog annak függvényében.*
7. *A terpeszre szóló put opció esetén hasonlóan a callokhoz, a hátralévő futamidő nagysága egyes szakaszokon növeli, másokon csökkenti a terpeszre szóló opció értékét.*

IV.2. A terpeszre szóló opció bemutatása diszkrét idejű determinisztikus modellben

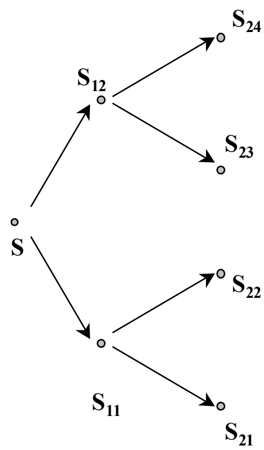
A Brennerék által megálmodott termék egy olyan opció, melynek alapterméke egy, az ügylet lejáratakor ATM terpesz, azaz egy ATM vételi és egy ATM eladási opció összege. Ennek a deltája ugyanis egyrészt a nullához közelít, másrészt annak értéke alapvetően a volatilitás függvénye lesz.[1]

[1] Feltéve azt (amit a későbbiekben is használni fogunk), hogy a kamatláb időben állandó.

Hogy ez a termék, mint a volatilitás kereskedés eszköze megfelelő, azt a szerzők azzal indokolják, hogy nemcsak árazható, de replikálható is. Fedezésre az elsődleges opció alaptermékét használják, azaz azt a terméket, aminek a volatilitására kereskedni akarnak. Ha például célunk az arany volatilitásának előállítása, akkor az aranyra szóló ATM call és put opciók összegére szóló opciót kell előállítanunk. A fedezeti arány az elsődleges opciónak az alaptermékre vonatkozó deltája, valamint a másodlagos opciónak az elsődleges opcióra szóló deltájának a szorzata lesz, ahogy azt már Geske is bemutatta (Geske [1979]).

Az általam használt binomiális *modell előnye, hogy egyértelmű fedezeti stratégia adható*. Megvizsgálható, hogyan kell determinisztikus esetben a terpeszre szóló opciót fedezni, illetve az, hogy a fedezésnek milyen buktatói lehetnek. Ugyanakkor *a modell hiányossága* is jól látható. A modell lényegéből fakadóan *egyidejűleg csak egy változó véletlenszerű változását mutatja be*. Emiatt *a volatilitást,* bár időben változó lesz, *determinisztikusan kezeljük*, jövőbeli értékei előre ismertek.[2]

9. ábra
A lehetséges részvényárfolyamok egy kétperiódusos binomiális modellben



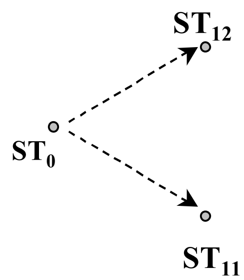
Vegyünk egy két periódusos CRR modellt! Ne feledjük, hogy a volatilitás determinisztikusan alakul, annak értéke előre ismert. Az *első időszak volatilitását jelölje* σ_1, *a másodikét* σ_2. Tegyük fel továbbá, hogy *az alaptermék egy részvény*, amelyik a jövőben *nem fizet osztalékot*. A *kockázatmentes kamatláb* legyen *állandó*. A CRR

[2] Azaz a volatilitás értéke nem függ a részvényárfolyamtól, csak az időtől.

modell binomiális fája ennek megfelelően, ahogy az az első ábrán is látható, egy nem összeölelkező kétperiódusos fa lesz.[3]

A másodlagos opció alapterméke egy erre a részvényre szóló elsődleges opciókból álló ATM terpesz. Azaz a fenti ábra mellé definiálhatunk egy egy periódussal rövidebb terpesz fát is. Jelölje a terpeszt angol megfelelőjének (straddle) rövidítése: ST.

10. ábra
Az adott csomópontban ATM terpeszek értékét leíró fa



A tizedik ábrán szereplő fa tulajdonképpen félrevezető, hiszen itt nem egy termék időbeli alakulásáról van szó. Ezen fa minden egyes pontja egy, az adott pontban ATM terpesz értékét jelöli. Nem azonos tehát a terpeszt alkotó opciók kötési árfolyama az egyes pontokban, így a fa tulajdonképpen nem egyetlen áru különböző pontbeli értéke, hanem egy minden pillanatban újradefiniált termék ára az egyes helyzetekben. Ennek megfelelően az ST_0-t alkotó opciók kötési árfolyama az S_0-ból számított határidős árfolyam, míg az ST_{11}-t alkotókét az az S_{11}-ből származtatjuk. Ezért jelöltem az ábrán a nyilat is szaggatottal.

A cél pedig *egy erre a terpeszre szóló vételi opció beárazása*. Mint látható, a kétperiódusos binomiális modellből egy egyperiódusos modell lett. Az árazás egyszerű, ha ismert a kötési árfolyam. Jelölje – Brennerék jelölésének megfelelően – a terpeszre szóló opció kötési árfolyamát K_{STO}. Az egyszerűség kedvéért *legyen a terpeszre szóló opció is ATM. Azaz a kötési árfolyam egyezzen meg a határidős árfolyammal*.

Ezért legyen az ATM opció kötési árfolyam a jövőbeli ATM terpeszek értékének várható értéke. Mivel a binomiális fa kockázatmentes, ez az ismert számított valószínűségekkel könnyen meghatározható. A számított valószínűségek, azaz a

[3] Természetesen, ha a második időszak volatilitása az elsőjét meghaladja, az S_{22} az S_{23}-nál nagyobb is lehet. A pontok számozása éppen ezért azt jelöli, hogy hová honnan jutottunk el, mintsem egy valós nagyságrendi sorrendet.

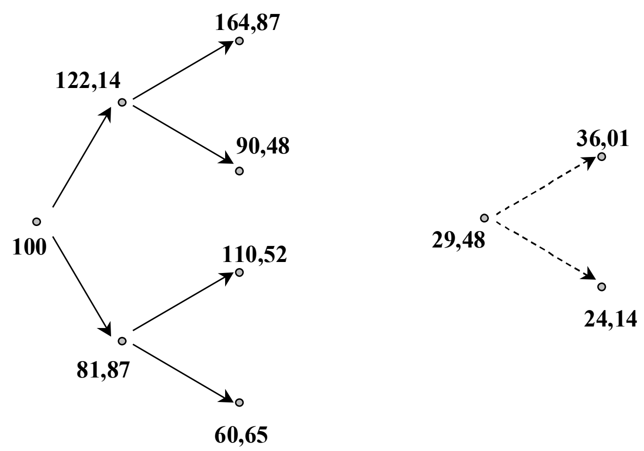
martingál mérték természetesen ugyanazok lesznek az opciók esetében is, mint a részvények esetében (Geske [1979]).

A terpesze szóló call opció értéke innen a standard binomiális modellnek megfelelően számítható.

Az érthetőség kedvéért vegyünk egy számpéldát! Legyen a részvény induló árfolyama 100, a kockázatmentes hozam évi 3%, a volatilitás az első időszakban 20%, a másodikban 30%. A feladatot egyszerűsítendő tegyük fel, hogy a kockázatmentes hozam állandó. Ekkor a részvény árfolyama, illetve a minden pillanatban ATM terpeszek árai egy kétéves kétperiódusos modellben a következőek lesznek[4]:

11. ábra
A lehetséges részvény és terpesz árfolyamok két periódusos binomiális modellben

S_0=100, r_f=3%, σ_1=20%, σ_2=30%.



Ilyen feltételek mellett a terpeszre szóló opció kötési árfolyama a nulladik időszakban K_{STO}=30,38.[5] A terpeszre szóló call opció értéke CoST=2,87.

Ezek után nézzük meg, hogy hipotéziseim a diszkrét idejű modellben mennyire állták meg a helyüket!

1. hipotézis:
Determinisztikus volatilitás alakulás esetében az árazás során az átlagvolatilitás felhasználása árazási hibához vezet.

[4] Az ATM terpeszek kötési árfolyamai rendre 106,1; 84,37 illetve125,86. Hogy látható legyen, hogy nem egyetlen termék időbeli áralakulásáról van szó, szaggatott nyilakat használtam.

[5] Mivel az első időszakban a fenti volatilitás és kamatláb értékek mellett a kockázatmentes valószínűség p=52,58%.

<u>Alhipotézis:</u> *A két volatilitás érték felcserélése esetén az opció értéke nem lesz ugyanaz.*

A két kérdés szorosan összefügg, ezeket együtt kezelem. Az egyszerűség kedvéért először *csak az ATM opciókkal foglalkoztam*. A kötési árfolyam hatását a második hipotézisben fogalmaztam meg. A fenti hipotézisek csak részben igazolódtak. Miközben az első hipotézis teljesült, az alhipotézis nem bizonyult igaznak.

Azt már Brenner és szerzőtársai is megmutatták, hogy az opció értéke mindkét időszak volatilitásának pozitív függvénye. A fenti egyszerű körülmények között azonban ez a viszony szimmetrikusnak bizonyult, azaz *a két volatilitás azonos mértékben hat az opció értékére*. Az opció *értékét nem befolyásolja az, ha a két periódus volatilitásának értékét felcseréljük*. Azaz ennyi bizonytalanság „belefér”, az opciót nem árazzuk félre. Ez pedig azt jelenti, hogy *az alhipotézisem nem állta meg a helyét*.

1 táblázat
A CoST értéke a σ_1 és a σ_2 függvényében ATM CoST esetében.
A sorok a σ_1, az oszlopok a σ_2 hatását mutatják.

	20%	25%	30%	35%	40%
20%	1,90	2,39	2,87	3,35	3,82
25%	2,39	3,00	3,61	4,22	4,81
30%	2,87	3,61	*4,35*	5,07	5,79
35%	3,35	4,22	5,07	5,92	6,75
40%	3,82	4,81	5,79	6,75	7,71

Más a helyzet az első hipotézissel kapcsolatban. *Ha csak a két periódus átlagos volatilitását ismerjük*, ha az árazás során azt használjuk fel, *az opciót félreárazzuk*. Igaz az opció kiírója szempontjából a kockázat kisebb, mert a terpeszre szóló opciót *tendenciózusan túlárazzuk*.

Nézzük például azt az esetet, mikor nem tudjuk mennyi lesz a volatilitás a két következő periódusban, csak azt tudjuk, hogy az átlaga 30% lesz. Ilyenkor az opció értéke ebben az egyszerű modellben 4,35-nek adódik. Ha azonban 25%-35%, vagy 20%-40% teljesül, az opció ennél kevesebbet ér. Érdekes eredmény, hogy ebben a modellben *a volatilitás volatilitása az opció értékére negatív módon hat*. Azaz a másodlagos opció nem viselkedett „szabályosan”, az alaptermék volatilitása negatívan hat az opció értékére. Persze ebből messzemenő következtetéseket a modellbeli volatilitás alakulás erősen korlátozott volta miatt nem szerencsés levonni. Az eredmény mindenesetre érdekes, a Brennerék által vizsgált folytonos determinisztikus modellben nem jelentkezett.

2. hipotézis:
Az árazási hiba nem független a terpeszre szóló opció kötési árfolyamától.[6]

Definiáljuk a legegyszerűbben az ITM és az OTM kötési árfolyamokat is! Eszerint legyen a kötési árfolyam az „eredeti” ATM érték 90, illetve 110%-a.
Ilyen feltevések mellett a hipotézis igazolódott. Az összefüggés azonban bonyolultabb lett, mint az előzőekben. Szabatosan úgy tudnám megfogalmazni, hogy a két periódus volatilitásának hatása különböző, *ITM esetben a* σ_2*, OTM esetben a* σ_1 *hatása lesz az erősebb*.
Nézzünk egy újabb számpéldát! Az előzőeknek megfelelően a kötési árfolyam legyen az ATM érték 90%-a, azaz K_{STO}=27,34. A call értéke a volatilitások függvényében a következő lesz:

2 táblázat
A CoST értéke a σ_1 és a σ_2 függvényében ITM CoST esetében.
A sorok a σ_1, az oszlopok a σ_2 hatását mutatják.

	20%	25%	30%	35%	40%
20%	2,92	3,36	3,80	4,24	4,68
25%	3,68	4,23	4,78	5,33	5,89
30%	4,42	5,08	5,75	6,41	7,08
35%	5,16	5,93	6,71	7,48	8,26
40%	5,89	6,77	7,65	8,54	9,43

Mint látható, a volatilitás hatása az előbbiektől valóban eltérő, így a volatilitás volatilitásáról sem lehet a fentiekhez hasonló egyszerű megállapításokat tenni. A számokon is jól látható látható, hogy ITM terpeszre szóló callok esetében a σ_2 hatása a σ_1-nél erősebb lesz. OTM másodlagos opció esetében a helyzet fordított lesz, a σ_1 hatása lesz az erősebb[7]:

[6] Ahogyan arról szó volt az első fejezetben, Crouhy és Galai megmutatta, hogy vanilla opcióknál a fedezeti arány meghatározásánál az átlagvolatilitás használatának hatékonysága nem független az opció kötési árfolyamától.
[7] Itt a kötési árfolyam az ATM érték 1,1-szerese, azaz K_{STO}=33,42.

3 táblázat
A CoST értéke a σ_1 és a σ_2 függvényében OTM CoST esetében.
A sorok a σ_1, az oszlopok a σ_2 hatását mutatják.

	20%	25%	30%	35%	40%
20%	0,87	1,42	1,95	2,46	2,97
25%	1,10	1,78	2,45	3,10	3,74
30%	1,32	2,15	2,94	3,73	4,49
35%	1,54	2,50	3,43	4,35	5,24
40%	1,76	2,86	3,92	4,96	5,98

A volatilitás hatása és a kötési árfolyam tehát nem függetlenek egymástól.

Azt, hogy a termék értéke csak a volatilitás és a kamatláb függvénye, könnyű belátni. Az azonnali árfolyam ismert, a kockázatmentes hozamot állandónak vesszük. A kötési árfolyamokat pedig gyakorlatilag a kamatláb, a részvényárfolyam és a valószínűségek függvényében definiáljuk. Mivel az első állandó, az utóbbi kettő pedig a volatilitás függvénye, az egyetlen változó a volatilitás marad. *Vizsgáljuk meg azonban részletesebben a fenti összefüggést, igazolhatóak-e képletekkel a korábban találtak.*

Hogy egy pontosabb összefüggést meghatározzunk, *vegyük a legegyszerűbb esetet, mikor a terpeszre szóló call opció ATM*, akárcsak az elsődleges opciók. Fejezzük ki a CoST értékét!

$$CoST = \frac{p_1(ST_{12} - K_{STO}) + (1 - p_1)(ST_{11} - K_{STO})}{e^{rt}} \qquad (1.)$$

Természetesen a kötési árfolyam definíciójából következően a második tag nulla lesz, a képlet pedig egyszerűsödik:

$$CoST = \frac{p_1(ST_{12} - (p_1 ST_{12} + (1 - p_1)ST_{11}))}{e^{rt}} = \frac{p_1(1 - p_1)(ST_{12} - ST_{11})}{e^{rt}} \quad (2.)$$

Mivel a terpeszek minden időpontban ATM-ek, ezért az azt alkotó call és put opciók értéke megegyezik egymással. Ebből következően a terpeszek értéke az adott pontokban:

$$ST_{12} = 2C_{12} = \frac{2(S_{24} - S_{12}e^{rt})p_2}{e^{rt}} = \frac{2(S_0 u_1 p_2 - S_0 u_1 e^{rt})p_2}{e^{rt}} = \frac{2S_0 u_1 p_2}{e^{rt}}(u_2 - e^{rt}) \qquad (3.)$$

Hasonlóan ST_{11} értékére

$$ST_{11} = 2C_{11} = \frac{2S_0 d_1 p_2}{e^{rt}}(u_2 - e^{rt}) \qquad (4.)$$

adódik. Ezeket a CoST képletébe behelyettesítve a következőket kapjuk:

$$CoST = \frac{p_1(1-p_1)}{e^{rt}}\left[\frac{2S_0u_1p_2}{e^{rt}}\left(u_2-e^{rt}\right)-\frac{2S_0d_1p_2}{e^{rt}}\left(u_2-e^{rt}\right)\right]=\frac{2S_0p_2(1-p_1)}{e^{2rt}}\left(u_2-e^{rt}\right)\left(e^{rt}-d_1\right)$$

(5.)

Ha ezt tovább alakítjuk, belátható, hogy a CoST értéke ilyen kötési árfolyam mellett a volatilitásban szimmetrikus, azaz a két időszak volatilitás értékeit felcserélve a kifejezés értéke nem változik. Ez magyarázza azt az érdekes jelenséget, amit az első táblázat tartalmaz, azaz, hogy a két periódus volatilitásának értéke azonos módon hat a terpeszre szóló opció értékére.

Ha a szimmetrikus jelleg igaz, akkor a két volatilitás értéket felcserélve az értéknek ugyanennek kell lennie. Tegyük fel állításunk igaz voltát, a konstansnak tekinthető szorzókat pedig hagyjuk el. Innen:

$$p_2(1-p_1)\left(u_2-e^{rt}\right)\left(e^{rt}-d_1\right)=p_1(1-p_2)\left(u_1-e^{rt}\right)\left(e^{rt}-d_2\right) \quad (6.)$$

egyenletnek kell fennállnia. Felhasználva, hogy

$$p_i=\frac{e^{rt}-d_i}{u_i-d_i} \quad (7.)$$

$$\frac{u_1-d_1}{u_2-d_2}\cdot\frac{1-p_1}{1-p_2}=\frac{u_1-e^{rt}}{u_2-e^{rt}} \quad (8.)$$

adódik. A 7. egyenlet összefüggését újra felhasználva és a keresztbe szorzásokat elvégezve azonosságra jutunk, a két oldal egymással tökéletesen meg fog egyezni. Természetesen ez csak akkor áll fenn, ha a CoST ATM. Amennyiben ettől eltérünk, a fenti egyszerűsítések nem hajthatóak végre, és a szimmetrikus viszony is megszűnik.

A fenti eredmény emlékeztet az első fejezetben bemutatott Crouhy – Galai elemzésre (Crouhy – Galai [1995]). A vizsgált terület és az eredmény természetesen különbözik egymástól. Ők vanilla opciók esetében vizsgálták, hogy a fedezeti arányok mennyire függenek a volatilitástól, elemzésük középpontjában az állt, hogy az átlagot felhasználva helyes deltát számolunk-e. Én most nem a fedezeti arányokat, hanem az opció értékét vizsgáltam, és arra kerestem választ, hogy az átlag használata mennyiben befolyásolja az opciók árát.

A megoldás most is az opciók kötési árfolyamának, máshogyan fogalmazva belső értékének (moneyness) függvénye.[8] Ott ATM esetben az átlag pontos fedezeti arányokat adott. Nálam *az átlag sosem ad jó opciós értéket. Azonban abban az esetben, ha a terpeszre szóló opció ATM, az értékek felcserélése nem befolyásolja az opció árát*,

[8] Ne feledjük, hogy ők az ATM opciót S=K használták, míg én ebben a részben az S=PV(K) formában használom.

ráadásul, ha egy opciót az átlag volatilitást felhasználva árazunk be és írunk ki, akkor sem adjuk olcsón az opciónkat, ha végül az átlag teljesülése mellett a volatilitás időben nagyot változik.

A kérdés azonban binomiális modellben nem az árazhatóság, hanem az, hogyan lehet a kérdéses opciót szintetikusan előállítani. A binomiális modell biztosítja is számunkra ennek lehetőségét.

Annál is inkább fontos a szintetikus előállíthatóság vizsgálata, mert Brenner és szerzőtársai éppen arra hivatkozva tartották az általuk javasolt másodlagos opciót a korábban bemutatott termékeknél jobbnak, hogy az nemcsak árazható, de szintetikusan könnyen elő is állítható. Így annak ára a piacon gyakorlatilag ki is kényszeríthető.

Ennek megfelelően következő hipotéziseim a fedezeti arányhoz, azaz a deltához kapcsolódtak. *A fedezeti stratégiát már gyakorlatilag Geske megadta. Eszerint a másodlagos opciót is az elsődleges opció alaptermékének felhasználásával kell előállítani, ahol a fedezeti arány két delta szorzata*. Ismerni kell a másodlagos opciónak az elsődlegesre vonatkozó deltáját, valamint az elsődleges opciónak az alaptermékre vonatkozó fedezeti arányát. A kettő szorzata adja a másodlagos opció előállításához felhasználandó alaptermékek számát.

A kérdés csak az, hogy mit tekintsünk elsődleges opciónak. Egy, a nulladik időpontban ATM opciókból felálló terpeszt, vagy az első periódus végén ATM elsődleges opciók értékéből induljunk ki a fedezeti arány meghatározásánál.

A megoldás egyszerű: tulajdonképpen mindegy, a lényeg, hogy következetesek legyünk, mindkét delta elem meghatározásánál ugyanazt az opciót alkalmazzuk. A delta képlete a következő:

$$\Delta_{CoST} = \frac{CoST_{12} - CoST_{11}}{ST^i_{12} - ST^i_{11}} \cdot \frac{ST^i_{12} - ST^i_{11}}{S_{12} - S_{11}} \qquad (9.)$$

Mint látható, az elsődleges opciók értéke tulajdonképpen ki is esik a modellből, a másodlagos opció és a részvény „terjedelme” fogja meghatározni az opció értékét. Azaz tulajdonképpen *mellékes, hogy milyen kötési árfolyamú opciót tekintünk elsődleges opciónak, erre valójában nincs is szükség.*

A fenti példa adatai mellett az ATM CoST esetében a fedezeti arány:

$$\Delta_{CoST} = \frac{CoST_{12} - CoST_{11}}{S_{12} - S_{11}} = \frac{5{,}63 - 0}{122{,}14 - 81{,}87} = 0{,}1398 \qquad (10.)$$

A CoST kötési árfolyama, ahogy azt már láttuk, ebben az esetben 30,38 Ft. Azaz egy terpeszre szóló call előállításához 0,1398 részvényt kell vennünk hitelből. Eladva a másodlagos opciót (2,87) és megvéve 0,1398 darab részvényt összesen 11,11 Ft hitelt kell felvennünk (0,1398*100-2,87).

Amennyiben a részvényárfolyam emelkedik, egy 125,86 (122,14*^{e0,03}) forintos kötési árfolyamú terpeszt kell leszállítanunk (értéke 36,01), a nulladik időszakban meghatározott 30,38-as kötési árfolyam mellett. Emellett törleszthetjük a hitelünket, illetve eladhatjuk a korábban megvásárolt részvényt 122,14-es árfolyam mellett. Az eredő pénzáramlásunk:

$$CF = -36{,}01 + 30{,}38 - 11{,}11 \cdot e^{0,03} + 122{,}14 * 0{,}1398 = 0 \qquad (11.)$$

Ha a részvényárfolyam csökken, a leszállítandó terpesz kötési árfolyama 84,37 lesz, de jogosult nem fog élni a jogával, hiszen ennek értéke 24,14, míg ára 30,38 lenne. A kölcsönt azonban ekkor is vissza kell fizetni, de a részvényt csak olcsóbban tudjuk eladni. Az eredő pénzáramlás:

$$CF = -11{,}11 \cdot e^{0,03} + 81{,}87 * 0{,}1398 = 0 \qquad (12.)$$

Azaz a fedezet gyakorlatilag úgy működik, mint egy klasszikus vanilla opció esetén.

> <u>*3. hipotézis:*</u>
> *A delta, azaz a fedezeti arány meghatározása során hibát követünk el, ha minden periódusban érvényes volatilitás felhasználása helyett a periódusok átlagos volatilitását használjuk fel.*
> <u>*Alhipotézis:*</u> *A két periódus volatilitásának felcserélésével kapott fedezeti arány szintén nem ad azonos értéket az eredetivel.*

A hipotézis alapjául az a gondolat szolgált, hogy amennyiben a terpeszre szóló opciók értéke nem volt független a volatilitás alakulásától, akkor a fedezeti arányok, a delták értéke sem lesz az. Ebben az esetben *mind a hipotézis, mind az alhipotézis igaznak bizonyult*.

Nézzük meg ATM CoST esetében hogyan alakul a volatilitások függvényében a delta értéke.

4 táblázat
A delta értéke a σ_1 és a σ_2 függvényében ATM CoST esetében.
A sorok a σ_1, az oszlopok a σ_2 hatását mutatják. Az bemutatott eset dőlt betűvel szerepel.

	20%	25%	30%	35%	40%
20%	0,0924	0,0978	0,1022	0,1060	0,1094
25%	0,1162	0,1230	0,1286	0,1334	0,1377
30%	*0,1398*	0,1480	0,1546	0,1604	0,1656
35%	0,1631	0,1726	0,1804	0,1871	0,1932
40%	0,1862	0,1970	0,2059	0,2135	0,2205

Látható, hogy az átlagos volatilitás felhasználása nem ugyanahhoz a fedezeti arányhoz vezet. Ráadásul *a táblázat nem is szimmetrikus, azaz a két periódus volatilitásának felcserélésével a fedezeti arány megváltozik*. Azt is észrevehetjük továbbá, hogy a második időszak volatilitása erősebben befolyásolja a fedezeti arányt, mint az elsőé.
Írjuk fel ismét az ATM delta értékét!

$$\Delta_{CoST} = \frac{CoST_{12} - CoST_{11}}{ST^i_{12} - ST^i_{11}} \cdot \frac{ST^i_{12} - ST^i_{11}}{S_{12} - S_{11}} \qquad (13.)$$

Az egyszerűsítést elvégezve, valamint felhasználva, hogy a CoST opció ATM, a következőket kapjuk:

$$\Delta_{CoST} = \frac{CoST_{12} - CoST_{11}}{S_{12} - S_{11}} = \frac{ST_{12} - K_{STO}}{S_{12} - S_{11}} = \frac{ST_{12} - \left(p_1 ST_{12} + (1 - p_1) ST_{11}\right)}{Su_1 - Sd_1} \qquad (14.)$$

Innen az egyszerűsítéseket elvégezve

$$\Delta_{CoST} = \frac{(1 - p\ )(ST_{12} - ST_{11})}{Su_1 - Sd_1} \qquad (15.)$$

adódik. Felhasználva a 3. és 4. egyenletek eredményeit:

$$\Delta_{CoST} = \frac{ST_{12} - \left(p_1 ST_{12} + (1 - p_1) ST_{11}\right)}{Su_1 - Sd_1} = \frac{2p_2}{e^{rt}}(1 - p_1)(u_2 - e^{rt}) \qquad (16.)$$

adódik. Innen már látható, hogy a második periódus volatilitása kétszer szerepel az egyenletben: egyszer a valószínűségen (p_2), egyszer pedig a növekedési tagon keresztül (u_2). Ezzel szemben az első időszak volatilitása csak a valószínűségen keresztül hat. Azaz a két volatilitás viszonya nem is lehet szimmetrikus.[9] A vanilla opciókkal szemben tehát itt nem igaz, hogy ATM opciók esetén a fedezeti arány a két volatilitás sorrendjétől független. *Ez az eredmény tehát Crouhy és Galai eredményeinek is ellentmond.*

[9] Ez talán még szembeötlőbb, ha a 16. egyenletet összevetjük a 6. egyenlettel.

A diszkrét modellben elmondottak célja alapvetően a szemléltetés volt. Igyekeztem megmutatni a termék néhány érdekes, a folytonos determinisztikus esetben Brenner és szerzőtársai által be nem mutatott tulajdonságát. A második részben felvázolt fedezés célja az volt, hogy látható legyen, a termék szintetikus előállítása a vanilla termékekéhez hasonlóan működik, még akkor is, ha a fedezeti arány meghatározása bonyolultabb, hiszen a vanilla opciókkal szemben az átlagos volatilitás nem jelent elegendő információt a fedezeti arány kiszámításához még ATM esetben sem.

Mindezek eredményeképpen azt mondhatjuk, hogy a Brenner és társai által felvázolt terpeszre szóló opció, bár egyes esetekben a vanilla opcióhoz hasonlóan működik, fedezés esetén attól eltérő jelleget mutat.

IV.3. A terpeszre szóló opció bemutatása folytonos idejű modellekben

IV.3.1. A folyamatokról

A második részben azt nézem meg, hogyan alakul a terpeszre szóló opciók értéke sztochasztikus, folytonos modellben. Az alábbi modellekben azonban, szemben az előzőekkel, már a sztochasztikus volatilitás esetét is megvizsgáltam.

A szakirodalomban, ahogyan az a korábbi fejezetekben is látható volt, sokféle eljárást felvonultattak a volatilitás alakulásának mind tökéletesebb modellezésére. Én a továbbiakban két modellel foglalkozom. *Az egyik az első fejezetben bemutatott*, és a szakirodalomban egyfajta „etalonként" kezelt **Hull – White modell**:

$dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dw$ (17.)

$dV = \phi V\,dt + \xi V\,dz$ (18.)

ahol $V = \sigma^2$, dw és dz a két, egymással ρ korrelációban lévő Wiener folyamat, μ a részvény várható hozama, ϕ a variancia (volatilitás) „várható hozama" (várható növekedési üteme), σ a volatilitás, a ξ pedig a volatilitás volatilitása.

Hull és White az tételezték fel, hogy a volatilitás a részvényárfolyamhoz hasonló folyamatot követ, ahol *a két folyamat egymással korrelált is lehet*. Ezen modell felhasználását az is indokolja, hogy általa megvizsgálható, hogy a részvényárfolyam és a volatilitás korreláltsága hogyan hat a terpeszre szóló opció értékére. *Brenner, Ou és Zhang ezt a kérdést nem vizsgálták*, holott általánosan megfigyelt jelenség, hogy az árfolyamok és a volatilitás az esetek jelentős részében negatívan korreláltak, az árak csökkenése általában a volatilitás növekedésével jár, és fordítva.

A másik modellt **Detemple és Osakwe** cikkéből vettem. Ezt a harmadik fejezetben mutattam be. Ahogyan arról ott szó volt, Detemple és Osakwe több folyamatot vizsgáltak, legfontosabbnak azonban az ún. logaritmikus mean reverting folyamatot (mean-reverting log process) tartották. Ezt az indokolta, hogy ez a folyamat – ahogyan bemutatták – az EGARCH modell folytonos kiterjesztése, és így, az amerikai piac részvényárfolyamainak jó leírását adja. Az egyenletek paraméterei ennek megfelelően az EGARCH folyamat paramétereinek függvényeként számíthatóak.

$dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dw$ (19.)

$d\ln(\sigma) = (\alpha - \lambda \ln(\sigma))dt + \xi\,dz$ (20.)

Ahol σ a volatilitás[10], dw és dz a két, egymással ρ korrelációban lévő Wiener folyamat, μ a részvény várható hozama, α a hosszú távú logaritmikus volatilitás érték, λ az átlaghoz való visszahúzás sebessége, a ξ pedig a volatilitás volatilitása.

Dolgozatomban az ARCH – GARCH modellcsaláddal nem foglalkoztam. Azokat a modelleket vizsgáltam, amelyek folytonos idejűek voltak, illetve amelyeket elsődleges vagy összetett opciók árazásához felhasználtak. Az előbb említett logaritmikus mean reverting modellel azért foglalkozom mégis, mert *egyrészt* Detemple és Osakwe szerint a *valóság jó leírását adja*, *másrészről* pedig *a szerzők ezen folyamat mellett egy másik volatilitásra szóló termék*, egy volatilitás opció *árazásával foglalkoztak.*

Dolgozatom ezen részében megvizsgálom továbbá, hogy a terpeszre szóló call opció mellett *milyen tulajdonságai lehetnek egy terpeszre szóló **put** opciónak. Várakozásaim szerint* ezzel egy, az előzőtől több ponton eltérő terméket tudok megvizsgálni, amely várhatóan *a volatilitás által követett folyamatra is másként fog reagálni mint a vételi jog.*

Az egyszerűség kedvéért a vizsgálatok során végig felteszem, hogy az alaptermék részvény, ami a vizsgált időszakban nem fizet osztalékot.

Az árazást Monte Carlo szimulációval végeztem, feltéve, hogy a folyamatokat, ahogyan az a fenti képletekben is látszik, standard normális eloszlású véletlen tagok mozgatják. Mindkét modellben megvizsgálom a folyamatok korreláltságának kérdését, illetve annak hatását. Az ilyen folyamatokra zárt képlet nincsen, mindegyik általam vizsgált cikkben a Monte Carlo szimuláció módszerével kísérelték meg a szerzők opciós árakat megadni. Ez természetesen tartalmazhat némi numerikus hibát, de ezt a szimulációk számának növelésével és a folyamatok többszöri tesztelésével igyekeztem minimálisra csökkenteni.

A szimuláció elvégzésében Benedek Gábor volt segítségemre, aki a modellek leprogramozásával és számos értékes megjegyzéssel segítette a munkámat a kutatás ezen szakaszában.

[10] Ne felejtsük el, hogy itt a második folyamat a volatilitásra és nem a varianciára van felírva, mint a Hull – White modellben!

IV.3.2. A szimuláció leírása

IV.3.2.1. A folyamatok felírásának formája

A folyamatokat az eredeti cikkekhez hasonlóan *logaritmizált formában használtam fel.* Ez *egyrészt megegyezett azzal a formával, ahogyan* a folyamatokat a szerzők *eredeti cikkeikben is felhasználták, másrészt biztosította, hogy a részvényárfolyam ne vehessen fel negatív értéket.* A két folyamatnak a szimuláció során felhasznált formája a következő volt:

Hull – White modell:

$$S_i = S_{i-1} \cdot e^{\left[\left(r - V_{i-1}/2\right)\Delta t + u_i \sqrt{V_{i-1}\Delta t}\right]} \tag{21.}$$

$$V_i = V_{i-1} \cdot e^{\left[\left(r - \xi^2/2\right)\Delta t + \rho\, u_i\, \xi \sqrt{\Delta t} + \sqrt{1-\rho^2}\; v_i\, \xi \sqrt{\Delta t}\right]} \tag{22.}$$

Detemple – Osakwe modell:

$$S_i = S_{i-1} \cdot e^{\left[\left(r - \sigma_i^2/2\right)\Delta t + \sigma_i u_i \sqrt{\Delta t}\right]} \tag{23.}$$

$$\sigma_i = \sigma_{i-1} \cdot e^{\left[\left(\alpha - \lambda \ln(\sigma_{i-1})\right)\Delta t + \xi\left(\rho\, u_i \sqrt{\Delta t} + \sqrt{1-\rho^2}\; v_i \sqrt{\Delta t}\right)\right]} \tag{24.}$$

IV.3.2.2. A szimuláció felépítése (a periódusok száma és az egyes periódusok hossza)

A szimuláció során először egy év futamidővel dolgoztam. Mind a terpeszre szóló opció, mind az alaptermékként szereplő opciók futamideje fél év. A dolgozat ezen részének második felében bemutatásra kerülő szimulációk során azonban, amelyeknek a célja Detemple és Osakwe eredeti volatilitásra szóló opciójával való összevetés volt, a másodlagos opció futamideje változott. Az alaptermékül szolgáló terpesz futamideje továbbra is 180 nap volt, a másodlagos opció futamideje azonban 1 és 360 nap között változott.

A szimuláció ennek megfelelően minden esetben két szakaszban zajlott. Első lépéseként generáltam egy árfolyamsort T_1 időpontig, azaz végeztem egy szimulációt arra, hogy mekkora lesz a részvényárfolyam fél év múlva. Ez az érték azért volt fontos, mert ez

szolgált aztán a T_1 időpontban ATM opciók kötési árfolyamának alapjául. Innen n darab szimuláció futott tovább. Ezek azt voltak hivatva előre jelezni, hogy mekkora lesz ezen ATM terpeszek értéke T_2 időpontban, azaz az alaptermékül szolgáló opciók lejáratakor. Ezt T_1 időpontra diszkontálva volt egy realizációm arra vonatkozóan, hogy a terpeszre szóló opció mennyit is ér annak lejáratakor a T_1 időpontban, adott K_{STO} érték mellett. Ezt a szimulációt m alkalommal elvégezve kaptam meg a terpeszre szóló opció értékét.
A szimuláció során n=m=1000 feltevéssel dolgoztam. Hogy a véletlen torzító hatását még inkább kiküszöböljem, minden egyes futtatást tízszer hajtottam végre, majd ezek számtani átlagát vettem.
Az egyszerűség kedvéért a szimulációk során 360 napos évvel, azaz 180 napos félévvel számoltam. Ennek megfelelően egy nap hossza 0,002777 évnek adódott. A modellben ez volt egy lépés hossza.

IV.3.2.3. A felhasznált véletlen szám generátorról

A szimulációkhoz szükséges programok Delphi programban íródtak. A véletlen számokhoz a közgazdaságtani szimulációk során gyakran használt Gasdev véletlenszám-generátort használtam (A szimuláció elméletével és gyakorlatával részletesen foglalkozik Benedek [2003]).

IV.3.2.4. A programok tesztelése

A program tesztelése során a Brenner – Ou – Zhang által generált Black – Scholes beállítást vettem alapul. Az általam vizsgált modelleknél olyan paraméter beállítást alkalmaztam, ami szintén a Black – Scholes modellt adja vissza. Az így kapott eredmények aztán összehasonlíthatóak voltak. Az összevetés pontosságát természetesen befolyásolta az a tény, hogy Brenner és szerzőtársai szintén szimulációval kapták meg értékeiket, nem pedig analitikus megoldás eredményeképpen. Így a két modell eltérése egyszerre két torzító tényező hatásának is betudható.
Mindezek ellenére azt tapasztaltam, hogy a program 5-10 futtatás átlagát véve jól konvergált a referenciaértékekhez: 10 futtatás eredményeként az eltérés (abszolút értékben) 0,1% és 0,2% között maradt, azaz voltak esetek, mikor a program alul, volt mikor felülbecsülte Brenner és társai eredményeit.

A két modell közül a tesztek alapján a Detemple – Osakwe által felhasznált modell bizonyult stabilabbnak, az eredmények hamarabb konvergáltak a referenciaértékekhez.

IV.3.2.5. A minta elemszáma és megbízhatósága

Mint arról már szó volt, egy-egy realizáció egy 1000×1000 darabos szimuláció eredményeként adódott. Hogy az eredmény még kisebb hibát tartalmazzon, minden szimulációt tízszer futtattam le, és ezek számtani átlagát vettem figyelembe az elemzések során. Mivel egy szakasz szimulációja 180 periódusból állt és egy periódushoz két véletlen számot generáltam, egy-egy opciós árfolyamhoz 10×360 360 000 véletlen szám kellett. Ezzel igyekeztem a minimálisra csökkenteni a véletlen szám generátor okozta zajt. Ahol az eredményeken mégis látható valami hiba, azt mindig az adott eredmény ismertetésénél fogom bemutatni. Ennek mértéke azonban egyszer sem volt túl jelentős.

A későbbiekben is látható lesz, hogy a logaritmikus mean reverting folyamat kevesebb hibát eredményezett, a zaj kisebb volt.

A programok futtatását személyi számítógépen végeztem. Egy-egy program átlagosan 3-4 napot futott. A leghosszabb szimuláció 6, a legrövidebb 1 napot vett igénybe. A minta méretének növelése meghaladta volna szimulációs lehetőségeimet, mivel nagy teljesítményű számítógép nem állt rendelkezésemre. Mivel a folyamatokat 1000×1000-es mintán futtattam, egy tízszeres növelés 100-szorosára növelte volna a felhasznált véletlen számok számát.

Az átlag, mint eredmény felhasználását az indokolta, hogy a tesztelések során a szimulációk eredményének átlaga gyorsan közelített a referenciaértékhez. Így például a HW modell – tehát az instabilabb modell – tesztelése során 8 lépés alatt a szimulációs eredmények a következőképpen közelítettek a referencia adathoz.

5. táblázat
A teszt-szimuláció konvergenciája a HW modell esetén

Referenciaeredmény:	**4,27**							
Szimulációk száma	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Szimuláció eredménye	4,29	4,20	4,26	4,29	4,30	4,28	4,20	4,29
Szimulációk átlaga	4,29	4,25	4,25	4,26	4,27	4,27	4,26	4,26
%-os eltérés	*0,42%*	*-0,53%*	*-0,38%*	*-0,16%*	*0,02%*	*0,06%*	*-0,18%*	*-0,10%*

A hiba láthatóan mindvégig egy százalék alatt maradt annak ellenére, hogy mindkét érték numerikus módszer eredményeként adódott.

IV.3.2.6. A negatív értékek elkerüléséről

Ahogyan arról már szó volt, a szimuláció során gondosan ügyletem arra, hogy elkerüljem a negatív részvény és volatilitás értékeket. **Brenner és társai** ezzel egyszerűen nem foglalkoztak. Azt mondták, hogy ennek a valószínűsége olyan kicsi, hogy az elemzést egyáltalán nem befolyásolja.
Hull és White (a továbbiakban HW), akárcsak a részvényárfolyamok folyamatát, a volatilitásét (varianciáét) is logaritmizálja. Ez persze felvet egy további problémát, hogy tudniillik feltehető-e minden előzetes vizsgálat nélkül, hogy a variancia a részvényárfolyamhoz hasonlóan lognormális eloszlást követ. Ezt semmi sem támasztja alá. Ennek a problémának a tudatában mégis változtatás nélkül vettem át Hull és White modelljét.
Detemple és Osakwe (a továbbiakban DO) szintén a logaritmikus verzió mellett teszi le a voksot, azonban megadják a szimulációhoz használt logaritmikus folyamat nem logartitmizált átiratát is. Ők nem kerülik meg azt a kérdést, hogy mennyiben tekinthető modelljük a valóság hű leírásának. Elemzésükben úgy találták, hogy a modell a gyakorlatban is megállja a helyét, sőt cikkük függelékében becslést is adnak, milyen értékeket kell az általuk megadott modellbe helyettesíteni, hogy az a valóság jó közelítését adja.

IV.3.2.7. Feltevések az árazás során

A sztochasztikus volatilitás modellek felhasználása során az egyik legfontosabb kérdés, hogyan kezeljük azt, hogy két kockázati forrásunk van, tudniillik a részvényárfolyam és a volatilitás, míg ez utóbbi kockázat fedezésére nincs megfelelő eszközünk. Ennek a problémának az orvoslására több megoldás született. Az egyik legegyszerűbb, ha feltesszük, hogy létezik olyan termék, aminek alapterméke maga a volatilitás, és ezt felhasználva a volatilitás kockázata is kiküszöbölhető. Máshogyan fogalmazva a piac teljes, minden kockázati tényező kereskedett. Ezzel a feltevéssel él például Johnson és Shanno (Johnson és Shanno [1987]).

A mi esetünkben a cél éppen egy ilyen, a volatilitásra szóló termék beárazása. Éppen ezért annak feltételezése, hogy ilyen termék már létezik, nem lenne túl elegáns és célravezető. Emiatt a másik, a szakirodalomban általánosan elterjedt, többek között Hull és White által is használt feltevéssel dolgoztam, miszerint a volatilitás kockázata diverzifikálható. Másképpen a volatilitásnak nincs szisztematikus kockázata.
Vegyük észre, hogy két korreláció szerepel ezek után a modellekben. Egyrészt feltesszük, hogy a részvényárfolyamot és a volatilitást hajtó folyamatok valamilyen szinten korreláltak (illetve egyes esetekben korrelálatlanok), miközben mindvégig feltesszük, hogy a részvény volatilitása és a piaci portfólió hozama közötti korreláció nulla. Az előbbi az elemzés tárgya lesz, az utóbbi a piac teljességét biztosító feltételezés.[11]

IV.3.3. Eredmények

A kutatás eredményeit a hipotéziseken sorba haladva mutatom be, majd végül röviden összefoglalom azokat.

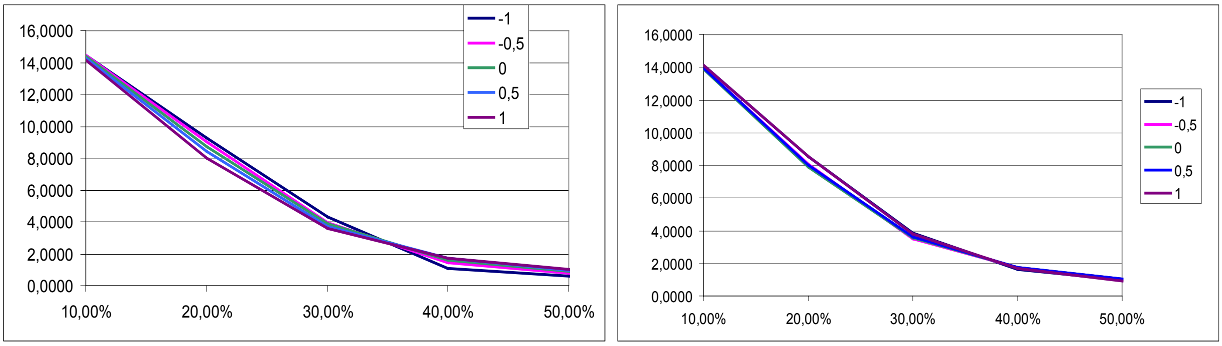
> *<u>1. hipotézis:</u>*
> *Az induló volatilitás értéke a másodlagos call opciók értékét növeli, a másodlagos putokét csökkenti.*

A kérdés az, hogy egy terpeszre szóló opció volatilitásra szóló opcióként viselkedik-e, azaz a call értéke annak pozitív, a puté annak negatív függvénye a volatilitásnak. *A hipotézis persze igazándiból a put opciókról szól,* hiszen ezek azok a termékek, amelyet Brenner és társai nem vizsgáltak. Ezért nézzük előbb a putokat!
A sejtést az eredmények igazolták, azaz a terpeszre szóló put opció értéke mind a két modell mellett negatívan függött a volatilitás alakulásától.[12]

[11] A problémáról részletesebben lásd: Hull – White [1987] 289-292. oldal
[12] A két modell esetén a részvényárfolyam és a volatilitás folyamatai közötti korreláció láthatóan nem azonos módon hatott. Ezt a későbbiekben még részletesen vizsgálom.

12. ábra

A PoST értéke különböző korrelációs együtthatók mellett az induló volatilitás függvényében a HW (baloldal) és a DO modellek (jobboldal) esetén. A másodlagos opciók kötési árfolyama K_{STO}=20

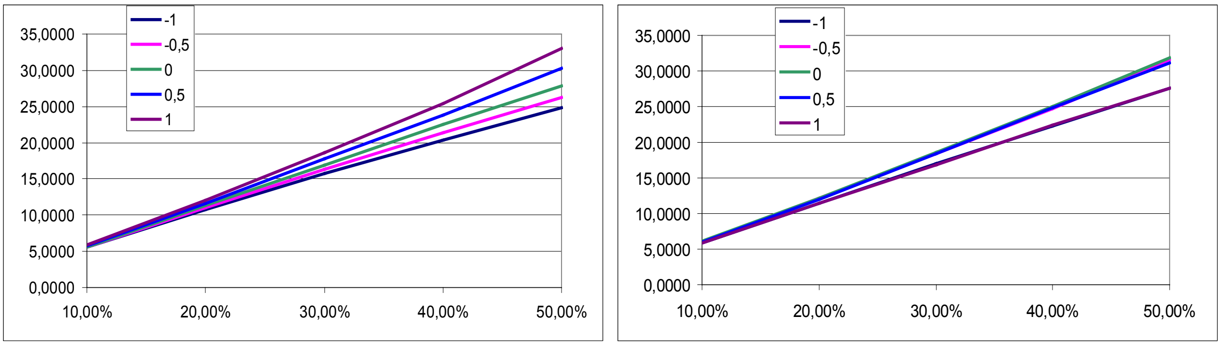


A modell paraméter beállítása a mellékletben, a szimulációk leírásában található. Látható a két modell esetén ugyan a hatás azonos, de a korreláció változására a DO modell kevésbé reagál érzékenyen. Ez talán a volatilitás folyamatának átlaghoz visszahúzó jellege miatt van. Hiába emelkedik ugyanis a volatilitás az árfolyam emelkedésével, a volatilitás folyamatban tendencia van az átlaghoz való visszatérésre.

A CoST esetében a hipotézis szintén igazolást nyert, azaz a terpeszre szóló opció itt is volatilitásra szóló opcióként viselkedett.

13. ábra

A CoST értéke különböző korrelációs együtthatók mellett az induló volatilitás függvényében a HW (baloldal) és a DO modellek (jobboldal) esetén. A másodlagos opciók kötési árfolyama K_{STO}=0



Az opciók értékének nagyságrendje is hasonló. Az eltérés alapvetően különféle korrelációs együtthatók mellett állapítható meg. Ezt azonban hagyjuk a korrelációs együttható hatásait vizsgáló részre.

1. alhipotézis:

A másodlagos opció értéke a kezdő volatilitásnak a HW modell mellett konvex, a DO modell esetén konkáv függvénye.

Az alhipotézis felállításához az adott modellek felhasználása mellett más szerzők által kapott opciós árak vizsgálata vezetett. Hull és White ugyan elsődleges opciókat vizsgáltak, de azok minden esetben, minden korrelációs együttható mellett konvex függvényei voltak az alaptermék árának. Detemple és Osakwe az általam is felhasznált logaritmikus mean reverting folyamatot alkalmazva azt tapasztalták, hogy az opciók értéke nagy induló volatilitás mellett a volatilitás konkáv függvénye lett.

A terpeszre szóló opciókkal kapcsolatban *a hipotézisem részben igaznak bizonyult*. A HW modell mellett a konvexitás a korrelációs együttható függvénye. Természetesen nem szabad elfeledkezni arról, hogy az eredményeket numerikus úton kaptuk. Az azonban egyértelműnek tűnik, hogy a két folyamat pozitív korreláltsága mellett a terpeszre szóló call és put opció is szabályszerűen működik, azaz a kezdő volatilitás növekedésével a másodlagos opció értéke gyorsuló ütemben nő. Ezzel szemben *negatív korreláció mellett a terpeszre szóló call opció értéke a kezdő volatilitásnak konkáv függvénye lesz*.

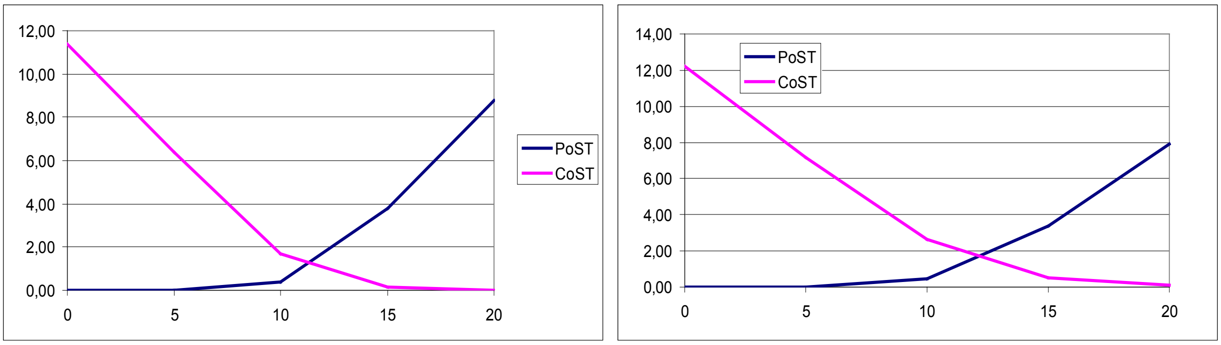
A DO modell mellett a putok továbbra is közel szabályosan viselkednek, azaz értékük a volatilitás konkáv függvénye. Egész pontosan a kapott eredmények egy többé kevésbé lineáris, kissé konvex összefüggést mutattak. Ez azonban akár a szimuláció torzító hatása is lehet, ezért inkább úgy lenne szerencsés megfogalmazni az összefüggést, hogy az nem utal arra, hogy a konvexitás ebben az esetben ne állna fenn. A CoST esetében a hatás igen érdekes. *Plusz egy és mínusz egy korrelációs együttható érték mellett a másodlagos opció a volatilitás konkáv függvénye, míg az ettől eltérő esetekben konvexitást tapasztaltam*.

2. hipotézis:

A másodlagos opciók értékét a kötési árfolyam az elsődleges opciókéhoz hasonlóan befolyásolja függetlenül a vizsgált folyamat jellegétől.

Ez a hipotézis megint azt a kérdést vizsgálja, hogy a másodlagos opció valóban opcióként viselkedik-e. Az eredmény ebben az esetben sem meglepő, *a hipotézis* *mindkét modell esetén igazolást nyert.* Mindkét modell mellett a kötési árfolyamot nulla és húsz közötti sávban ötös lépésközönként vizsgáltam. A kötési árfolyam növelése a CoST értékét csökkentette, a PoST értékét növelte.

14. ábra
A terpeszre szóló opciók értéke a kötési árfolyam függvényében a HW (baloldal) és a DO modellek (jobboldal) esetén. A két folyamat közötti korrelációs együttható nulla, az induló volatilitás mindkét esetben 20%.



Az ábrákon látható, hogy *a kötési árfolyam hatása közel hasonló a két modell esetében*. A terpeszre szóló opció mindkét folyamat mellett szabályosan „működik”.

Az ábra természetesen torzít abban az értelemben, hogy véges számú pontot köt össze. A CoST és a PoST értékek metszéspontja ugyanakkor érdekes lehet. Folytonos esetben ugyanis az ATM opciók meghatározása elég problémás, mivel az alaptermék határidős ára nehezen határozható meg. A put-call paritás szerint azonban akkor nevezhetünk egy opciót ATM-nek, ha a call és a put opció értéke egybeesik. Ez láthatóan mindkét modellben a 10 és 15 kötési árfolyam között adódik, DO modell esetén egy kicsit magasabb érték mellett.

<u>*3. hipotézis:*</u>

A volatilitás volatilitása mind a terpeszre szóló call, mind a terpeszre szóló put értékét növeli.

A kérdés természetesen ebben az esetben is az, hogy a terpeszre szóló opció valójában opcióként viselkedik-e abban az értelemben, hogy a tulajdonképpeni alaptermék volatilitása az opció értékét növeli.

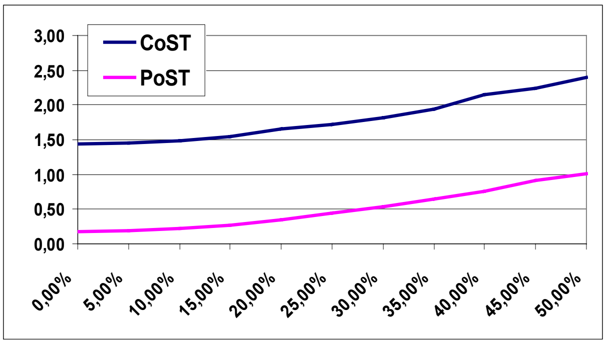
A volatilitás volatilitása azért lesz fontos, mert amennyiben szintetikusan igyekszünk a fenti másodlagos opciót előállítani, a volatilitás változékonysága gyakoribb újrafedezést tesz szükségessé. Emellett az alaptermék volatilitására való érzékenység az opciók egyik legjellemzőbb tulajdonsága, amit többek között *Brenner és társai is*

megvizsgáltak. Az ő modelljük szerint a másodlagos opció a volatilitás volatilitásának függvényében teljesen „szabályosan" működött.
A volatilitás volatilitásának hatását *a két modell esetén külön vizsgálom*, mivel az eredmények is különbözőek lettek.

Eredmények a HW modellben

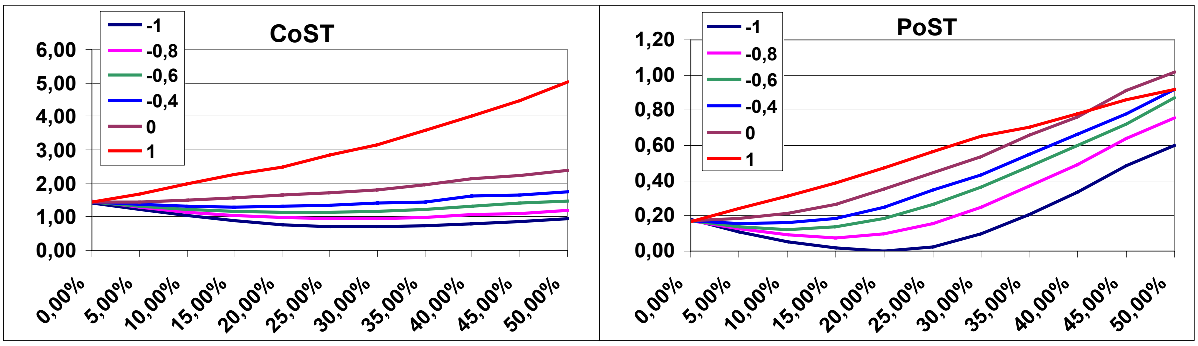
A kérdés a korrelációs együttható egyidejű figyelembevételével tárgyalható csupán, így részben belekezdünk a következő hipotézis megválaszolásába. *Első lépésben tegyük fel, hogy a két folyamat korrelálatlan. Ekkor azt tapasztaljuk, hogy mind a CoST, mind a PoST teljesen „szabályosan" viselkedik*, azaz mindkettő pozitív függvénye a volatilitás volatilitásának. Más szóval a terpeszre szóló opció a volatilitásra szóló „hagyományos" opcióként működik.

15. ábra
A CoST és a PoST értéke a volatilitás volatilitásának függvényében
K_{STO}=10; r=0%, ρ=0; T_1=0,5 év, T_2=1 év, σ_0=20%, τ=1/360=0,002777



Nem ilyen egyértelmű a helyzet akkor, ha két folyamat valamilyen módon korrelált egymással. *Erős negatív korreláltság esetén a volatilitás volatilitása egyes szakaszokon csökkentőleg hathat az opciók értékére.* A hatás különösen put opciók esetén jelentős. A probléma alaposabb szemléltetésére itt több szimulációt futtattam, emiatt az ábrák is alaposabb felbontásban készülhettek, és az eredmények is stabilabbak.

16. ábra
A CoST és a PoST értéke a volatilitás volatilitásának függvényében különböző korrelációs együtthatók mellett.
K_{STO}=10; r=0%, T_1=0,5 év, T_2=1 év, σ_0=20%, τ=1/360=0,002777

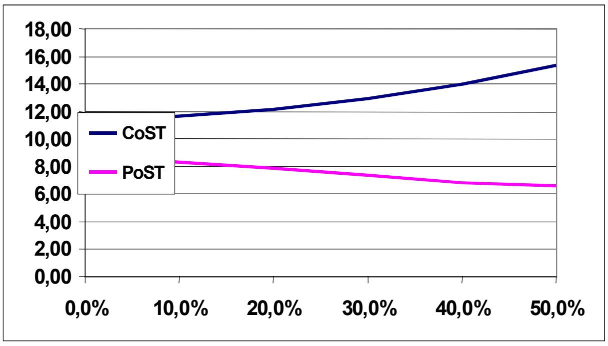


Ezekben az esetekben a fenti másodlagos opciók nem viselkednek „jól”, atipikus eredményeket adnak. A kérdés annál inkább fontos, mert *a gyakorlatban*, ahogyan arról korábban már szó esett *a volatilitás és az árfolyam tipikusan negatívan korreláltak. Ez különösen a piac jelentős szakadása esetén figyelhető meg*, a nagy veszteségek és a nagy elbizonytalanodás a napi hozamok jelentős szóródását eredményezik.
A befektetők tipikusan ekkor veszíthetnek a bevezetőben bemutatott short volatilitás pozíciójukon, *és tipikusan ezek azok az esetek, ami ellen a terpeszre szóló opció védelmet nyújthat. Amikor tehát ezek a termékek vásárlóik számára értékessé válhatnak, a kiírójuk számára atipikusan kezdenek viselkedni*.

Eredmények a DO modellben

A DO modellben szintén nagyon sajátos dolgokat találtam. *Az opciók sajátos viselkedése* azonban, mint látni fogjuk, szemben a HW modellel, *nem csak a korreláció függvénye*.
Ebben az esetben is a két folyamat korrelálatlanságából indultam ki. A terpeszre szóló call opció valóban opcióként viselkedett, azaz az alaptermék árának volatilitása növelte az opció értékét. Nem így a put esetében. Magasabb kötési árfolyamok esetén a PoST értéke a volatilitás volatilitásának csökkenő függvénye lett!

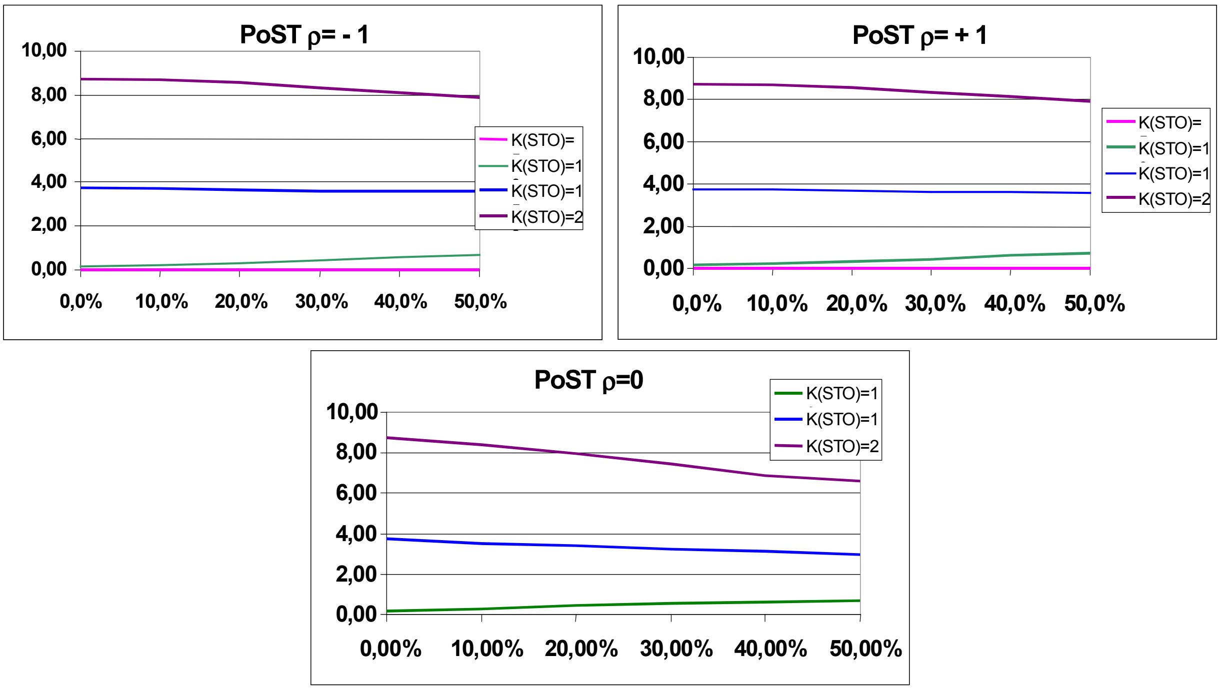
17. ábra
A CoST és a PoST értéke a volatilitás volatilitásának függvényében
$r=0$; $\rho=0$; $S_0=100$; $\sigma_0=20\%$; $\alpha=\ln(0,2)$; $\lambda=0,05$; $T_1=0,5$ év, $T_2=1$ év, $\tau=1/360=0,002777$
CoST esetében a $K_{STO}=0$, PoST-nél $K_{STO}=20$.



Ugyanakkor, *ha a kötési árfolyamot csökkentettük*, helyreállt a rend, azaz például $K_{STO}=10$ esetében *a terpeszre szóló put a volatilitás volatilitásának növekvő függvénye lett*.

Azonnal felvetődik a gondolat, hogy vajon változik-e ez az összefüggés a korrelációs együttható módosításával. Ezért a PoST értékét tovább vizsgáltam. Megnéztem, hogyan viselkedik a PoST +1 és –1-es korrelációs együttható mellett.

18. ábra
A PoST értéke a két folyamat közötti különböző korrelációs együtthatók mellett.
$r=0$; $S_0=100$; $\sigma_0=20\%$; $\alpha=\ln(0,2)$; $\lambda=0,05$; $T_1=0,5$ év, $T_2=1$ év, $\tau=1/360=0,002777$



Jól látszik, hogy *a megfigyelés a két folyamat közötti korrelációtól független, azaz az opció értékének a volatilitás volatilitására való érzékenysége alapvetően a kötési árfolyam függvény lesz.* Magas kötési árfolyam mellett, azaz *erősen ITM put opciók esetén a volatilitás volatilitása csökkenti, míg OTM esetben növelni fogja a másodlagos opciók értékét*.

A terpeszre szóló callok esetében ilyen probléma nem volt, azaz a korrelációs együtthatótól függetlenül végig úgy viselkedtek, mint az egy volatilitásra szóló opciótól „elvárható" lett volna.

Végül érdemes megjegyezni, hogy *Brenner és társai vizsgálata során az opció* végig „szabályosan" működött, *a volatilitás volatilitásának végig pozitív függvénye maradt*. Természetesen emlékeztetni kell arra, hogy *ők csak call opciókkal foglalkoztak*, azaz ebben az értelemben az én eredményeim az övéiktől nem térnek el.

<u>*4. hipotézis:*</u>

A terpeszre szóló opciók értéke erősen függ a két folyamat közötti korrelációtól, illetve annak erősségétől.

Ezt a kérdést az előző hipotézis elemzése során lényegében megválaszoltuk. Látható volt, hogy *a terpeszre szóló opciók értéke* – úgy a calloké, mint a putoké – *erősen függ a két folyamat korreláltságától*. A korreláció kérdése azért volt fontos, mert ezt Brenner és szerzőtársai nem vizsgálták, holott általános megfigyelés a piacon a volatilitás és az árfolyamok negatív korrelációja.

A korreláció hatásának irányáról szóló várakozásaimat alhipotézisekben fogalmaztam meg.

<u>*1. Alhipotézis:*</u>

A HW modell esetén minél közelebb van a két folyamat közötti korrelációs együttható a mínusz egyhez, annál kisebb a terpeszre szóló call, és annál nagyobb a terpeszre szóló put opciók értéke.

Ez a hipotézis csak részben bizonyult igaznak. A hipotézis felállításánál abból indultam ki, hogy negatív korreláció esetén alacsonyabb részvényárfolyamnál nagyobb lesz a volatilitás. Viszont a részvények árfolyama alulról korlátos, a negatív részvényárfolyam értelmezhetetlen. Emiatt hiába emelkedne akkor a volatilitás, ezt a részvényárfolyam alulról korlátos jellege miatt nem éreznénk, nem tudnánk kihasználni. Azaz ha a két folyamat negatívan korrelált, az a terpeszre szóló call értékét csökkenti, míg a putét növeli.

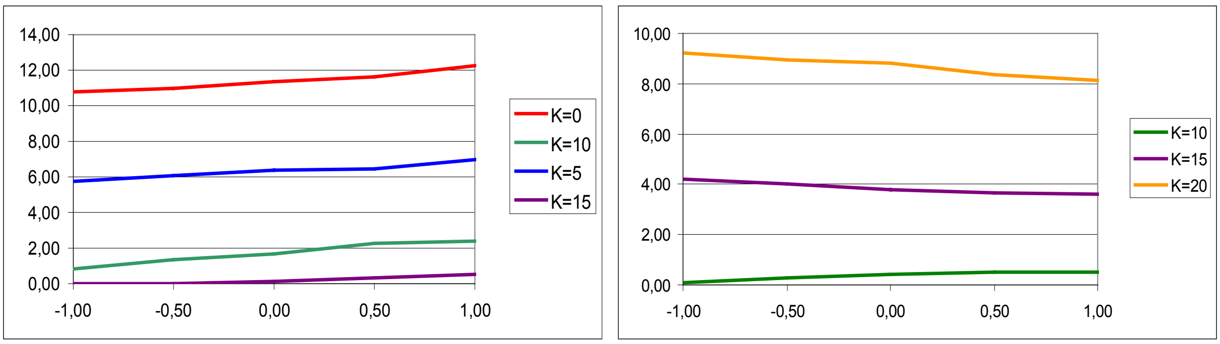
Az eredmény igen érdekes lett. *A korreláltság növekedése a terpeszre szóló call értékét növelte, minél negatívabb volt a korreláció, a CoST értéke annál kisebb lett* (ld. 19. ábra). Ez a hipotézist igazolta. *A PoST esetében a hatás azonban nem volt egyértelmű.*

Vizsgáljuk meg külön a CoST és a PoST korrelációra való reakcióját a különböző kötési árfolyamok (K_{STO}) mellett! Nézzük előbb a call opciókat! Az eredmények a 19. ábra bal oldalán láthatóak. A két folyamat korreláltságának erősödésére az opció értéke minden kötési árfolyam mellett pozitívan reagált.

Nem ez volt a helyzet a PoST esetében. A lefuttatott szimulációk közül a K_{STO}=10 volt az a kötési árfolyam, ahol a CoST és a PoST értékek a legközelebb estek egymáshoz. (Lásd még 14. ábra) Nevezzük ezt az egyszerűség kedvéért ATM közeli értéknek.

Tehát ATM közeli esetben, azaz K_{STO}=10 mellett a korrelációs együttható növekedése növeli a másodlagos opció értékét, míg ennél magasabb kötési árfolyam, azaz ITM másodlagos put opciók esetén a korreláció erősödése a PoST értékének csökkenését eredményezi.

19. ábra
A CoST és a PoST értéke a korrelációs együttható függvényében különböző kötési árfolyamok esetén.
r=0%, T_1=0,5 év, T_2=1 év, ξ=20%, σ_0=20%, τ=1/360=0,002777



A sejtés tehát a következőképpen fogalmazható meg: *ATM közeli opciók esetében a korrelációs együttható növekedése mind a CoST, mind a PoST értékét növeli. Mivel a piacon általában az ATM opciók a leggyakrabban kereskedettek, ez a szabály lesz a* *legfontosabb az ilyen összetett derivatívot jegyző bankok számára. Jó azonban tudni, hogy amennyiben ettől eltérő kötési árfolyamra kereskedünk, a hatás megváltozhat.*[13] További tanulsága volt a két folyamat korreláltsága vizsgálatának, hogy a korreláció kérdése nem választható el a volatilitás volatilitásának vizsgálatától. Ez részben igazolta az 5. hipotézisben megfogalmazottakat. Erre a kérdésre a későbbiekben még vissza fogok térni.

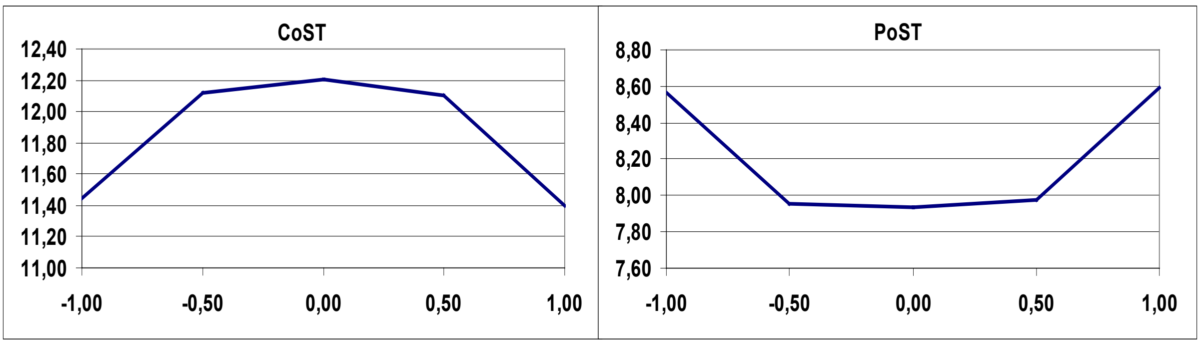
2. Alhipotézis:

A DO modell esetén a korreláció hatása a HW modellnél tapasztaltakhoz hasonló, de a volatilitás mean reverting jellege miatt a másodlagos opciók árára gyakorolt hatása gyengébb, mint a másik modellnél volt.

Ez a hipotézisem nem igazolódott. A két folyamat korreláltsága természetesen most is erősen hatott a másodlagos opciók értékére. Ilyen esetben *úgy tűnik, hogy a CoST értéke érzékenyebb a korreláció változására, mint a másodlagos put opcióé.*[14] Mivel az opciók értéke a vizsgált kötési árfolyamok mellett erősen változik, illetve a kötési árfolyam növekedésével a call opciók hamar elértéktelenednek, a CoST esetében a K_{STO}=0, míg PoST esetén a K_{STO}=20 esetét mutatom be részletesebben. A többi eredmény a dolgozat mellékletében található.

A másodlagos opciók értéke mind a CoST, mind a PoST esetében a két folyamat korreláltságának függvényében „parabolaszerűen" változik. Míg azonban a terpeszre szóló callok esetében a nulla korrelációs együttható esetén a legnagyobb az árfolyam, putok esetében éppen itt a legkisebb az opció értéke.

20. ábra
A CoST és a PoST értéke a két folyamat közötti korrelációs együttható függvényében
r=0; S_0=100; σ_0=20%; α=ln(0,2); ξ=30%, λ=0,05; T_2-T_1=T_1=0,5, τ=1/360=0,002777
CoST esetében a K_{STO}=0, PoST-nél K_{STO}=20.



13 A gyakorlatban persze az is kérdés, hogy a HW modell írja-e le legjobban a valóságot, a részvényárfolyamok és a volatilitás alakulását.

A CoST esetében a nulla korrelációtól akár pozitív, akár negatív irányban térünk el, az opció értéke csökken. A PoST esetében a hatás éppen fordított, a nulla korreláció adja a legalacsonyabb opciós értéket. Ahogyan a ρ abszolút értéke nő, a PoST egyre értékesebb lesz.

A kapott eredmények fontosságát megint a gyakorlat adhatja meg. Mint azt Detemple és Osakwe bemutatta, az általuk vizsgált modell a valóságot jól leíró EGARCH modell folytonos kiterjesztése. Ebben az esetben azonban nem mellékes, hogy a terpeszre szóló opcióval kereskedő bank milyen árat jegyez. *A részvényárfolyam és a volatilitás folyamata közötti korreláció értéke változhat, így az opciót lényegében félreárazzuk: a korreláció figyelmen kívül hagyásával a call opciókat szisztematikusan felül, míg a putokat szisztematikusan alul*.

A kötési árfolyam változtatása ezúttal nem hozott olyan eltérést, mint a HW modellben. A hatás minden kötési árfolyam mellett lényegében azonos.

5. hipotézis:

A két folyamat közötti korreláció és a volatilitás volatilitásának hatása összefügg, a két tényező egyidejű növekedése a CoST értékét növeli, a PoST értékét azonban csökkenteni fogja.

1. alhipotézis

A volatilitás volatilitásának hatása a HW modell esetén erősebb, a DO modell esetén gyengébb lesz.

A hipotézis tulajdonképpen az előző hipotézis kiterjesztése. A két folyamat korreláltsága mindkét modellben a volatilitás volatilitásán keresztül fog hatni. Amennyiben ez nulla, a két folyamat korreláltsága megszűnik. Ennek megfelelően minél nagyobb a volatilitás volatilitása, annál erősebben fogja a korreláció hatását kifejteni.

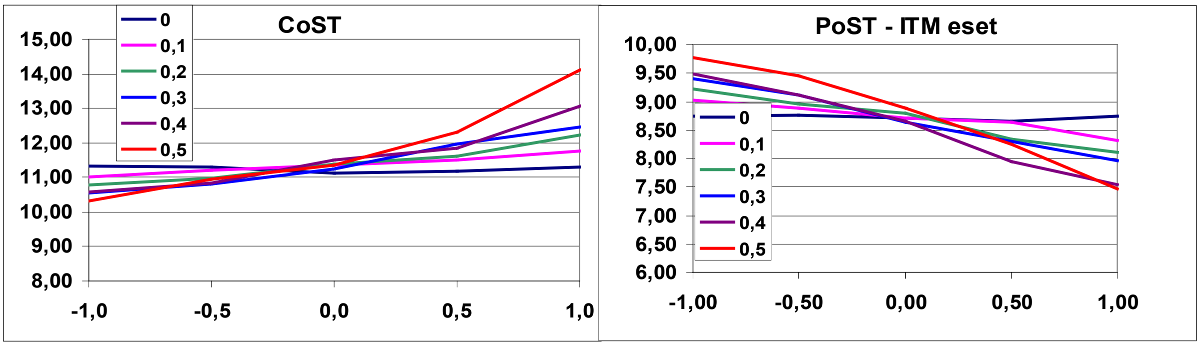
Az alhipotézist azonban az előző pontban látottak erősen megkérdőjelezték. Mint azt a korrelációs együttható elemzése során láttuk, a két modell esetében az eltérés nagyobb annál, minthogy egyszerűen a gyengébb/erősebb hatás megosztást alkalmazhassuk. Ezért a továbbiakban az alhipotézist külön nem vizsgálom, illetve a hipotézist és az alhipotézist együtt kezelem.

[14] A hatás erőssége függ a volatilitás volatilitásától is. Erre a következő hipotézis során térek ki.

Eredmények a HW modellben

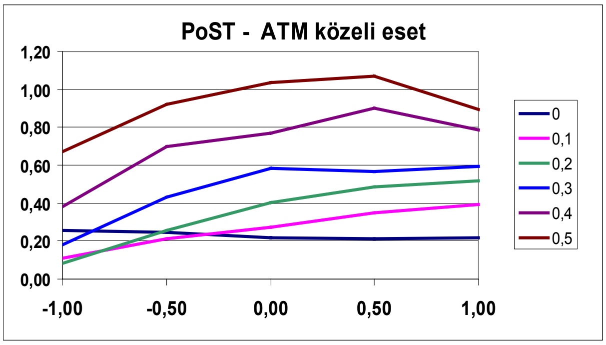
Ahogyan arról korábban szó volt, azt találtam, *hogy a volatilitás volatilitásának hatása nem egyértelmű*, nem független a korrelációs együtthatótól. *A korrelációs együttható vizsgálata során pedig azt találtam, hogy az eredmény nem azonos az ITM és az ATM közeli esetben*, *ezért mindkettőt külön meg fogom vizsgálni*. Ennek megfelelően a terpeszre szóló call opciók esetében a kötési árfolyam K_{STO}=0 lesz (ITM), míg a PoST-nél mind az ITM (a K_{STO}=20), mind az ATM közeli esetet (a K_{STO}=10) megvizsgálom.
Nézzük előbb az ITM eseteket! *A CoST esetében a hipotézis részben igazolódott*. Igaz, hogy a két paraméter egyidejű növekedése a CoST értékét növelte. Az állítás azonban pontosabban is megfogalmazható. Eszerint *negatív korreláltság esetén a CoST értéke a volatilitás volatilitásának negatív, míg pozitív esetben pozitív függvénye*. A korreláció növekedése azonban mindvégig pozitív módon befolyásolja a másodlagos opció értékét. *ITM másodlagos putok esetén* a hatás fordított, azaz *a hipotézis részben* itt is *igazolást nyert*. Az állítás pontosabban megfogalmazva a következő: a *PoST* értékére a *volatilitás volatilitása negatív korreláltság mellett pozitív, és pozitív korreláltság mellett negatív hatással van*.
Az eredmények a 21. ábrán láthatóak.

21. ábra
A CoST és a PoST a korrelációs együttható függvényében a volatilitás volatilitásának különböző értékei mellett
r=0%, T_1=0,5 év, T_2=1 év, σ_0=20%, τ=1/360=0,002777
A CoST esetében K_{STO}=0, a PoST esetében K_{STO}=20;



Ne feledkezzünk meg a PoST esetén azt *ATM közeli* értékről se! *Itt azt találtam, hogy a korrelációs együttható növekedése a volatilitás volatilitásának minden értéke mellett növelte a terpeszre szóló put értékét*. Az egyetlen kivételt a plusz egyes érték jelentette. A volatilitás volatilitásának magas értékei mellett a másodlagos opciók értéke csökkenni kezdett.

22. ábra
Az ATM közeli (K_{STO}=10) PoST értéke a korrelációs együttható függvényében a volatilitás volatilitásának különböző értékei mellett
r=0%, T_1=0,5 év, T_2=1 év, σ_0=20%, τ=1/360=0,002777



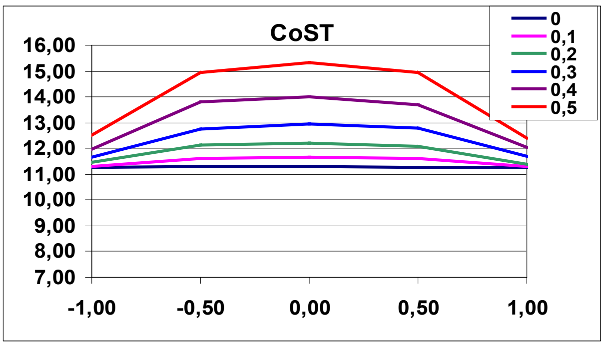
Általánosítható tehát az a sejtés, hogy a terpeszre szóló put opciók értéke a kötési árfolyam függvényében máshogyan viselkedik. *A volatilitás volatilitása és a korrelációs együttható ATM közeli esetben növeli, ITM esetben csökkenti a másodlagos opció értékét.*

A fenti ábrákon még egy fontos dolog *megfigyelhető: a szimuláció során keletkezett „zaj”.* A volatilitás volatilitásának nulla értéke esetén ugyanis a korreláció nem hathat az opció értékére. Azaz az előző ábrákon amennyivel a ξ=0 esetben az egyenesek a vízszintestől eltérnek, annyi hibát hozhat a szimuláció az eredményekbe. Ez láthatóan a negatív korreláltság esetén erősebb, de hatása itt is elhanyagolható.

Eredmények a DO modellben

A Detemple és Osakwe által is használt folyamat mellett a két tényezőt külön-külön vizsgálva is itt találkoztunk a legérdekesebb hatásokkal. Nézzük előbb a *call*okat! Mint az a 23. ábrán jól látható, *egyik hatás sem változik meg a másik paraméter módosításának hatására, csak erősítik egymás hatását*.

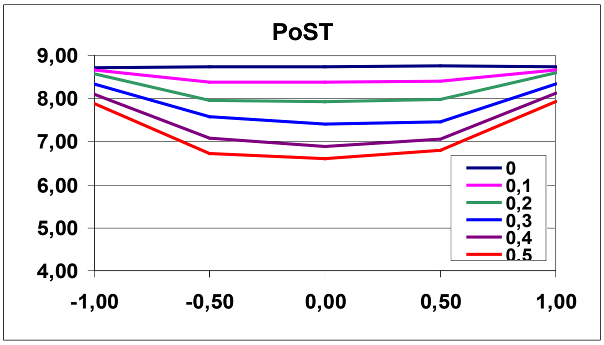
23. ábra
A CoST értéke a korrelációs együttható függvényében a volatilitás volatilitásának különböző értékei mellett
r=0; S_0=100; σ_0=20%; α=ln(0,2); λ=0,05; T_2-T_1=T_1=0,5, τ=1/360=0,002777, K_{STO}=0,



Azaz a korreláció hatása annál erősebb, minél nagyobb a volatilitás volatilitása. Ennek *csökkenésével a korreláció figyelmen kívül hagyása is egyre kisebb árazási hibához vezet*.

Put esetében sem jelent lényegi változást a volatilitás volatilitásának módosulása. Illetve az eredmény ebben az esetben *is* az, hogy *a két paraméter erősíti egymás hatását, a volatilitás volatilitásának erősödésével a korreláció figyelmen kívül hagyása egyre súlyosabb árazási hibához vezet*.

24. ábra
A PoST értéke a korrelációs együttható függvényében a volatilitás volatilitásának különböző értékei mellett
$r=0$; $S_0=100$; $\sigma_0=20\%$; $\alpha=\ln(0,2)$; $\lambda=0,05$; $T_2-T_1=T_1=0,5$, $\tau=1/360=0,002777$, $K_{STO}=20$,



Érdekes, hogy a volatilitás volatilitásától erősen függ, hogy az ITM call vagy az ITM put opciók reagálnak-e érzékenyebben a korreláció változására. Abban az esetben, ha a volatilitás volatilitása 20%, vagy annál nagyobb volt, a call, míg ennél kisebb értékek mellett a put opciók reakciója erősebb. A hatás miden esetben legalább egy nagyságrenddel nagyobb volt, mint a szimulációnak a volatilitás volatilitásának nulla értéke mellett tapasztalt hibája.[15]

A képen szintén látható a szimuláció torzítása is. Itt is igaz, hogy amennyiben a volatilitás folyamatának nincsen volatilitása, a két folyamat nem lesz korrelált, azaz a korreláció nem szabad, hogy hatással legyen a pozíció értékére. Ennek megfelelően $\xi=0$ esetben egy vízszintes vonalnak kellene az ábrán szerepelnie. A szimuláció zaja ebben az esetben is elég kicsi, illetve kisebb, mint a HW modell esetén tapasztalt hiba. Ez is

[15] A táblázatban azt számoltam ki, hogy változik a korrelációs együttható hatására a másodlagos opciók értéke a volatilitás volatilitásának különféle értékei mellett. A táblázat első oszlopában a zaj látható:

	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
CoST	*0,0033*	*0,0294*	*0,0659*	*0,1108*	*0,1688*	*0,2270*
PoST	*-0,0036*	*0,0333*	*0,0733*	*0,1096*	*0,1506*	*0,1623*

A számítás módja: $(CoST_0-CoST_{-1})/CoST_{-1}$, illetve $(PoST_{-1}-PoST_0)/PoST_0$, ahol az indexek a korrelációs együttható értékét jelölik.

igazolta a tesztek során már tapasztaltakat, hogy a DO modell stabilabb. Az eredmények akkor jobban konvergáltak a referencia értékekhez, a kiugróan eltérő eredmények aránya is alacsonyabb volt.

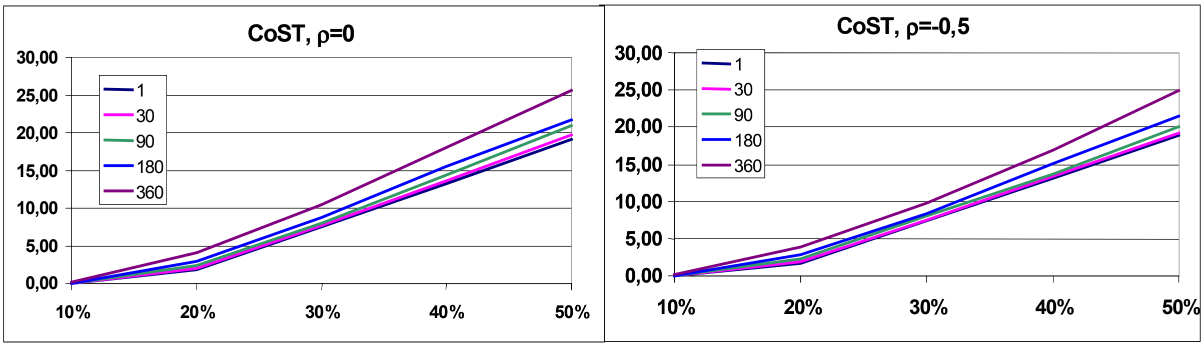
IV.3.4. A terpeszre szóló opciók és a volatilitásra szóló opciók összehasonlítása

Utolsó lépésként nem maradt más, mint hogy az eredményeket összevessem egy hasonló termékkel, a volatilitásra szóló opció értékével. Brenner, Ou és Zhang többek között azzal indokolta az általuk javasolt termék szükségszerűségét, hogy azzal megszűntethető az a probléma, amivel a volatilitásra szóló opció árazásával és előállításával próbálkozók mindig szembenéztek, hogy tudniillik nincs alaptermék.
Éppen ezért vetem össze röviden az eredményeket a volatilitásra szóló opciók árazása során tapasztaltakkal. Referenciaként Detemple és Osakwe cikke szolgál. Ők ugyanis az általam is felhasznált modell mellett volatilitásra szóló call opciók árát igyekeztek meghatározni, ahogyan arról a harmadik fejezetben szó is volt. Nézzük meg, hogy az általuk tapasztalt érdekességekből és tökéletlenségekből melyek azok, amelyek a terpesz, mint alaptermék alkalmazása során is megmaradnak, és melyek azok, amelyeket ezzel a „cserével" ki lehet szűrni.

> <u>6. hipotézis</u>
> *A terpeszre szóló call opció a Detemple és Osakwe által bemutatotthoz hasonlóan fog viselkedni a futamidő változásával, azaz alacsony kezdő volatilitás mellett értékük növekedni, magasabb kezdő volatilitás mellett csökkenni fog annak függvényében.*

A hipotézis ilyen formában történő megfogalmazását az indokolta, hogy Detemple és Osakwe az általuk használt folyamat jellegével igazolták ezt a sajátosságot. *Az eredményeim azonban ezt a hipotézist nem támasztották alá*. A terpeszre szóló call opciók, kötési árfolyamtól függetlenül – néhány extrém, -1-es és +1-es korrelációs esetet leszámítva – „klasszikus" opcióként viselkedtek. *Azaz a futamidő növekedésével az opciók értéke is nőtt.*

25. ábra
A CoST értéke a kezdő volatilitás függvényében az opció hátralévő futamidejének különböző értékei mellett
r=5%; ρ=0 (bal oldal) és ρ= - 0,5 (jobb oldal); S_0=100; σ_0=20%; α=ln(0,2); λ=0,05; T_2-T_1=T_1=0,5,
τ=1/360=0,002777, K_{STO}=10,



A fentiektől eltérő eredményt K_{STO}=0 értéke mellett találtam. Így például ha a két folyamat közötti korrelációs együttható –1, és az induló volatilitás magas, a futamidő növekedése csökkentőleg hathat az opció értékére. Ez jól látszik 40 és 50%-os kezdőértékek mellett. A 30%-os érték mellett tapasztalt eltérés olyan kicsi, hogy akár a szimuláció hibájából is adódhat.

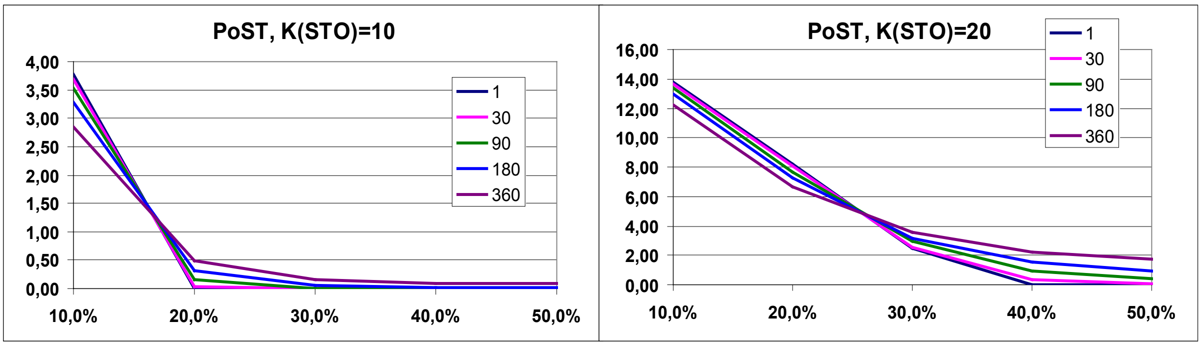
6. táblázat
A terpeszre szóló call opció értéke a futamidő és a kezdő volatilitás függvényében
r=5%; S_0=100; ξ=0,2; α=ln(0,2); λ=0,05; T_2-T_1=T_1=0,5, τ=1/360=0,002777, K_{STO}=10,

ρ = -1	10,0%	20,0%	30,0%	40,0%	50,0%
1	6,00	11,38	16,83	22,24	27,65
30	6,02	11,41	16,83	22,27	27,58
90	6,07	11,42	16,84	22,15	27,40
180	6,14	11,46	16,90	22,04	27,21
360	6,30	11,62	16,83	21,88	26,90

7. hipotézis:
A terpeszre szóló put opció esetén hasonlóan a callokhoz, a hátralévő futamidő nagysága egyes szakaszokon növeli, másokon csökkenti a terpeszre szóló opció értékét.

A hipotézis igaznak bizonyult, a PoST teljesen szabályosan viselkedett, azaz úgy, ahogyan az egy vanilla opció esetén is várható. *Azaz alacsonyabb kezdő volatilitás mellett az időérték negatív lett*, a másodlagos opció futamidejének növekedése csökkentette a terpeszre szóló call értékét. A kötési árfolyam növekedésével természetesen egyre nő az a szakasz, ahol az opció értéke nullától különböző, így az a szakasz is, ahol időértéke negatív.

26. ábra
A PoST értéke a kezdő volatilitás függvényében az opció hátralévő futamidejének különböző értékei mellett
$r=5\%$; $\rho=0$; $S_0=100$; $\sigma_0=20\%$; $\alpha=\ln(0,2)$; $\lambda=0,05$; $T_2-T_1=T_1=0,5$, $\tau=1/360=0,002777$, $K_{STO}=10$ (bal oldal) és $K_{STO}=20$ (jobb oldal);



A két hipotézisre kapott válaszokból az vonható le következtetésként, hogy **a terpeszre szóló opciók jobban viselkedtek, mint a Detemple és Osakwe által vizsgált volatilitásra szóló opciók.** *Abban az esetben ugyanis* valami sajátos tulajdonság, *a call opciók negatív időértéke tapasztalható, míg a terpeszre szóló opciók a vanilla opciókhoz hasonlóan „viselkedtek”.*

Pusztán a futamidő szerint vizsgálódva azt találtam, hogy a Detemple és Osakwe által tapasztal „visszafordulás” nem áll fenn. Ők ugyanis a futamidő szerint ábrázolva a kapott eredményeket, azt látták, hogy a futamidő csökkenésével előbb nőtt az opciók értéke, majd csökkent. *Nálam a hatás egyértelmű volt.* Ez részben a fenti ábrákon és táblázaton is látható. *A futamidő vagy egyértelmű növekedést, vagy egyértelmű csökkenést eredményezett az opciók értékében.* Azokban az esetekben (így a táblázatban is 30%-os kezdő volatilitás mellett látható esetben), mikor az ár a futamidő függvényében hol nőtt, hol csökkent, az értékbeli eltérések olyan kicsik voltak, hogy azok nagyságrendileg nem különböztek a szimulációk során tapasztalt numerikus hibáktól.

Szintén a volatilitásra szóló opciókkal való összevetés során utalnék egy másik, korábban már bemutatott eredményre. *Detemple és Osakwe azt találták, hogy a volatilitásra szóló call opciók értéke nagyobb volatilitás értékek mellett az alaptermék értékének konkáv függvénye.* Ahogyan arról a folytonos eset vizsgálata során az első hipotézis első alhipotézisének elemzése során szó volt, *én csak +1 és –1 korreláció esetén tapasztaltam hasonló sajátosságot, egyébként nem.*

Úgy tűnik tehát, mivel a piacon ezek az értékek nem fordulnak elő*, a terpeszre szóló opciók könnyebben kezelhetőek a volatilitásra szóló opcióknál.* Ezt a következtetést vonhattuk le mind a konvexitás – konkavitás, mind a futamidő vizsgálata során. *Úgy tűnik, hogy a terpeszre szóló opciók nem csupán a* Brenner és szerzőtársai által is bemutatott *könnyebb előállíthatóság és fedezhetőség miatt lehetnek vonzóbbak, mint egy volatilitásra szóló opció*. Míg ugyanis a volatilitás függvényében sok hasonlóságot mutatnak ahhoz, több szempontból is egyszerűbben kezelhetőnek tűnnek.

Ugyanakkor ne feledkezzünk el arról sem, hogy az opciók értéke a volatilitás volatilitásának változása és a korreláció esetleges módosulása esetén igen sajátos tulajdonságokat mutat, illetve azt se hagyjuk számításon kívül, hogy egy ilyen termék kereskedésével a két folyamat közötti korreláció is kockázatként épül be a portfóliónkba.

Dolgozatomban a volatilitás kockázat és a volatilitás kereskedés témáját jártam körül. Bemutattam, hogy a volatilitás kockázata nem korlátozódik az opciós piacra, hanem azzal minden piaci szereplőnek szembe kell nézni. Különösen jelentős lehet a volatilitás kockázatának a gazdaságra hatása, ha az ország devizájának volatilitása növekszik meg erőteljesen. Ekkor ugyanis miden olyan cég érintettje lesz a problémának, amelyik devizában kereskedik, vagy deviza alapú forrása van. Az üzleti folyamatok tervezhetősége, átláthatóságuk csökken. A volatilitás kockázat növekedésével a volatilitásra szóló ügyletek iránti kereslet is növekszik.

A volatilitás kockázat egyik legrosszabb tulajdonsága annak nehéz mérhetősége. A piaci szereplőket érintő piaci kockázatok tipikusan ár, illetve árfolyamkockázat formájában jelennek meg. Ezek értéke megfigyelhető, a belőlük származó kockázat hagyományos határidős és opciós ügyletek felhasználásával csökkenthető. Ezzel szemben a volatilitás jelenbeli értéke sem mérhető, ráadásul a volatilitásra szóló termékek köre is rendkívül szűk.

A volatilitás jövőbeli értéke ugyanakkor az opciók értékét befolyásoló egyik legfontosabb tényező. Emiatt az opciós pozícióval rendelkező, illetve opciós jogot tartalmazó értékpapírokat kibocsátó szereplők számára ennek ismerete rendkívül fontos. Amit mérni tudunk, az a volatilitás múltbeli értéke. Ha feltesszük, hogy a volatilitás időben állandó, a problémát megoldottuk. Mivel ezt tapasztalatok nem támasztják alá, más módszerekre volt szükség a volatilitás meghatározására.

Ennek megfelelően a dolgozat első részében az időben változó volatilitás feltételezését elfogadó opcióárazási modelleket mutattam be, majd a második fejezetben a volatilitás előrejelzésével foglalkozó modellek szerepeltek.

A volatilitás kockázat megszűntethetőségének kérdése, illetve a volatilitásra szóló termékek bemutatása a harmadik fejezetben szerepelt. Ennek során bemutattam a volatilitás kockázat kezelésére megalkotott elméleti modelleket. Először a „hagyományos" módszerek kerültek sorra. Carr és Madan cikke alapján megmutattam, hogyan állítható elő opciók delta fedezésével, illetve összetett opciós pozíciókkal egy delta semleges volatilitás pozíció. Az utóbbi modell egyidejűleg a volatilitás előrejelzésére is alkalmas volt.

A volatilitás kereskedés széleskörű elterjedéséhez azonban ezek az eszközök nem alkalmasak. Nem minden intézmény rendelkezik egy dinamikus pozíció felépítéséhez és „karban tartásához" szükséges feltételekkel. Másrészről, ahogyan a piaci szereplők

egyéb árfolyamkockázatuk kezelése során derivatív ügyleteket használnak fel, természetesnek tűnik az igény, hogy volatilitás kockázatukat is ilyen módon fedezzék.
Emiatt a 90-es évek második felében megjelentek a volatilitásra szóló első származtatott ügyletek. Ezek ma még tőzsdén kívüli ügyletek, amelyek alapterméke gyakran nem a volatilitás, hanem a variancia, mivel ezt a bankok könnyebben elő tudják állítani, fedezve magukat a bevállalt kockázat ellen. Így jutottunk el a volatilitás kereskedés központi kérdéséhez, hogy elő lehet-e állítani szintetikusan az eladott terméket. E nélkül ugyanis – bár a termék vonzó lehet – a bankok nem lesznek hajlandóak a szerződés megkötésére.
A bemutatott termékek között voltak határidős, swap és opciós ügyletek is. Egyesek az árfolyam és a volatilitás által követett folyamatokra vonatkozóan éltek feltevéssel, máshol egy éppen ettől független ár meghatározása volt a cél.
Az elemzés középpontjában a volatilitásra szóló opciók álltak. Bemutattam Whaley [1993], Grünbichler és Longstaff [1996], Detemple és Osakwe [2000], valamint Brenner, Ou és Zhang [2001] megoldásait. A modellek mindegyikében a szerzők a volatilitás által követett folyamatra vonatkozó feltevésekkel éltek. Whaley klasszikus Brown-mozgást, míg a másik három cikk szerzői mean-reverting folyamatot tételeztek fel. Nem foglalkoztak azonban részletesen az árfolyam és a volatilitás által követett folyamatok korreláltságával.

Ebbe a gondolatmenetbe illeszkedett az általam elvégzett kutatómunka is. Brenner és szerzőtársai cikke volt kutatásom alapja. Az általuk javasolt terpeszre szóló opció értékelését végeztem el más, általuk nem vizsgált feltételek mellett. Előbb binomiális (CRR) modellt használtam. Megmutattam, hogy a termék árazása során az egyes időszakok átlagvolatilitásának használata hibás eredményre vezet. Ugyancsak rossz lesz az így számított fedezeti arány (delta) is. Eredményeim részben összhangban voltak a Crouhy és Galai [1995] vanilla opciók vizsgálata során elért eredményeivel.
Folytonos esetben két modellt vizsgáltam. Először Hull és White [1987] modelljét, majd Detemple és Osakwe [2000] modelljét használtam. Az első esetben a volatilitás klasszikus Brown mozgást, a másik esetben logaritmikus mean – reverting folyamatot követett. Mivel ilyen feltételek mellett zárt képlet nem adható, az értékelést Monte Carlo szimulációval végeztem. Bemutattam az árfolyam és a volatilitás közötti korreláltság hatását, és elemeztem a terpeszre szóló put opciók értékét is.

Eredményeim nagy vonalakban megerősítették a Brenner és szerzőtársai által tett megállapításokat. Több ponton azonban módosítani kellett az eredményeiket.

Így megmutattam, hogy a call opciók esetén a korreláció függvényében a terpeszre szóló opció – azaz a volatilitás termék – értéke a kezdő volatilitás értékének konkáv függvénye lehet.

Ugyancsak Brenner és szerzőtársai eredményeitől eltérő eredmény az, hogy a volatilitás volatilitása csökkentheti a termék értékét. Ez különbözik mind Brennerék eredményeitől, mind a vanilla opciók tulajdonságaitól. Érdekes, hogy ez a tulajdonság a valóságot jobban leíró DO modell esetében jellemzőbb.

Dolgozatom egy további eredménye annak bemutatása, hogy a korrelációs együttható hatása jelentős. A hatás ismét a DO modell esetén volt erősebb. Amennyiben ezt figyelmen kívül hagyjuk, a terpeszre szóló opciót félreárazzuk. A probléma egy másik fontos következménye, hogy terpeszre szóló opciót értékesítve, a bank hiába fedezi magát, pozíciója nem lesz kockázatmentes. A két folyamat közötti korreláció kockázata új elemként jelentkezik. Így a volatilitás kereskedéssel egy újabb területre, a korreláció kérdéséhez jutottunk.

A negyedik fejezetben megmutattam azt is, hogy a két kulcsváltozó, a volatilitás volatilitása és a korreláció erősíti egymás hatását.

Kapott eredményeimet Detemple és Osakwe eredményivel is összevetettem. Ebben az esetben természetesen a DO modell szolgált alapul, hiszen én is az általuk javasolt folyamatot használtam. Eredményeim szerint a terpeszre szóló opció a volatilitásra szóló opciónál jobban viselkedett. Az opciók időértéke mind a call, mind a putok esetében a vanilla opciókéhoz hasonló tulajdonságokat mutatott. Így a terpeszre szóló call időértéke mindig pozitív, a puté ITM esetben negatív is lehet.

Összefoglalóan arra az eredményre jutottam, hogy a terpeszre szóló opció a volatilitás kereskedés megfelelő eszköze, esetenként a volatilitásra szóló opciónál is hatékonyabb. Ugyanakkor a korreláció kockázata sem hagyható figyelmen kívül. Ez a tényező pedig nem kereskedett. Azaz az egyik probléma megoldása egy másikat generált.

A szimulációval kapott eredmények megbízhatóságát teszteltem. Egyrészt a Brenner és társai eredményeire visszavezethető paraméter beállítások felhasználásával, másrészt azon esetek elemzésével, ahol a zaj a kapott eredményekből egyértelműen látható. A hiba minden vizsgálat során elhanyagolható volt, az eredményeket nem befolyásolta jelentősen.

A szimuláció elvégzéséhez rendelkezésemre állt számítógépes eszközök azonban korlátozottak voltak. A bemutatottnál több paraméter beállítás vizsgálatára nem volt módom. Érdekes lehet ugyanakkor a termék áralakulását ettől eltérő feltételek mellett is megvizsgálni.

A volatilitás kereskedés témája egyre aktuálisabbá válik. Mikor a kérdéssel először, 1998-ban elkezdtem foglalkozni, kevés cikk volt fellelhető, illetve az ezzel a kérdéssel foglalkozók inkább egy elméleti, mint egy gyakorlati kérdés megoldásán munkálkodtak. Ezt jól mutatja az is, hogy a német VDAX-ra szóló határidős ügylet is megbukott.
Manapság azonban egyre újabb és újabb termékek jelentkeznek a piacon. Ahogyan arról a III. fejezetben szó esett, az „egyszerű" variancia swapok mellett már több variancia és volatilitás terméket forgalmaznak már az OTC piacon. 2004 elején pedig várhatóan a CBOE újból megpróbálja a kereskedést egy volatilitás termékkel.
A piaci aktivitás fokozódásának jeleként értelmezhető az is, hogy a VIX index számítását igyekeztek megtisztítani a Black – Scholes modell feltevéseitől. A piaci gyakorlat megkövetelte az elmélet módosítását. Azáltal pedig, hogy a VIX és más volatilitás indexek értékét már évek óta egyfajta barométerként publikálták, a spekulánsok érdeklődését is fel lehetett kelteni.
Érzésem szerint, ahogyan a kilencvenes években a hitelderivatívok újabb és újabb verziói jelentek meg, a következő évek termékei a volatilitásra szóló ügyletek lehetnek. A kockázattal egyre többen néznek szembe, és egyre többen fedezik fel ennek saját gazdálkodásukra gyakorolt hatásait. Ennek megfelelően valószínűleg más, eddig még nem ismert volatilitás termékek jelenhetnek meg, főleg az igényekhez rugalmasan alkalmazkodó OTC piacon. Így a terpeszre szóló opciók is sikeres termékek lehetnek a jövőben.
Ezek a folyamatok a további kutatás lehetséges irányait is kijelölik. Érdekes lesz megvizsgálni, hogyan hat vissza az opciók értékére az, hogy a volatilitás tőzsdén kereskedett termék lesz. Ha egy kockázat könnyen fedezhetővé válik, a szereplők ezzel kapcsolatos félelmei is csökkennek. Emiatt újabb egzotikus opciók is megjelenhetnek. Másrészről a volatilitás mosoly alakja is megváltozhat.
Ugyanígy érdekes lenne annak vizsgálata, hogyan árazzák a piacon a volatilitásra szóló opciókat, illetve működik-e az arbitrázs a CBOE által bevezetni szándékozott határidős és opciós ügyletek között. Annak, hogy a két terméket egyszerre vezetik be, az egyik előnye éppen ez lehet. A piacnak persze ebben az esetben is van tanulási ideje.

A gondot a továbbiakban várhatóan az fogja okozni, hogy a piacon sok opciót jegyeznek, de csupán az S&P 500 volatilitásával lehet kereskedni. Ennek a hatása kétféle lehet. Egyrészt újabb volatilitások válhatnak alaptermékké. A CBOE sikere esetén újabb tőzsdék dönthetnek egy-egy termék volatilitásának kereskedése mellett.

Másrészt a volatilitás esetén is megjelennek a keresztfedezeti ügyletek. Például, ha a portfóliónk értéke a FTSE index értékétől függ, nem lévén más termék, az S&P 500 volatilitásával fedezzük magunkat. A jövőben érdekes tanulmányok alapja lehet mindez, és felveti a piacok közötti korreláltság kérdést.

Elemzések megmutatták (Kóbor [2003]), hogy a nagy pénzügyi válságok esetén a piacok közötti korreláció erőteljesen megnő. Ennek megfelelően a több piacon operáló befektetők diverzifikációs lehetőségei csökkennek. A megoldást a volatilitáshoz hasonló korreláció pozíciók felvétele jelentheti. A kutatás már megindult (Carr – Lee [2003]). Így a következő terület a volatilitás kereskedés kutatása után vélhetően a korreláció kutatás területe lehet.

A kérdés tehát nem tekinthető lezártnak. A disszertáció tervezet leadása óta több új cikk jelent meg, és a piaci folyamatok is most kezdenek megindulni. Ennek megfelelően a dolgozat a jelenbeli állapotot tükrözi, a fenti kérdések újabb kutatások témakörei lesznek.

Felhasznált irodalom:

1. Asztalos, G. – Golobokov, Sz. – Kurali, Z. – Wolf, Z. [2003]: A piac, amely majdnem működik, Hitelintézeti Szemle, 2003/4.
2. Baxter, M. – Rennie, A. [1998] Financial Calculus – An introduction to derivative pricing, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
3. Benedek G. [1999]: Opcióárazás numerikus módszerekkel, Közgazdasági Szemle, XLVI. évfolyam, 1999 október
4. Benedek, G. [2003]: Evolúciós Gazdaságok Szimulációja, PhD disszertáció, 2003.
5. Berlinger, E. [1998]: Derivatív termékek várható hozama; in.: Bankról, Pénzről, Tőzsdéről, Bankárképző 1998.
6. Breeden, D. – Litzenberger, R [1978]: Prices of state-contingent claims implicit in option prices, Journal of Business, LI. évfolyam 1978, 127-146 oldal.
7. Brenner, M. – Ou, E. Y. – Zhang J. E. [2001]: Hedging Volatility Risk, Working Paper
8. Capelle-Blanchard, G. [2001]: Volatility Trading in Option Market: How Does it Affect Where Informed Traders Trade, Working Paper – University Paris I Panthéon-Sorbonne, 2001 január
9. Carr, P. – Lee, R. [2003]: Robust Replication of Volatility Derivatives, 2003 április, www.petercarr.net, 2003.10.31.
10. Carr, P. – Lee, R. [2003], Trading Autocorrelation, 2003 május, www.petercarr.net, 2003.10.31
11. Carr, P. – Lewis, K. [2002]: Corridor Variance Swaps, Working Paper, 2002. november www.petercarr.net, 2003.10.31.
12. Carr, P.– Madan, D [1999]: Towards a Theory of Volatility Trading, Working Paper 1997 december
13. Cherian, J. A. [1998]: Discretionary Volatility Trading in Option Markets, Working Paper, Boston University 1998 Augusztus
14. Chriss, N. [1997]: Black Scholes and Beyond, Option Pricing Models, Irwin, Chicago, 1997.
15. Chriss, N. – Morokoff, W. [1999]: Market Risk for Volatility and Variance Swaps, Risk, 1999. július

16. Connolly, K. B. [1997]: Buying and selling volatility, Wiley, Chichester, New York, Toronto 1997.
17. Cox, J. C. – Ross, S. A. – Rubinstein, M. [1979]: Option Pricing: A simplified approach, Journal of Financial Economics, 1979/7
18. Cox, J. C. – Ross, S. A [1976]: The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes, Journal of Financial Economics, 3. évfolyam, 1976, 145-166. oldal
19. Copeland, L. – Poon, S. H. – Stapleton, R. C. [2000]: The Determinants of Implied Volatility: A Test Using LIFFE Option Prices, Journal of Business Finance & Accounting, XXVII. évfolyam, 2000 Szeptember – október
20. Crouhy, M. – Galai, D. [1995]: Hedging with a Volatility Term Structure, The Journal of Derivatives, 1995. Tavasz
21. Demeterfi, K. – Derman, E. – Kamal, M. – Zou, J. [1999]: More Than You Ever Wanted To Know About Volatility Swaps, Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes, 1999. március
22. Derman, E. – Kani, I. – Chriss, N. [1996]: Implied Trinomial Trees of the Implied Volatility, Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes, 1996 február
23. Derman, E. – Kani, I. – Zou, J. Z. [1995]: The Local Volatility Surface, Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes, 1995 december
24. Derman, E. – Kani, I. [1994]: The Volatility Smile and Its Implied Tree, Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes, 1994. január
25. Derman, E. [1999]: Regimes of Volatility Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes, 1999 január
26. Detemple, J. – Osakwe, C. [2000]: The Valuation of Volatility Options, European Finance Review, IV. évfolyam, 2000. 21-50. Oldal
27. Drobetz, W. [2003]: Estimating Volatilities and Correlation: ARCH-GARCH, and Related Models, University of Basel, 2003. június
www.sbf.unisg.ch/org/sbf/web.nsf , 2003. 11. 07.
28. Dumas, B. – Fleming, J. – Whaley R. E. [1996]: Implied Volatility Function: Empirical Tests, NBER Working Paper 1996.
29. Dunbar [2000]: A talált pénz – A pénzpiacok természetrajza, Panem, Budapest, 2000.
30. Dupire, B. [1994]: Pricing with a Smile, Risk VII. évfolyam 1. szám, 1994. Január,
31. Engle, R. F. – Patton, A. J. [2000]: What good is a volatility model?, Quantitative Finance, I. évfolyam 237 – 245. Oldal

32. Franke, J. – Härdle, W. – Hafner, Ch. [2003]: Einführung in die Statistik der Finanzmarkte, 2. Auflage, www.quantlet.com/mdstat/scripts/sfm/html/sfmnode68.html, 2003. 11. 07.
33. Geske, R. [1979]: The Valuation of Compound Options, Journal of Financial Economics, 7. évfolyam, 1979. 63-81. oldal
34. Grünbichler, A. – Longstaff, F. A. [1996]: Valuing futures and options on volatility, Journal of Banking and Finance, XX. évfolyam, 985-1001 oldal
35. Guide to the Volatility Indices of Deutsche Börse [1997], Deutsche Börse AG Information Products, www.dtb.de 2001. 10. 05.
36. Hobson, D. G. – Rogers, L. C. G. [1998]: Complete Models with Stochastic Volatility, Mathematical Finance, 8. évfolyam, 1998. 27-48. oldal
37. Howison, S. D. – Rafailidis, A. – Rasmussen, H. O. [2002]: A note on the pricing and hedging of volatility derivatives, working paper, Oxford University, 2002.
38. Hull, J. C. – White, A. [1987]: The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities, Journal of Finance, XLII. évfolyam, 1987. június 281-300. oldal
39. Hull, J. C. [1999]: Opciók, határidős ügyletek és egyéb származtatott termékek, Panem – Prentice-Hall, Budapest, 1999.
40. Jackwerth, J. [1997]: Generalised binomial trees, Journal of Derivatives, V. évfolyam 2. szám, 1997.
41. Jarrow, R. [1998]: Volatility – New Estimation Techniques for Pricing Derivatives, Risk Books, London, 1998.
42. Johnson, H. – Shanno, D. [1987]: Option Pricing when the Variance Is Changing, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 22. évfolyam 2. szám, 1987. június.
43. Kani, I. – Derman, E. – Kamal, M. [1996]: Trading and Hedging Local Volatility, Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes, 1996. Augusztus
44. Kim, I. [2000]: A comparative study of market implied price processes, Working Paper, 2000 július
45. Kóbor, Á. [2003]: A piaci kockázatmérési eszközök alkalmazási lehetőségei a pénzügyi stabilitás elemzésében, PhD értekezés, BKÁE, 2003.
46. Makara, T. [2000]: A hozamgörbe becslése, PhD értekezés, BKÁE Közgazdaságtani PhD program, 2000
47. Medvegyev, P. [2002]: Valószínűségszámítás, Aula, Budapest, 2002.
48. Merton R. C. [1973]: Theory of Rational Option Pricing, Bell Journal of Economics and Management Science, 1973. tavasz

49. Morton, J. – Schea, R. [2001]: Exploiting Volatility to Achieve a Trading Edge Using an Average-true Range (ATR) Second Filter, MTA Journal, 2001 Ősz – Tél.
50. Naik, V. [1993]: Option Valuation and Hedging Strategies with Jumps in the Volatility of Asset Returns, The Journal of Finance, 47. évfolyam, 1993. december
51. Neuberger, A. [1994]: The Log Contract – A new instrument to hedge volatility, The Journal of Portfolio Management, 1994 tél.
52. Poon, Ser-Huan – Pope, P. F. [1999]: Trading Volatility Spreads: A Test of Index Option Market Efficiency, Working Paper, Lancaster University 1999. július 22.
53. Rebonato, R. [1999]: Volatility and Correlation, Wiley, New York 1999.
54. Rubinstein, M. [1994]: Implied Binomial Trees, The Journal of Finance, XLIX. évfolyam 3. szám, 1994 július
55. Scott, L. O. [1987]: Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation, and an Application, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 22. évfolyam 4. szám, 1987. december.
56. Sylla, A. – Villa, C [2000]: Measuring Implied Volatility Surface Risk using Principal Components Analysis, www.quantlet.de/scripts/lns/mrcssnode58.html 2001.09.03.
57. Száz, J. [1999]: Tőzsdei opciók vételre és eladásra, Tanszék Kft., Budapest, 1999.
58. Száz, J. [2003]: Kötvények és Opciók árazása, Pécs 2003.
59. The White Book of VIX [2003] CBOE 2003, www.cboe.com, 2003.09.20.
60. Varga, J. [2001]: Pénz- és tőkepiaci idősorok sztochasztikus volatilitás modelljei, Szigma, 2001. 1-2.
61. Whaley, E. R. [1993]: Derivatives on Market Volatility: Hedging Tools Long Overdue, Journal of Derivatives, 1993 ősz
62. Whaley, E. R. [2000]: The Investor Fear Gauge, A VIX index ismertetője, 2000. február, www.cboe.com 2001. 10. 16.
63. Wiggins, J. B. [1987]: Option Values Under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates, Journal of Financial Economics, 19. évfolyam, 1987. 351-372. oldal.
64. Yates, L [2003/a]: Buying and selling volatility, www.optionvue.com/Articles/ArticleBuySellVolatility.htm 2003. 04. 11
65. Yates, L [2003/b]: The Beauty of V-Trading, www.optionvue.com/Articles/ArticleBeautyofVTrading.htm 2003. 04. 11

66. Zsembery, L [1998]: Volatilitás kereskedés; in.: Bankról, Pénzről, Tőzsdéről, Bankárképző 1998.
67. Zsembery, L. [1999]: Volatilitás kereskedés az opciós piacon, Bankszemle, 1999/2
68. Zsembery, L. [2003]: A volatilitás előrejelzése és a visszaszámított modellek, Közgazdasági Szemle, 2003. június

1. Melléklet – a Hull – White (HW) modell eredményei

1. Változó paraméterek: K_{STO} és ξ, azaz a kötési árfolyam és a volatilitás volatilitása

K_{STO}	0-20	Lépésköz: 5
ξ	0-0,5	Lépésköz: 0,1

Az egyéb paraméterek: $\mu=r=0$; $S_0=100$; $\sigma_0=20\%$; $\rho=0$; $T_2-T_1=T_1=0{,}5$, $\tau=1/360=0{,}002777$

Ezt 5-ször futtattam ρ különböző értékei mellett. $\rho=-1; -0{,}5; 0; 0{,}5; 1$

		K_{STO}=0		K_{STO}=5		K_{STO}=10		K_{STO}=15		K_{STO}=20	
VOLVOL	KORREL	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST
0,00	-1,00	0,00	11,34	0,00	6,27	0,26	1,43	3,75	0,03	8,75	0,00
0,00	-0,50	0,00	11,28	0,00	6,32	0,25	1,49	3,87	0,02	8,75	0,00
0,00	0,00	0,00	11,11	0,00	6,26	0,22	1,51	3,72	0,02	8,70	0,00
0,00	0,50	0,00	11,18	0,00	6,32	0,21	1,51	3,67	0,04	8,66	0,00
0,00	1,00	0,00	11,31	0,00	6,37	0,22	1,59	3,81	0,02	8,74	0,00
0,10	-1,00	0,00	10,99	0,00	5,95	0,11	1,14	4,08	0,00	9,02	0,00
0,10	-0,50	0,00	11,20	0,00	6,14	0,21	1,34	3,93	0,01	8,89	0,00
0,10	0,00	0,00	11,34	0,00	6,37	0,27	1,48	3,58	0,06	8,70	0,00
0,10	0,50	0,00	11,51	0,00	6,50	0,35	1,78	3,72	0,09	8,64	0,00
0,10	1,00	0,00	11,76	0,00	6,69	0,40	1,89	3,53	0,25	8,32	0,01
0,20	-1,00	0,00	10,78	0,00	5,77	0,08	0,82	4,22	0,00	9,21	0,00
0,20	-0,50	0,00	10,97	0,00	6,04	0,26	1,38	4,02	0,03	8,95	0,00
0,20	0,00	0,00	11,38	0,00	6,38	0,40	1,68	3,79	0,15	8,79	0,00
0,20	0,50	0,00	11,60	0,00	6,46	0,49	2,24	3,63	0,30	8,34	0,04
0,20	1,00	0,00	12,24	0,00	6,96	0,52	2,39	3,59	0,54	8,12	0,11
0,30	-1,00	0,00	10,55	0,00	5,53	0,18	0,79	4,41	0,00	9,40	0,00
0,30	-0,50	0,00	10,81	0,00	5,85	0,43	1,36	4,13	0,07	9,11	0,00
0,30	0,00	0,00	11,24	0,00	6,34	0,58	1,97	4,09	0,22	8,64	0,06
0,30	0,50	0,00	11,98	0,00	6,65	0,57	2,57	3,72	0,72	8,31	0,13
0,30	1,00	0,00	12,45	0,00	7,39	0,59	3,33	3,70	1,08	7,96	0,34
0,40	-1,00	0,00	10,56	0,00	5,42	0,38	0,85	4,54	0,00	9,49	0,00
0,40	-0,50	0,00	10,84	0,00	5,72	0,70	1,46	4,40	0,13	9,11	0,02
0,40	0,00	0,00	11,49	0,00	6,19	0,77	2,03	3,96	0,55	8,65	0,12
0,40	0,50	0,00	11,85	0,01	7,28	0,90	2,72	3,85	1,05	7,95	0,44
0,40	1,00	0,00	13,07	0,01	8,46	0,78	4,29	3,57	2,07	7,53	0,98
0,50	-1,00	0,00	10,31	0,00	5,29	0,67	1,02	4,74	0,01	9,77	0,00
0,50	-0,50	0,00	10,95	0,00	5,89	0,92	1,64	4,38	0,27	9,45	0,02
0,50	0,00	0,00	11,35	0,02	6,14	1,04	2,54	4,35	0,65	8,88	0,20
0,50	0,50	0,00	12,30	0,02	7,25	1,07	3,53	4,04	1,69	8,25	0,76
0,50	1,00	0,00	14,11	0,04	9,11	0,89	5,06	3,72	2,32	7,48	1,66

2. Változó paraméterek: K_{STO} és σ_0, azaz a kötési árfolyam és az induló volatilitás

K_{STO}	0-20	Lépésköz: 5
σ_0	0,1-0,5	Lépésköz: 0,1

Az egyéb paraméterek: $\mu=r=0$; $S_0=100$; $\xi=20\%$; $\rho=0$; $T_2-T_1=T_1=0{,}5$, $\tau=1/360=0{,}002777$

Ezt 5-ször futtattam ρ különböző értékei mellett. $\rho=-1; -0{,}5; 0; 0{,}5; 1$

		K_{STO}=0		K_{STO}=5		K_{STO}=10		K_{STO}=15		K_{STO}=20	
SIGMA0	KORREL	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST
0,10	-1,00	0,00	5,54	0,02	0,56	4,46	0,00	9,47	0,00	14,46	0,00
0,10	-0,50	0,00	5,57	0,07	0,65	4,43	0,00	9,41	0,00	14,42	0,00
0,10	0,00	0,00	5,66	0,11	0,75	4,36	0,00	9,36	0,00	14,36	0,00
0,10	0,50	0,00	5,74	0,14	0,88	4,27	0,00	9,25	0,00	14,28	0,00
0,10	1,00	0,00	5,85	0,15	1,00	4,15	0,01	9,12	0,00	14,15	0,00
0,20	-1,00	0,00	10,77	0,00	5,77	0,00	0,77	4,23	0,00	9,23	0,00
0,20	-0,50	0,00	11,03	0,00	6,00	0,22	1,22	4,00	0,01	9,00	0,00
0,20	0,00	0,00	11,30	0,00	6,31	0,35	1,66	3,85	0,11	8,74	0,00
0,20	0,50	0,00	11,60	0,00	6,65	0,42	2,07	3,65	0,29	8,40	0,03

0,20	1,00	0,00	12,04	0,00	7,00	0,48	2,50	3,49	0,55	8,03	0,11
0,30	-1,00	0,00	15,72	0,00	10,72	0,00	5,71	0,28	0,97	4,29	0,00
0,30	-0,50	0,00	16,31	0,00	11,28	0,00	6,26	0,64	1,90	3,97	0,24
0,30	0,00	0,00	16,89	0,00	11,89	0,02	6,97	0,83	2,78	3,85	0,76
0,30	0,50	0,00	17,74	0,00	12,73	0,04	7,64	0,93	3,67	3,71	1,39
0,30	1,00	0,00	18,60	0,00	13,68	0,05	8,77	0,97	4,54	3,60	2,15
0,40	-1,00	0,00	20,34	0,00	15,45	0,00	10,35	0,07	5,49	1,10	1,43
0,40	-0,50	0,00	21,42	0,00	16,35	0,00	11,31	0,16	6,51	1,42	2,76
0,40	0,00	0,00	22,59	0,00	17,46	0,00	12,57	0,25	7,81	1,63	4,12
0,40	0,50	0,00	23,87	0,00	18,96	0,01	13,89	0,32	9,16	1,72	5,67
0,40	1,00	0,00	25,36	0,00	20,30	0,02	15,50	0,37	11,00	1,72	7,03
0,50	-1,00	0,00	24,81	0,00	19,78	0,00	14,75	0,08	9,77	0,61	5,24
0,50	-0,50	0,00	26,23	0,00	21,40	0,00	16,38	0,10	11,32	0,78	7,09
0,50	0,00	0,00	27,86	0,00	23,06	0,01	18,03	0,15	13,15	0,89	8,90
0,50	0,50	0,00	30,28	0,00	25,24	0,00	20,36	0,17	15,27	0,97	11,14
0,50	1,00	0,00	33,05	0,00	27,68	0,01	22,59	0,20	17,59	1,01	13,73

3. Változó paraméterek: ξ és ρ, azaz a volatilitás volatilitása és a korrelációs együttható

ξ	0-0,5	Lépésköz: 0,1
ρ	-1 – 1	Lépésköz: 0,2

Az egyéb paraméterek: μ=r=0; S_0=100; σ_0=20%; K_{STO}=10; T_2-T_1=T_1=0,5, τ=1/360=0,002777

	ξ=0		ξ=0,05		ξ=0,1		ξ=0,15		ξ=0,2		ξ=0,25	
KORREL	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST
-1,00	0,18	1,42	0,11	1,22	0,05	1,05	0,02	0,89	0,00	0,77	0,02	0,69
-0,80	0,17	1,46	0,12	1,28	0,09	1,14	0,08	1,04	0,10	0,97	0,15	0,95
-0,60	0,17	1,43	0,14	1,31	0,12	1,23	0,14	1,16	0,18	1,13	0,26	1,14
-0,40	0,17	1,44	0,16	1,38	0,16	1,33	0,19	1,29	0,25	1,33	0,35	1,34
-0,20	0,17	1,46	0,17	1,41	0,19	1,39	0,24	1,43	0,33	1,45	0,39	1,58
0,00	0,17	1,44	0,18	1,45	0,21	1,49	0,26	1,55	0,35	1,65	0,45	1,72
0,20	0,17	1,43	0,20	1,50	0,24	1,61	0,31	1,67	0,40	1,78	0,47	1,94
0,40	0,17	1,45	0,21	1,54	0,26	1,66	0,33	1,85	0,42	1,98	0,50	2,13
0,60	0,18	1,42	0,22	1,61	0,27	1,77	0,36	1,96	0,44	2,14	0,54	2,36
0,80	0,17	1,45	0,24	1,65	0,31	1,86	0,38	2,09	0,46	2,32	0,56	2,56
1,00	0,17	1,45	0,24	1,68	0,31	1,99	0,39	2,25	0,48	2,49	0,57	2,86

	ξ=0,3		ξ=0,35		ξ=0,4		ξ=0,45		ξ=0,5	
KORREL	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST
-1,00	0,10	0,70	0,21	0,74	0,34	0,80	0,48	0,87	0,60	0,94
-0,80	0,25	0,96	0,37	0,99	0,49	1,06	0,64	1,09	0,75	1,19
-0,60	0,36	1,18	0,48	1,23	0,60	1,30	0,72	1,40	0,87	1,48
-0,40	0,43	1,40	0,55	1,44	0,66	1,61	0,78	1,65	0,92	1,75
-0,20	0,50	1,64	0,63	1,75	0,71	1,87	0,85	1,93	1,00	2,04
0,00	0,54	1,82	0,66	1,95	0,76	2,15	0,91	2,24	1,02	2,40
0,20	0,56	2,13	0,70	2,20	0,80	2,47	0,90	2,67	1,01	2,79
0,40	0,59	2,40	0,68	2,58	0,79	2,80	0,92	2,94	1,04	3,18
0,60	0,64	2,58	0,73	2,80	0,80	3,20	0,91	3,35	1,00	3,80
0,80	0,63	2,89	0,70	3,14	0,82	3,52	0,89	3,96	0,97	4,34
1,00	0,65	3,14	0,70	3,59	0,78	4,01	0,86	4,48	0,91	5,02

4. Változó paraméterek: σ_0 és ρ, az induló volatilitás és a korrelációs együttható

σ_0	0,1-0,5	Lépésköz: 0,1
ρ	-1 – 1	Lépésköz: 0,2

Az egyéb paraméterek: μ=r=0; S_0=100; ξ=20%; K_{STO}=10; T_2-T_1=T_1=0,5, τ=1/360=0,002777

	σ_0=0,1		σ_0=0,15		σ_0=0,2		σ_0=0,25		σ_0=0,3		σ_0=0,35	
KORREL	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST
-1,00	4,46	0,00	1,80	0,00	0,00	0,77	0,00	3,27	0,00	5,71	0,00	8,09
-0,80	4,44	0,00	1,78	0,00	0,10	0,96	0,00	3,44	0,00	5,90	0,00	8,32
-0,60	4,42	0,00	1,74	0,03	0,19	1,11	0,01	3,60	0,00	6,17	0,00	8,74
-0,40	4,41	0,00	1,73	0,06	0,26	1,32	0,03	3,75	0,01	6,37	0,00	9,05
-0,20	4,39	0,00	1,71	0,11	0,31	1,47	0,05	3,94	0,01	6,65	0,00	9,38

0,00	4,36	0,00	1,70	0,16	0,35	1,65	0,07	4,12	0,01	6,92	0,01	9,73
0,20	4,30	0,00	1,69	0,23	0,39	1,80	0,09	4,41	0,02	7,26	0,01	10,17
0,40	4,28	0,00	1,66	0,28	0,42	1,95	0,10	4,63	0,04	7,48	0,01	10,59
0,60	4,24	0,00	1,65	0,36	0,44	2,18	0,13	4,79	0,04	7,94	0,02	11,05
0,80	4,20	0,00	1,61	0,44	0,46	2,35	0,13	5,16	0,05	8,31	0,02	11,49
1,00	4,13	0,00	1,59	0,52	0,48	2,47	0,15	5,45	0,06	8,58	0,03	12,03

	σ_0=0,4		σ_0=0,45		σ_0=0,5	
KORREL	POST	COST	POST	COST	POST	COST
-1,00	0,00	10,35	0,00	12,62	0,00	14,83
-0,80	0,00	10,67	0,00	13,11	0,00	15,36
-0,60	0,00	11,03	0,00	13,56	0,00	15,87
-0,40	0,00	11,62	0,00	14,04	0,00	16,65
-0,20	0,00	11,98	0,00	14,77	0,00	17,45
0,00	0,00	12,43	0,00	15,24	0,00	18,17
0,20	0,01	13,11	0,01	15,94	0,00	19,03
0,40	0,01	13,71	0,01	16,72	0,01	19,69
0,60	0,01	14,09	0,01	17,29	0,01	20,48
0,80	0,02	14,62	0,01	18,08	0,01	21,69
1,00	0,02	15,39	0,01	18,95	0,01	22,63

5. Változó paraméterek: σ_0 és ξ, azaz az induló volatilitás és a volatilitás volatilitása

σ_0	0,1-0,5	Lépésköz: 0,1
ξ	0-0,5	Lépésköz: 0,1

Az egyéb paraméterek: μ=r=0; S_0=100; K_{STO}= 10; ρ=0; T_2-T_1=T_1=0,5, τ=1/360=0,002777

Ezt 5-ször futtattam ρ különböző értékei mellett. ρ=-1; -0,5; 0; 0,5; 1

		σ_0=0,1		σ_0=0,2		σ_0=0,3		σ_0=0,4		σ_0=0,5	
VOLVOL	KORREL	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST
0,00	-1,00	4,36	0,00	0,17	1,46	0,01	6,92	0,00	12,49	0,00	18,19
0,00	-0,50	4,35	0,00	0,17	1,43	0,01	7,00	0,00	12,48	0,00	18,17
0,00	0,00	4,36	0,00	0,17	1,44	0,01	6,87	0,00	12,51	0,00	18,12
0,00	0,50	4,35	0,00	0,17	1,44	0,01	6,88	0,00	12,45	0,00	18,09
0,00	1,00	4,36	0,00	0,17	1,44	0,01	6,94	0,00	12,44	0,00	18,15
0,10	-1,00	4,42	0,00	0,05	1,04	0,00	6,29	0,00	11,43	0,00	16,25
0,10	-0,50	4,39	0,00	0,14	1,28	0,00	6,58	0,00	12,04	0,00	17,20
0,10	0,00	4,36	0,00	0,22	1,50	0,01	6,95	0,00	12,50	0,00	17,88
0,10	0,50	4,31	0,00	0,27	1,72	0,02	7,26	0,00	13,13	0,00	18,88
0,10	1,00	4,27	0,00	0,33	1,93	0,02	7,63	0,01	13,91	0,01	20,32
0,20	-1,00	4,47	0,00	0,00	0,78	0,00	5,69	0,00	10,39	0,00	14,77
0,20	-0,50	4,42	0,00	0,22	1,22	0,00	6,28	0,00	11,37	0,00	16,17
0,20	0,00	4,36	0,00	0,35	1,62	0,02	6,98	0,01	12,43	0,01	18,00
0,20	0,50	4,27	0,00	0,43	2,08	0,04	7,71	0,01	13,79	0,01	20,26
0,20	1,00	4,14	0,01	0,48	2,55	0,06	8,65	0,02	15,59	0,01	22,54
0,30	-1,00	4,49	0,00	0,10	0,69	0,00	5,24	0,00	9,51	0,00	13,44
0,30	-0,50	4,46	0,00	0,41	1,30	0,01	6,01	0,00	10,84	0,00	15,45
0,30	0,00	4,34	0,00	0,55	1,83	0,04	7,06	0,01	12,57	0,01	18,11
0,30	0,50	4,19	0,02	0,62	2,49	0,09	8,19	0,02	14,42	0,01	21,72
0,30	1,00	4,04	0,05	0,60	3,25	0,11	9,74	0,04	17,34	0,02	26,15
0,40	-1,00	4,47	0,00	0,34	0,79	0,00	4,83	0,00	8,75	0,01	12,21
0,40	-0,50	4,45	0,01	0,64	1,43	0,04	5,73	0,00	10,30	0,00	14,79
0,40	0,00	4,35	0,02	0,79	2,05	0,10	7,14	0,02	12,61	0,01	18,46
0,40	0,50	4,16	0,07	0,81	2,93	0,16	8,79	0,05	15,85	0,03	22,62
0,40	1,00	3,95	0,15	0,78	3,97	0,19	11,30	0,07	20,14	0,04	30,30
0,50	-1,00	4,49	0,00	0,64	0,91	0,01	4,43	0,00	8,02	0,01	11,10
0,50	-0,50	4,45	0,02	0,88	1,61	0,11	5,56	0,02	9,95	0,01	14,00
0,50	0,00	4,38	0,07	1,02	2,37	0,22	7,21	0,06	12,69	0,03	18,27
0,50	0,50	4,17	0,16	0,99	3,54	0,27	9,60	0,09	16,99	0,05	25,27
0,50	1,00	3,89	0,34	0,91	5,06	0,28	13,25	0,12	23,76	0,06	36,29

2. Melléklet – a Detemple – Osakwe (DO) modell eredményei

1. Változó paraméterek: K_{STO} és ξ, azaz a kötési árfolyam és a volatilitás volatilitása

K_{STO}	0-20	Lépésköz: 5
ξ	0-0,5	Lépésköz: 0,1

Az egyéb paraméterek: $\mu=r=0$; $\rho=0$; $S_0=100$; $\sigma_0=20\%$; $\lambda=0{,}05$; $\alpha=\lambda*\ln(0{,}2)$; $T_2-T_1=T_1=0{,}5$, $\tau=1/360=0{,}002777$
Ezt 5-ször futtattam ρ különböző értékei mellett. ρ=-1; -0,5; 0; 0,5; 1

		K_{STO}=0		K_{STO}=5		K_{STO}=10		K_{STO}=15		K_{STO}=20	
VOLVOL	KORREL	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST
0,00	-1,00	0,00	11,27	0,00	6,24	0,18	1,44	3,74	0,02	8,71	0,00
0,00	-0,50	0,00	11,30	0,00	6,25	0,18	1,44	3,77	0,02	8,74	0,00
0,00	0,00	0,00	11,31	0,00	6,28	0,17	1,45	3,73	0,02	8,74	0,00
0,00	0,50	0,00	11,28	0,00	6,25	0,17	1,46	3,76	0,02	8,76	0,00
0,00	1,00	0,00	11,28	0,00	6,27	0,16	1,47	3,75	0,02	8,73	0,00
0,10	-1,00	0,00	11,32	0,00	6,33	0,21	1,55	3,69	0,04	8,68	0,00
0,10	-0,50	0,00	11,62	0,00	6,63	0,30	1,90	3,56	0,15	8,37	0,01
0,10	0,00	0,00	11,65	0,00	6,64	0,30	1,96	3,51	0,19	8,39	0,01
0,10	0,50	0,00	11,63	0,00	6,61	0,29	1,89	3,59	0,15	8,40	0,01
0,10	1,00	0,00	11,31	0,00	6,33	0,21	1,53	3,73	0,04	8,68	0,00
0,20	-1,00	0,00	11,45	0,00	6,45	0,30	1,77	3,66	0,11	8,56	0,00
0,20	-0,50	0,00	12,12	0,00	7,15	0,42	2,54	3,46	0,48	7,96	0,08
0,20	0,00	0,00	12,20	0,00	7,19	0,43	2,65	3,41	0,54	7,94	0,11
0,20	0,50	0,00	12,10	0,00	7,10	0,41	2,53	3,40	0,49	7,98	0,09
0,20	1,00	0,00	11,40	0,00	6,42	0,30	1,78	3,68	0,12	8,59	0,00
0,30	-1,00	0,00	11,65	0,00	6,70	0,44	2,12	3,62	0,32	8,33	0,04
0,30	-0,50	0,00	12,75	0,00	7,77	0,53	3,29	3,33	0,98	7,58	0,32
0,30	0,00	0,00	12,94	0,00	7,90	0,55	3,48	3,22	1,22	7,42	0,41
0,30	0,50	0,00	12,78	0,00	7,74	0,53	3,32	3,24	1,06	7,47	0,34
0,30	1,00	0,00	11,68	0,00	6,69	0,43	2,11	3,64	0,32	8,33	0,04
0,40	-1,00	0,00	11,99	0,00	7,03	0,57	2,54	3,57	0,62	8,11	0,14
0,40	-0,50	0,00	13,83	0,01	8,70	0,62	4,21	3,17	1,98	7,08	0,78
0,40	0,00	0,00	14,01	0,01	9,08	0,63	4,55	3,14	2,14	6,89	1,02
0,40	0,50	0,00	13,70	0,00	8,64	0,62	4,37	3,22	1,81	7,06	0,83
0,40	1,00	0,00	12,06	0,00	7,02	0,58	2,53	3,61	0,61	8,13	0,13
0,50	-1,00	0,00	12,51	0,01	7,45	0,68	3,19	3,58	1,00	7,88	0,34
0,50	-0,50	0,00	14,96	0,01	9,90	0,68	5,57	3,02	3,04	6,72	1,57
0,50	0,00	0,00	15,35	0,01	10,36	0,68	5,97	2,96	3,56	6,60	1,86
0,50	0,50	0,00	14,95	0,01	9,80	0,69	5,67	3,10	3,06	6,79	1,59
0,50	1,00	0,00	12,40	0,01	7,48	0,70	3,12	3,59	1,06	7,94	0,31

2. Változó paraméterek: K_{STO} és σ_0, azaz a kötési árfolyam és az induló volatilitás

K_{STO}	0-20	Lépésköz: 5
σ_0	0,1-0,5	Lépésköz: 0,1

Az egyéb paraméterek: $\mu=r=0$; $\rho=0$; $S_0=100$; $\xi=20\%$; $\lambda=0{,}05$; $\alpha=\lambda*\ln(0{,}2)$; $T_2-T_1=T_1=0{,}5$, $\tau=1/360=0{,}002777$
Ezt 5-ször futtattam ρ különböző értékei mellett. ρ=-1; -0,5; 0; 0,5; 1

		K_{STO}=0		K_{STO}=5		K_{STO}=10		K_{STO}=15		K_{STO}=20	
SIGMA0	KORREL	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST
0,10	-1,00	0,00	5,87	0,06	0,95	4,11	0,00	9,13	0,00	14,12	0,00
0,10	-0,50	0,00	6,05	0,10	1,18	3,94	0,01	8,92	0,00	13,95	0,00
0,10	0,00	0,00	6,10	0,11	1,21	3,92	0,01	8,90	0,00	13,90	0,00
0,10	0,50	0,00	6,05	0,10	1,20	3,95	0,01	8,93	0,00	13,94	0,00
0,10	1,00	0,00	5,87	0,07	0,95	4,11	0,00	9,12	0,00	14,12	0,00
0,20	-1,00	0,00	11,46	0,00	6,48	0,30	1,79	3,67	0,13	8,55	0,00
0,20	-0,50	0,00	12,10	0,00	7,21	0,42	2,56	3,40	0,51	8,07	0,08
0,20	0,00	0,00	12,13	0,00	7,20	0,44	2,62	3,36	0,62	7,90	0,11
0,20	0,50	0,00	12,07	0,00	7,04	0,42	2,56	3,40	0,50	8,00	0,08
0,20	1,00	0,00	11,46	0,00	6,44	0,30	1,76	3,65	0,12	8,54	0,00
0,30	-1,00	0,00	16,95	0,00	11,92	0,02	6,86	0,82	2,71	3,85	0,71
0,30	-0,50	0,00	18,40	0,00	13,28	0,05	8,27	0,94	4,32	3,52	1,89

0,30	0,00	0,00	18,54	0,00	13,40	0,05	8,63	0,97	4,56	3,55	2,20
0,30	0,50	0,00	18,42	0,00	13,32	0,05	8,32	0,95	4,26	3,63	1,90
0,30	1,00	0,00	16,83	0,00	11,92	0,02	6,86	0,81	2,75	3,82	0,77
0,40	-1,00	0,00	22,29	0,00	17,25	0,00	12,31	0,27	7,46	1,63	3,98
0,40	-0,50	0,00	24,69	0,00	19,59	0,02	14,92	0,37	10,20	1,74	6,53
0,40	0,00	0,00	25,05	0,00	20,13	0,02	15,32	0,37	10,49	1,73	6,80
0,40	0,50	0,00	24,83	0,00	19,56	0,02	14,58	0,36	10,09	1,72	6,55
0,40	1,00	0,00	22,36	0,00	17,35	0,01	12,22	0,25	7,64	1,70	3,88
0,50	-1,00	0,00	27,60	0,00	22,59	0,01	17,60	0,15	12,80	0,98	8,44
0,50	-0,50	0,00	31,52	0,00	26,65	0,01	21,43	0,22	16,43	1,06	12,29
0,50	0,00	0,00	31,79	0,00	27,23	0,01	21,80	0,22	17,41	1,08	13,14
0,50	0,50	0,00	31,20	0,00	26,26	0,01	21,17	0,20	16,60	1,04	12,31
0,50	1,00	0,00	27,57	0,00	22,82	0,01	17,45	0,16	12,68	0,94	8,61

3. Változó paraméterek: K_{STO} és α, azaz a kötési árfolyam és a hosszú távú volatilitás

K_{STO}	0-20	Lépésköz: 5
α	0,1-0,4, azaz *0,05*ln(0,1)-től 0,05*ln(0,5)-ig*	Lépésköz: 0,1

Az egyéb paraméterek: μ=r=0; ρ=0; S_0=100; σ_0=20%; ξ=20%; λ=0,05; T_2-T_1=T_1=0,5, τ=1/360=0,002777
Ezt 5-ször futtattam ρ különböző értékei mellett. ρ=-1; -0,5; 0; 0,5; 1

		K_{STO}=0		K_{STO}=5		K_{STO}=10		K_{STO}=15		K_{STO}=20	
EXP(α)	KORREL	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST
-2,30	-1,00	0,00	11,21	0,00	6,19	0,37	1,51	3,94	0,09	8,84	0,00
-2,30	-0,50	0,00	11,77	0,00	6,80	0,48	2,21	3,63	0,43	8,23	0,07
-2,30	0,00	0,00	11,96	0,00	6,85	0,50	2,41	3,62	0,47	8,21	0,08
-2,30	0,50	0,00	11,83	0,00	6,70	0,47	2,27	3,63	0,42	8,24	0,06
-2,30	1,00	0,00	11,20	0,00	6,17	0,36	1,56	3,89	0,10	8,84	0,00
-1,61	-1,00	0,00	11,46	0,00	6,44	0,30	1,75	3,66	0,12	8,57	0,00
-1,61	-0,50	0,00	12,09	0,00	7,11	0,42	2,55	3,40	0,46	8,00	0,10
-1,61	0,00	0,00	12,19	0,00	7,30	0,43	2,68	3,33	0,58	7,84	0,10
-1,61	0,50	0,00	12,08	0,00	7,12	0,41	2,51	3,44	0,46	7,95	0,09
-1,61	1,00	0,00	11,45	0,00	6,47	0,31	1,78	3,64	0,12	8,58	0,00
-1,20	-1,00	0,00	11,61	0,00	6,67	0,27	1,88	3,48	0,14	8,37	0,00
-1,20	-0,50	0,00	12,30	0,00	7,33	0,37	2,68	3,30	0,54	7,82	0,10
-1,20	0,00	0,00	12,38	0,00	7,39	0,40	2,79	3,22	0,61	7,67	0,13
-1,20	0,50	0,00	12,35	0,00	7,30	0,38	2,65	3,29	0,54	7,84	0,10
-1,20	1,00	0,00	11,61	0,00	6,58	0,27	1,91	3,51	0,14	8,36	0,01
-0,92	-1,00	0,00	11,76	0,00	6,74	0,24	2,03	3,42	0,15	8,27	0,01
-0,92	-0,50	0,00	12,41	0,00	7,38	0,37	2,78	3,16	0,61	7,70	0,10
-0,92	0,00	0,00	12,56	0,00	7,49	0,37	2,95	3,15	0,70	7,60	0,14
-0,92	0,50	0,00	12,44	0,00	7,44	0,36	2,81	3,19	0,59	7,69	0,11
-0,92	1,00	0,00	11,77	0,00	6,73	0,25	2,00	3,42	0,17	8,24	0,01

4. Változó paraméterek: σ_0 és ξ, azaz az induló volatilitás és a volatilitás volatilitása

σ_0	0,1-0,5	Lépésköz: 0,1
ξ	0-0,5	Lépésköz: 0,1

Az egyéb paraméterek: μ=r=0; ρ=0; S_0=100; K_{STO}=10; λ=0,05; α=λ*ln(0,2); T_2-T_1=T_1=0,5, τ=1/360=0,002777
Ezt 5-ször futtattam ρ különböző értékei mellett. ρ=-1; -0,5; 0; 0,5; 1

		σ_0=0,1		σ_0=0,2		σ_0=0,3		σ_0=0,4		σ_0=0,5	
VOLVOL	KORREL	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST
0,00	-1,00	4,21	0,00	0,17	1,45	0,01	6,62	0,00	11,96	0,00	17,14
0,00	-0,50	4,21	0,00	0,18	1,44	0,01	6,64	0,00	11,93	0,00	17,08
0,00	0,00	4,21	0,00	0,17	1,48	0,01	6,67	0,00	11,90	0,00	17,07
0,00	0,50	4,21	0,00	0,17	1,43	0,01	6,69	0,00	11,96	0,01	17,08
0,00	1,00	4,21	0,00	0,17	1,47	0,01	6,63	0,00	12,00	0,00	17,11
0,10	-1,00	4,19	0,00	0,20	1,52	0,01	6,73	0,00	11,90	0,00	17,26
0,10	-0,50	4,10	0,00	0,28	1,93	0,02	7,29	0,01	13,16	0,01	18,98
0,10	0,00	4,08	0,00	0,31	1,98	0,03	7,46	0,01	13,41	0,01	19,33
0,10	0,50	4,11	0,00	0,29	1,92	0,02	7,25	0,01	13,12	0,01	18,87
0,10	1,00	4,19	0,00	0,21	1,54	0,01	6,73	0,00	11,89	0,00	17,24

0,20	-1,00	4,12	0,00	0,31	1,74	0,02	6,85	0,01	12,34	0,00	17,66
0,20	-0,50	3,95	0,01	0,42	2,54	0,04	8,44	0,02	14,76	0,01	21,17
0,20	0,00	3,90	0,01	0,44	2,60	0,06	8,63	0,02	15,11	0,01	21,97
0,20	0,50	3,93	0,00	0,43	2,52	0,05	8,34	0,02	14,57	0,01	21,56
0,20	1,00	4,13	0,00	0,31	1,76	0,02	6,87	0,01	12,34	0,00	17,64
0,30	-1,00	4,00	0,01	0,44	2,12	0,04	7,36	0,01	12,79	0,01	18,09
0,30	-0,50	3,71	0,06	0,53	3,32	0,10	9,67	0,03	16,75	0,02	24,62
0,30	0,00	3,69	0,07	0,53	3,56	0,10	10,24	0,04	17,55	0,02	25,84
0,30	0,50	3,75	0,06	0,53	3,29	0,10	9,68	0,03	16,79	0,02	24,16
0,30	1,00	4,02	0,01	0,43	2,15	0,04	7,32	0,01	12,80	0,01	18,11
0,40	-1,00	3,89	0,04	0,57	2,59	0,08	7,81	0,02	13,35	0,01	18,65
0,40	-0,50	3,58	0,19	0,62	4,31	0,15	11,32	0,04	19,93	0,03	29,42
0,40	0,00	3,47	0,23	0,63	4,54	0,15	12,01	0,05	21,44	0,03	31,70
0,40	0,50	3,56	0,18	0,63	4,22	0,14	11,58	0,05	19,68	0,03	28,74
0,40	1,00	3,86	0,05	0,58	2,53	0,07	7,83	0,02	13,42	0,01	19,10
0,50	-1,00	3,73	0,15	0,67	3,15	0,14	8,49	0,04	14,11	0,02	19,64
0,50	-0,50	3,33	0,49	0,72	5,67	0,19	14,14	0,09	23,72	0,05	35,27
0,50	0,00	3,32	0,54	0,67	6,12	0,20	15,26	0,08	25,83	0,05	39,88
0,50	0,50	3,35	0,46	0,71	5,68	0,20	13,77	0,08	23,96	0,05	35,53
0,50	1,00	3,78	0,13	0,68	3,16	0,13	8,45	0,04	14,15	0,02	20,14

5. Változó paraméterek: σ_0 és ρ, az induló volatilitás és a korrelációs együttható

σ_0	0,1-0,5	Lépésköz: 0,1
ρ	-1 – 1	Lépésköz: 0,2

Az egyéb paraméterek: $\mu=r=0$; $\xi=20\%$; $S_0=100$; $K_{STO}=10$; $\lambda=0,05$; $\alpha=\lambda*\ln(0,2)$; $T_2-T_1=T_1=0,5$, $\tau=1/360=0,002777$

	$\sigma_0=0,1$		$\sigma_0=0,2$		$\sigma_0=0,3$		$\sigma_0=0,4$		$\sigma_0=0,5$	
KORREL	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST
-1,00	4,11	0,00	0,31	1,80	0,02	6,96	0,01	12,21	0,00	17,66
-0,80	3,99	0,00	0,39	2,26	0,04	7,83	0,01	13,90	0,01	20,43
-0,60	3,97	0,01	0,40	2,45	0,04	8,21	0,01	14,55	0,01	21,07
-0,40	3,93	0,01	0,42	2,61	0,05	8,48	0,02	14,78	0,01	21,49
-0,20	3,91	0,01	0,42	2,62	0,05	8,57	0,02	14,98	0,01	21,92
0,00	3,92	0,01	0,43	2,67	0,05	8,55	0,02	15,08	0,01	22,13
0,20	3,94	0,01	0,43	2,64	0,06	8,59	0,02	15,05	0,01	21,55
0,40	3,89	0,01	0,42	2,56	0,05	8,32	0,02	15,00	0,01	21,42
0,60	3,97	0,00	0,41	2,45	0,05	8,20	0,01	14,34	0,01	20,75
0,80	3,99	0,00	0,40	2,31	0,04	8,03	0,01	13,95	0,01	20,23
1,00	4,11	0,00	0,31	1,73	0,02	6,97	0,01	12,30	0,00	17,57

6. Változó paraméterek: ξ és ρ, azaz a volatilitás volatilitása és a korrelációs együttható

ξ	0-0,5	Lépésköz: 0,1
ρ	-1 – 1	Lépésköz: 0,2

Az egyéb paraméterek: $\mu=r=0$; $\sigma_0=20\%$; $S_0=100$; $K_{STO}=10$; $\lambda=0,05$; $\alpha=\lambda*\ln(0,2)$; $T_2-T_1=T_1=0,5$, $\tau=1/360=0,002777$

	$\xi=0$		$\xi=0,1$		$\xi=0,2$		$\xi=0,3$		$\xi=0,4$		$\xi=0,5$	
KORREL	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST
-1,00	0,17	1,45	0,21	1,51	0,31	1,75	0,43	2,10	0,57	2,54	0,71	3,21
-0,80	0,16	1,46	0,28	1,76	0,39	2,29	0,51	2,90	0,61	3,72	0,73	4,65
-0,60	0,17	1,46	0,30	1,86	0,42	2,46	0,54	3,21	0,65	4,13	0,71	5,50
-0,40	0,18	1,44	0,30	1,96	0,43	2,55	0,53	3,35	0,64	4,38	0,66	5,89
-0,20	0,17	1,47	0,30	1,97	0,42	2,65	0,54	3,42	0,62	4,66	0,67	5,99
0,00	0,17	1,44	0,31	2,00	0,44	2,67	0,54	3,48	0,65	4,46	0,67	6,01
0,20	0,17	1,44	0,30	2,00	0,42	2,70	0,54	3,51	0,60	4,62	0,69	5,89
0,40	0,18	1,41	0,30	1,95	0,42	2,59	0,52	3,38	0,61	4,48	0,67	5,85
0,60	0,17	1,43	0,29	1,89	0,42	2,43	0,53	3,17	0,64	4,12	0,70	5,35
0,80	0,17	1,47	0,27	1,77	0,39	2,33	0,52	2,88	0,64	3,64	0,73	4,62
1,00	0,18	1,46	0,21	1,53	0,30	1,75	0,43	2,15	0,58	2,53	0,71	3,16

7. Változó paraméterek: T_1 és σ_0, azaz az első szakasz hossza. és a kezdő volatilitás. A második szakasz (T_2-T_1) hossza változatlanul 180 nap.

T_1	1 / 30 / 90 / 180 / 360 nap	
σ_0	0-0,5	Lépésköz: 0,1

Az egyéb paraméterek: μ=0; r=5%; δ=0; S_0=100; ξ=20%; α=ln(0,2); λ=0,05; T_2-T_1 =0,5, τ=1/360=0,002777
Ezt 5-ször futtattam ρ különböző értékei mellett. ρ=-1; -0,5; 0; 0,5; 1
Három verzióban futott le a fenti szimuláció, az elsőben K_{STO}=0; a másodikban K_{STO}=10, a harmadikban K_{STO}=20. Az első kötési árfolyam mellett csak a CoST értékét vizsgáltam, mert PoST-re a legtöbb esetben nulla érték adódott

K_{STO}=0

SIGMA0	KORREL	CoST, T_1=1	CoST, T_1=30	CoST, T_1=90	CoST, T_1=180	CoST, T_1=360
0,10	-1,00	6,00	6,02	6,07	6,14	6,30
0,10	-0,50	6,19	6,23	6,33	6,46	6,72
0,10	0,00	6,23	6,28	6,37	6,50	6,80
0,10	0,50	6,20	6,23	6,34	6,46	6,72
0,10	1,00	6,00	6,02	6,07	6,15	6,31
0,20	-1,00	11,38	11,41	11,42	11,46	11,62
0,20	-0,50	11,72	11,81	12,00	12,21	12,80
0,20	0,00	11,79	11,88	12,08	12,37	13,15
0,20	0,50	11,73	11,78	11,95	12,22	12,78
0,20	1,00	11,38	11,41	11,43	11,46	11,59
0,30	-1,00	16,83	16,83	16,84	16,90	16,83
0,30	-0,50	17,38	17,54	17,86	18,43	19,15
0,30	0,00	17,50	17,68	18,05	18,59	19,83
0,30	0,50	17,39	17,59	17,77	18,32	19,48
0,30	1,00	16,82	16,82	16,81	16,80	16,79
0,40	-1,00	22,24	22,27	22,15	22,04	21,88
0,40	-0,50	23,15	23,39	23,89	24,51	26,49
0,40	0,00	23,28	23,53	24,14	25,22	27,16
0,40	0,50	23,11	23,33	23,93	24,66	26,27
0,40	1,00	22,26	22,24	22,21	22,16	22,00
0,50	-1,00	27,65	27,58	27,40	27,21	26,90
0,50	-0,50	28,88	29,24	30,14	30,96	33,35
0,50	0,00	29,12	29,50	30,61	31,90	35,04
0,50	0,50	28,89	29,15	29,92	30,92	33,65
0,50	1,00	27,64	27,57	27,46	27,43	27,05

K_{STO}=10

		T_1=1		T_1=30		T_1=90		T_1=180		T_1=360	
SIGMA0	KORREL	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST
0,10	-1,00	4,00	0,00	3,94	0,00	3,81	0,00	3,61	0,00	3,23	0,02
0,10	-0,50	3,80	0,00	3,72	0,00	3,55	0,00	3,33	0,01	2,91	0,13
0,10	0,00	3,77	0,00	3,68	0,00	3,52	0,00	3,27	0,02	2,86	0,14
0,10	0,50	3,80	0,00	3,72	0,00	3,56	0,00	3,33	0,02	2,91	0,13
0,10	1,00	4,00	0,00	3,94	0,00	3,80	0,00	3,60	0,00	3,26	0,02
0,20	-1,00	0,00	1,38	0,02	1,46	0,11	1,70	0,23	1,95	0,38	2,48
0,20	-0,50	0,00	1,73	0,03	1,90	0,15	2,28	0,32	2,83	0,47	3,85
0,20	0,00	0,00	1,79	0,03	1,94	0,17	2,34	0,32	2,95	0,48	4,05
0,20	0,50	0,00	1,72	0,03	1,88	0,16	2,26	0,30	2,79	0,48	3,72
0,20	1,00	0,00	1,38	0,02	1,47	0,11	1,67	0,23	1,95	0,39	2,46
0,30	-1,00	0,00	6,83	0,00	6,85	0,00	7,00	0,01	7,05	0,08	7,48
0,30	-0,50	0,00	7,39	0,00	7,51	0,00	7,98	0,04	8,60	0,14	9,84
0,30	0,00	0,00	7,50	0,00	7,73	0,00	8,10	0,04	8,84	0,15	10,38
0,30	0,50	0,00	7,39	0,00	7,54	0,00	7,90	0,04	8,66	0,14	10,00
0,30	1,00	0,00	6,83	0,00	6,89	0,00	6,96	0,01	7,11	0,08	7,31
0,40	-1,00	0,00	12,26	0,00	12,25	0,00	12,27	0,00	12,26	0,06	12,46
0,40	-0,50	0,00	13,11	0,00	13,39	0,00	13,83	0,01	14,89	0,08	16,83
0,40	0,00	0,00	13,28	0,00	13,58	0,00	14,28	0,01	15,57	0,09	17,78

0,40	0,50	0,00	13,12	0,00	13,37	0,00	14,00	0,01	15,00	0,08	17,27
0,40	1,00	0,00	12,25	0,00	12,27	0,00	12,31	0,00	12,30	0,06	12,37
0,50	-1,00	0,00	17,65	0,00	17,60	0,00	17,68	0,00	17,59	0,07	17,56
0,50	-0,50	0,00	18,92	0,00	19,27	0,00	20,17	0,01	21,23	0,08	24,71
0,50	0,00	0,00	19,15	0,00	19,65	0,00	20,81	0,01	22,22	0,08	25,75
0,50	0,50	0,00	18,92	0,00	19,29	0,00	20,05	0,01	21,42	0,07	23,96
0,50	1,00	0,00	17,65	0,00	17,69	0,00	17,58	0,00	17,72	0,06	17,67

K_{STO}=20

		T_1=1		T_1=30		T_1=90		T_1=180		T_1=360	
SIGMA0	KORREL	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST	POST	COST
0,10	-1,00	14,00	0,00	13,89	0,00	13,68	0,00	13,35	0,00	12,73	0,00
0,10	-0,50	13,80	0,00	13,68	0,00	13,44	0,00	13,05	0,00	12,27	0,00
0,10	0,00	13,77	0,00	13,63	0,00	13,38	0,00	12,99	0,00	12,24	0,00
0,10	0,50	13,80	0,00	13,68	0,00	13,44	0,00	13,04	0,00	12,33	0,00
0,10	1,00	14,00	0,00	13,90	0,00	13,67	0,00	13,36	0,00	12,75	0,00
0,20	-1,00	8,61	0,00	8,54	0,00	8,33	0,00	8,02	0,01	7,57	0,09
0,20	-0,50	8,27	0,00	8,10	0,00	7,76	0,01	7,30	0,11	6,71	0,60
0,20	0,00	8,21	0,00	8,05	0,00	7,69	0,01	7,23	0,12	6,65	0,71
0,20	0,50	8,27	0,00	8,11	0,00	7,77	0,01	7,31	0,11	6,76	0,56
0,20	1,00	8,62	0,00	8,53	0,00	8,30	0,00	8,07	0,01	7,47	0,09
0,30	-1,00	3,18	0,00	3,17	0,05	3,31	0,34	3,56	0,78	3,89	1,63
0,30	-0,50	2,61	0,00	2,66	0,28	2,92	1,07	3,24	2,12	3,60	3,86
0,30	0,00	2,50	0,00	2,57	0,33	2,93	1,21	3,18	2,33	3,55	4,24
0,30	0,50	2,62	0,00	2,66	0,28	2,97	1,03	3,20	2,09	3,52	3,93
0,30	1,00	3,17	0,00	3,15	0,05	3,27	0,36	3,50	0,78	3,80	1,63
0,40	-1,00	0,00	2,26	0,29	2,62	0,89	3,26	1,51	4,06	2,26	5,29
0,40	-0,50	0,00	3,13	0,35	3,79	0,96	4,96	1,57	6,55	2,27	9,55
0,40	0,00	0,00	3,28	0,34	3,98	0,95	5,42	1,54	6,91	2,25	10,34
0,40	0,50	0,00	3,13	0,33	3,72	0,97	4,98	1,58	6,73	2,30	9,61
0,40	1,00	0,00	2,24	0,30	2,63	0,88	3,32	1,47	4,27	2,29	5,16
0,50	-1,00	0,00	7,66	0,02	7,71	0,32	8,01	0,85	8,67	1,76	9,92
0,50	-0,50	0,00	8,90	0,04	9,32	0,39	10,70	0,96	12,65	1,72	16,09
0,50	0,00	0,00	9,11	0,04	9,77	0,38	11,27	0,94	13,31	1,76	17,64
0,50	0,50	0,00	8,90	0,04	9,26	0,39	10,68	0,95	12,49	1,76	16,34
0,50	1,00	0,00	7,66	0,02	7,67	0,33	7,96	0,83	8,56	1,77	9,64