A típustér fogalma és tulajdonságai

Pintér Miklós

B.S., Janus Pannonius Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Kar (1996)
S.M., Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem Közgazdaságtudományi Kar (1999)

Philosophiae Doctor

BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM

2004

A típustér fogalma és tulajdonságai

Pintér Miklós

Témavezető: Dancs István

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A bevezetések megengednek bizonyos személyes hangvételt. Ezzel a lazasággal élve, de nem visszaélve vázolom a dolgozatom elé gondolt megjegyzéseket.

1.1. A szerkezet

A dolgozat felépítése, hogy egy elcsent kifejezéssel éljek, „nem lineáris", tehát nem szigorúan egymásra épülő eredmények sorozata. Két oka is van ennek a „nem linearitásnak".

Először, a vizsgált területet nem látom át eléggé ahhoz, hogy szigorú felépítését ismertessem (a szakirodalmat vizsgálva úgy tűnik, hogy a vizsgált terület még nem hűlt ki eléggé ahhoz, hogy a szerkezetét rétegesen feltárni lehessen).

Másodszor, célom, hogy az egyes fejezetek önállóan is olvashatóak legyenek. Fontosnak tartom a külön olvashatóságot azért, mert a különböző érdeklődésű emberek különböző utakon indulhatnak el a téma megismerésére, tehát az „önálló fejezetek" szerkezet használatával nem erőltetem rá senkire az én megközelítésemet. Fontos a külön olvashatóság azért is, mert lehetnek olvasók, akiket csak bizonyos részek érdekelnek, így ők is könnyebben boldogulhatnak a dolgozatommal.

Természetesen az általam meghatározott sorrend nem esetleges. Valamiféle fokozatosságot próbáltam érvényre juttatni a fejezetek sorrendjével. Bár igyekeztem a párhuzamosságokat kiiktatni a dolgozatból, munkám e szempontból nem lehetett teljesen sikeres.

A második fejezetben a típustér alkalmazását, szerepét mutatom be példákon keresztül. A harmadik fejezetben a típustér fogalmát, tulajdonságait vezetem be szabatosan. A negyedik fejezet a matematikai apparátust ismerteti. Az ötödik fejezet a fontosabb eredményeket mutatja be. A hatodik fejezetben egy lehetséges általánosítást mutatok meg.

A dolgozathoz egy mellékletet csatoltam, mely a használt magyar szakzsargont kapcsolja az angol terminológiához.

A hatodik fejezet egy lehetséges általánosítása teljes egészében saját eredmény. A dolgozat többi részében a saját és az ismert eredmények keverednek egymással. Az „elkeveredett" saját eredmények többnyire olyan léptékűek, melyek nem igényelnek saját fejezetet. Ezen apró „újítások" megtalálásában a dolgozat megjegyzései adnak eligazítást.

2. fejezet

A probléma

„Három hónapon át ostromolta a magyar sereg a várat, az alatt teljesen elfogyott az élelem a várban is, a táborban is. Éhezett már mind a két sereg, de egyik sem akart engedni. Akkor Szent Lászlónak jó gondolata támadt: megparancsolta a vitézeknek, hogy mindegyik hozzon földet a csizmaszárában. Hordták is a földet egész éjszaka a magyar vitézek, és a sok földből nagy halom támadt a vár előtt. Ekkor a király előhozatta a maradék lisztet, és rátöltette a halom tetejére. Aki messziről nézte azt hihette, hogy egész liszthegyet lát maga előtt. Azt hitték a lengyelek is. Amikor meglátták, hogy a magyaroknak még ekkora halom lisztjük van, úgy elkeseredtek, hogy a várat feladták, és a békét a király akarata szerint megkötötték."

Szent László király hadjáratai a - Képes Krónika nyomán -

Ebben a fejezetben öt példát mutatunk be, mely példákon keresztül indokoljuk a dolgozat témaválasztását. A dolgozat témája a nem teljes információs játékok vizsgálata. Tehát a következő öt példa azt illusztrálja, hogy a nem teljes információs szituációk „uralják" a játékelméleti problémákat.

2.1. 11-es rúgás

Ezen példa Forgótól [34] származik. A 11-es rúgást modellezzük, ahol a rúgó játékos lehet jobb-, ill. ballábas, míg a kapus lehet jobb-, ill. balkezes. Ez egy nem teljes információs szituáció.

A nem teljes informáltság forrása az, hogy a rúgó játékos nem tudja, hogy a kapus bal-, ill. jobbkezes-e, és a kapus nem tudja, hogy a rúgó játékos bal-, ill. jobblábas-e. Mivel ezek a tulajdonságok befolyásolják a játék kimenetelét, ezért az ezekre vonatkozó informálatlanság meghatározó, így a szituáció nem teljes információs.

Köztudott azonban az, hogy az egyes párosítások esetében, tehát pl. jobblábas-balkezes, milyen gyakorisággal sikerülnek a 11-esek. Ezeket tartalmazzák a 2-1. ábra táblázatai:

	Jobbra vetődik	*Balra vetődik*
Jobbra rúgja	6	9
Balra rúgja	8	5

JJ

	Jobbra vetődik	*Balra vetődik*
Jobbra rúgja	7	9
Balra rúgja	7	4

JB

	Jobbra vetődik	*Balra vetődik*
Jobbra rúgja	4	7
Balra rúgja	9	7

BJ

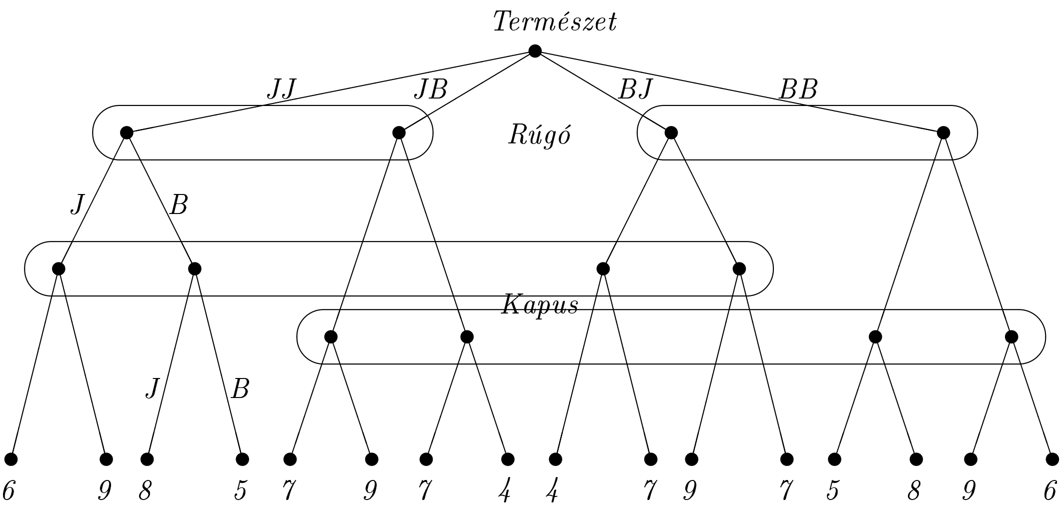
	Jobbra vetődik	*Balra vetődik*
Jobbra rúgja	5	8
Balra rúgja	9	6

BB

2-1. ábra. A négy játék

A 2-1. ábra négy táblázata, négy mátrixjáték. Mivel a lábasság-kezesség pároknak négyféle variációja lehetséges, így négy játékunk van (BJ jelentése: ballábas-jobbkezes). Minden játékban a „függőleges tengelyen" a *Rúgó* játékos stratégiái szerepelnek a *Jobbra rúgja*, és a *Balra rúgja*. A „vízszintes tengelyen" a *Kapus* játékos stratégiái találhatóak, melyek a *Jobbra vetődik*, és a *Balra vetődik*. Feltesszük, hogy ez a négy játék köztudott. Az információs hiány tehát abban nyilvánul meg, hogy a játékosok nem tudják, hogy a négy játék közül melyiket játsszák.

Az első lépés, hogy a fenti „négy játék"-os szituációt írjuk fel egyetlen játékként, extenzív formában (lásd a 2-2. ábrát).



2-2. ábra. A játék faformában

Ez a játék (2-2. ábra) egy teljes, de nem tökéletes információs extenzív formában felírt játék. A fenti játék magyarázata a következő: először a *Természet* lép, és eldönti, hogy melyik játék kerül lejátszásra az eredeti négy mátrixjáték közül, majd szimultán lépnek a *Rúgó* és *Kapus* játékosok. Mivel a *Rúgó* játékos tudja magáról, hogy jobb-, ill. ballábas-e, és a *Kapus* játékos tudja magáról, hogy jobb-, ill. balkezes-e, így ők bizonyos *Természet* döntéseket (világállapotokat) meg tudnak különböztetni egymástól.

A fenti játékban a lehetséges kimenetelek, a játékosok típusaitól, és az eredeti, mátrixjátékokbani stratégiáktól függenek, pl. egy kimenetel, mikor JB típuspár van, tehát a *Rúgó* jobblábas és a *Kapus* balkezes, és a *Rúgó* jobbra rúgja a labdát, míg a *Kapus* balra vetődik. Tehát az új játékban a játékosok stratégiái nem a mátrixjátékokbani stratégiák, hanem olyan „szabályok", melyek a következőképpen néznek ki: ha jobblábas a *Rúgó*, akkor jobbra rúgja a labdát, ha ballábas, akkor balra rúgja a labdát, vagy ha jobbkezes a *Kapus*, akkor jobbra vetődik, ha balkezes, akkor is jobbra vetődik. Ebben a játékban a stratégiák függvények, mégpedig a *Rúgó* stratégiái:

$$\{\text{Jobblábas,Ballábas}\} \rightarrow \{\text{Jobbra rúgja,Balra rúgja}\},$$

míg a *Kapus* esetében:

$$\{\text{Jobbkezes,Balkezes}\} \rightarrow \{\text{Jobbra vetődik,Balra vetődik}\}.$$

Látható, hogy mind a *Rúgó*, mind a *Kapus* játékosnak véges sok stratégiája van az új játékban is, tehát a játék mátrixjáték marad.

	Jobbkezes	*Balkezes*
Jobblábas	*0.63*	*0.07*
Ballábas	*0.27*	*0.03*

2-3. ábra. A kezesség és lábasság aránya a populációban

A *Rúgó* játékos stratégiái:

- R^{JJ} : ha jobblábas, ha ballábas jobbra rúgja,
- R^{JB} : ha jobblábas, akkor jobbra rúgja, ha ballábas, akkor balra rúgja,
- R^{BJ} : ha jobblábas, akkor balra rúgja, ha ballábas, akkor jobbra rúgja,
- R^{BB} : ha jobblábas, ha ballábas balra rúgja.

A *Kapus* játékos stratégiái:

- K^{JJ} : ha jobbkezes, ha balkezes jobbra vetődik,
- K^{JB} : ha jobbkezes, akkor jobbra vetődik, ha balkezes, akkor balra vetődik,

- K^{BJ} : ha jobbkezes, akkor balra vetődik, ha balkezes, akkor jobbra vetődik,
- K^{BB} : ha jobbkezes, ha balkezes balra vetődik.

Az új játékban a kifizetések meghatározása maradt már csak hátra. Itt is szembesülünk az információhiánnyal, a nem teljes információval.

Harsányi megoldása az információhiányra a következő: legyen köztudott a kezesség és lábasság gyakorisága a populációban, melyet a 2-3. ábra tartalmaz.

	K^{JJ}	K^{JB}	K^{BJ}	K^{BB}
R^{JJ}	*5.50*	*5.73*	*8.10*	*8.43*
R^{JB}	*6.97*	*7.02*	*8.32*	*8.37*
R^{BJ}	*6.76*	*6.64*	*5.68*	*5.56*
R^{BB}	*8.23*	*7.93*	*5.80*	*5.50*

2-4. ábra. A kikevert mátrixjáték

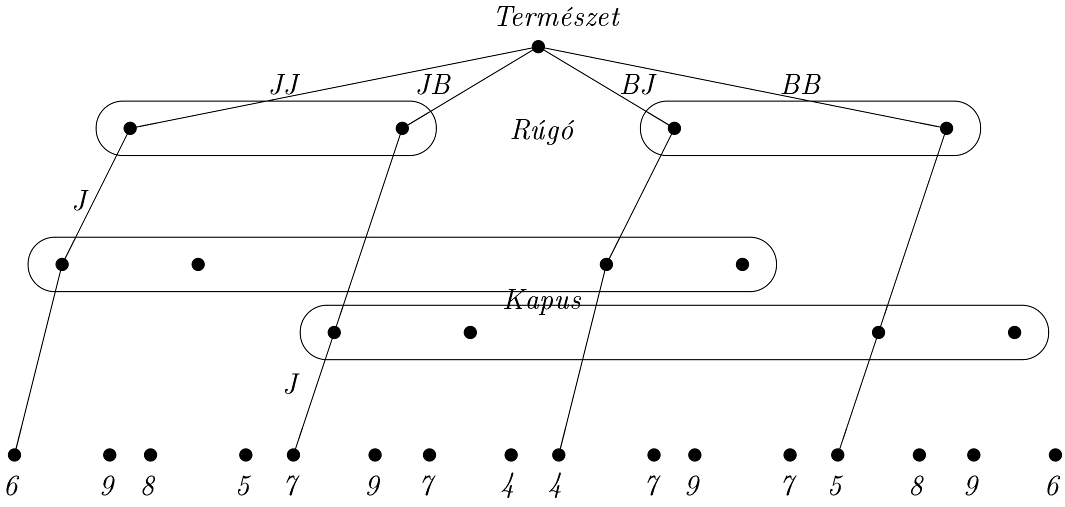
Világos, hogy négyféle *Rúgó-Kapus* páros van. A lehetséges kifizetéseket az eredeti mátrixjátékok fenti táblázat valószínűségeivel való kikeverésével kapjuk meg (lásd a 2-4. ábrát).

Lássunk példákat a 2-4. ábrán látható táblázat elemeinek kiszámítására. Nézzük hogyan számítjuk ki a bal felső sarokban lévő értéket, az (R^{JJ}, K^{JJ}) kimenetelhez tartozó kifizetést:

A 2-5. ábrán töröltük azokat az éleket, amelyek nem következnek be a vizsgált esetben. A kifizetés:

$$6 * 0.63 + 7 * 0.07 + 4 * 0.27 + 5 * 0.03 = 5.5$$

Nézzük azt az esetet, mikor a *Rúgó* R^{BJ}-t, a *Kapus* K^{JB}-t játszik!



2-5. ábra. Az első példához tartozó „csonka" játékfa

Hasonlóan az előző péládhoz, a 2-6. ábrán is azokat az éleket töröltük, melyek a vizsgált esetben nem érdekesek számunkra. A kifizetés:

$$8 * 0.63 + 4 * 0.07 + 4 * 0.27 + 8 * 0.03 = 6.64$$

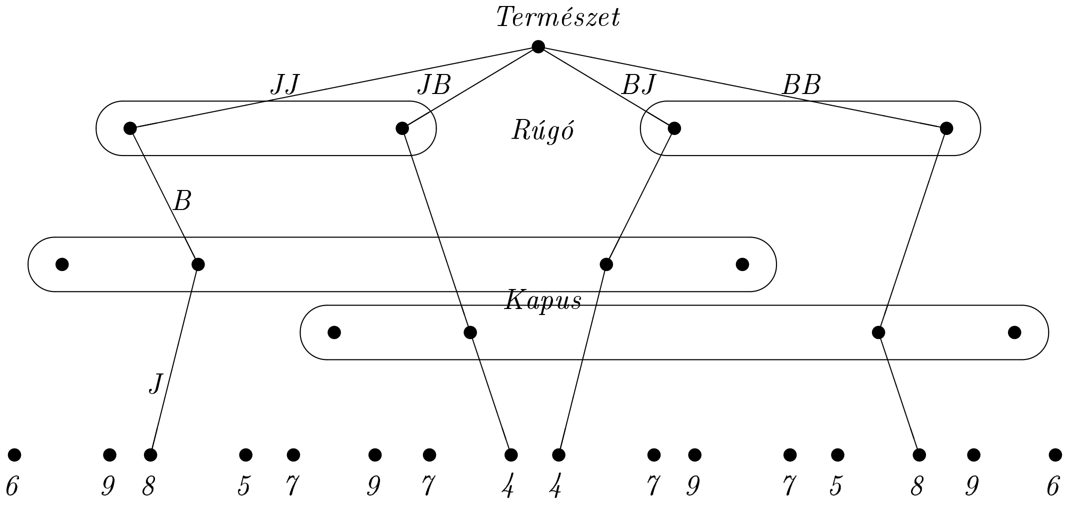
A négy mátrixjátékot magában foglaló Bayesi-játék:

$$\Gamma_B = \{N, \{S_i\}_{i\in N}, \{\mathbf{A}_j\}_{j=\{JJ,JB,BJ,BB\}}, \Theta, F\}$$

- $N = \{Rúgó, Kapus\}$,
- $S_{Rúgó} = \{$Jobbra rúgja,Balra rúgja$\}$, $S_{Kapus} = \{$Jobbra vetődik,Balra vetődik$\}$ stratégia-halmazok,
- $\mathbf{A}_j$ a kifizetéseket tartalmazó 2×2-es mátrix,
- $\Theta_{Rúgó} = \{Jobblábas, Ballábas\}$, $\Theta_{Kapus} = \{Jobbkezes, Balkezes\}$ típusok, $\Theta = \Theta_{Rúgó} \times \Theta_{Kapus}$ típustér,
- F valószínűségeloszlás Θ-n, mely a kezesség és lábasság gyakorisága a populációban.

A kikeveréssel Γ_B-ből megkapjuk a fenti játékot normál formában:

$$\Gamma_N = \{N, \{\widetilde{S}_i\}_{i\in N}, \mathbf{A}\}$$



2-6. ábra. A második plédához tartozó „csonka" játékfa

- $N = \{Rúgó, Kapus\}$,
- $\widetilde{S}_{Rúgó} = \{R^{JJ}, R^{JB}, R^{BJ}, R^{BB}\}$, $\widetilde{S}_{Kapus} = \{K^{JJ}, K^{JB}, K^{BJ}, K^{BB}\}$ stratégiahalmazok,
- $\mathbf{A}$ a kifizetéseket tartalmazó 4×4-es mátrix.

Γ_B és Γ_N játékok ekvivalensek abban az értelemben, hogy Γ_B és Γ_N ugyanazon játék két különböző formában.

Látható, hogy Γ_N mátrixjáték, így a mátrixjátékok esetén alkalmazott fogalmak alkalmazhatóak, tehát a játék kevert bővítése, és a Nash-egyensúly fogalmak értelmezettek.

Γ_N mátrixjátéknak kiszámítható a kevert Nash-egyensúlya: $R^{JB} = 0.64$, $R^{BB} = 0.36$, $K^{JB} = 0.76$, $K^{BB} = 0.24$. Tehát ha *Rúgó* ballábas, akkor mindig balra rúgja a lábát, ha jobblábas, akkor 0.64 valószínűséggel jobbra rúgja, 0.36 valószínűséggel balra rúgja a labdát, ha Kapus balkezes, akkor mindig balra vetődik, ha jobbkezes, akkor 0.76 valószínűséggel jobbra vetődik, 0.24 valószínűséggel balra vetődik. Mivel minden játékos tudja saját típusát, így a fenti stratégiákból meghatározható viselkedése.

Általános esetben egy kicsit bonyolultabb a dolog. Legyen egy nem teljes információs szituáció, melyben a következő dolgok köztudottak:

- N a játékosok halmaza,
- S_i a stratégiák halmaza $\forall i \in N$-re,

- Θ_i az „i" játékos típus halmaza, és $\Theta = \prod_{i \in N} \Theta_i$,
- $u_i(\mathbf{s}, \theta_i)$ az „i" játékos kifizetőfüggvénye, ahol $\mathbf{s} \in \prod\limits_{i \in N} S_i$, és $\theta_i \in \Theta_i$,
- F valószínűségeloszlás Θ-n.

A fenti alapfogalmak köztudottsága lehetővé teszi, hogy felírjuk a Bayesi-játékot:

$$\Gamma_B = \{N, \{S_i\}_{i \in N}, \{u_i(\cdot)\}_{i \in N}, \Theta, F(\cdot)\}.$$

A 11-es rúgás példájában látottaknak megfelelően, a Bayesi-játékban az egyes szereplők stratégiái, döntési szabályai függvények, mégpedig $s_i : \Theta_i \to S_i \; \forall i \in N$. Ezen stratégiák halmaza legyen $\widetilde{S}_i$. A fentiek köztudottsága miatt definiálhatunk egy új kifizetőfüggvényt minden játékos számára:

$$\widetilde{u}_i(\mathbf{s}) \mathrel{\hat{=}} \int\limits_{\Theta} u_i(\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}), \theta_i) dF.$$

Ekkor Γ_B felírható $\Gamma_N = \{N, \{\widetilde{S}_i\}_{i \in N}, \{\widetilde{u}_i(\cdot)\}_{i \in N}\}$ normál formában, ahol

- N a játékosok halmaza,
- $\widetilde{S}_i$ a stratégiák halmaza $\forall i \in N$-re,
- $\widetilde{u}_i(s_i, \mathbf{s}_{-i})$ kifizetőfüggvénye $\forall i \in N$-re.

1. definíció. A $\Gamma_B = \{N, \{S_i\}_{i \in N}, \{u_i(\cdot)\}_{i \in N}, \Theta, F(\cdot)\}$ Bayesi-játék tiszta Bayesi-Nash-egyensúlyi pontja $\mathbf{s}^* \in \prod_{i \in N} S_i$, ha $\mathbf{s}^*(\cdot) \in \prod\limits_{i \in N} \widetilde{S}_i$ tiszta Nash-egyensúlyi pontja $\Gamma_N = \{N, \{\widetilde{S}_i\}_{i \in N}, \{\widetilde{u}_i(\cdot)\}_{i \in N}\}$ játéknak, tehát $\forall i \in N$-re

$$\widetilde{u}_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}^*) \geq \widetilde{u}_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}^*) \qquad \forall s_i \in \widetilde{S}_i.$$

Három megjegyzés kínálkozik még e példa végére:

1. Nem jóslásról szól a nem teljes információs játékok típusokról alkotott véleményrangsorainak a vizsgálata, tehát $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ nem feltétlenül közismert.
2. Tiszta Bayesi-Nash-egyensúlyt definiáltunk csak, hiszen hiába véges játékok az egyes típuskombinációkhoz tartozó játékok (lásd a négy mátrixjátékot), ha a típusok száma nem

véges, akkor már Γ_N nem véges játék, így a kevert stratégiák definiciója nehézségekbe ütközik (lásd az utolsó példát).

3. A típus fogalmát Harsányi [38] vezette be. Ez a fogalom a játékosok lehetséges „fajtáit" jelenti. Harsányi szerint *„úgy tekintjük a c_i vektort, mint amely az i játékos bizonyos fizikai, társadalmi, és pszichológiai jellemzőit reprezentálja, amely vektorban összegyűlnek az i játékos hasznossági függvényének főbb paraméterei, továbbá a főbb elképzelései a társadalmi környezetről ... a játék szabályai olyanok, hogy megengedik bármelyik játékosnak, hogy egyetlen lehetséges típusba tartozzon, annak megfelelően, hogy c_i vektor milyen értéket vesz fel ... minden játékosról feltesszük, hogy ismeri önmaga típusát, de nem ismeri a többi játékosét."*[1] Tehát ha nem ismerjük a típusokat, akkor a fent tárgyalt modellt nem tudjuk megkonstruálni. Milyen feltételek mellett létezik egyáltalán típustér?

Milyen ismeret az, melyet már nem lehet megingatni, mi az abszolút tudás? Milyen az az információ, mellyel már nem lehet manipulálni, melyet már nem lehet felhasználni arra, hogy túljárjunk valaki eszén? Aumann [1] definiálta pontosan a köztudás fogalmát.

2. definíció (Köztudás). Egy esemény köztudott, ha mindenki tudja, hogy mindenki tudja, hogy mindenki tudja, hogy mindenki tudja, ... s.i.t., hogy bekövetkezett az adott esemény.

Ha egy esemény köztudott, akkor annak, hogy valaki tudja, vagy tudja, hogy valaki tudja stb. ..., nincs jelentősége. Ilyen szituációban nem lehet a tudással manipulálni, itt nem kell a tudás rangsort (tudja, hogy tudja, hogy ... stb.) elemezni, hiszen az „csak" ismételgeti önmagát (lásd Binmore & Brandenburger [13]).

A köztudott eseményekre példák a nyilvános események, tehát pl. egy kártyajátékban egy lap asztalra rakása (színnel felfelé) nyilvános esemény, maga az esemény, hogy a lap pl. pikk dáma, köztudott. Látható, hogy nem minden köztudott esemény nyilvános esemény, fontos továbbá, hogy mind a köztudott, mind a nyilvános események a szereplők, vagy játékosok egy jól meghatározható köréhez kapcsolt fogalmak.

A köztudás fogalmának formális bevezetése Aumannhoz köthető, további fontos forrás Geanakoplos [36]. A formális bevezetés ellenére a köztudás fogalmát gyakran informálisan is használjuk (pl. Brandenburger & Dekel [22]). Fontosnak tartjuk, hogy informálisan is értsük a

[1] 171. oldal. Annak ellenére, hogy idézőjelek között szerepel a fenti gondolat, természetesen csak egy esetleges és nem tökéletes/hivatalos fordításról van szó.

köztudás alapfogalmat, hiszen bármely formalizmus megfelelő használata nem helyettesíti az alap intuíciót, mely egy fogalmat jellemez, mely a fogalom bevezetését indokolja.

Az eddig leírtakban a lazább fogalmazástól haladtunk az egyre-egyre pontosabb nyelvhasználatig. Használtuk szinonimaként az *ismer*, *tud*, *vélemény* szavakat. A következőkben különbséget teszünk ezen szavak jelentése között is, és tudatosan fogjuk használni azokat.

Amikor egy eseményről azt mondjuk, hogy egy játékos *tudja azt*, akkor ezen a kijelentésen azt értjük, hogy biztos, hogy az adott esemény bekövetkezett. Biztos, tehát lehetetlen az esemény be nem következése. Amikor azt mondjuk, hogy a játékos azt *gondolja*, az a *véleménye*, azt *hiszi*, akkor azt úgy értjük, hogy az adott játékos 1 valószínűséggel biztos abban, hogy az adott esemény bekövetkezett.

A fentiek alapján, ha egy játékos tud egy eseményt, akkor hiszi, gondolja stb. azt. Tehát a tudás erősebb fogalom, mint a gondol, hisz, véleménye van fogalmak. A két fogalomcsoport közötti különbség a valószínűségszámítás biztos esemény/1 valószínűségű esemény, lehetetlen esemény/0 valószínűségű esemény kapcsolatokkal párhuzamos.

Látható, hogy a tudás, a vélemények alapvetően meghatározhatják az egyes játékosok cselekedeteit. Amennyiben valószínűségszámítási modellt alkalmazunk, akkor a tudás fogalmát bátran kicserélhetjük a vélemény fogalmára (lásd pl. Aumann & Brandenburger [7]). Tehát az 1 valószínűséggel gondolja fogalma, egy valószínűségszámításon alapuló modellben, megfeleltethető a tud fogalmának. Pl. a fenti példában fontos, hogy mi a véleménye a *Rúgó* játékosnak a $Kapus$ kezességéről, sőt arról, hogy mi a véleménye a $Kapus$-nak az ő (*Rúgó*) lábasságáról, s.i.t.

Tehát amennyiben a tudás fogalmát a vélemény fogalmára akarjuk cserélni, akkor be kell vezetnünk némi valószínűségszámítási formalizmust is. Habár a valószínűségszámítás lépten-nyomon előjön az interaktív episztemológia területén, a tudás/véleményrangsorok problémájának több féle megközelítése is ismert (lásd pl. Aumann [5], Samet [72], Aumann [6], Heifetz & Samet [43], Hart & Heifetz & Samet [41], Heifetz & Samet [46], Brandenburger & Keisler [25], Brandenburger [20], Brandenburger & Keisler [24], Meier [55]), melyek közül van amelyik egyáltalán nem használ valószínűségszámítási fogalmakat, van amely csak részben, és van amely alapvetően valószínűségszámítási, illetve mértékelméleti eszközökkel kezeli a tudás/véleményrangsorok problémáját.

Hangsúlyozzuk, hogy a tudás és az 1 valószínűséggel gondolja fogalmak nem egyeznek meg, csak a következményeket tekintve egy valószínűségszámítási modellben ekvivalensek. A továbbiakban használni fogjuk a következő fogalmat:

3. definíció (Közismert). Egy esemény közismert, ha mindenki 1 valószínűséggel azt gondolja, hogy mindenki 1 valószínűséggel azt gondolja, hogy mindenki 1 valószínűséggel azt gondolja, hogy mindenki 1 valószínűséggel azt gondolja, ... s.i.t., hogy bekövetkezett az adott esemény.

A közismeret és a köztudás fogalmaknak kapcsolata analóg a fent ismertetett a vélemény és tud fogalmak kapcsolatával. A két fogalom kapcsolatának részletes ismertetése megtalálható Brandenburger & Dekel, Vassilakis & Zamir [79] cikkekben.

2.2. Épít nem épít

A következő példa Fudenberg & Tirole [35]-tól való. Legyen két vállalat, egy már piacon levő, és egy, mely most kíván belépni a piacra. A piacon levő vállalat kiszoríthatja a potenciális belépőt egy új üzem építésével, a piacra igyekvő vállalat pedig piacot szerezhet a belépéssel. A piacon levő vállalat új üzemének építési költsége határozza meg azt, hogy érdemes-e a piacon lévő vállalatnak új üzemet építenie. Kétféle költséghelyzetet különböztetünk meg: „magas költség" és „alacsony költség".

A 2-7. ábrán a két lehetséges állapothoz tartozó modelleket láthatjuk. A függőleges „tengelyen" a piacon lévő vállalat lehetséges stratégiái láthatóak, míg a vízszintes „tengelyen" a piacra igyekvő vállalat lehetséges stratégiái jelennek meg. A piacon lévő vállalatnak két stratégiája van: vagy épít egy új üzemet ($\acute{E}$), vagy eltekint ettől ($N\acute{E}$). A piacra igyekvő játékosnak is két lehetséges stratégiája van: a piacra való belépés (BL), és a nem belépés (NLB). Mivel a lehetséges kifizetések nem csak a játékosok stratégiáitól függenek, hanem attól is, hogy az építési költségek magasak vagy alacsonyak, így az építési költségek is paraméterei a játéknak, befolyásolják a játék kimenetelét (lásd a 2-7. ábra táblázatait).

Ebben a szituációban a piacon lévő vállalat építési költségei azok, melyek nem köztudottak. Ha ezek köztudottak lennének, akkor a játékosok tudnák, hogy melyik játék az, mely lejátszásra kerül. Vegyük észre továbbá, hogy a piacra belépni igyekvő játékost nem a költségek érdeklik elsősorban, hanem az, hogy a piacon lévő vállalat épít-e új üzemet vagy sem. Tehát ebben a megfogalmazásban nem azt elemezzük mit tesz a piacon lévő játékos, hanem, hogy mi az a jelenség, ami meghatározza magatartását.

Harsányi feltevése lehetővé teszi, hogy minden magatartás forrását valamely objektív tényező hatásaként írjuk le. Ebben az esetben ezen objektív tényezőknek a természettudományos

	BL	*NLB*
É	*0,-1*	*2,0*
NÉ	*2,1*	*3,0*

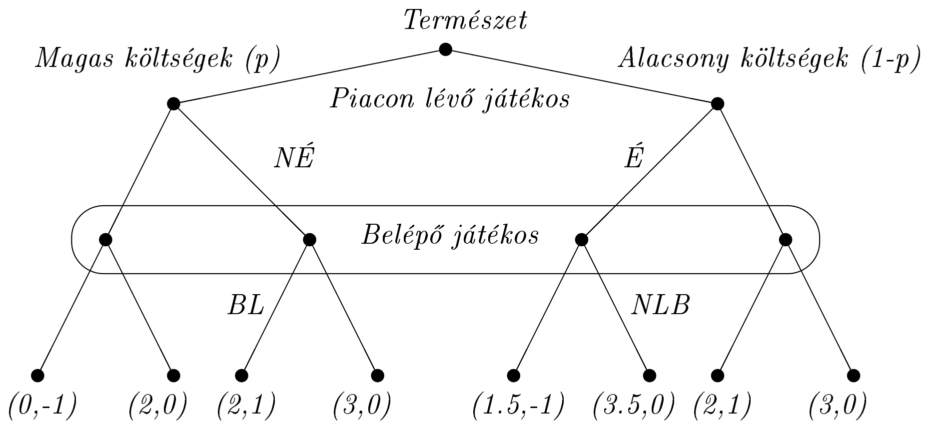
Magas költségek

	BL	*NLB*
É	*1.5,-1*	*3.5,0*
NÉ	*2,1*	*3,0*

Alacsony költségek

2-7. ábra. A játékok

gondolkodás szellemében, létezik valamilyen objektív előfordulási valószínűsége, tehát az építési költség egy valószínűségi változó.



2-8. ábra. A játékfa

Harsányi javaslata szerint, a fenti valószínűségi változó, mely meghatározza a költségek tulajdonságát, tehát a piacon lévő vállalat típusát („magas költség"-es vagy „alacsony költség"-es a vállalat) létezik, továbbá ez a valószínűségi változó a természet megnyilvánulása, tehát köztudott és felfogható úgy, mint a *Természet* játékos által játszott stratégia.

A szituáció úgy tekinthető, mint egy extenzív formában megadott játék, ahol a természet lép először, és eldönti a piacon lévő vállalat építési költségeit. Ezek után a piacon lévő vállalat felismeri *Természet* lépését, tehát tudja, hogy a saját maga építési költségei milyenek, és ennek a tudásnak a függvényében dönt az építésről. Ezzel a lépéssel szimultán teszi meg lépését a piacra igyekvő vállalat, tehát a piacon lévő vállalat nincs tisztában az előző két játékos lépéseivel. Ez a modell a két legutóbbi játékost tekintve megegyezik az eredeti szituációval. A természet lépése véletlen jellegű, ekkor p-vel jelöljük annak a valószínűségét, hogy az építési költségek magasak.

A 2-6. ábrán látható játék egy teljes, de nem tökéletes információs játék, amelyet három játékos játszik, a piacon lévő, a piacra igyekvő vállalat, és a természet.

A piacon lévő vállalat stratégiái:

- $P^{NÉÉ}$: ha magas az építési költség, akkor nem épít, ha alacsony az építési költség, akkor épít új üzemet,
- $P^{ÉÉ}$: ha magas az építési költség, ha alacsony mindenképp' épít új üzemet,
- $P^{ÉNÉ}$: ha magas az építési költség, akkor épít, ha alacsony az építési költség, akkor nem épít új üzemet,
- $P^{NÉNÉ}$: ha magas az építési költség, ha alacsony semmiképp' nem épít új üzemet.

A piacra igyekvő vállalat stratégiái:

- I^{B} : belép a piacra,
- I^{NB} : nem lép be a piacra.

Mivel aszimmetrikus információs esettel állunk szemben, és a példa is eltérő, így a 11-es rúgás példájánál alkalmazott „természettudományos" megoldás nem kielégítő.

Mi határozza meg a piacon lévő vállalat magatartását? A költségviszonyok?

Tegyük fel, hogy az építési költségek alacsonyak, de $p = 1$, tehát köztudott, hogy a piacra igyekvő játékos azt gondolja, hogy az építési költségek magasak. A normál formába való átírás látható a 2-9. ábra táblázatában.

A 2-9. ábrán látható bimátrix-játék tanulmányozása arra vezet, hogy a $P^{ÉÉ}$, és a $P^{ÉNÉ}$ stratégiák törölhetőek[2]. Az így maradó stratégák esetén azonban a piacra igyekvő vállalat I^{B}-t lép, amely esetben a piacon levő vállalatnak az $NÉ$ lépés az optimális (lásd az alacsony költséghez tartozó bimátrix-játékot).

[2]A racionalitás kérdésére később mutatunk példát.

	I^B	I^{NB}
P^{NEE}	*2,1*	*3,0*
P^{EE}	*0,-1*	*2,0*
P^{ENE}	*0,-1*	*2,0*
P^{NENE}	*2,1*	*3,0*

2-9. ábra. A kikvert játék

Tehát a piacon lévő játékos magatartását nem csupán a költségviszonyok határozzák meg, hanem az is, hogy mit gondol a másik játékos a költségviszonyokról, sőt, mit gondol arról, hogy a másik játékos mit gondol arról, hogy ő mit gondol a költségviszonyokról s.i.t.

4. megjegyzés. Ebben a példában sikerült megjósolni, hogy mit fog a másik fél lépni. Tehát meg lehetett jósolni a játék kimenetelét, ez általában nem lehetséges. Ebben a példában a jóslással csak a vélemények fontosságát illusztráltuk.

A fenti példánkban a lehetséges típusok csak a piacon lévő vállalatra vonatkoznak (az ő jellemzőinek tekintetében nem teljes információs a játék), annak típusa lehet $Mktg$ vagy $Aktg$. Feltesszük, hogy p köztudott, így válik modellezhetővé a szituáció.

A típus fogalmának leírására léteznek más megközelítések is. A formális nyelvek felöli megközelítésre példa: Heifetz & Mongin [42].

Általánosan felírva egy nem teljes információs szituációt, egy Bayesi-játékot kapunk:

$$\Gamma_B = \{N; \{S_i\}_{i\in N}; \{f_i\}_{i\in N}, \{\Theta_i\}_{i\in N}; P(\cdot)\}$$

- N a játékosok halmaza,
- S_i a stratégia halmaz $\forall i \in N$-re,

- f_i a kifizetőfüggvény $\forall i \in N$-re,
- ahol Θ_i[3] az „i" játékos lehetséges típusainak halmaza,
- P egy valószínűségeloszlás $\Theta = \prod_{i \in N} \Theta_i$[4] halmazon.

Legyen $\boldsymbol{\theta} \in \prod_{i \in N} \Theta_i$ tetszőleges, ekkor ebből a típus vektorból, és P-ből teljeskörűen levezethető tetszőleges játékos, tetszőleges véleményrangsora. Tehát a fenti modell alkalmas arra, hogy kezeljük a véleményrangsorokat, meghatározzuk, hogy mit gondol egy játékos egy eseményről, mit gondol arról, hogy a többi játékos mit gondol az esemény valószínűségéről, s.i.t. Megint megemlítjük, hogy a modell célja nem a „jóslás", tehát általában a θ világállapot nem köztudott, a játékosok nem ismerik egymás gondolatát, véleményét, „csak" véleményük van róla.

Harsányi zsenialitása abban a tényben ölt testet, hogy átvágta a gordiuszi csomót, megfogalmazott egy olyan objektumot, a típusteret, melyből következnek a véleményrangsorok. Tehát a típus fogalmával összetömörítjük a véleményrangsorokat egyetlen, jól kezelhető objektumba.

Vegyük észre ennek az eredménynek a fogyatékosságait is. Először is a gondolat az, hogy minden esetben valamely objektív tényezők határozzák meg a magatartást. Ezt a filozófiai magasságokat súroló kijelentést el lehet fogadni vagy el lehet vetni, de mindkét esetben arra jutunk, hogy konkrét problémák elemzésekor nem minden esetben tudjuk melyek ezek a tényezők, csak a véleményrangsorokat észlelünk mást nem. Mi van ezekben az esetekben, ekkor is létezik (esetleg megkonstruálható) a típustér?

Egy másik „fogyatékossága" a fenti modellnek, hogy egyetlen P valószínűségi mértéket tételez fel. Ez azt jelenti, hogy minden játékos bizonyos értelemben egyetért (Harsányi Doktrína). Elkerüljük ezt a felvetést, amennyiben átírjuk a fenti modellt a következő formába:

$$\Gamma_B = \{N; \{S_i\}_{i \in N}; \{\Theta_i\}_{i \in N}; \{f_i\}_{i \in N}, P_i(\times_{i \in N} \Theta_i)\}.$$

A fenti lehetőséget már Harsányi is felvetette, a fent vázolt alapgondolat (a *Természet* játékos) azonban azt sugallta Harsányinak (lásd (III/14)-et), hogy mindig át lehet úgy fogalmazni a paraméterek, típusok halmazát, hogy egyetlen P-t kapjunk.

A fenti példa után lássuk a Harsányi-féle típustér definícióját:

---

[3]Harsányi $\mathbb{R}^n$ térben gondolkodott.

[4]Itt még nem definiáljuk pontosan, hogy milyen mérhető struktúrát használunk.

5. definíció. Legyen $T = \Pi_{i \in M} T_i$, ahol T_i az i játékos lehetséges típusainak tere, és M a játékosok halmaza. Ha T minden pontja egyértelműen meghatároz egy-egy valószínűségi mértéket minden játékos számára $S \times T$-en, ahol S a természet lehetséges állapotait tartalmazza[5] úgy, hogy mindenki a saját típusát pontosan tudja, akkor $S \times T$ egy Harsányi-féle típustér, és a $t_i \in T_i$ elemet az „i" játékos egy lehetséges típusának nevezzük.

6. megjegyzés. Más szóval: A Harsányi-féle típustér nem más, mint $S \times T$, és P_i $\forall i \in M$, azzal a speciális tulajdonsággal, hogy P_i T_i-n egy pontra koncentrál $\forall i$-re.

A definíciót a későbbiekben élesítjük, most csak az eddig bemutatott gondolatok összefoglalása volt a cél. Lássuk azonban, hogy mit is tudunk valójában egy Harsányi-féle típustérről:

- A típustér eléggé skizofrén valami, hiszen önmaga tartalmaz önmagáról tulajdonságokat. Egy pontja meghatározza, hogyan nézzünk kívülről rá.
- Egy igazi Harsányi-féle feltétel, mely a modell logikai felépítéséhez szükséges: minden játékos pontosan ismeri a saját típusát. Ez a feltétel, ahogyan majd a későbbiekben látni fogjuk, matematikailag nem releváns, tehát nem segít és nem akadályoz a típustér létezésének bizonyításban.

A típustér fogalmának sikerességét és szükségességét jól mutatja az a tény, hogy sokáig anélkül használták játékelméleti problémák vizsgálatához, hogy bizonyítva lett volna létezése, illetve fel lettek volna tárva létezésének feltételei.

2.3. Típustér

Az eddig leírtakból kiderül, hogy a tudás-, vélemény- rangsorok (mit gondolnak a játékosok arról, hogy mit gondolnak a játékosok arról, stb.) vizsgálata megkerülhetetlen bizonyos döntési szituációk elemzésekor. Kérdés: lehet-e valahogy tömöríteni ezen rangsorokat, lehet-e olyan fogalmat találni, melyből levezethetőek a tudás/véleményrangsorok, és az a fogalom jól kezelhető. Erre a kérdésre adott választ Harsányi János.

A példa Aumann & Heifetz [8]-től való, bár azt jelentősen átalakítottuk. Az előző két példa egyrészt megmutatta, hogy a típustér fogalma miként alkalmas a nem teljes információs szituációk modellezésére, másrészt, megmutatta a véleményrangsorok fontosságát.

[5] A természetet felfoghatjuk úgy, mint egy játékost, akinek nincs véleménye semmiről.

A most következő példa azt mutatja, hogy egy köztudott nem teljes információs modellben miként határozhatóak meg a véleményrangsorok. Ez a példa már egy komolyabb típustér fogalomra épít[6], amit később definiálunk.

Legyen két játékos Anna és Róbert. A lehetséges típusok Anna esetén $Q = \{AA, AB, AC\}$, Róbert esetén $Q = \{RA, RB, RC\}$. $PAnna$ jelöli Anna véleményét arról, hogy mi a lehetséges világállapot, míg $ARóbert$ Róbert esetében jelöli azt.

Nézzük a 2-10. ábrát.

$$Q=\begin{array}{c|c|c|c|} N= & RA & RB & RC \\ \hline AA & 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline AB & 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ \hline AC & 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ \hline \end{array} \qquad Q=\begin{array}{c|c|c|c|} N= & RA & RB & RC \\ \hline AA & 1 & 0 & 0 \\ \hline AB & 0 & 1/2 & 1/2 \\ \hline AC & 0 & 1/2 & 1/2 \\ \hline \end{array}$$

$PAnna$ $\qquad$ $PRóbert$

2-10. ábra. A véleménymátrixok

A 2-10. ábra táblázatai a feltételes valószínűség alapfogalomra épülnek (lásd Rényi [69]), tehát pl. a $PRóbert$ mátrix első oszlopa azt mutatja, hogy ha Róbert típusa RA akkor e feltétel mellett mit gondol Róbert Anna típusáról.

Legyen a világállapot $\{AA, RB\}$.

Minden játékos pontosan ismeri típusát, így Anna véleményét Róbert típusáról a $PAnna$ mátrix első sora tartalmazza. Ez Anna elsőrendű véleménye:

$P_1^A(RA) = P_1^A(RB) = 1/2$, $P_1^A(RC) = 0$.

Anna másodrendű véleménye az a vélemény, mely Róbert Anna típusáról alkotott véleményéről alkotott véleménye Annának. Ekkor $PAnna$ mátrix első és második oszlopából súlyozzuk ki a véleményt:

$P_2^A(AA) = P_1^A(RA)P_1^R(AA) + P_1^A(RB)P_1^R(AA) + P_1^A(RC)P_1^R(AA) = 1/2$, $P_2^A(AB) = P_1^A(RA)P_1^R(AB) + P_1^A(RB)P_1^R(AB) + P_1^A(RC)P_1^R(AB) = 1/4$, $P_2^A(AC) = P_1^A(RA)P_1^R(AC) + P_1^A(RB)P_1^R(AC) + P_1^A(RC)P_1^R(AC) = 1/4$.

[6] Arról van szó, hogy nem egy valószínűségeloszlásból vezetjük le az egyes játékosok véleményét a többi játékos típusáról, hanem adottnak tekintjük azokat.

Anna harmadrendű véleménye, tehát, hogy mi Anna véleménye arról, hogy mi Róbert véleménye arról, hogy mi Anna véleménye Róbert típusáról.

$P_3^A(RA) = P_2^A(AA)1/2 + P_2^A(AB)1/4 + P_2^A(AC)1/4 = 3/8$, $P_3^A(RB) = P_2^A(AA)1/2 + P_2^A(AB)P_1^A 1/4 + P_2^A(AC)P_1^A 1/4 = 3/8$, $P_3^A(RC) = P_2^A(AA)0 + P_2^A(AC)1/2 + P_2^A(AC)1/2 = 1/4$.

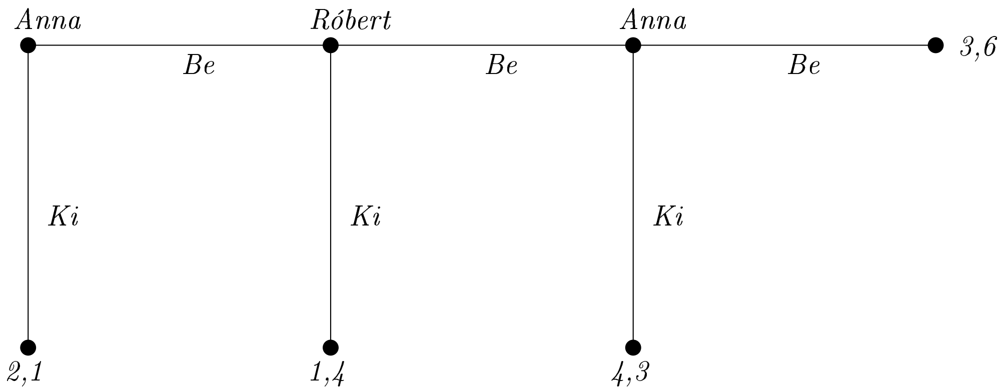
s.i.t.

Tehát a típustér segítségével meghatározhatóak a véleményrangsorok.

7. megjegyzés. Nem egyetlen eloszlás van a típustéren, tehát köztudott, hogy a játékosok prior véleményei eltérnek[7].

2.4. A racionalitás

Ez a példa Brandenburger [21]-től való, és a tárgyalása is Brandenburgerre támaszkodik.



2-11. ábra. A „háromlábú" játék

A 2-11. ábrán látható játékot, amelyet Rosenthal [70] vezetett be a köztudatba, százlábú játéknak, illetve a mi esetünkben, három lábú játéknak nevezzük (elég ránézni az ábrára, hogy megértsük miért). A játékhoz köthető a következő történet: két játékos ül egy asztal mellett, amin két csomag pénz van, az egyik halom egy, míg a másik két egység pénzt tartalmaz. Először Anna lép, aki ha a *Ki* lehetőséget választja, akkor ő kapja a nagyobb halmot és Róbert a kisebbet. Ha Anna a *Be* lehetőséget választja, akkor a nagyobbik halomhoz hozzá tesz egy

[7]Harsányi feltette, hogy egyetlen, köztudott valószínűségeloszlás van a típustéren, ezt a feltevést nevezzük Harsányi Doktrínának.

külső szereplő (játékvezető) két egység pénzt, a kisebbik halomhoz pedig nem nyúl. Ekkor Róbert ha a Ki lehetőséget választja, akkor ő kapja a nagyobb halmot, és Anna a kisebbet. Ha Róbert a Be lehetőséget választja, akkor játékvezető a kisebbik halomhoz tesz két egység pénzt, s.i.t.

A játék megoldása VL-lel (visszafelé lépegetés) az, hogy Anna, ahogy lehet a Ki lehetőséget választja. Az ember intuíciója, és kísérletek is azt mutatják (McKelvey & Palmfrey [53]), hogy nem a VL a tipikus kimenetele a játéknak. Miből adódik az eltérés? Esetleg nem racionálisak a szereplők, vagy másról van szó? Itt is a véleményrangsorok vizsgálatával kerülhetünk közelebb a válaszhoz.

A fenti példa esetén, a VL alkalmazása során a következő típusú kijelentéseket tesszük: „ha Anna abban a pontban lenne, akkor ..." vagy „ha Róbert abban a pontban lenne, akkor ...", tehát olyan kijelentéseket használunk melyek hipotézisszerűek. Az ilyen hipotetikus tudás bevezetése Samet [73] nevéhez fűződik. A gondolat kicsit más formában, de felbukkan extenzív formában megadott játékok esetén Battigalli & Siniscalchi [9]-ben is.

Egy játékost tekintsünk racionálisnak, ha mindig azt a döntést hozza, ami neki nagyobb kifizetést eredményez. A példánknál maradva, ha Anna racionális, akkor ha az utolsó elágazásnál van akkor a Ki irányt választja.

Ha Róbert racionális, és azt gondolja, hogy Anna is racionális, akkor az utolsó előtti elágazásnál a Ki irányba lép. Ha nem teszi fel Annáról, hogy az racionális, akkor esetleg arra is bazírozhat, hogy Anna majd az utolsó elágazásnál a Be irányt választja, mely esetben érdemes Róbertnek is a Be-t választania az utolsó előtti elágazásnál.

Anna az első elágazásnál ha racionális, és azt gondolja, hogy Róbert is racionális, sőt azt gondolja, hogy Róbert azt gondolja, hogy ő racionális, akkor a Ki irányba lép. Ha Anna nem teszi fel, hogy Róbert racionális vagy, felteszi hogy Róbert azt gondolja, hogy ő nem racionális, akkor esetleg majd Róbert a Be irányt választja az utolsó előtti elágazásnál, mely esetben Annának érdemes a Be irányba lépnie az első elágazásnál.

Lássunk egy példát a fent ismertetettekre.

A 2-12. ábra táblázatai Anna és Róbert lehetséges típusait tartalmazzák.

Látható, hogy Anna lehetséges típusa t^A, míg Róbert lehetséges típusai t^R, u^R. Legyen a világállapot: $((Be-Ki, t^A), (Ki, t^R))$. Látható, hogy egy világállapot a játékosok egy cselekvés-vélemény párosából áll.

Anna racionális, hiszen Ki-t választja másodszorra, az utolsó „elágazásnál".

	Ki	*Be*
t^R	*0*	*0*
u^R	*0*	*1*
	t^A	

t^R	*Ki*	*Be-Ki*	*Be-Be*
t^A	*0*	*1*	*0*

u^R	*Ki*	*Be-Ki*	*Be-Be*
t^A	*0*	*1/2*	*1/2*

2-12. ábra. Anna és Róbert típusai

Róbert racionális, hiszen azt gondolja, hogy Anna az utolsó „elágazásnál" Ki-t választja, így ő a Ki-t választja.

Anna azt gondolja, hogy Róbert racionális, hiszen szerinte Róbertnek érdemes Be-t játszani-a, és arra számít, hogy Róbert Be-t fog játszani.

Róbert azt gondolja, hogy Anna racionális, hiszen Róbert szerint Annának érdemes Be-Ki-t játszani, és arra számít, hogy azt is fog Anna játszani.

Anna azonban azt gondolja, hogy Róbert azt gondolja róla (Annáról), hogy nem racionális. Lássuk miért is: Anna szerint Róbert azt gondolja, hogy ő (Anna) 1/2 valószínűséggel játszik Be-Be-t és Be-Ki-t egyaránt, mely nem lenne racionális Annától.

További vélemények nem befolyásolják a játékot.

A racionalitásról alkotott véleményrangsorok ebben a példában meghatározzák a játékosok cselekedeteit. Tehát a racionalitás is lehet tárgya a véleményrangsorok eszközének. Aumann [2] megmutatta, hogy VL akkor alkalmazható, ha a játékosok racionalitása közismert (CBR).

Látható, hogy ebben a példánkban nem kell, hogy a racionalitás köztudott/közismert legyen (CBR), ennél kevesebb is elég a VL használatához. Általában azonban, mikor csak azt tudjuk, hogy egy játék véges sok lépésből áll, akkor fel kell tennünk VL használatakor, hogy a racionalitás köztudott/közismert.

8. megjegyzés. 1. A témához kapcsolódnak még Aumann [4], [3], Binmore [12], [10], [11] munkák.

2. Vegyük észre, hogy pl. Annának racionális magáról elhitetni, hogy nem racionális.

2.5. Végtelen típustér

A következő példa Simonovits [77] kéziratából való, mely kézirat ezen példája Szatmári [78] cikkére épül.

Legyen n szereplő, akik egymástól függetlenül, azonos értékeléssel, titkosan tesznek ajánlatot valamilyen jószágra. Aki a legmagasabb ajánlatot adja, az kapja meg a jószágot, és az ajánlata lesz a jószág ára. Az egyes játékosok kifizetése függ a többi játékos ajánlatától is, melyeket nem ismer (itt jön be a nem teljes információs szituáció).

A Bayesi-játék:

$$\Gamma_B = \{N, \{B_i\}_{i \in N}, \{u_i(\cdot)\}_{i \in N}, \times_{i \in N} V_i, P\}.$$

- $N = \{1, 2, \ldots n\}$ a játékosok halmaza,
- B_i az „i" játékos lehetséges licitjeinek halmaza,
- $u_i(\cdot)$ az „i" játékos hasznossági függvénye,
- V_i az „i" játékos lehetséges értékeléseinek halmaza,
- P egy valószínűségeloszlás $\times_{i \in N} V_i$-n.

A normál formában felírt játék:

$$\Gamma_N = \{N, \{\widetilde{B}_i\}_{i \in N}, \{\widetilde{u}_i(\cdot)\}_{i \in N}\}.$$

- $N = \{1, 2, \ldots n\}$ a játékosok halmaza,
- $\widetilde{B}_i$ az „i" játékos lehetséges értékelő módszereinek $b_i : V_i \to B_i$ függvények halmaza,
- $\widetilde{u}_i(\cdot)$ az „i" játékos hasznossági függvénye, $\widetilde{u}_i(\cdot) \mathrel{\hat{=}} \int\limits_{\times_{i \in N} V_i} u_i(\cdot) dP$, ebben a modellben: $\widetilde{u}_i(b_i, b_{-i}) \mathrel{\hat{=}} P(b_i(\cdot) > b_j(\cdot) \forall j \neq i)(v_i - b_i)$, ahol $P(b_i > b_j \ \forall j \neq i)$ annak a valószínűsége, hogy i játékos b_i ajánlata a legnagyobb, és v_i az i játékos értékelése a jószágról (az i játékos típusa).

Tegyük fel, hogy köztudott, hogy

- b_i függvények minden játékos esetén megegyeznek, invertálhatóak és az inverz függvény deriválható,
- v_i értékelések egyenletes-eloszlású valószínűségi változók $[0,1]$-n.

Az inverz függvényt jelöljük V-vel (b_i inverze), ekkor

$$\widetilde{u}_i(b_i, b_{-i}) = V(b_i)^{n-1}(v_i - b_i),$$

Az indexeket elhagyva, az optimális stratégia választása, a megfelelő ajánlat kiválasztása, egy szélsőérték-számítási feladat megoldása.

$$\widetilde{u}'(b) = (n-1)V(b)^{n-2}V'(b)[v-b] - V(b)^{n-1}$$

Tehát a stacionárius pontban, beírva v helyére $V(b)$-t:

$$\begin{aligned}(n-1)V(b)^{n-2}V'(b)[V(b)-b] &= V(b)^{n-1}\\ (n-1)V'(b)[V(b)-b] &= V(b)\end{aligned}$$

differenciálegyenletet kapjuk, aminek megoldása: $V(b) = b\frac{n}{n-1}$, így $b = b(v) = v\frac{n-1}{n}$. Mivel a játékosok „azonosak", így

$$b_i = v_i\frac{n-1}{n} \quad \forall i\text{-re.}$$

9. megjegyzés. Három megjegyzést teszünk:

1. Ebben a modellben a típustér a $[0,1]$ intervallum, tehát végtelen sokféle típusa lehet a játékosoknak.
2. A típustér végtelensége miatt a teljes információs játékban $\widetilde{B}_i$ halmaz, melynek elemei b_i függvények, számossága végtelen (kontinuum), tehát a kevert bővítés a szokásos módon (lásd mátrixjátékok, bimátrix-játékok) nem vezethető be.
3. Ezen példa fontos következménye, hogy minél több szereplő vesz részt a játékban, annál inkább érdemes a játékosoknak az értékelésüket licitálni (kb. igazat mondani).

3. fejezet

Alapfogalmak

„álmomban két macska voltam és játszottam egymással"

Karinthy Frigyes

Az előző fejezetben bevezettük a Harsányi-féle típusteret. A következőkben maradunk a Bayesi megközelítésnél, tehát a valószínűségszámítás alapfogalmaival élünk, de Harsányi megközelítésénél absztraktabb formában definiáljuk a típusteret. A típustér most következő definiciója Heifetz & Samet [44] munkájából származik, bár nem követjük pontosan a [44] munkát.

3.1. Alapok

Az alapfogalom az átmenetvalószínűség.

10. definíció. Legyen $(X, \mathcal{M})$ tetszőleges mérhető tér, és legyen $f : X \times \mathcal{M} \to [0, 1]$ leképezés. Ha

- $x \in X$ tetszőlegesen rögzítettre $f(x, \cdot)$ valószínűségi mérték $(X, \mathcal{M})$-en,
- $A \in \mathcal{M}$ tetszőlegesen rögzítettre $f(\cdot, A)$ mérhető függvény,

akkor f függvényt átmenetvalószínűségnek nevezzük.

Az átmenetvalószínűség a feltételes valószínűség fogalmának általánosítása, tehát a mi esetünkben is valamiféle feltételes valószínűségről van szó.

11. definíció. Vezessük be a következő fogalmakat:

1. M a játékosok halmaza, hogy $0 \notin M$,

2. 0 a *Természetet* játékos,

3. $(T_i, \mathcal{M}_i)$ mérhető terek $\forall i \in M \cup \{0\}$,

4. $(T, \mathcal{M}) = (\Pi_{i \in M \cup \{0\}} T_i, \otimes_{i \in M \cup \{0\}} \mathcal{M}_i)$,

5. $i \in M$ tetszőlegesen rögzítettre $f_i : T_i \times \mathcal{M} \to [0,1]$ átmenetvalószínűség.

A későbbiekben látni fogjuk, hogy a $(T_i, \mathcal{M}_i)$ mérhető terek az egyes játékosok típusait tartalmazzák. Speciálisan $(S, \mathcal{A}) = (T_0, \mathcal{M}_0)$ a *Természet* játékos típusait tartalmazza, melyet paramétertérnek nevezünk. Az átmenetvalószínűségek modellezik a játékosok következtetési módszereit.

Ezen objektumok a modell inputjai, tehát ezeket adottnak vesszük. Harsányi [38] és Heifetz & Samet is adottnak veszi a típustereket. Tehát ebben az értelemben nem merül fel a típusterek megszerkesztésének igénye, vagy magának a létezésnek a bizonyítása.

12. definíció. Legyen $m_i = (\Pi_{A \in \mathcal{M}} f_i(\cdot, A))|_{diag(T_i^{\mathcal{M}})}$, tehát $m_i : diag(T_i^{\mathcal{M}}) \to \Delta(T, \mathcal{M})$, azaz $m_i : T_i \to \Delta(T, \mathcal{M})$ $\forall i \in M$.

Az m_i leképezések mutatják meg, hogy az egyes típusokhoz milyen vélemények tartoznak.

13. példa. Legyenek $\mathcal{M} = \{\emptyset, T\}$, és $T_i = \{t_1, t_2\}$. Ekkor $\Pi_{A \in \mathcal{M}} f_i(\cdot, A) = f_i(\cdot, \emptyset) \times f_i(\cdot, T)$, tehát pl. $m_i(t_1) = \{\mu(\emptyset)\} \times \{\mu(T)\}$, ahol μ egy valószínűségi mérték $\mathcal{M}$-en.

14. segédtétel. *Tetszőleges $i \in M$ rögzítettre m_i mérhető $[0,1]^{\mathcal{M}}$-re nézve.*

Bizonyítás. A $b : diag(T_i^{\mathcal{M}}) \to T_i^{\mathcal{M}}$ természetes beágyazás, így mérhető. $f_i(\cdot, A) \to [0,1]$ mérhető $\forall A \in \mathcal{M}$-re, tehát $\Pi_{A \in \mathcal{M}} f_i(\cdot, A)$ is mérhető $[0,1]^{\mathcal{M}}$-re nézve. Tudjuk, hogy $m_i = (\Pi_{A \in \mathcal{M}} f_i(\cdot, A)) \circ b$, így m_i mérhető. Q.E.D.

15. definíció. Legyen $(X, \mathcal{M})$ tetszőleges mérhető tér. $(\Delta(X, \mathcal{M}), \mathcal{A}_{HS})$ mérhetőségi struktúrája legyen az $O = \{\mu \in \Delta(X, \mathcal{M}) \mid \mu(A) \geq \alpha\}$ halmazok generálta σ-algebra, ahol $A \in \mathcal{M}$ és $\alpha \in [0,1]$ tetszőlegesen rögzítettek.

A 15. definícióban bevezetett $\mathcal{A}_{HS}$ mérhetőségi struktúrát Heifetz & Samet-hoz köthető.

16. segédtétel. *$(T, \mathcal{M})$-en a Heifetz & Samet mérhetőségi struktúra $\mathcal{A}_{HS}$ (15. definíció) egybe esik a $[0,1]^{\mathcal{M}}$ mérhetőségi struktúrával.*

Bizonyítás. Legyen $A \in \mathcal{M}$ tetszőleges, rögzített. Ha $A = \emptyset$, vagy $A = X$, akkor kész is vagyunk. A továbbiakban tegyük fel, hogy A nem esik egybe a fenti halmazok egyikével sem.

Legyen $O = \{\mu \in \Delta(T, \mathcal{M}) \mid \mu(A) \geq \alpha\}$, ekkor $\complement O = \{\mu \in \Delta(T, \mathcal{M}) \mid \mu(A) < \alpha\}$. Tudjuk, hogy $\exists \nu \in \Delta(T, \mathcal{M})$, hogy $\nu(A) = 0$, ekkor $U(\nu, A) = \{\mu \in \Delta(T, \mathcal{M}) \mid |\nu(A) - \mu(A)| < \alpha\}$-ra, $U = \complement O$, tehát $O = \complement U(\nu, A)$.

Legyen $U(\nu, A) = \{\mu \in \Delta(T, \mathcal{M}) \mid |\nu(A) - \mu(A)| \geq \alpha\}$ tetszőleges ν-re, α-ra. Legyenek $p_1 = min\{\nu(A) + \alpha, 1\}$, és $p_2 = max\{\nu(A) - \alpha, 0\}$. Legyen $O_1 = \{\mu \in \Delta(T, \mathcal{M}) \mid \mu(\complement A) \geq 1 - p_2\}$. Könnyen látható, hogy $O_1 = \{\mu \in \Delta(T, \mathcal{M}) \mid \mu(A) < p_2\}$. Legyen a_n szigorúan monoton fogyó sorozat, hogy $a_n \in [0, 1]$ $\forall n$, és $a_n \to p_1$, és legyen $O_2 = \cup_n \{\mu \in \Delta(T, \mathcal{M}) \mid \mu(A) > a_n\}$. Ekkor $O_2 = \{\mu \in \Delta(T, \mathcal{M}) \mid \mu(A) > p_1\}$, tehát $U(\nu, A) = \complement(O_1 \cup O_2)$.

Mivel a két mérhetőségi struktúra generáló rendszerei mérhetőek mindkét struktúrában, így a két mérhetőségi struktúra megegyezik. Q.E.D.

17. megjegyzés. A 16. segédtétel bizonyításában nagyon fontos szerepe volt annak, hogy valós értékű halmazfüggvényekkel dolgozunk.

A továbbiakban a Heifetz & Samet (15. definíció) mérhetőségi struktúrát használjuk.

3.2. A típustér

A következő definíció a típustér fogalmát rögzíti.

18. definíció. Az S paramétertérre épülő típustér $< (T_i, \mathcal{M}_i)_{i \in M \cup \{0\}}, m_{i \in M} >$ (röviden $< (T, \mathcal{M}), m) >$) (ahol a 11. definíció fogalmait használjuk):

1. $T_0 = S$, $(T_i, \mathcal{M}_i)$ mérhető tér $\forall i \in M \cup \{0\}$-re,

2. $m_i : T_i \to (\Delta(T, \mathcal{M}), \mathcal{A}_{HS})$ mérhető függvény $\forall i \in M$-re,

3. $m_i(t_i)|_{\Delta(T_i, \mathcal{M}_i)} = \delta_{t_i}$, ahol δ_{t_i} a t_i-re koncentrált Dirac-mérték, $\forall t_i \in T_i$-re.

Fontos látni, hogy csak mérhetőségi fogalmak szerepelnek a 18. definícióban, tehát tisztán valószínűségszámítási fogalmakra épülő típusterünk van.

A 18. definíció *1.* pontja Harsányi eredeti gondolatát adja vissza, tehát azt, hogy a *Természet* játékos bevonásával, a nem teljes információs szituáció nem tökéletes információs szituációnak feleltethető meg. A *2.* pont magának a típusnak a jellemzője, míg a *3.* pont azt fejezi ki, hogy minden játékos tisztában van saját típusával.

T pontjai a világállapotok, míg T_i egy eleme, az „i" játékos egy lehetséges típusa. Harsányi típus definiciója tetten érhető a fenti definícióban, hiszen m_i leképezés egy lehetséges játékos típusához egy a típusok halmazán értelmezett valószínűségi mértéket rendel.

19. megjegyzés. A 18. definíciónak megfelelően az alapfogalom, ahonnan elindulunk, a különböző típusterekre támaszkodó átmenetvalószínűségek fogalma.

20. definíció. Legyenek $(X_i, \mathcal{M}_i)$ $i = 1, 2$ tetszőleges, rögzített mérhető terek, és legyen $\varphi : T_1 \to T_2$ mérhető leképezés. Legyen $\hat{\varphi} : \Delta(X_1, \mathcal{M}_1) \to \Delta(X_2, \mathcal{M}_2)$ leképezés $\hat{\varphi}(\mu) \doteq \mu \circ \varphi^{-1}$, ahol $\mu \in \Delta(X_1, \mathcal{M}_1)$ tetszőleges.

21. definíció. A típusmorfizmus φ olyan mérhető függvény $< (T, \mathcal{M}), m >$ és $< (T', \mathcal{M}'), m' >$ típusterek között, hogy $\varphi = \Pi_{i \in M \cup 0}(\varphi_i : T_i \to T_i')$, tehát mérhető függvények szorzataként áll elő, mely függvények a következő tulajdonságokkal bírnak:

1. $\varphi_0 = id_S$,

2. $m_i' \circ \varphi_i = \hat{\varphi} \circ m_i$ $\forall i \in M$-re.

φ típusizomorfizmus, ha φ és φ^{-1} is típusmorfizmus.

A struktúra, amire a morfizmus, izomorfizmus kifejezések vonatkoznak, nem más, mint a vélemény. A *2.* pontban meghatározott tulajdonság azt jelenti, hogy φ morfizmus által generált $\hat{\varphi}$ tartja a típusokhoz tartozó valószínűségi mértéket, tehát egy lehetséges típushoz tartozó valószínűségi mértéket φ úgy változtatja, hogy az adott típus képéhez tartozó típus, illetve a képhez tartozó valószínűségi mérték nem más, mint az eredeti típushoz tartozó valószínűségi mérték képe az új lehetséges típusok terén. A paramétertér mérhetőségi szempontból ekvivalens a két típustér között.

22. segédtétel. *A 20. definícióban bevezetett $\hat{\varphi}$ leképezés mérhető.*

Bizonyítás. Azt fogjuk belátni, hogy $\Delta(X', \mathcal{M}')$ mérhető rendszerét $\mathcal{A}'_{HS}$-t generáló halmazainak inverzképei benne vannak $\Delta(X, \mathcal{M})$ mérhetőségi struktúrájában $\mathcal{A}_{HS}$-ben.

Legyenek $\alpha \in [0, 1]$ és $A' \in \mathcal{M}'$ tetszőlegesen rögzítettek. Legyen $O = \{\in \Delta(X', \mathcal{M}') \mid \mu(A') \geq \alpha\}$. A 20. definíció miatt

$$\hat{\varphi}^{-1}(O) = \{\mu \in \Delta(X, \mathcal{M}) \mid \hat{\varphi}(\mu) = \mu \doteq \varphi^{-1}(A') \geq \alpha\} \tag{3.1}$$

φ mérhető függvény, tehát $A = \varphi^{-1}(A') \in \mathcal{M}$. Ekkor (3.1) a következő formát ölti:

$$\hat{\varphi}^{-1}(O) = \{\mu \in \Delta(X, \mathcal{M}) \mid \varphi^{-1}(A) \geq \alpha\},$$

tehát $\hat{\varphi}^-1(O) \in \mathcal{A}_{HS}$.

Mivel A és α tetszőlegesen rögzített volt, így $\mathcal{A}'_{HS}$ generálórendszer tetszőleges elemének inverzképe benne van $\mathcal{A}_{HS}$-ben, tehát $\hat{\varphi}$ mérhető leképezés. Q.E.D.

A fontos a vélemény struktúra tartása $(\varphi, \hat{\varphi})$-nek, de a mérhetőség szintén nagyon fontos tulajdonság, nem hagyható el.

23. definíció. $< (T^\star, \mathcal{M}^\star), m^\star >$ egyetemes típustér, ha tetszőleges $< (T, \mathcal{M}), m >$ típustérhez létezik φ, $< (T, \mathcal{M}), m >$-t a $< (T^\star, \mathcal{M}^\star), m^\star >$-ba vivő típus morfizmus.

Az egyetemes típustér tehát olyan típustér, melybe az adott modell minden más típus tere beágyazható (természetesen a mérhetőségi struktúra rögzített).

3.3. Véleményrangsor és véleménytér

Amint azt a nem teljes információs játékok bemutatásakor elmondtuk, a modellezhetőség fő problémája a véleményrangsorok vizsgálatában rejlik. Harsányi a típus meghatározásakor nem feltétlenül a véleményrangsorokra gondolt, hanem olyan leírásra, mely meghatározza a véleményrangsorokat. Átfogalmazhatjuk úgy Harsányi felfogását, hogy a típus nem más, mint véleményrangsor. Ebben az esetben kérdés, hogy milyen kapcsolat van a típustér és a véleményrangsorok között. Ehhez nézzük a következő definíciókat.

24. definíció (Véleménytér). Legyen $(S, \mathcal{M}_0)$ mérhető paraméter tér, ekkor az elsőrendű vélemények halmaza az $(S, \mathcal{M}_0)$ halmazon értelmezett valószínűségi mértékek halmaza, jelöljük ezt $\Delta(S, \mathcal{M}_0)$-lal.

A másodrendű vélemények halmaza:

$$\Delta((S, \mathcal{M}_0) \otimes (\Delta(S, \mathcal{M}_0)^M, \mathcal{A}_{HS}))$$

A mérhető struktúra a Heifetz & Samet mérhetőségi struktúra (lásd a 15. definíciót).

A harmadrendű vélemények halmaza pedig:

$$\Delta((S,\mathcal{M})\otimes(\Delta(S,\mathcal{M}_0)^M,\mathcal{A}_{HS})\otimes(\Delta((S,\mathcal{M}_0)\otimes(\Delta(S,\mathcal{M}_0)^M,\mathcal{A}_{HS})),\mathcal{A}_{HS}))$$

s.i.t..

A véleménytér tehát az $(S,\mathcal{M}_0)$-án értelmezett valószínűségi mértékek halmazán értelmezett valószínűségi mértékek halmazán értelmezett valószínűségi mértékek halmazán értelmezett valószínűségi mértékek halmazán értelmezett s.i.t. valószínűségi mértékek halmaza. Minden játékosnak természetesen véleménye van a többi játékos véleményéről is.

$$\begin{aligned}
(X_0,\mathcal{M}_0) &= (S,\mathcal{M}_0)\\
(X_1,\mathcal{M}_1) &= (X_0,\mathcal{M}_0)\otimes(\Delta(X_0,\mathcal{M}_0)^M,\mathcal{A}_{HS})\\
&\vdots\\
(X_n,\mathcal{M}_n) &= (X_{n-1},\mathcal{M}_{n-1})\otimes(\Delta(X_{n-1},\mathcal{M}_{n-1})^M,\mathcal{A}_{HS})\\
&= (S,\mathcal{M}_0)\otimes_{j=0}^{n-1}(\Delta(X_j,\mathcal{M}_j)^M,\mathcal{A}_{HS})\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$X_\infty=\times_{n=0}^{\infty}X_n$ egy pontjának egy meghatározott játékoshoz köthető komponenseit, az adott játékos véleményrangsorának nevezzük.

Egy pont X_0-ban egy lehetséges paraméter érték. Egy pont X_1-ben egy paraméter érték, és minden játékos egy-egy elsőrendű véleménye. Egy pont X_2-ben egy lehetséges paraméter érték, minden játékos egy-egy elsőrendű véleménye, és minden játékos egy-egy másodrendű véleménye, s.i.t. Minket X_∞ érdekel, hiszen ennek minden pontja leír minden játékos számára egy véleményrangsort. X_∞-nek egy pontját világállapotnak nevezzük, hiszen a világállapot nem más, mint a természet egy állapota, továbbá a vélemények egy lehetséges állapota egy véleményállapot.

25. megjegyzés. Legyen $t\in X_\infty$ egy pont, ezen pont komponensei $(s,\delta_1^1,\delta_1^2,\ldots,\delta_2^1,\delta_2^2,\ldots)$, ahol δ_j^i-vel jelöljük a i-ik játékos j-ed rendű véleményét. Tehát, minden pont X_∞-ben teljes körűen leír egy olyan állapotot, amely minden játékos véleményrangsorát tartalmazza.

Ebben a modellben X_∞ egy szorzattér, melynek pontjai írják le a szereplők, játékosok véleményeit, és a lehetséges paraméter értéket (értékeket). Tehát minden pont csak egy lehetséges állapotot ír le, az összes állapot adja a szorzatteret magát. A cél ennek a szorzattérnek a megkonstruálása.

A véleményrangsorok terének definiciója rekurzióval adott. A paraméter térből kapjuk az első rendű véleményeket, majd ezekből a másod rendű véleményeket s.i.t. Ezen fajta rekurzív vélemény definíciónak nem csak Bayesi megközelítése létezik. Ezen, más megközelítésekre példák: Brandenburger [20], Heifetz [40], és Epstein & Wang [31].

A szereplők véleményeiről felteszünk némi következetességet. Nem engedünk meg minden véleményt csak olyanokat, melyeket *következetes* gondolkodás generált. Matematikailag a feltételek a következőképpen írhatóak le:

26. definíció. A véleményrangsornak ki kell elégítenie két következetességi feltételt. Ezek a feltételek formálisan a következők:

- $marg_{X_{n-2}}\delta_n^i = \delta_{n-1}^i$,
- $marg_{[\Delta(X_{n-1})]^i}\delta_n^i = \delta_{\delta_{n-1}^i}$,

$\forall n \geq 2$, $\forall i \in M$, és ahol $\delta_n^i \in \Delta(X_{n-1})^i$, továbbá $marg_{T_{n-2}}\delta_n^i$ jelentése, hogy δ_n megszorítása X_{n-1}-re az i játékosnak. $\delta_{\delta_{n-1}^i}$ a δ_{n-1}^i pontra koncentrált Dirac-mértéket jelenti.

Az első feltétel azt követeli meg, hogy a vélemények következetesek legyenek, tehát egy adott dologról, pl. egy másik játékos első rendű véleményéről a véleményrangsorban minden vélemény megegyezzen. Tehát ne változzon a vélemény. Ez nagyon természetes feltevés. A második feltétel azt mondja, hogy minden játékos pontosan ismeri a saját véleményét. A második feltétel nem szükséges a matematikai bizonyításhoz, csak a közgazdasági érthetőséget erősíti[1]!

Amennyiben a játékosok gondolkodásáról feltesszük, hogy következetes, akkor csak speciális pontok érdekelnek bennünket X_∞-ből. Azt is mondhatjuk, hogy X_∞ egy alterét keressük. A továbbiakban jelöljük ezt a az alteret X_∞^c-vel.

27. axióma. *A játékosok következetessége közismert, tehát X_∞^c közismert vélemény altér.*

Az már látható, hogy valamiféle szorzatteret szeretnénk megkonstruálni. Mi azonban speciális teret szeretnénk kapni, olyan teret, mely az összes lehetséges világállapotot tartalmazza, tehát tartalmazza az összes lehetséges játékos típust, és ezen típusok összes lehetséges kombinációját.

[1]Pontosan ez Harsányi azon feltétele, mely szerint minden játékos pontosan ismeri a saját típusát.

3.4. A típustér tulajdonságai

Ebben az alfejezetben a típus és a következetes véleményrangsor fogalmak kapcsolatát vizsgáljuk.

28. definíció. Egy $<(T, \mathcal{M}), m>$ típustér korrekt, ha minden típus megfeleltethető egy következetes véleményrangsornak.

A matematikai logika nyelvéből ered a korrekt kifejezés. Ebben a témában ez a kifejezés azt mutatja, hogy a valóság, a tapasztalat a következetes véleményrangsor, míg a típus az modell fogalma.

29. állítás. *Tetszőleges* $<(T, \mathcal{M}), m>$ *típustér korrekt.*

Bizonyítás. Legyen $s : \Delta(T) \to \Delta(S)$, hogy $s(\mu) \stackrel{\circ}{=} marg_S \mu$. Legyen továbbá $b_i \stackrel{\circ}{=} s \circ m_i$ $\forall i \in M$-re, és legyen $b \stackrel{\circ}{=} \Pi_{i \in M} b_i$.

Legyen $i \in M$ tetszőleges, rögzített, és legyen $t_i \in T_i$ szintén tetszőleges, rögzített.

Ekkor az „i" játékos elsőrendű véleménye:

$v_i^1(t_i)(A_0) = b_i(t_i)(A_0)$, ahol $A_0 \in \mathcal{M}_0$, ami egy valószínűségi mérték $(S, \mathcal{T}_0)$-on.

Az „i" játékos másodrendű véleménye:

$v_i^2(t_i)(A_0 \times A_1) = \int_{(b^1)^{-1}(A_1)} b_i^1(\cdot, A_0) dm_i(t_i, \cdot)$, ahol $A_0 \in \mathcal{M}_0$, és $A_1 \in (\Delta(T, \mathcal{M})^M, \mathcal{A}_{HS})$. Descartes-szorzat téren vagyunk, így a mérhető téglákról egyértelműen kiterjeszthetőek a véges mértékek a szorzat mérhetőségi struktúrára, tehát $v_i^2(t_i)(\cdot)$ valószínűségi mérték $(S, \mathcal{M}_0) \otimes (\Delta(S, \mathcal{M}_0)^M, \mathcal{A}_{HS})$ téren.

Általánosan, az „i" játékos n-ed rendű véleménye:

$v_i^n(t_i)(A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_{n-1}) = \int_{(b^{n-1})^{-1}(A_{n-1})} b_i^{n-1}(\cdot, A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_{n-2}) dm_i(t_i, \cdot)$, ahol $A_0 \in \mathcal{M}_0$, $A_1 \in (\Delta(T, \mathcal{M})^M, \mathcal{A}_{HS}), \ldots, A_{n-1} \in (\Delta(X_{n-1}, \mathcal{M}_{n-1})^M, \mathcal{A}_{HS})$. Descartes-szorzat téren vagyunk, így a mérhető téglákról egyértelműen kiterjeszthetőek a véges mértékek a szorzat mérhetőségi struktúrára, tehát $v_i^n(t_i)(\cdot)$ valószínűségi mérték $(X_n, \mathcal{M}_n)$ téren.

Azt kell még látnunk, hogy az így kapott véleményrangsor következetes. A 26. definíció első pontja teljesül, hiszen $v_i^n(t_i)(A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_{n-1})|_{A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_{n-2}} = v_i^{n-1}(t_i)(A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_{n-2})$. A definíció második pontja pedig m_i definíciójának (18. definíció) harmadik pontjának közvetlen következménye.

Mivel i, és t_i tetszőlegesen választottak voltak, így a fentiek igazak $\forall i \in M$-re és $\forall t \in T$-re is, tehát kész vagyunk. Q.E.D.

30. következmény. *A 29. állítás miatt tetszőleges* $< ((T, \mathcal{M}), m) >$ *beágyazható* $(X^c_\infty, \mathcal{M}^c_\infty)$*-be.*

A típustér és a véleményrangsorok fogalmának kapcsolata tehát a következő: legyen $t \in T$ egy $< (T, \mathcal{M}), m >$ típustér tetszőleges pontja. Ekkor t meghatároz minden játékos számára egy következetes véleményrangsort, tehát t helyére beleképzelhetünk egy világállapotot, így minden típustér $< (T, \mathcal{M}), m >$ felfogható úgy, mint következetes véleményrangsorokra épülő $< X^c_\infty, m >$ típustér. Kérdés persze ennek a jelenségnek a megfordítása: tetszőleges X^c_∞-ből lehet típus teret építeni?

31. definíció. Egy $< (T, \mathcal{M}), m >$ típustér teljes, ha minden következetes véleményrangsor megfeleltethető egy típusnak.

A fenti definíciókból következik, hogy olyan modellt szeretnénk felépíteni, ami korrekt és teljes.

Látható, hogy a Bayesi esetben a probléma a teljességben van. Nem Bayesi esetben a teljesség problémáját tárgyalja pl. Brandenburger [20], Meier [55].

Most már megfogalmazhatjuk a problémát pontosan, ha a véleményrangsorból akarunk típus teret építeni. Milyen körülmények esetén lesz X^c_∞ típustér? Másképpen fogalmazva, ha van egy szorzatterünk, és minden véges indexhalmazú alszorzatán van egy valószínűségi mértékünk úgy, hogy azok „összeillenek", ebben az esetben mikor létezik az egész szorzattéren értelmezett olyan valószínűségi mérték, hogy annak megszorításai a véges indexhalmazú alszorzatain pont az előre adott valószínűségi mértékek. Ezzel a kérdéssel máshol is találkozhatunk.

Legyen adott valószínűségi változók egy olyan sorozata, hogy tetszőleges véges sok valószínűségi változó együttes eloszlását ismerjük. A kérdés ekkor az, hogy létezik-e egyetlen olyan eloszlás, melynek ezek a véges együttes eloszlások perem-eloszlásai. Másképpen fogalmazva, létezik-e olyan sztochasztikus folyamat, melynek elemei az adott valószínűségi változók, az adott véges dimenziós együttes-eloszlásokkal. Erre a kérdésre Kolmogorov [48] adott választ valószínűségi változók (valós értékű mérhető függvények) esetén.

Tehát a típustér megkonstruálásához Kolmogorov tételét (Kolmogorov-féle Kiterjesztési Tétel) kell általános formában felhasználni.

3.5. Direktrendszer és direktlimesz

Ezen alfejezetben a direkt- (induktív-) rendszer és a direkt- (induktív-) limesz fogalmát vezetjük be.

32. definíció. Legyen I egy halmaz, melyen legyen $\leq$ egy bináris reláció. Bírja $\leq$ a következő két tulajdonságot:

1. $\leq$ tranzitív,
2. $i \leq j \Longrightarrow (i \leq i$ és $j \leq j)$,

ekkor $\leq$-t előrendezési relációnak mondjuk, illetve $(I, \leq)$-t előrendezett halmaznak nevezzük.

A tulajdonságok között a tranzitivitás a hangsúlyos.

33. definíció. Egy $(I, \leq)$ előrendezett halmazt jobbról (balról) irányított halmaznak mondunk, ha minden kételemű részhalmazának van halmazbeli felső (alsó) korlátja.

34. definíció. Legyen $(I, \leq)$ egy felfelé (jobbról) irányított halmaz, és legyen $(X_i)_{i \in I}$ halmazok egy családja I-vel indexelve. Legyen továbbá $f_{ji} : X_i \longrightarrow X_j$, $\forall (i \leq j)$.

1. $i \leq j$ és $j \leq k \Longrightarrow f_{ki} = f_{kj} \circ f_{ji}$,
2. $\forall i \in I \ f_{ii} = id_{X_i}$.

Az 1.,2. pontoknak eleget tevő $(X_i, (I, \leq), f_{ji}|_{i \leq j})$ rendszert direktrendszernek nevezzük.

A direktrendszer szisztematikusan egymásba ágyazott halmazok rendszere.

35. definíció. Legyen $(X_i, (I, \leq), f_{ji}|_{i \leq j})$ direktrendszer, ahol $(X_i, \mathcal{M}_i)$ mérhető terek egy családja.

1. f_{ji} mérhető $\forall i \leq j$.

Az 1. pontnak eleget tevő $((X_i, \mathcal{M}_i), (I, \leq), f_{ji}|_{i \leq j})$ rendszert mérhető direktrendszernek nevezzük.

A mérhető direktrendszerek esetén a szisztematikus egymásba ágyazottság a mérhető struktúrák egymáshoz való viszonyára is kiterjed.

36. definíció. Legyen $(X_i, (I, \leq), f_{ji}|_{i \leq j})$ direktrendszer. Legyen $X = \sum_{i \in I} X_i$.

Tetszőleges $x \in X$-re, legyen $\lambda(x) = i$, hogy $x \in X_i$.

Legyen $E(\cdot, \cdot)$ bináris reláció X-en, hogy $E(a, b)$ pontosan akkor ha $\exists k$, hogy $k \geq i = \lambda(a)$, és $k \geq j = \lambda(b)$, hogy $f_{ki}(a) = f_{kj}(b)$.

Legyen $D = X \setminus E$ hányados tér. Ekkor D-t $(X_i, (I, \leq), f_{ji}|_{i \leq j})$ direktrendszer direktlimeszének nevezzük és $D = \varinjlim(X_i, (I, \leq), f_{ji}|_{i \leq j})$-vel jelöljük. Legyen $f_i : X_i \to D$ kanonikus beágyazás, tehát melyre $f_{ji} \circ f_i = f_j \ \forall (i \leq j)$-re.

A definícióból látható, hogy a direktlimesz mindig létezik, és ha csak egy halmaz is a direkt rendszer halmazai közül nem üres, akkor a direktlimesz sem üres.

37. definíció. Legyen $((X_i, \mathcal{M}_i), (I, \leq), f_{ji}|_{i \leq j})$ mérhető direktrendszer, és legyen $D = \varinjlim(X_i, (I, \leq), f_{ji}|_{i \leq j})$ direktlimesz.

1. Legyen $(D, \mathcal{M})$, ahol $\mathcal{M}$ a legfinomabb σ-algebra, melyre f_i mérhető $\forall i \in I$-re.

Az 1. pontnak eleget tevő $(D, \mathcal{M})$ mérhető teret mérhető direktlimesznek nevezzük, és $(D, \mathcal{M}) = \varinjlim((X_i, \mathcal{M}_i), (I, \leq), f_{ji}|_{i \leq j})$-vel jelöljük.

Ha csak egy X_i halmaz is nem üres, akkor a mérhető direktlimesz mindig létezik. Probléma csak az lehet a mérhető direktlimesszel, hogy esetleg túl kevés mérhető halmaz van benne.

3.6. Az egyetemes típustér létezése

Ebben az alfejezetben az egyetemes típustér létezésére koncentrálunk. A véleménytérnek egy olyan alterét keressük, mely típustér, tehát amelyben minden következetes véleményrangsorhoz tartozik egy típus. Matematikailag a probléma az, hogy hiába választjuk ki a véleménytér alteréből az összes olyan következetes véleményrangsort, mely típusnak feleltethető meg, ezt a típust (valószínűségi mérték a véleménytéren) ha megszorítjuk erre at altérre, akkor nem marad meg feltétlenül a valószínűségi mérték σ-additivitása.

38. definíció. $< (T, \mathcal{M}), m >$ relációban van $< (T', \mathcal{M}'), m' >$-vel ($< (T, \mathcal{M}), m > R < (T', \mathcal{M}'), m' >$), ha $\exists \varphi :< (T, \mathcal{M}), m > \to < (T', \mathcal{M}'), m' >$ típus morfizmus.

Tehát két típustér akkor van relációban egymással, ha a két típustér között van típus morfizmus.

39. segédtétel. *A típusterek halmaza R-rel felfelé (jobbról) irányított halmaz.*

Bizonyítás. R tranzitív, legyen $\varphi_1 :< (T_1, \mathcal{M}_1), m_1 > \to < (T_2, \mathcal{M}_2), m_2 >$, $\varphi_2 :< (T_2, \mathcal{M}_2), m_2 > \to < (T_3, \mathcal{M}_3), m_3 >$, akkor $\varphi_2 \circ \varphi_1 :< (T_1, \mathcal{M}_1), m_1 > \to < (T_3, \mathcal{M}_3), m_3 >$ típus morfizmus.

R reflexív: legyen $\varphi = id_{<((T,\mathcal{M}),m)>}$.

Tetszőleges kételemű halmaznak van halmazbeli felső korlátja: Legyen $< (T_1, \mathcal{M}_1), m_1 >$ és $< (T_2, \mathcal{M}_2), m_2 >$ típusterek. Ekkor $X^c_\infty(T_1)$ és $X^c_\infty(T_2)$ alterek X^c_∞-ben, tehát $X^c_\infty(T_1) \cup X^c_\infty(T_2)$ is altér. Legyen $t \in T_1 \cup T_2$ tetszőleges. Ekkor ha $t \in T_1$ de $t \in T_2$, vagy $t \in T_2$ de $t \in T_1$, akkor könnyen látható, hogy $m_i(t)$ kivetíthető $\Delta(X^c_\infty, \mathcal{M}^c)$ elemévé. Legyen $t \in T_1 \cap T_2$, ekkor $X^c_\infty(t)$ kivetíthető μ-vé. Ekkor $\mu^\star(T_1 \cap T_2) = 1$, tehát $\mu \in \Delta(X^c_\infty, \mathcal{M}^c)$. Ebből következik, hogy $< ((T_1 \cup T_2, \mathcal{M}^c|_{T_1 \cup T_2}), m_{T_1 \cup T_2}) >$ típustér, és $< (T_1, \mathcal{M}_1), m_1 > R < ((T_1 \cup T_2, \mathcal{M}^c|_{T_1 \cup T_2}), m_{T_1 \cup T_2}) >$ és $< (T_3, \mathcal{M}_3), m_3 > R < ((T_1 \cup T_2, \mathcal{M}^c|_{T_1 \cup T_2}), m_{T_1 \cup T_2}) >$. Q.E.D.

40. segédtétel. *Legyen $((X_i, \mathcal{M}_i), (I, \leq), f_{ji}|_{i \leq j})$ és $((Y_i, \mathcal{N}_i), (I, \leq), g_{ji}|_{i \leq j})$ mérhető direktrendszerek.*

Legyen továbbá

$$\begin{array}{ccc} (X_i, \mathcal{M}_i) & \stackrel{u_i}{\to} & (Y_i, \mathcal{N}_i) \\ f_{ji} \downarrow & & g_{ji} \downarrow \\ (X_j, \mathcal{M}_j) & \stackrel{u_j}{\to} & (Y_j, \mathcal{N}_j) \end{array}$$

diagram kommutatív $\forall (i \leq j)$-re, és u_i mérhető függvény $\forall i \in I$-re.

Ekkor $\exists u$ egyetlen függvény, hogy

$$\begin{array}{ccc} (X_i, \mathcal{M}_i) & \stackrel{u_i}{\to} & (Y_i, \mathcal{N}_i) \\ f_i \downarrow & & g_i \downarrow \\ (X, \mathcal{M}) & \stackrel{u}{\to} & (Y, \mathcal{N}) \end{array}$$

kommutatív, és u mérhető.

Bizonyítás. Bourbaki [17] 205. oldal miatt létezik és egyetlen u.

Tudjuk, hogy $u \circ f_i = g_i \circ u_i$. Indirekten tegyük fel, hogy u nem mérhető. Ekkor $\exists A \in \mathcal{N}$, hogy $u^{-1}(A) \notin \mathcal{M}$. Mivel $f_i^{-1} \circ u^{-1}(A) \in \mathcal{M}_i$ $\forall i$-re, és $\mathcal{M}$ a legfinomabb σ-algebra, melyre f_i-k mérhetőek, így ellentmondásba keveredtünk, hiszen $u^{-1}(A)$-vel $\mathcal{M}$ bővíthető lenne, finomítható lenne. Q.E.D.

A következő lépés az egyetemes típustér létezésének bizonyítása.

41. tétel. *Egyértelműen létezik az egyetemes típustér*

Bizonyítás. Létezés: A 39. segédtétel miatt a típusterek halmaza felfelé irányított halmaz az R relációval (I, R) (ahol I a típusterek osztálya).

Ekkor a típusterek halmaza mérhető direktrendszert alkot, sőt a 22. segédtétel miatt $(\Delta(T^i), \mathcal{A}_{HS})$-k is mérhető direktrendszert alkotnak.

Legyenek

$(X_i, \mathcal{M}_i) = T^i$,

$(Y_i, \mathcal{N}_i) = \Delta(T^i)$,

$u_i = m_k^i$ $k \in M$ tetszőleges rögzített,

$(X, \mathcal{M}) = \varinjlim((X_i, \mathcal{M}_i), (I, R), f_{ji}|_{i \leq j})$,

$(Y, \mathcal{N}) = \varinjlim((Y_i, \mathcal{N}_i), (I, R), f_{ji}|_{i \leq j})$,

ekkor a 40. segédtétel miatt u mérhető.

Legyenek

$(T, \mathcal{M}) = (X, \mathcal{M})$,

$(\Delta(T, \mathcal{M}), \mathcal{A}_{HS}) = (Y, \mathcal{N})$,

$m_k = u$.

Mivel k tetszőleges rögzített volt a 18. definíció tulajdonságai teljesülnek, tehát $< (T, \mathcal{M}), m >$ típustér. A mérhető direktlimesz definiciója miatt pedig $< (T, \mathcal{M}), m >$ a lehető legbővebb, így $< (T, \mathcal{M}), m >$ típustér egyetemes típustér.

Egyértelműség: Legyenek $< (T_1, \mathcal{M}_1), m_1 >$ és $< (T_2, \mathcal{M}_2), m_2 >$ egyetemes típusterek. Ekkor $X_\infty^c(T_1) \subseteq X_\infty^c(T_2)$ és $X_\infty^c(T_2) \subseteq X_\infty^c(T_1)$, tehát $X_\infty^c(T_1) = X_\infty^c(T_2)$, így $< (T_1, \mathcal{M}_1), m_1 >$ és $< (T_2, \mathcal{M}_2), m_2 >$ egyetemes típusterek izomorfak egymással. Q.E.D.

3.7. Ellenpéldák

A következőkben egy olyan ellenpéldát mutatunk, mellyel azt kívánjuk demonstrálni, hogy a tisztán mértékelméleti típusterek nem feltétlenül teljesek.

Az irodalomban ismert ellenpélda a teljességre Heifetz & Samet [45]-től. A mi ellenpéldánk azért érdekes, mert más „problémára" épül, mint [45].

42. példa. Legyenek $I = \mathbb{N}$, $X_n = [0, 1]$ $\forall n$-re, és $f_{mn} = id_{Y_n}$ $\forall m \leq n$-re. Legyenek továbbá

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \{[0,\tfrac{1}{2}],(\tfrac{1}{2},1]\}\\ \Sigma_2 &= \{[0,\tfrac{1}{4}],(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}],(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4}],(\tfrac{3}{4},1]\}\\ &\vdots\end{aligned}$$

Legyen $A_n \circeq (\frac{1}{2}, \frac{2^{n-1}+1}{2^n}]$ $\forall n \in \mathcal{N}$-re. Ekkor $A_n \in \Sigma_n$ $\forall n$-re.

Legyen $\mu_n(A) \circeq \begin{cases} 1, & \text{ha } A = A_n \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$ $\forall n$-re.

Legyen $\mathcal{M}_n \circeq \sigma(\Sigma_n)$, ekkor μ_n egyértelműen kiterjeszthető $\mathcal{M}$-re, mint valószínűségi mérték (lásd a 106. tételt).

Az $((X_n, \mathcal{M}_n, \mu_n), \mathbb{N}, f_{mn}|_{m\leq n})$ mérték inverzrendszer sorozatmaximális, tehát $(X, \mathcal{A}, \mu) = w - \varprojlim((X_n, \mathcal{M}_n, \mu_n), \mathbb{N}, f_{mn}|_{m\leq n})$ gyenge mérték inverzlimesz létezik (lásd az 59. definíciót és a 92. segédtételt).

Tudjuk, hogy $\cap_n A_n = \emptyset$, de $\mu(A_n) = 1$ $\forall n$-re, így $\lim \mu(A_n) \nrightarrow 0$, tehát μ nem σ-additív.

A matematikai példa alkalmazása a véleményrangsorok esetére:

43. példa. Tegyük fel, hogy egy pénzérme van letakarva az asztalon, és két személy (i, j) azon spekulál, hogy eltalálják, hogy *fej* vagy *írás* néz felfelé.

Legyen

$$\begin{aligned}(T_0, \mathcal{M}_0) &= (\{0,1\}, B(\{0,1\}_{d_d}))\\ (T_1, \mathcal{M}_1) &= (\{0,1\}\times\{0,1\}, B((\{0,1\}\times\{0,1\})_{d_d}))\\ &= (\{0,1\}^2, B((\{0,1\}^2)_{d_d}))\\ (T_2, \mathcal{M}_2) &= (\{0,1\}\times\{0,1\}\times\{0,\}, B((\{0,1\}\times\{0,1\}\times\{0,1\})_{d_d}))\\ &= (\{0,1\}^3, B((\{0,1\}^3)_{d_d}))\\ &\vdots\\ (T_n, \mathcal{M}_n) &= (\{0,1\}^n, B((\{0,1\}^n)_{d_d}))\end{aligned}$$

ahol $B(\{0,1\}_{d_d})$ a $\{0,1\}$ halmaz diszkrét topológiájára épülő Borel halmazokat jelöli.

$T = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \times_n T_n$ tetszőleges t pontja a következőképpen értelmezhető. Legyen $t = (0,1,0,0,0,0,\ldots)$, ekkor az „i" játékos szemszögéből nézve:

A pénzérme *írás* (első komponens).

Az „i" játékos szerint a pénzérme *fej* (második komponens).

Az „i" játékos szerint a „j" játékos azt gondolja, hogy a pénzérme *írás* (harmadik komponens).

Az „i" játékos szerint a „j" játékos azt gondolja, hogy az „i" játékos szerint a pénzérme *írás* (negyedik komponens).

s.i.t.

Könnyen látható, hogy ha „i" azt gondolja, hogy *fej* néz felfelé, akkor $(\frac{1}{2}, 1]$ halmazt felelteti meg ennek a véleménynek, ha azt gondolja, hogy *írás* néz felfelé, akkor $[0, \frac{1}{2}]$ eseményt felelteti meg ennek a „véleménynek".

Ha „i" azt gondolja, hogy *fej* és, hogy „j" azt gondolja, hogy *fej*, akkor ennek $(\frac{3}{4}, 1]$ halmazt felelteti meg.

Ha „i"" azt gondolja, hogy *írás* és, hogy j azt gondolja, hogy *fej*, akkor ennek $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ halmazt felelteti meg

s.i.t.

Legyen $t_i = (1, 0, \ldots)$ az „i" játékos típusa. Mivel T minden eleme következetes véleményrangsor, így t is következetes véleményrangsor. Ekkor „i" különböző rendű véleményei megfelelnek μ_n-eknek (az n-ed rendű vélemény μ_n-nek) a 42. példában definiált mértékeknek. Ebben az esetben, a 42. példa miatt t nem típus, hiszen a mérték inverzlimeszben μ nem σ-additív.

A példa azt mutatja, hogy sok esetben véges modellt szeretnénk kiáltalánosítani nem véges modellre, ami „természetesen" nem mindig sikerülhet. Figyeljük meg, hogy μ_n-ek csak additívak (hiszen véges algebrán az additivitás és a σ-additivitás egybe esik). Tehát az a tény, hogy a mérhető inverzlimeszen a halmazfüggvény csak additív, nem is olyan meglepő, hiszen „tisztán" additívak inverzlimeszeként áll elő.

4. fejezet

A Kolmogorov-féle Kiterjesztési Tétel

„A harmadiktól azt kérdezte melyik állat a legravaszabb a földön. *Amelyet az ember mindmostanáig nem ismer* - volt a válasz"

Plutarkhosz: Párhuzamos életrajzok, Alexandrosz - Julius Caesar

Ebben a fejezetben látszólag kitérőt teszünk, bemutatjuk azokat a matematikai eredményeket, fogalmakat, melyek segítségével értékelni tudjuk a teljes egyetemes típusterek létezésnek problémájában eddig elért eredményeket. Fontosak a pontos ismeretek azért is, hogy lássuk milyen lehetséges általánosítások képzelhetőek még el, illetve az egyes eredmények miért nem általánosabb formában kerültek kimondásra.

A következőkben többször, konkrét utalás nélkül használjuk Bourbaki [17], [18], [15] és M. M. Rao [65], [68], [67], [66] munkáit.

4.1. Alapfogalmak

Ezen alfejezet az inverz- (projektív-) rendszer/limesz fogalmát szándékozik bemutatni, illetve jellemezni. Az inverzlimesz fogalma fontos a sztochasztikus folyamatok létezésének bizonyításakor, így pénzügyi kérdésekben, illetve játékelméleti kérdések episztemológiai (informáltságelméleti) vizsgálatakor.

4.1.1. Inverzrendszerek

44. definíció. Legyen I egy halmaz melyen legyen $\leq$ egy bináris reláció. Ha $\leq$ bírja a következő két tulajdonságot:

1. $\leq$ tranzitív,

2. $i \leq j \Longrightarrow (i \leq i$ és $j \leq j)$,

akkor $\leq$-t előrendezési relációnak mondjuk, illetve $(I, \leq)$-t előrendezett halmaznak nevezzük.

Fontos látni, hogy $\leq$ „igazi" ereje a tranzitivitása, másik tulajdonsága csupán arra szolgál, hogy az olyan elemek, melyek relációban vannak más elemmel(ekkel), azok esetén $\leq$ reflexív legyen.

45. definíció. Legyen $(I, \leq)$ előrendezett halmaz, és legyen $(X_i)_{i \in I}$ halmazok egy családja indexelve I-vel. Legyen továbbá $f_{ij} : X_j \longrightarrow X_i$, ha $i \leq j$.

1. $(i \leq j$ és $j \leq k) \Longrightarrow f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}$,

2. $\forall i \in I$-re $f_{ii} = id_{X_i}$.

Az 1., 2. pontoknak eleget tevő $(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ rendszert inverzrendszernek nevezzük.

Az inverzrendszerek fogalma nem kötődik feltétlenül topológiához vagy mérhetőséghez, elég halmazelméleti fogalmakkal operálni.

46. definíció. Legyen $((X_i, \tau_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ inverzrendszer, ahol (X_i, τ_i)-k topologikus terek.

1. $f_{ij} : X_j \longrightarrow X_i$ folytonos $\forall (i \leq j)$.

Az 1.-nek eleget tevő $((X_i, \tau_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ rendszert topologikus inverzrendszernek nevezzük.

Lehet tisztán mérhető inverzrendszert is definiálni.

47. definíció. Legyen $((X_i, \mathcal{A}_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ inverzrendszer, ahol (X_i, A_i)-k mérhető terek.

1. $f_{ij} : X_j \longrightarrow X_i$ mérhető $\forall (i \leq j)$.

Az 1.-nek eleget tevő $((X_i, \mathcal{A}_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ rendszert mérhető inverzrendszernek nevezzük.

A topológia és a mérhetőség fogalmak összekapcsolhatóak.

48. definíció. Legyen $((X_i, \tau_i), B(X_i, \tau_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ inverzrendszer, ahol (X_i, τ_i) topologikus tér, $B(X_i, \tau_i)$ a Baire/Borel halmazok osztálya $\forall i \in I$-re.

1. $f_{ij} : X_j \longrightarrow X_i$ folytonos $\forall (i \leq j)$,
2. $f_{ij} : X_j \longrightarrow X_i$ mérhető $\forall (i \leq j)$.

Az 1., 2. pontoknak eleget tevő $((X_i, \tau_i), B(X_i, \tau_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ rendszert Baire/Borel mérhető inverzrendszernek nevezzük.

Világos, hogy nem mindegy, hogy Baire, vagy Borel halmazokat tekintünk mérhetőségi struktúraként.

49. definíció. Legyen $((X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ mérhető inverzrendszer, ahol $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$-k véges mértékterek.

1. $\mu_i = \mu_j \circ f_{ij}^{-1}, \forall (i \leq j)$.

Az 1.-nek eleget tevő $((X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ rendszert mérték inverzrendszernek nevezzük.

Ebben az esetben egy tisztán mérték inverzrendszerről beszélünk, hiszen csak mértékelméleti tulajdonságokkal ruházzuk fel az inverzrendszert.

50. definíció. Legyen $((X_i, \tau_i), B(X_i, \tau_i), \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ Baire/Borel mérhető inverzrendszer, ahol μ_i véges mérték a $B(X_i, \tau_i)$ Baire / Borel halmazokon $\forall i \in I$-re.

1. $\mu_i = \mu_j \circ f_{ij}^{-1}, \forall (i \leq j)$.

Az 1.-nek eleget tevő $((X_i, \tau_i), B(X_i, \tau_i), \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ rendszert Baire-/Borel- mérték inverzrendszernek nevezzük.

A fenti rendszer egy vegyes, topológiailag megalapozott mérték inverzrendszer.

4.1.2. Inverzlimeszek

Az inverzlimesz fogalma tisztán halmazelméleti fogalom.

51. definíció. Legyen $(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ tetszőleges inverzrendszer. Legyen $X = \prod_{i \in I} X_i$, továbbá legyen $P = \{x \in X \mid pr_i(x) = f_{ij} \circ pr_j(x),\ \forall (i \leq j)\}$, ahol pr_i a koordináta leképezés X-ből X_i-be. Ekkor P-t $(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ inverzrendszer inverzlimeszének nevezzük és $P = \varprojlim(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$-vel jelöljük. Legyen továbbá $p_i \triangleq pr_i|_P$, ekkor $p_i = f_{ij} \circ p_j$ $\forall (i \leq j)$.

A definícióból látható, hogy az inverzlimesz mindig létezik, legfeljebb az lehet a probléma, hogy az inverzlimesz az üres halmaz (lásd a 61. példát).

Az inverzlimesz, mint fogalom, a halmazszorzat fogalom általánosítása.

52. példa. Legyen $(I, \leq)$ olyan, hogy $(i \leq j) \Longrightarrow (i = j)$, tehát $(I, \leq$ minden eleme legfeljebb csak önmagával van relációban ($f_{ij} = id_{X_j}$). Ekkor $\prod_{i \in I} X_i = \varprojlim(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$.

53. definíció. Legyen $((X_i, \tau_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ topologikus inverzrendszer és legyen $P = \varprojlim(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$.

1. (P, τ), ahol τ a legdurvább (legszűkebb) topológia, melyre p_i folytonos $\forall i \in I$-re.

Az 1.-nek eleget tevő (P, τ)-t topologikus inverzlimesznek nevezzük, és $(P, \tau) = \varprojlim\, ((X_i, \tau_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$-vel jelöljük.

Mivel az üres halmazon nem tudunk „érdekes" topológiát csinálni, így az inverzlimesz nemüressége fontos kérdés.

54. definíció. Legyen $((X_i, \mathcal{A}_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ mérhető inverzrendszer és legyen $P = \varprojlim(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$.

1. $(P, \mathcal{A})$, ahol $\mathcal{A}$ a legdurvább (legszűkebb) σ-algebra, melyre p_i mérhető $\forall i \in I$-re.

Az 1.-nek eleget tevő $(P, \mathcal{A})$-t mérhető inverzlimesznek nevezzük, és $(P, \mathcal{A}) = \varprojlim\, ((X_i, \mathcal{A}_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$-vel jelöljük.

A mérhető inverzlimesz problémája megegyezik a topologikus inverzlimesz esetén tárgyaltakkal.

55. definíció. Legyen $(((X_i, \tau_i), B(X_i, \tau_i)), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ Baire/Borel mérhető inverzrendszer.

1. $((P, \tau), B(P, \tau))$ a topologikus inverzlimesz Baire/Borel mérhető tere.

Az 1.-nek eleget tevő $((P, \tau), B(P, \tau))$-t Baire/Borel mérhető inverzlimesznek nevezzük, és $((P, \tau), B(P, \tau)) = (((X_i, \tau_i), B(X_i, \tau_i)), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$-vel jelöljük.

A Baire/Borel mérhető inverzlimeszekkel ugyancsak az a probléma, hogy esetleg $\varprojlim(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j}) = \emptyset$.

56. definíció. Legyen $((X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ mérték inverzrendszer.

1. μ, $(P, \mathcal{A})$-n, a mérhető inverzlimeszen értelmezett olyan mérték, hogy $\mu \circ p_i^{-1} = \mu_i$ $\forall i \in I$-re.

Az 1.-nek eleget tevő $(P, \mathcal{A}, \mu)$-t mérték inverzlimesznek nevezzük, és $(P, \mathcal{A}, \mu) = \varprojlim((X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$-vel jelöljük.

57. megjegyzés. A mérték inverzlimesz létezése több okból is kérdéses:

1. itt is felmerül az alaptér ürességnek kérdése,
2. lehetséges, hogy az alaptér nem üres, de mégsem lehet rajta mértéket konstruálni, mert p_i-k „összemosnak" különböző mértékű halmazokat,
3. $(P, \mathcal{A})$-n additív halmaz függvény melyre $\mu \circ p_i^{-1} \doteq \mu_i$ $\forall i$ sok esetben könnyen definiálható, de, hogy μ mérték-e, az már kérdéses.

58. definíció. Legyen $(((X_i, \tau_i), B(X_i, \tau_i), \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ Baire-/Borel- mérték inverzrendszer.

1. μ $((P, \tau), B(P, \tau))$-n, a Baire/Borel mérhető inverzlimeszen értelmezett olyan mérték, hogy $\mu \circ p_i^{-1} = \mu_i$ $\forall i \in I$-re.

Az 1.-nek eleget tevő $((P, \tau), B(P, \tau), \mu)$-t Baire-/Borel- mérték inverzlimesznek nevezzük, és $((P, \tau), B(P, \tau), \mu) = \varprojlim(((X_i, \tau_i), B(X_i, \tau_i), \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$-vel jelöljük.

A Borel-mérték inverzlimesszel még több probléma van, mint a mérték inverzlimesszel:

1. itt is felmerül az alaptér ürességnek kérdése,
2. lehetséges, hogy az alaptér nem üres, de mégsem lehet rajta mértéket konstruálni, mert p_i-k „összemosnak" különböző mértékű halmazokat,
3. $((P, \tau), B(P, \tau))$-n additív halmaz függvény melyre $\mu \circ p_i^{-1} \doteq \mu_i$ $\forall i$ sok esetben könnyen definiálható, de, hogy μ mérték-e, az probléma,
4. a Borel halmazok esetén felmerül a probléma, hogy ki lehet-e terjeszteni μ-t a Borel halmazokra,
5. kérdés tovább az is, hogy egyértelmű-e a Borel-mérték inverzlimesz (t.i. a mérték az inverzlimeszen).

59. definíció. Legyen $((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (i, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ mérték inverzrendszer.

1. $P = \varprojlim(X_i, (I, \leq), f_{ij}|i \leq j)$,

2. $\mathcal{A} \supseteq \cup_i p_i^{-1}(\mathcal{M}_i)$ algebra,

3. $\mu \circ p_i^{-1} = \mu_i$ $\forall i \in I$-re, additív halmazfüggvény.

Az 1., 2., 3. pontoknak eleget tevő $(P, \mathcal{A}, \mu)$-t gyenge mérték inverzlimesznek nevezzük, és $(P, \mathcal{A}, \mu) = w - \varprojlim((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$-vel jelöljük.

Látható, hogy a gyenge mérték inverzlimesz alapvetően abban különbözik a mérték inverzlimesztől, hogy μ nem feltétlenül σ-additív az előbbiben.

A különböző inverzlimeszek definíciójából kitűnik, hogy fontos kérdés az, hogy az inverzlimeszben elég sok pont legyen, tehát, hogy az inverzlimesz elég gazdag legyen.

4.2. Az inverzlimesz gazdagsága

Az előzőekben említettük, hogy az inverzlimesz mindig létezik, legfeljebb az lehet a kérdés, hogy az inverzlimesz mikor nem az üres halmaz. Intuitíven szemlélve rögtön láthatjuk, hogy az egyik kulcskérdés az f_{ij} függvények tulajdonsága. Ha f_{ij}-k nem ráképezések (szürjekciók, onto-k), akkor könnyen tudunk olyan inverzrendszert definiálni, melynek az inverzlimesze üres halmaz.

60. definíció. Egy $(I, \leq)$ előrendezett halmazt jobbról (balról) irányított halmaznak mondunk, ha minden két-elemű részhalmazának van halmazbeli felső (alsó) korlátja.

61. példa. Legyen $(I, \leq)$ indexhalmaz a természetes számok halmaza $\mathbb{N}$, és legyen $X_n = (\frac{1}{n}, 0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Legyen $f_{nm} = id_{X_m}$ $\forall (n \leq m)$, ekkor $P = \varprojlim(X_n, \mathbb{N}, f_{nm}|_{n\leq m}) = \emptyset$.

Bizonyítás. $P = \varprojlim(X_n, \mathbb{N}, f_{nm}|_{n\leq m})$ elemei konstans sorozatok lehetnek, de tetszőleges konstans c-hez, $\exists n \in \mathbb{N}$, hogy $c \notin (\frac{1}{n}, 0)$, tehát $\varprojlim(X_n, \mathbb{N}, f_{nm}|_{n\leq m}) = \emptyset$. Q.E.D.

A fenti példa azt mutatja, hogy ha úgy definiálunk inverzrendszert, hogy az „dobálja" el az elemeket, akkor kiüríthetjük az inverzlimeszt. A szubjektivitás megakadályozza az ilyen „csúnyaságokat".

Könnyen látható, hogy attól még, hogy egy inverzrendszerben f_{ij}-k nem szürjektívek, attól még lehet az inverzlimesz nemüres halmaz (lásd a 62. példát).

62. példa. Legyen $(I, \leq)$ indexhalmaz a természetes számok halmaza $\mathbb{N}$, a szokásos rendezéssel, és legyen $X_n = [\frac{1}{n}, 0]$ $\forall n \in I$. Legyen $f_{nn+1} = id_{X_{n+1}}$. Ekkor $\varprojlim(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j}) = \{0\}$.

Bizonyítás. Lásd a 61. példát. Q.E.D.

Az a kérdés, hogy szürjektív inverzrendszer esetében lehet-e az inverzlimesz az üres halmaz, az messze nem ilyen egyszerű kérdés. Lássuk az erre vonatkozó ellenpéldát Bourbaki [17]-tól.

63. példa. Létezik szürjektív inverzrendszer, aminek az inverzlimesze az üres halmaz.

64. definíció. Legyen $(I, \leq)$ nemüres felfelé (jobbról) irányított halmaz, melynek nincs legnagyobb eleme. Legyen $F \subseteq I$, hogy F elemei a következő formájúak ($n \in \mathbb{N}$) $x = (i_1, i_2, \ldots, i_{2n-1}, i_{2n})$, és ezen elemek a következőket tudják ($k, m \in \mathbb{N}$):

1. $i_{2m-1} < i_{2m}$, $m \leq n$,

2. $i_{2m-1} \not\leq i_{2k-1}$, $k < m \leq n$.

65. definíció. Legyenek $r(x) = i_{2n-1}$, $s(x) = i_{2n}$, és nevezzük n-t az x hosszának.

66. segédtétel. *F nemüres $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Bizonyítás. (Teljes indukcióval). Legyen $n = 1$, ekkor két-elemű halmazunk van, ki tudunk választani megfelelő két elemeket (I felfelé irányított és nincs legnagyobb eleme). Legyen ez a halmaz A_1.

A következő lépésben vegyünk I egy elemét úgy, hogy a 64. definícióban a *2.* feltétel teljesüljön (ezt megtehetjük, hiszen I-nek nincs legnagyobb eleme). Legyen az így kiválasztott elem i_3. Ekkor i_2, i_3 kételemű halmaz, van felső korlátjuk i_4, hogy $i_3 < i_4$ (itt is kell, hogy I-nek nincs legnagyobb eleme). Ez a négyelemű halmaz megfelel a 64. definíció *1.* és *2.* feltételének. Jelöljük ezt a halmazt A_2-vel.

Legyen A_n halmaz, melyre teljesül a 64. definíció *1.* és *2.* feltétele. Ekkor bővítsük ezt a halmazt, úgy ahogyan azt A_1 esetében tettük, de $x \in A_n$ esetén i_1 szerepét vegye át $r(x)$ és i_2 szerepét pedig vegye át $s(x)$. Az így kapott A_{n+1} halmaz szintén megfelel a 64. definíció *1.* és *2.* feltételének, tehát kész is vagyunk. Q.E.D.

67. definíció. Legyen $E_j = \{x \in F \mid r(x) = j\}$. Ekkor a 66. segédtétel miatt $E_j \neq \emptyset$ $\forall j \in I$ esetén.

Legyen $f_{jk} : E_k \longrightarrow E_j$ $j \leq k$ a következő: $\forall x = (i_1, i_2, \ldots, k, i_{2n}) \in E_k$-ra, legyen $f_{jk}(x) = (i_1, i_2, \ldots, i_{2m-2}, j, i_{2m})$, ahol $m = \min\{t \in \mathbb{N} \mid j \leq i_{2t-1}\}$, (tehát x „elejéből" csinálunk egy E_j elemet).

68. segédtétel. *A 67. definícióban megadott*

$$(E_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j}) \tag{4.1}$$

rendszer inverzrendszer.

Bizonyítás. Lássuk először a 45. definíció *1.* pontját: legyen $j, k, l \in I$ tetszőlegesen rögzített, hogy $j \leq k \leq l$, és legyen $x = (i_1, i_2, \ldots, i_{2n-2}, l, i_{2n}) \in E_l$ szintén tetszőlegesen rögzített. Ekkor $f_{jl}(x) = (i_1, i_2, \ldots, i_{2m_j-2}, j, i_{2m_j})$ ahol $m_j = \min\{t \in \mathbb{N} \mid j \leq i_{2t-1}\}$. $f_{kl}(x) = (i_1, i_2, \ldots, i_{2m_k-2}, k, i_{2m_k})$, ahol $m_k = \min\{t \in \mathbb{N} \mid k \leq i_{2t-1}\}$. m_k minimalitása miatt k előtt nincs már $k \leq i_{2t-1}$ tulajdonságú páratlan indexű elem. F tulajdonsága a 64. definíció *2.* pontja, és $j \leq k$ miatt teljesül $i_{m_j} \not\geq i_{m_k}$, tehát $f_{jk} \circ f_{kl}(x) = (i_1, i_2, \ldots, i_{2m_j-2}, j, i_{2m_j}) = f_{jl}(x)$. Mivel j, k, l, és x tetszőlegesek voltak, így kész is vagyunk.

A 45. definíció *2.* pontjának belátása: Legyen $j \in I$, és $x = (i_1, i_2, \ldots, j, i_{2n}) \in E_j$ tetszőlegesen rögzítettek. $(I, \leq)$ felfelé irányított, így $\leq$ reflexív. Ekkor a 64. definíció *2.* pontja miatt, nem létezik $l \in I$ páratlan indexű elem, melyre $l \leq j$, tehát $j = \min\{t \in \mathbb{N} \mid j \leq i_{2t-1}\}$, így $x = f_{jj}(x)$. Q.E.D.

69. segédtétel. *f_{ij}-k szürjektívek.*

Bizonyítás. Legyenek $j, k \in I$ $j \leq k$ tetszőlegesen rögzítettek, illetve legyen $x = (i_1, i_2, \ldots, i_{2n-2}, j, i_{2n}) \in E_j$ szintén tetszőlegesen rögzített. Legyen $i^\star \in I$, hogy $k < i^\star$, ilyen elem létezik, mivel I felfelé irányított és nincs legnagyobb eleme. Legyen $y = (i_1, i_2, \ldots, i_{2n-2}, j, i_{2n}, k, i^\star)$. Ekkor $y \in E_k \subseteq F$. Szintén könnyen látható, hogy $x = f_{jk}(y)$. Mivel x tetszőlegesen választott volt, így kész is vagyunk. Q.E.D.

70. segédtétel. *Ha $x_j \in E_j$-hez és $x_k \in E_k$-hoz $\exists l \in I$, hogy $j \leq l$ és $k \leq l$, továbbá $\exists x_l \in E_l$, hogy $x_j = f_{jl}(x_l)$ és $x_k = f_{kl}(x_l)$, és ráadásul x_j és x_k hossza megegyezik, akkor $s(x_j) = s(x_k)$, tehát x_j és x_k utolsó elemei megegyeznek.*

Bizonyítás. A 65. és a 67. definíció miatt $r(x_j) = j$, $s(x_j) = i_{2n(j)}$, $r(x_k) = k$, $s(x_k) = i_{2n(k)}$, ahol $i_{2n(j)}$ x_j utolsó komponense, és $i_{2n(k)}$ x_k utolsó komponense. Mivel x_j és x_k hossza megegyezik, így $h = 2n(j) = 2n(k)$. Látható, hogy $s(x_j) = i_{h(j)} = i_{h(l)} = i_{h(k)} = s(x_k)$, ahol $i_{h(m)}$ x_m h-adik komponense $m = j, k, l$. Q.E.D.

71. definíció. Legyen $(I, \leq)$ előrendezett halmaz, ekkor $A \subseteq I$ halmaz kofinális, ha $\forall x \in I$-hez $\exists y \in A$ (x-től függő), hogy $x \leq y$.

72. állítás. *Ha $y \in \varprojlim(E_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ (tehát a (4.1) inverzrendszer esetén $\varprojlim(E_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j}) \neq \emptyset$), akkor $A \stackrel{\circ}{=} \{s(x_j) \in I \mid \exists j \in I,$ hogy $x_j = p_j(y)\}$ halmaz megszámlálhatóan végtelen és kofinális $(I, \leq)$-ben.*

Bizonyítás. Megszámlálhatóság: A 65. definícióból tudjuk, hogy az egyes kezdőszeletek, x_i-k hosszai megszámlálhatóan sokan vannak (természetes számok). Ekkor $(I, \leq)$ irányított halmaz mivolta, a 45. definíció, és a 69. segédtétel miatt teljesülnek a 70. segédtétel feltételei, tehát a hosszak halmazának számossága nem kisebb, mint az $s(x_j)$-k számossága ($card(A) \leq card(\mathbb{N})$). A 66. segédtétel miatt A-nak végtelen sok eleme van, tehát A ekvipotens $\mathbb{N}$-nel.

Kofinalitás: Legyen tetszőleges $j \in I$, ekkor a 64. definíció *1.* pontja miatt $j < s(p_j(y))$, ahol $s(p_j(y)) \in A$. Q.E.D.

Most pedig megadunk egy konkrét I halmazt, mely megfelel az eddig feltett feltételeknek.

73. következmény. *Legyen I[1] egy nem megszámlálható S halmaz véges halmazainak rendszere. Ekkor $(I, \leq)$ felfelé irányított halmaz a tartalmazás relációval, és nincs maximális eleme. $(I, \leq)$-nek azonban nincs megszámlálható kofinális részhalmaza, tehát erre az $(I, \leq)$-re a fent definiált $\varprojlim(E_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j}) = \emptyset$.*

Bizonyítás. $(I, \leq)$ tulajdonságai könnyen láthatóak, kivéve a kofinális részhalmazra vonatkozó állítást.

(Indirekt) Legyen A megszámlálhatóan végtelen kofinális részhalmaza I-nek. Ekkor az A legalább egy elemének, $\alpha \in A$-nak, végtelen sok (sőt nem megszámlálható) egy elemű halmazt kell tartalmaznia, különben A nem lenne kofinális $(I, \leq)$-ben. Ebben az esetben azonban $\alpha \notin I$, ami ellentmondás. Q.E.D.

Bizonyítás. A 63. példa bizonyítása. A 72. állításból következik, hogy $\varprojlim(E_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j}) = \emptyset$. Q.E.D.

[1] *Lehetne I egy nem megszámlálható halmaz megszámlálható halmazainak rendszere, vagy hasonlóan egy megszámlálhatónál nagyobb számosságú halmaz kisebb számosságú halmazainak rendszere is.*

A 63. példa mutatja, hogy f_{ij}-k szürjektivitása nem elégséges feltétele az inverzlimesz nemürességének, tehát a szürjektivitást tovább kell erősíteni.

74. definíció. Az $(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ inverzrendszer sorozatmaximális (s.m., sequentially maximal), ha tetszőleges $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \in I$ sorozatra, és tetszőleges $x_{i_n} \in X_{i_n}$-re, hogy $x_{i_n} = f_{i_n i_{n+1}}(x_{i_{n+1}})$ $\forall n$-re, $\exists x \in \varprojlim(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$, hogy $p_{i_n}(x) = x_{i_n}$ $\forall n$.

A sorozatmaximalitás tulajdonságot Bochner [14] vezette be.

Látható, hogy egy sorozatmaximális inverzrendszerben f_{ij}-k szürjektívek. A sorozatmaximalitás, mint a következőkben látni fogjuk elégséges, de nem szükséges feltétele az inverzlimesz nemürességének.

A sorozatmaximalitás feltétel automatikusan teljesül ha f_{ij}-k koordináta leképezések (lásd a 75. segédtételt).

75. segédtétel. *Az $(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ inverzrendszer, ahol $X_i = \prod_{\substack{j\in I\\ j\leq i}} X_j$, $X_i \neq \emptyset$ $\forall i \in I$-re, és $f_{ij} = pr_{ij}$ $\forall (i \leq j)$. Ekkor $(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ sorozatmaximális.*

Bizonyítás. Látható, hogy $\varprojlim(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j}) = \prod_{i\in I} X_i$, tehát teljesül a 74. definíció tulajdonsága, így $(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ inverzrendszer sorozatmaximális. Q.E.D.

A sorozatmaximalitás feltétel szintén automatikusan teljesül topologikus inverzrendszerben ahol az alapterek nemüres kompakt halmazok, és f_{ij}-k szürjektívek (lásd a 76. segédtételt).

76. segédtétel. *Az $((X_i, \tau_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ topologikus inverzrendszer, ahol $(I, \leq)$ felfelé irányított halmaz, és (X_i, τ_i)-k nemüres kompakt topologikus terek (Hausdorff), ekkor a topologikus inverzlimesz nemüres kompakt topologikus tér. Ha ráadásul f_{ij}-k szürjektívek is, akkor az inverzrendszer sorozatmaximális.*

Bizonyítás. A Tyihonov-tétel miatt $X = \prod_{i\in I} X_i$ kompakt (Hausdorff), nemüres.

Legyen $G_{ij} \triangleq \{x \in X \mid p_i(x) = f_{ij} \circ p_j(x)\}|_{i\leq j}$. Mivel f_{ij}-k folytonosak és X_i-k Hausdorff topologikus terek, ezért G_{ij}-k zárt halmazok $\forall (i \leq j)$. X kompakt halmaz, tehát G_{ij}-k kompakt halmazok $\forall (i \leq j)$. Az inverzrendszer definíciója miatt $\forall m \in \mathbb{N}$-re $\cap_{n=1}^m = G_{ij}^n \neq \emptyset$ (itt kell $(I, \leq)$ felfelé irányítottsága). A véges metszet tulajdonság miatt ekkor $\cap_{i\leq j} G_{ij} \neq \emptyset$, tehát $P = \cap_{i\leq j} G_{ij} \neq \emptyset$.

Legyen $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \in I$ egy tetszőleges sorozat, és legyen $x_{i_n} \in X_{i_n}$, hogy $x_{i_n} = f_{i_n i_{n+1}}(x_{i_{n+1}})$ $\forall n$. Legyen $C \triangleq \cap_n p_{i_n}^{-1}(\{x_{i_n}\})$, ekkor f_{ij}-k szürjektivitása, p_i-k folytonossága, és

X kompaktsága miatt $C \neq \emptyset$ kompakt halmaz. Azt is tudjuk, hogy $\forall m \in \mathbb{N}$-re $C \cap (\cap_{l=1}^{m} G_{ij}^{l}) \neq \emptyset$, tehát $C \cap (\cap_{i \leq j} G_{ij}) \neq \emptyset$. Legyen $\exists x \in C \cap (\cap_{i \leq j} G_{ij})$ tetszőleges, ekkor $x_{i_n} = p_{i_n}(x)$ $\forall n$. Mivel $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \in I$ tetszőlegesen választott sorozat volt, így kész is vagyunk. Q.E.D.

A 76. segédtételben $(I, \leq)$ felfelé irányítottsága ártatlan feltételnek tűnik, pedig nem az. Ennek a ténynek az illusztrálására nézzük a következő példát:

77. példa. Legyen $I = \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$, hogy $i_3 \leq i_1$, $i_3 \leq i_2$, $i_4 \leq i_1$, $i_4 \leq i_2$, i_1 ne legyen relációban i_2-vel, és i_3 ne legyen relációban i_4-gyel.

$X_{i_1} = X_{i_2} = X_{i_3} = X_{i_4} = \{1, 2\}$. Ekkor X_{i_n} a diszkrét topológiával kompakt tér $n = 1, 2, 3, 4$.

Legyen $f_{i_3 i_1} = id_{X_{i_1}}$, $f_{i_3 i_2} = id_{X_{i_2}}$, $f_{i_4 i_2} = id_{X_{i_2}}$, és $f_{i_4 i_1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 2 \\ 2 & \text{különben} \end{cases}$.

Könnyen látható, hogy $\varprojlim (X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j}) = \emptyset$.

A fent tárgyalt esetekben nem kell tartanunk attól, hogy az inverzlimesz nem lesz elég nagy ahhoz, hogy valamiféle „értelmes" mérhető struktúrát definiáljunk rajta.

Az inverzlimesz gazdagságának biztosításához egy másik feltételcsoport is használatos az irodalomban. Ez a feltételcsoport az inverzrendszer I indexhalmazára, és az f_{ij} leképezésekre tett feltételek.

A következő eredmény M. M. Rao [68] 274. oldaláról való.

78. állítás. *Legyen $(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ inverzrendszer ahol $X_i \neq \emptyset$ $\forall i \in I$, ekkor ha a következő két pont közül az egyik feltételei teljesülnek, akkor $X = \varprojlim (X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j}) \neq \emptyset$, és $X_i = p_i(X)$ $\forall i \in I$.*

1. *f_{ij}-k szürjektívek, $(I, \leq)$ felfelé irányított, és $(I, \leq)$-nek van megszámlálható számosságú kofinális részhalmaza,*

2. *$(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ inverzrendszer sorozatmaximális.*

Bizonyítás. 1. pont: Könnyen látható, hogy elég az $\mathbb{N}$ indexhalmazon megmutatni, hogy $X_1 = p_1(P)$.

Legyen $x_1 \in X_1$ tetszőleges. Ekkor f_{ij}-k szürjektivitása miatt, $\exists x_2 \in X_2$, hogy $x_1 = f_{12}(x_2)$. Ezt az érvelést követve definiálunk pontok egy sorozatát, hogy $x_n \in X_n$, és $x_n = f_{nn+1}(x_{n+1})$ $\forall n$ (teljes indukció). $x_n = f_{nm}(x_m)$ $\forall (n \leq m)$, így $x \in \varprojlim (X_i, (\mathbb{N}, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$. Mivel x_1 tetszőleges volt, így $X_1 = p_1(X)$.

2. pont: A 74. definíció közvetlen következménye. Q.E.D.

79. megjegyzés. A 78. állítás 1. és 2. pontjai nem összevethetőek.

A 77. példa jól illusztrálja az a 78. állítás 1. feltételben $(I, \leq)$ felfelé irányítottságának fontosságát.

80. példa. Inverzrendszer ahol f_{ij}-k szürjektívek, $(I, \leq)$ felfelé irányított, $(I, \leq)$-nek van megszámlálható számosságú kofinális részhalmaza, de nem sorozatmaximális.

Ezen példa ötlete Millington & Sion [57]-tól való.

Legyen $X = \ell^2 \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, a valós számsorozatok terének egy részhalmaza az $\|x\| \doteq \sqrt{\Sigma_{n=1}^{\infty} x_n^2}$ normával, mint normált tér. Legyen e_1 az a sorozat, melynek első eleme 1, a többi 0. Értelemszerűen e_n az a sorozat, melynek n-ik eleme 1, a többi 0. Világos, hogy $(Lin(\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}), \| \|)$ altere $(X, \| \|)$-nek $\forall n$.

Legyenek ($\star$ a duálist jelöli)

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= Lin^\star(\{e_1\}) \\
\Omega_2 &= Lin^\star(\{e_1, e_2\}) \\
&\vdots \\
\Omega_n &= Lin^\star(\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}) \\
&\vdots \\
\Omega_\omega &= X^\star
\end{aligned}$$

Látható, hogy az indexhalmaznak $(\mathbb{N} \cup \{\omega\})$ van legnagyobb eleme ω.

Legyen $f_{ij} : \Omega_j \to \Omega_i$ $i \leq j$, hogy $f_{ij}(\lambda) \doteq \lambda|_{Lin(\{e_1, e_2, \ldots, e_i\})}$ és $\forall \lambda \in Lin^\star(\{e_1, e_2, \ldots, e_j\})$.

81. segédtétel. *f_{ij}-k szürjektívek.*

Bizonyítás. Legyen n tetszőleges, és legyen $\lambda \in \Omega_n$ szintén tetszőleges. Ekkor λ folytonos, tehát korlátos, így a Hahn-Banach-tétel értelmében kiterjeszthető korlátos, így folytonos lineáris funkcionállá Ω_ω-en. Mivel n és λ tetszőleges volt, így kész is vagyunk. Q.E.D.

Bizonyítás. 80. példa bizonyítása. A 81. lemma miatt f_{ij}-k szürjektívek, $\mathbb{N} \cup \omega$ teljesen rendezett és megszámlálható.

Legyen $\lambda^\star$ lineáris funkcionál X-en, hogy $\lambda^\star(e_n) = n$ $\forall n$. Ekkor $\lambda^\star|_{Lin(\{e_1, e_2, \ldots, e_n\})} \in \Omega_n$ $\forall n$, de $\lambda^\star$ nem korlátos, így nem is folytonos, tehát $\lambda^\star \notin \Omega$. Q.E.D.

82. megjegyzés. Ha p_i-k szürjektívek, akkor $\varprojlim(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j}) \neq \emptyset$.

83. megjegyzés. Vegyük észre, hogy nekünk a véleményrangsorok elemzésekor az indexhalmaz felfelé irányított és van megszámlálható kofinális részhalmaza. Így elég f_{ij}-k szürjektivitására koncentrálni.

A 78. állítás két feltételének különbségét a Bochner-tétel (135. tétel), a Prohorov-tétel (140. tétel) és a Bourbaki-tétel (142. tétel) összehasonlítása, ugyan egy más szempontból, de szintén megmutatja.

Látható, hogy f_{ij}-k szürjektivitása nem feltétele az inverzlimesz nemürességének (lásd a 62. példát). f_{ij}-k szürjektivitása azonban sokszor „elvárható", így a hangsúly az inverzrendszer más tulajdonságain van.

A 78. állítás *1.* pontja f_{ij}-k szürjektívitását kombinálja az indexhalmaz tulajdonságaival, annak érdekében, hogy p_i-k szürjektívek legyenek. Ha elhagyjuk f_{ij}-k szürjektívitását, akkor nem tudjuk biztosítani az inverzlimesz nemürességét (lásd a 61. példát).

84. megjegyzés. Ahhoz, hogy a mérték inverzlimeszen valószínűségi mértéket tudjunk definiálni nem csak, hogy nem üresnek kell lennie az inverzlimesznek, hanem nem szabad „összemosnia" különböző mértékű halmazokat. Ehhez nem elégséges, ha p_i-k szürjektívek, további tulajdonságokat is fel kell tennünk a mérték inverzrendszerről. Ennek illusztrálására lásd a 93. példát.

A sorozatmaximalitás segítségével biztosítható p_i-k szürjektivitása. A sorozatmaximalitás azonban nem szükséges feltétele a p_i-k szürjektivitásának (lásd a 80. példát).

Millington & Sion [57] gyengítette a sorozatmaximalitás fogalmát, mely általánosítást majdnem sorozat maximalitásrnak nevezzük.

85. definíció. Az $((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ mérték inverzrendszer majdnem sorozatmaximális (almost s.m., almost sequentially maximal),

ha tetszőleges $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \in I$ sorozathoz $\exists A_{i_n} \subseteq X_{i_n}$ halmazok, hogy

- $f^{-1}_{i_n i_m}(A_{i_n}) \subseteq A_{i_m}\ \forall (n \leq m)$,
- $\mu^{\star}_{i_n}(A_{i_n}) = 0\ \forall n$, ahol $\mu^{\star}_{i_n}(Z) = \inf_{Z \subseteq A \in \mathcal{A}_i} \mu_{i_n}(A)\ \forall Z \in \mathcal{P}(X_{i_n})$ külső mérték $\forall n$,

ha $x_{i_n} \in X_{i_n} \setminus A_{i_n}$, $x_{i_n} = f_{i_n i_{n+1}}(x_{i_{n+1}})\ \forall n$, akkor $\exists x \in P = \varprojlim(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$, hogy $x_{i_n} = p_{i_n}(x)\ \forall n$.

86. megjegyzés. Minden sorozatmaximális mérték inverzrendszer majdnem sorozatmaximális is.

Egy mérték inverzrendszer kb. akkor majdnem sorozatmaximális, ha negligálható halmazoktól eltekintve sorozatmaximális.

A következő példa egy olyan mérték inverzrendszert mutat be, mely nem sorozatmaximális, de majdnem sorozatmaximális és van mérték inverzlimesze.

87. példa. Legyen $(I, \leq)$ indexhalmaz a természetes számok halmaza $\mathbb{N}$ a szokásos rendezéssel, és legyen $X_n = [\frac{1}{n}, 0]$ $\forall n \in I$, legyen továbbá $f_{nm} = id_{X_m}$. Ekkor $(\{0\}, \delta_0) = \varprojlim((X_n, B(X_n), \delta_0), (\mathbb{N}, \leq), f_{nm}|_{n \leq m})$, ahol δ_0 a 0-ra koncentrált Dirac-mérték.

Bizonyítás. A 62. példában láttuk, hogy $\varprojlim(X_n, (\mathbb{N}, \leq), f_{nm}|_{n\leq m}) = \{0\}$. Mivel δ_0 mérték minden n-re, így a limeszben is δ_0 van.

Az f_{nm}-k nem szürjektívek, így $((X_n, B(X_n), \delta_0), (\mathbb{N}, \leq), f_{nm}|_{n\leq m})$ nem sorozatmaximális. Mivel az elhagyott pontok $(X_n \setminus \{0\})$ mértéke $\delta_0(X_n \setminus \{0\}) = 0$ $\forall n$, és $f_{nm}^{-1}((X_n \setminus \{0\}) = (X_m \setminus \{0\}$ $\forall (n \leq m)$, így $((X_n, B(X_n), \delta_0), (\mathbb{N}, \leq), f_{nm}|_{n\leq m})$ majdnem sorozatmaximális. Q.E.D.

A 78. állításban láttuk, hogy miként biztosítható az inverzlimesz megfelelő gazdagsága. Most ezt általánosítjuk mérték inverzrendszerek esetén.

88. definíció. $((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ mérték inverzrendszer esetén p_i-k majdnem szürjektívek, ha $\mu_i^\star(X_i \setminus p_i(X)) = 0$ $\forall i \in I$, ahol $\mu_i^\star(Z) = \inf_{Z\subseteq A\in\mathcal{M}_i} \mu_i(A)$ $\forall Z \in \mathcal{P}(X_i)$ külső mérték $\forall i$.

Tudjuk, hogy ha p_i-k majdnem szürjektívek, akkor $\varprojlim(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j}) \neq \emptyset$, de p_i-k majdnem szürjektivitása ellenére megtörténhet, hogy a mérték inverzrendszer különböző mértékű halmazokat „összemos" (lásd a 93. példát).

89. segédtétel. *Ha $((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ mérték inverzrendszer majdnem sorozatmaximális, akkor p_i-k majdnem szürjektívek.*

Bizonyítás. Legyen i tetszőleges, rögzített. Az $((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ mérték inverzrendszer majdnem sorozatmaximalitás, ekkor a 78. állítás miatt $p_i(X) \supseteq (X_i \setminus A_i)$ (ahol A_i a 85. definícióból való), így $\mu_i^\star(X_i \setminus p_i(X)) = 0$. Mivel i tetszőlegesen választott volt $\mu_i^\star(X_i \setminus p_i(X)) = 0$ $\forall i$. Q.E.D.

A következő állítás a 76. segédtétellel analóg.

90. segédtétel. *Tetszőleges*

$$(((X_i, \tau_i), B(X_i, \tau_i), \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j}) \tag{4.2}$$

Baire-mérték inverzrendszer esetén, ahol $(I, \leq)$ *felfelé irányított halmaz,* (X_i, τ_i) *nemüres, kompakt topologikus tér* $\forall i$*, a* (4.2) *mérték inverzrendszer majdnem sorozatmaximális.*

Bizonyítás. A 76. segédtételből következik, hogy $P = \varprojlim((X_i, \tau_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j}) \neq \emptyset$ kompakt halmaz. Tudjuk, hogy $p_i(P) \subseteq X_i$ kompakt halmaz $\forall i$, és $f_{ij}^{-1}(p_i(P)) \supseteq p_j(P)$ $\forall(i \leq j)$. Szintén a 76. segédtételből következik, hogy a $(p_i(P), (I, \leq), \hat{f}_{ij}|_{p_j(P)})$ inverzrendszer sorozatmaximális (hiszen $p_i(P)$-k kompaktak és $\hat{f}_{ij}|_{p_j(P)}$-k szürjektívek). Vegyük észre, hogy ha $\mu_{i\star}(p_i(P)) = 1$ $\forall i$, ahol $\mu_{i\star}$ a μ_i generálta belső mérték, akkor kész is vagyunk, hiszen közvetlenül alkalmazhatjuk a majdnem sorozatmaximalitás definícióját.

Indirekt tegyük fel, hogy $\exists i^\star \in I$, hogy $\mu_{i^\star\star}(p_i(P)) = \alpha < 1$. Ekkor $\exists B_{i^\star} \in B(X_{i^\star}, \tau_{i^\star})$, hogy $B_{i^\star} \supseteq (X_{i^\star} \setminus p_{i^\star}(P))$ és $\mu_{i^\star}(B_{i^\star}) = 1 - \alpha > 0$. Mivel $\mu_{i^\star}$ Baire-mérték, így reguláris, tehát $X_{i^\star}$ kompaktsága miatt kompakt reguláris, tehát $\exists A_{i^\star}$ kompakt halmaz, hogy $A_{i^\star} \subseteq B_{i^\star}$ és $\mu_{i^\star}(A_{i^\star}) = \beta > 0$, továbbá $A_{i^\star} \cap (X_{i^\star} \setminus p_{i^\star}(P)) \neq \emptyset$.

Legyen $A_i \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} f_{i^\star i}^{-1}(A_{i^\star}), & \text{ha } i^\star \leq i \\ f_{ii^\star}(A_{i^\star}), & \text{ha } i \leq i^\star \\ f_{ij}(A_j) & \text{különben, ahol } i \leq j \text{ és } i^\star \leq j \end{cases}$. A definícióból következik, hogy $A_i \neq \emptyset$ kompakt halmaz $\forall i$ (a nemürességhez kell $\mu_{i^\star}(A_{i^\star}) = \beta > 0$), és $f_{ij}(A_j) = A_i$ $\forall(i \leq j)$, ekkor

$$(A_i, (I, \leq), \hat{f}_{ij}|_{A_j}) \tag{4.3}$$

a 76. segédtétel miatt sorozatmaximális inverzrendszer. Legyen $x_{i^\star} \in A_{i^\star} \cap (X_{i^\star} \setminus p_{i^\star}(P))$ tetszőleges, rögzített. Ekkor (4.3) sorozatmaximalitása miatt $\exists x \in A = \varprojlim(A_i, (I, \leq), f_{ij}|_{A_j})$, hogy $x_{i^\star} = p_{i^\star}|_A(x)$. Azt is tudjuk azonban, hogy $p_i(x) \in A_i \subseteq X_i$ $\forall i$, tehát $x \in P$, de ekkor $x_{i^\star} \in P_{i^\star}(P)$, ami ellentmondás. Q.E.D.

91. megjegyzés. A 90. segédtételben a Baire-mérték inverzrendszer reguláris Borel-mérték (ami ebben az esetben Radon-mérték) inverzrendszerre cserélhető.

A következő állításban azt mutatjuk meg, hogy az eddigi feltételek, fogalmak segítségével mire mehetünk egy tisztán mérték inverzrendszer vizsgálatának kapcsán.

92. állítás. *Ha* $((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ *majdnem sorozatmaximális mérték inverzrendszer, ahol* $(I, \leq)$ *felfelé irányított halmaz, akkor* $(P, \mathcal{A}, \mu) = w-\varprojlim((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ *gyenge mérték inverzlimesz létezik és egyértelmű.*

Bizonyítás. A mérhető struktúrát P-n p_i^{-1}-ek definiálják. Ez a struktúra algebra, hiszen legyen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazok $\mathcal{M}$-ben, ekkor $(I, \leq)$ irányított halmaz volta miatt $\exists i \in I$, hogy $p_i^{-1}(B_1) = A_1, p_i^{-1}(B_2) = A_2, \ldots, p_i^{-1}(B_n) = A_n$, $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{M}_i$. De $\mathcal{M}_i$ σ-algebra, és p_i mérhető, így $\mathcal{A}$ algebra.

Definiáljuk μ-t, $\mu(p_i^{-1}(B)) = \mu_i(B)\ \forall i \in I$, $B \in \mathcal{M}_i$. A majdnem sorozatmaximalitás feltétel miatt p_i-k majdnem szürjektívek, így μ jól definiált. Tegyük fel az ellenkezőjét, tehát, hogy μ nem egyértelmű. Ekkor $\exists A \in \mathcal{M}_i$ és $\exists B \in \mathcal{M}_j$, hogy $p_i^{-1}(A) = p_j^{-1}(B)$, de $\mu_i(A) \neq \mu_j(B)$. Ekkor azonban p_i-k majdnem szürjektivitása, és $(I, \leq)$ felfelé irányítottsága miatt $\exists k \in I$, hogy $f_{ik}^{-1}(A) = f_{jk}^{-1}(B)$, de $\mu_k(C) \neq \mu_k(C)$, ahol $C = f_{ik}^{-1}(A) = f_{jk}^{-1}(B)$, ami ellentmondás.

μ additivitásának bizonyítása a következő: legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ páronként diszjunkt halmazok $\mathcal{A}$-ban, ekkor $(I, \leq)$ irányított halmaz volta miatt $\exists i \in I$, hogy $p_i^{-1}(B_1) = A_1, p_i^{-1}(B_2) = A_2, \ldots, p_i^{-1}(B_n) = A_n$, $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{M}_i$, . De $\mathcal{M}_i$ σ-algebra, μ_i σ-additív, és p_i mérhető, így μ $\mathcal{A}$ algebrán additív. Q.E.D.

Összefoglalva az eddig leírtakat, ha mérték inverzrendszert vizsgálunk, akkor két megkerülhetetlen problémába ütközünk bele:

1. milyen sok mérhető halmaz van az inverzlimeszben,

2. létezik-e a kívánt mérték az inverzlimesz mérhető halmazain, tehát μ σ-additív-e az előző állításban (a 92. segédtételben).

A 77. példában láttuk, hogy $(I, \leq)$ felfelé irányítottsága fontos tulajdonság. A következő példa azt illusztrálja, hogy a sorozatmaximalitás/majdnem sorozatmaximalitás feltétel nem váltja ki $(I, \leq)$ felfelé irányítottságát, tehát a 92. állításban nem hagyható el $(I, \leq)$ felfelé irányítottsága.

93. példa. Legyen $I = \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Legyen $i_3 \leq i_1$, $i_3 \leq i_2$, $i_4 \leq i_1$, $i_4 \leq i_2$, i_1 ne legyen relációban i_2-vel, és i_3 ne legyen relációban i_4-gyel.

Legyenek $X_{i_1} = X_{i_2} = \{1, 2, 3, 4\}$, $X_{i_3} = X_{i_4} = \{1, 2\}$.

Legyenek

$$f_{i_3 i_1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1,2 \\ 2, & \text{ha } x = 3,4 \end{cases},$$

$$f_{i_3 i_2}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 2,3 \\ 2, & \text{ha } x = 1,4 \end{cases},$$

$$f_{i_4 i_1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1,3 \\ 2, & \text{ha } x = 2,4 \end{cases},$$

$$f_{i_4 i_2}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1,3 \\ 2, & \text{ha } x = 2,4 \end{cases}.$$

Ekkor $P = \varprojlim(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j}) = \left\{ \begin{array}{c} (1,3,1,1) \\ (2,2,1,2) \\ (3,1,2,1) \\ (4,4,2,3) \end{array} \right\}$.

Könnyen látható, hogy $(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ inverzrendszer sorozatmaximális.

Legyenek

$\mu_{i_1}(\{1\}) = \frac{1}{2}$, $\mu_{i_1}(\{2\}) = 0$, $\mu_{i_1}(\{3\}) = 0$, $\mu_{i_1}(\{4\}) = \frac{1}{2}$,

$\mu_{i_2}(\{1\}) = \frac{1}{2}$, $\mu_{i_2}(\{2\}) = \frac{1}{2}$, $\mu_{i_2}(\{3\}) = 0$, $\mu_{i_2}(\{4\}) = 0$,

$\mu_{i_3}(\{1\}) = \frac{1}{2}$, $\mu_{i_3}(\{2\}) = \frac{1}{2}$,

$\mu_{i_4}(\{1\}) = \frac{1}{2}$, $\mu_{i_4}(\{2\}) = \frac{1}{2}$.

Látható, hogy $((X_i, \mathcal{P}(X_i), \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ mérték inverzrendszer majdnem sorozatmaximális, de $w - \varprojlim(X_i, \mathcal{P}(X_i), \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ nem létezik.

94. megjegyzés. A gyenge mérték inverzlimesz létezésével kapcsolatban megállapíthatjuk, hogy ha a mérték inverzrendszer majdnem sorozatmaximális, akkor p_i-k majdnem szürjektívek, és így az inverzlimesz nem üres. Ekkor azonban még előfordulhat, hogy különböző mértékű halmazokat összemos a mérték inverzrendszer. Ha azonban feltesszük még, hogy $(I, \leq)$ indexhalmaz felfelé irányított, akkor a gyenge mérték inverzlimesz már létezik.

95. megjegyzés. A 92. állításban nem csak létezést, hanem egyértelműséget is kimondtunk. A későbbi fejezetekben, az alkalmazás során látjuk majd, hogy az egyértelműség szintén nagyon fontos kérdés.

4.3. A kompaktság fogalma és szerepe

A kompaktság fogalmának használata elterjedt az inverzrendszerek irodalmában. A kompaktság talán azért is olyan sikeres, mert szerepe nem egyértelmű. Az előző alfejezet vége felé említett mindkét kérdés esetén felmerül a kompaktság fogalma a válaszokban.

96. definíció. Jelölje $B(X, \tau)$ az (X, τ) topologikus tér Borel halmazait. Legyen $\mu : B(X, \tau) \to \mathbb{R}$ σ-additív halmazfüggvény.

1. $\forall x \in X$-hez $\exists O \in \tau$ nyílt halmaz, hogy $x \in O$, és $\mu(O) < \infty$,
2. $\mu(A) = \sup(C \mid C \subseteq A)$, C kompakt, zárt $\forall A \in B(X, \tau)$.

Az 1.,2. tulajdonsággal rendelkező halmazfüggvényt Radon-mértéknek hívjuk.

A Radon-mértékek olyan mértékek, melyek szorosak a kompakt, zárt halmazokon. Más szavakkal, a Radon-mérték által hordozott információ a kompakt, zárt halmazokra koncentrálódik.

97. definíció. Legyen $\mathcal{C}$ halmazrendszer. $\mathcal{C}$ σ-kompakt halmazrendszer, ha tetszőleges $C_n \in \mathcal{C}$ $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $\cap_n C_n = \emptyset$, akkor $\exists m \in \mathbb{N}$, hogy $\cap_{n=1}^m C_n = \emptyset$.

98. következmény. *A σ-kompaktság burok tulajdonság.*

Bizonyítás. Azt kell csak látni, hogy $\mathcal{C}_\lambda$ σ-kompakt halmazrendszerek metszete is σ-kompakt.

Legyen $\mathcal{C} = \cap_\lambda \mathcal{C}_\lambda$, és legyen $C_n \in \mathcal{C}$ $n \in \mathbb{N}$, hogy $\cap_n C_n = \emptyset$. Ekkor $C_n \in \mathcal{C}_\lambda$ $\forall n \forall \lambda$, így $\lambda^\star$ rögzítettre is, tehát $\exists m \in \mathbb{N}$, hogy $\cap_{n=1}^m C_n = \emptyset$. Q.E.D.

A továbbiakban $\mathcal{C}$ σ-kompakt halmazrendszer σ-kompakt burkát $\sigma c(\mathcal{C})$-vel jelöljük.

99. állítás. *Legyen $\mathcal{C}$ σ-kompakt halmazrendszer. Ekkor*

1. *$\sigma c(\mathcal{C})$ tartalmazza a véges számosságú halmazokat,*
2. *$\sigma c(\mathcal{C})$ $\cup_f$-re, a véges unióra zárt,*
3. *$\sigma c(\mathcal{C})$ $\cap_c$-re, a megszámlálható metszetre zárt.*

Bizonyítás. A bizonyításokat pontonként látjuk:

1. Lásd a 97. definíciót.

2. Legyenek $\mathcal{C}_n$, hogy $\mathcal{C}_n = \cup_{j=1}^{k(n)} \mathcal{C}_{nj}$, és $\mathcal{C}_{nj} \in \mathcal{C}$ $\forall n$, $\forall j$, $k(n) \in \mathbb{N}$. Legyen $F = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f(n) \le k(n)\ \forall n\}$, ekkor $\cap_n C_n = \cap_n (\cup_{j=1}^{k(n)} \mathcal{C}_{nj}) = \cup_{f \in F} (\cap_n \mathcal{C}_{nf(n)})$.

   Tfh. $\cap_n \mathcal{C}_n = \emptyset$, ekkor $\cap_n \mathcal{C}_{nf(n)} = \emptyset$ $\forall f \in F$. Mivel $\mathcal{C}_{nf(n)}$-ek σ-kompaktak, így $\forall f \in F$-re $\exists k(f) \in \mathbb{N}$, hogy $\cap_{j=1}^{k(f)} \mathcal{C}_{jf(j)} = \emptyset$.

   Tudjuk, hogy $F = \times_{n \in \mathbb{N}} \{1, \ldots, k(n)\}$, így a Tyihonov-tétel miatt F kompakt halmaz. Legyen $G : F \to \mathbb{N}$, hogy $G(f) \stackrel{\circ}{=} k(f)$ $\forall f \in F$. Legyenek $f, g \in F$ tetszőlegesek, és legyen $d(f, g) \stackrel{\circ}{=} \frac{d_E(f(n), g(n))}{2^{n+1}}$, ahol $d_E(\cdot, \cdot)$ az Euklideszi-metrikát jelöli. Legyen $f \in F$ tetszőleges, rögzített, és legyen $O \stackrel{\circ}{=} \{g \in F \mid d(f, g) < \frac{1}{2^{k(f)+1}}\}$, ekkor ha $g \in O$, akkor g és f első $k(f)$ komponense megegyezik. Ebből következik, hogy G függvény folytonos.

   A G folytonos függvény F kompakt halmazon felveszi maximumát, legyen ez a maximum $m^\star \in \mathbb{N}$. Az előzőekből következik, hogy $\cap_{j=1}^{m^\star} C_{jf(j)} = \emptyset$ $\forall f$, tehát $\cup_{f \in F} \cap_{j=1}^{m^\star} C_{jf(j)} = \emptyset$, így $\cap_{n=1}^{m^\star} \cup_{j=1}^{k(n)} C_{nj} = \emptyset$.

3. Legyenek $\mathcal{C}_n \in \mathcal{C}$, hogy $\mathcal{C}_n = \cap_k \mathcal{C}_{nk}$ $\mathcal{C}_{nk} \in \sigma c(\mathcal{C})$ $\forall n, k$. Ekkor $\cap_n C_n = \cap_n \cap_k \mathcal{C}_{nk} = \emptyset$, mivel $\mathcal{C}_{nk}$ halmazok megszámlálhatóan sokan vannak és σ-kompaktak, így $\exists m$, $\exists j$, $m, j \in \mathbb{N}$, hogy $\cap_{n=1}^{m} \cap_{k=1}^{j} \mathcal{C}_{nk} = \emptyset$, tehát $\cap_{n=1}^{m} \mathcal{C}_n = \emptyset$.

Q.E.D.

100. definíció. Legyen $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$ halmazrendszer $\mathcal{A}$ félgyűrű, és legyen μ $\mathcal{A}$-n értelmezett monoton halmazfüggvény. Legyen $\mu^\star$ $\mathcal{P}(X)$-en értelmezett külső mérték. Ekkor $\mathcal{C}$ halmazrendszer $\mu^\star$-majdnem σ-kompakt, ha tetszőleges $C_n \in \mathcal{C}$, $n \in \mathbb{N}$ esetén, $\exists A \subseteq X$ $\mu^\star(A) = 0$, hogy ha $\cap_n C_n = \emptyset$, akkor $\exists m \in \mathbb{N}$, hogy $\complement A \cap (\cap_{n=1}^{m} C_n) = \emptyset$.

101. következmény. *Egy $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér σ-kompakt halmazrendszere μ-majdnem σ-kompakt halmazrendszer.*

A μ-majdnem σ-kompaktság ilyetén definíciójának oka a majdnem sorozatmaximalitás fogalmából (a 85. definíció), és a 129. állításból érthető meg.

102. segédtétel. *Legyen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ gyűrű, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ μ-majdnem σ-kompakt halmazrendszer, ahol μ $\mathcal{A}$-n értelmezett, véges, additív halmazfüggvény, mely szoros $\mathcal{C}$-n. Ekkor μ σ-additív $\mathcal{A}$-n.*

Bizonyítás. A bizonyítás arra a gondolatra épül, hogy gyűrűn, a $\emptyset$-ban felülről folytonosság ekvivalens a σ-additivitással.

Legyen A_n halmazsorozat, hogy $A_n \supseteq A_{n+1}$, $\cap_n A_n = \emptyset$, $A_n \in \mathcal{A}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tfh. $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \nrightarrow 0$, tehát $\exists \epsilon > 0$, hogy $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) > \epsilon$. μ szorossága miatt, tetszőleges $\kappa > 0$, esetén, $\forall A_n$-hoz $\exists C_n \in \mathcal{C}$, hogy $C_n \subseteq A_n$, és $\mu(A_n \setminus C_n) < \frac{\kappa}{2^{n+1}}$. Világos, hogy $\forall m \in \mathbb{N}$-re, $\cap_{n=1}^m C_n \subseteq A_n$, és

$$\mu(A_m \setminus (\cap_{n=1}^m C_n)) \leq \mu(\cup_{n=1}^m (A_n \setminus C_n)) \leq \sum_{n=1}^m \mu(A_n \setminus C_n) < \kappa.$$

Mivel $\cap_n A_n = \emptyset$, $C_n \subseteq A_n$, így $\cap_n C_n = \emptyset$. $\mathcal{C}$ μ-majdnem σ-kompakt halmazrendszer, tehát $\exists A \subseteq X$, hogy $\mu^\star(A) = 0$, és $\exists m^\star \in \mathbb{N}$, hogy $\complement A \cap (\cap_{n=1}^{m^\star} C_n) = \emptyset$. Legyen $\kappa = \epsilon$, ekkor

$$\mu_\star(A_m \setminus (\complement A \cap (\cap_{n=1}^m C_n))) \leq \mu(A_m \setminus (\cap_{n=1}^m C_n)) \leq \epsilon \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

ahol $\mu_\star$ a belső mértéket jelöli.

$$\lim_{m\to\infty} \mu_\star(A_m \setminus (\complement A \cap (\cap_{n=1}^m C_n))) \leq \lim_{m\to\infty} \mu(A_m \setminus (\cap_{n=1}^m C_n)) \leq \epsilon,$$

$$\lim_{m\to\infty} \mu_\star(A_m \setminus (\complement A \cap (\cap_{n=1}^m C_n))) = \lim_{m\to\infty} \mu_\star(A_m) = \lim_{m\to\infty} \mu(A_m) \leq \epsilon,$$

de $\mu(A_m) > \epsilon$, ami ellentmondás, tehát $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \to 0$.

Legyen $A_n \in \mathcal{A}$ diszjunkt halmazok, hogy $A = \cup_n A_n$, és $A \in \mathcal{A}$. Legyen $B_n = A \setminus (\cup_{m=1}^n A_m)$, ekkor $B_n \supseteq B_{n+1}$, $B_n \in \mathcal{A}$ $\forall n$, és $\cap_n B_n = \emptyset$.

$$\mu(A) = \mu(B_n) + \mu(\cup_{m=1}^n A_m) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

μ additivitása miatt:

$$\mu(A) = \mu(B_n) + \sum_{m=1}^n \mu(A_m) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) + \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^n \mu(A_m)$$

$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \to 0$ miatt:

$$\mu(A) = \sum_n \mu(A_n).$$

Q.E.D.

103. megjegyzés. Sajnos $\sigma c(\cdot)$ nem gyűrű, így a σ-additivitás kérdése külön elemzést igényel.

A kompakt halmazok szerepét a következő állítás világítja meg:

104. következmény. *Jelölje $B(X,\tau)$ az (X,τ) topologikus tér Borel halmazait. Legyen $\mathcal{A} \subseteq B(X,\tau)$ gyűrű, legyen továbbá $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ véges, additív halmazfüggvény, mely szoros a kompakt, zárt halmazokon. Ekkor μ σ-additív $\mathcal{A}$-n.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy egy topologikus tér kompakt, zárt halmazai σ-kompakt halmazrendszert alkotnak, így 102. segédtételből következik az állítás. Q.E.D.

105. következmény. *Jelölje $B(X,\tau)$ az (X,τ) Hausdorff topologikus tér Borel halmazait. Legyen $\mathcal{A} \subseteq B(X,\tau)$ gyűrű, továbbá $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ véges, additív halmazfüggvény, mely szoros a kompakt halmazokon, ekkor μ σ-additív $\mathcal{A}$-n.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy egy Hausdorff topologikus tér kompakt halmazai σ-kompakt halmazrendszert alkotnak, így a 102. segédtételből következik az állítás. Q.E.D.

Tehát a végesség, a kompakt regularitás és az additivitás együttesen σ-additivitást eredményez.

Fontos látni, hogy a 102. segédtétel bizonyításában a kompakt, zárt halmazok tulajdonsága, hogy $\cap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda = \emptyset$-ből következik, hogy $\exists k \in \mathbb{N}$, melyre $\cap_{n=1}^{k} C_n = \emptyset$, túl erős. A bizonyításban csak azt használjuk fel, hogy ha $\cap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \emptyset$-ből következik, hogy $\exists k \in \mathbb{N}$, hogy $\cap_{n=1}^{k} C_n = \emptyset$. Tehát csak a megszámlálható sok metszet ürességéből következik a véges metszet tulajdonság. Ezt az utóbbit, a megszámlálható metszet kompaktságot neveztük el σ-kompaktságnak.

4.4. A mértékkiterjesztés problémája

A mértékkiterjesztési tételek jól dokumentált részei az irodalomnak. A következőkben specifikusan, a minket érdeklő formában, mondjuk ki azokat a tételeket, melyekre a későbbiekben hivatkozni szándékozunk.

106. tétel. *Legyen μ valószínűségi mérték (illetve legyen $\mu(X) = \alpha < \infty$) $\mathcal{A}$ félgyűrűn. Ekkor μ kiterjeszthető $\sigma(\mathcal{A})$-ra, és a kiterjesztés egyértelmű.*

Bizonyítás. Lásd pl. Medvegyev [54]. Q.E.D.

Fontos, hogy ha μ szoros a zárt halmazokon, tehát $\mathcal{A}$ mögött topológia van, ekkor a kiterjesztésen, $\sigma(\mathcal{A})$-n, is szoros μ a zárt halmazokon.

107. segédtétel. *Legyen (X, τ) topologikus tér, $\mathcal{A} \subseteq B(X, \tau)$ félgyűrű ($B(X, \tau)$ (X, τ) Borel halmazait jelöli), hogy $X \in \mathcal{A}$, és legyen μ véges mérték $\mathcal{A}$-n. Ha μ szoros a zárt halmazokon, akkor μ egyértelműen kiterjeszthető $\sigma(\mathcal{A})$-ra, mint olyan mérték, mely szoros a zárt halmazokon.*

Bizonyítás. A 106. tétel miatt μ kiterjesztése létezik és egyértelmű. Legyen ez a kiterjesztés ν, ekkor természetesen $(\sigma(\mathcal{A}), \nu)$ valószínűségi mértéktér.

Legyen $A \in \mathcal{A}$ tetszőleges, ekkor $\complement A = \cup_{n=1}^{k} A_n$ $A_n \in \mathcal{A}$, és $k \in \mathbb{N}$. Ekkor $\forall \epsilon > 0$ esetén μ szorossága miatt $\exists Z_n \in \mathcal{A}$ zárt halmazok, hogy $\nu(A_n \setminus Z_n) < \frac{\epsilon}{k+1}$ $\forall n$, így $Z = \cup_{n=1}^{k} Z_n$ zárt, $Z \in \sigma(\mathcal{A})$, és $\nu(A \setminus Z) < \epsilon$. Tehát a generált algebrán ν mérték szoros a zárt halmazokon.

Azt mutatjuk meg, hogy azon halmazrendszer, ahol ν szoros a zárt halmazokon, az monoton osztály. Legyen $\mathcal{M}$ azon halmazrendszer, ahol ν szoros a zárt halmazokon. Világos, hogy $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$.

Legyen $A_{n+1} \subseteq A_n$ halmazsorozat, $A_n \in \mathcal{M}$ $\forall n$. Legyen $\epsilon > 0$ tetszőleges, $\forall n$-re létezik $Z_n \in \mathcal{M}$ zárt halmaz, hogy $\nu(A_n \setminus Z_n) \leq \frac{\epsilon}{2^{n+2}}$. Legyen $A = \cap_n A_n$, és legyen $Z = \cap_n Z_n$ zárt, ekkor $Z \subseteq A$, és $\forall m \in \mathbb{N}$-re

$$\nu(A_m \setminus (\cap_{n=1}^{m} Z_n)) = \nu(\cup_{n=1}^{m} (A_n \setminus Z_n)) \leq \sum_{n=1}^{m} \nu(A_n \setminus Z_n) < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

$$\nu(A \setminus Z) = \nu(A) - \nu(Z) = \lim_{n\to\infty} \nu(\cap_n A_n) - \lim_{n\to\infty} \nu(\cap_n Z_n) = \lim_{n\to\infty} (\nu(\cap_n A_n) - \nu(\cap_n Z_n)) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\nu(A_n) - \nu(\cap_n Z_n)) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n \setminus \cap_n Z_n) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Legyen $A_n \subseteq A_{n+1}$ halmazsorozat, $A_n \in \mathcal{M}$ $\forall n$. Legyen $\epsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített, $A = \cup_n A_n$. Mivel $\lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \nu(A)$, így $\exists m$, hogy $\nu(A) - \nu(A_m) = \nu(A \setminus A_m) \leq \frac{\epsilon}{4}$, és $\exists Z_m \in \mathcal{M}$ zárt, hogy $\nu(A_m) - \nu(Z_m) = \nu(A_m \setminus Z_m) \leq \frac{\epsilon}{4}$.

A két egyenlőséget összegezve: $\nu(A) - \nu(Z_m) = \nu(A \setminus Z_m) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Q.E.D.

Természetesen hasonlóan megmarad a szorosság a kompakt, zárt halmazokon.

108. következmény. *Legyen (X, τ) topologikus tér, $\mathcal{A} \subseteq B(X, \tau)$ félgyűrű ($B(X, \tau)$ (X, τ) Borel halmazait jelöli), hogy $X \in \mathcal{A}$, és legyen μ véges mérték $\mathcal{A}$-n. Ha μ szoros a kompakt, zárt halmazokon, akkor μ egyértelműen kiterjeszthető $\sigma(\mathcal{A})$-ra, mint olyan mérték, mely szoros* *a kompakt, zárt halmazokon.*

Bizonyítás. Lásd a 107. segédtétel bizonyítását. Q.E.D.

Hasonlóan megmarad a szorosság a kompakt halmazokon Hausdorff-terek esetén.

109. következmény. *Legyen (X, τ) Hausdorff topologikus tér, $\mathcal{A} \subseteq B(X, \tau)$ félgyűrű ($B(X, \tau)$ (X, τ) Borel halmazait jelöli), hogy $X \in \mathcal{A}$, és legyen μ véges mérték $\mathcal{A}$-n. Ha μ szoros a kompakt halmazokon, akkor μ egyértelműen kiterjeszthető $\sigma(\mathcal{A})$-ra, mint olyan mérték, mely szoros a kompakt halmazokon.*

Bizonyítás. Lásd a 107. segédtétel bizonyítását. Q.E.D.

A következőkben a Henry-féle kiterjesztési tételt készítjük elő.

110. segédtétel. *Legyen (X, τ) topologikus tér, $\mathcal{A} \subseteq B(X, \tau)$ félgyűrű ($B(X, \tau)$ (X, τ) Borel halmazait jelöli), hogy $X \in \mathcal{A}$, és μ additív, véges halmazfüggvény. Legyen μ szoros a zárt halmazokon, és legyen $Z \in B(X)$ tetszőleges zárt halmaz, hogy $Z \notin \mathcal{A}$. Ekkor μ kiterjeszthető $subring(\mathcal{A} \cup \{Z\})$-re, mint olyan additív halmazfüggvény, mely szoros a zárt halmazokon.*

Bizonyítás. Legyen

$$\mathcal{B} \stackrel{\circ}{=} \{B = (A_1 \cap Z) \cup (A_2 \cap \complement Z) \quad A_1, A_2 \in \mathcal{A}\} \tag{4.4}$$

Ha $A_1 = X$ és $A_2 = \emptyset$, akkor $B = Z$, tehát $Z \in \mathcal{B}$, továbbá ha $A_1 = A_2$, akkor $B = A_1 = A_2$, tehát $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, így $\mathcal{B} \subseteq subring(\mathcal{A} \cup \{Z\})$.

Legyen

$$B_1 = (A_1 \cap Z) \cup (A_2 \cap \complement Z),$$

ahol $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. Legyen továbbá

$$B_2 = (A_3 \cap Z) \cup (A_4 \cap \complement Z),$$

ahol $A_3, A_4 \in \mathcal{A}$.

Azt fogjuk belátni, hogy $\mathcal{B}$ félgyűrű.

1. $\emptyset \in \mathcal{B}$ nyilvánvalóan teljesül.

2. $B_1 \cap B_2 = ((A_1 \cap Z) \cup (A_2 \cap \complement Z)) \cap ((A_3 \cap Z) \cup (A_4 \cap \complement Z)) = (A_1 \cap A_3 \cap Z) \cup (A_2 \cap A_4 \cap \complement Z)$. Mivel $\mathcal{A}$ félgyűrű, így $(A_1 \cap A_3), (A_2 \cap A_4) \in \mathcal{A}$, tehát $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$.

3. $B_1 \setminus B_2 = B_1 \cap \complement B_2 = ((A_1 \cap Z) \cup (A_2 \cap \complement Z)) \cap ((\complement A_3 \cup \complement Z) \cap (\complement A_4 \cup Z)) = ((A_1 \cap Z) \cup (A_2 \cap \complement Z)) \cup (A_1 \cap \complement A_3 \cup \complement A_4 \cap Z) \cup (A_1 \cap \complement A_3 \cap Z) \cup (A_2 \cap \complement A_3 \cap \complement A_4 \cap \complement Z) \cup (A_2 \cap \complement A_4 \cap \complement Z) = ((A_1 \cap \complement A_3 \cap Z) \cup (A_2 \cap \complement A_4 \cap \complement Z))$. $\mathcal{A}$ tulajdonságai miatt $\exists n_3, n_4 \in \mathbb{N}$, hogy $\complement A_3 = \cup_{i=1}^{n_3} A_3^i$ és $\complement A_4 = \cup_{j=1}^{n_4} A_4^j$, ahol $A_3^i, A_4^j \in \mathcal{A}$ $\forall i$, $\forall j$, továbbá A_3^i-k is és A_4^j-k is páronként diszjunktak. Tfh. $n_3 \geq n_4$ (ha $n_4 \geq n_3$ eset tárgyalása teljesen megegyezik a $n_3 \geq n_4$ eset tárgyalásával.) Ekkor legyen
$$A_4^i = \begin{cases} A_4^j, & \text{ha } i = j \leq n_4 \\ \emptyset & \text{különben} \end{cases}.$$
Legyen $B_i = (A_1 \cap A_3^i \cap Z) \cup (A_2 \cap A_4^i \cap \complement Z)$ $i = 1, 2, \ldots, n_3$. Ekkor B_i-k páronként diszjunkt halmazok, $B_i \in \mathcal{B}$ $\forall i$, és $B_1 \setminus B_2 = \cup_{i=1}^{n_3} B_i$.

Az 1., 2., 3. pontokból következik, hogy $\mathcal{B}$ félgyűrű, tehát $subring(\mathcal{A} \cup \{Z\}) \subseteq \mathcal{B}$, így $\mathcal{B} = subring(\mathcal{A} \cup \{Z\})$.

Legyen

$$\mu_{\mathcal{B}} \triangleq \mu^\star(B \cap Z) + \mu_\star(B \cap \complement Z) \tag{4.5}$$

$\forall B \in \mathcal{B}$-re.

Először azt mutatjuk meg, hogy $\mu_{\mathcal{B}}$ additív. Legyen $\epsilon > 0$ tetszőleges. Legyenek továbbá $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, hogy $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B}$, ekkor $A_1 \cap A_3 = \emptyset$ és $A_2 \cap A_4 = \emptyset$, továbbá $A_1 \cup A_3 \in \mathcal{A}$ és $A_2 \cup A_4 \in \mathcal{A}$. Ekkor (4.5) miatt $\exists (F_1, F_2, F_3, F_4) \in \mathcal{A}$, hogy $F_1 \supseteq A_1 \cap Z$ és $\mu(F_1) - \mu^\star(A_1 \cap Z) < \frac{\epsilon}{4}$, $F_2 \subseteq A_2 \cap \complement Z$ és $\mu_\star(A_2 \cap \complement Z) - \mu(F_2) < \frac{\epsilon}{4}$, $F_3 \supseteq A_3 \cap Z$ és $\mu(F_3) - \mu^\star(A_3 \cap \complement Z) < \frac{\epsilon}{4}$, $F_4 \subseteq A_4 \cap \complement Z$ és $\mu_\star(A_4 \cap \complement Z) - \mu(F_4) < \frac{\epsilon}{4}$. Tudjuk, hogy

$$\begin{gathered} |\mu_{\mathcal{B}}(B_1 \cup B_2) - \mu^\star((A_1 \cap Z) \cup (A_3 \cap Z)) - \mu_\star((A_2 \cap \complement Z) \cup (A_4 \cap \complement Z))| \leq \\ |\mu_{\mathcal{B}}(B_1 \cup B_2) - \mu^\star(A_1 \cap Z) - \mu^\star(A_3 \cap Z) - \mu_\star(A_2 \cap \complement Z) - \mu_\star(A_4 \cap \complement Z)| < \frac{\epsilon}{2} \end{gathered} \tag{4.6}$$

Azt is tudjuk, hogy

$$|\mu_{\mathcal{B}}(B_1) + \mu_{\mathcal{B}}(B_2) - \mu^\star(A_1 \cap Z) - \mu^\star(A_3 \cap Z) - \mu_\star(A_2 \cap \complement Z) - \mu_\star(A_4 \cap \complement Z)| < \frac{\epsilon}{2} \tag{4.7}$$

(4.6) és (4.7) miatt:

$$|\mu_{\mathcal{B}}(B_1) + \mu_{\mathcal{B}}(B_2) - \mu_{\mathcal{B}}(B_1 \cup B_2)| < \epsilon$$

Mivel ϵ tetszőlegesen választott volt, így kész is vagyunk.

Most azt mutatjuk meg, hogy $\mu_{\mathcal{B}}$ szoros a zárt halmazokon. Legyen B_1 halmaz, ekkor μ zárt halmazokon való szorossága miatt $\exists Z_1 \in \mathcal{A}$ zárt halmaz, hogy $Z_1 \subseteq A_1$ és $\mu(A_1) - \mu(Z_1) < \frac{\epsilon}{2}$. Ekkor $(Z_1 \cap Z) \in \mathcal{B}$ és $\mu^\star(A_1 \cap Z) - \mu^\star(Z_1 \cap Z) < \frac{\epsilon}{2}$. (4.5) miatt $\exists A_3 \in \mathcal{A}$, hogy $A_3 \subseteq A_2 \cap \complement Z$, és $\mu_\star(A_2 \cap \complement Z) - \mu(A_3) < \frac{\epsilon}{4}$. μ zárt halmazokon való szorossága miatt $\exists Z_2 \in \mathcal{A}$ zárt halmaz, hogy $Z_2 \subseteq A_3$ és $\mu(A_3) - \mu(Z_2) < \frac{\epsilon}{4}$. A két egyenlőtlenséget összeadva: $\mu_\star(A_2 \cap \complement Z) - \mu(Z_2)$. Világos, hogy $Z_1 \cap Z$ és Z_2 zárt halmazok ($Z_2 \subseteq \complement Z$), és diszjunktak. Legyen $Z_3 = (Z_1 \cap Z) \cup Z_2$, ekkor (4.4) miatt $Z_3 \in \mathcal{B}$. (4.5) miatt $\mu_{\mathcal{B}}(B_1) - \mu_{\mathcal{B}}(Z) = \mu^\star(B_1 \cap Z) - \mu^\star(Z_3 \cap Z) + \mu_\star(B_1 \cap \complement Z) - \mu_\star(Z_3 \cap \complement Z) < \epsilon$. Mivel ϵ tetszőlegesen választott volt, így kész is vagyunk. Q.E.D.

111. következmény. *Legyen (X, τ) topologikus tér, $\mathcal{A} \subseteq B(X, \tau)$ félgyűrű ($B(X, \tau)$ (X, τ) Borel halmazait jelöli), hogy $X \in \mathcal{A}$, és μ additív, véges halmazfüggvény. Legyen μ szoros a kompakt, zárt halmazokon, és legyen $Z \in B(X)$ tetszőleges zárt halmaz, hogy $Z \notin \mathcal{A}$. Ekkor μ kiterjeszthető subring$(\mathcal{A} \cup \{Z\})$-ra, mint olyan additív halmazfüggvény, mely szoros a kompakt, zárt halmazokon.*

Bizonyítás. Lásd a 110. segédtétel bizonyítását. Q.E.D.

112. következmény. *Legyen (X, τ) topologikus tér, $\mathcal{A} \subseteq B(X, \tau)$ félgyűrű ($B(X, \tau)$ (X, τ) Borel halmazait jelöli), hogy $X \in \mathcal{A}$, és μ additív, véges halmazfüggvény, (X, τ) Hausdorff topologikus tér. Legyen μ szoros a kompakt halmazokon, és legyen $Z \in B(X)$ tetszőleges zárt halmaz, hogy $Z \notin \mathcal{A}$. Ekkor μ kiterjeszthető subring$(\mathcal{A} \cup \{Z\})$-ra, mint olyan additív halmazfüggvény, mely szoros a kompakt halmazokon.*

Bizonyítás. Lásd a 110. segédtétel bizonyítását. Q.E.D.

A következő tétel a Henry-féle kiterjesztési tétel.

113. tétel (Henry-féle kiterjesztési tétel). *Legyen (X, τ) topologikus tér, és legyen $A \subseteq B(X, \tau)$ félgyűrű ($B(X, \tau)$ (X, τ) Borel halmazait jelöli), hogy $X \in \mathcal{A}$. Ha μ $\mathcal{A}$-n additív, véges halmazfüggvény, mely szoros a zárt halmazokon, akkor μ kiterjeszthető $B(X, \tau)$-re, mint véges, additív halmazfüggvény, mely szoros a zárt halmazokon.*

A bizonyítást darabokra szedjük:

114. definíció. Legyenek $(\mathcal{A}_\alpha, \mu_\alpha)$ rendszerek, ahol $\mathcal{A}_\alpha \subseteq B\ (X,\tau)$ félgyűrű, hogy $\forall\alpha$-ra: $X \in \mathcal{A}_\alpha$, μ_α $\mathcal{A}_\alpha$-n additív, véges halmazfüggvény, mely szoros a zárt halmazokon, és $\mu_\alpha|_\mathcal{A} = \mu$. Ekkor $(\mathcal{A}_\alpha, \mu_\alpha) \leq (\mathcal{A}_\beta, \mu_\beta)$ ha $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{A}_\beta$, és $\mu_\alpha = \mu_\beta|_{\mathcal{A}_\alpha}$.

115. segédtétel. $((\mathcal{A}_\alpha, \mu_\alpha), \leq)$ *induktívan rendezett halmaz.*

Bizonyítás. Legyen α_x tetszőleges lánc, és legyen μ' halmazfüggvény $\mathcal{A}' = \cup_x \mathcal{A}_{\alpha_x}$-en, hogy $\mu(A) = \mu_{\alpha_n}(A)$, $A \in \mathcal{A}_{\alpha_x}$. Világos, hogy μ additív, véges halmazfüggvény, mely szoros a zárt halmazokon, és $(\mathcal{A}_{\alpha_x}, \mu_{\alpha_x}) \leq (\mathcal{A}', \mu')\ \forall x$. Q.E.D.

116. következmény. *Zorn-Lemma miatt* $((\mathcal{A}_\alpha, \mu_\alpha), \leq)$*-nek van maximális eleme* $(\mathcal{N}, \nu)$.

Bizonyítás. A 113. tétel bizonyítása. A 110. segédtétel és a 116. következmény miatt $(\mathcal{N}, \nu)$ maximális elem esetén $\mathcal{N} \supseteq B(X,\tau)$, ν additív, szoros a zárt halmazokon, és $\nu|_\mathcal{A} = \mu$. Q.E.D.

Fontos látni, hogy a kiterjesztés nem egyértelmű, hiszen a bizonyítás a Zorn-lemmán alapul.

117. következmény. *Legyen* (X,τ) *topologikus tér, és legyen* $A \subseteq B(X,\tau)$ *félgyűrű* ($B(X,\tau)$ (X,τ) *Borel halmazait jelöli), hogy* $X \in \mathcal{A}$. *Ha* μ $\mathcal{A}$*-n additív, véges halmazfüggvény, mely szoros a kompakt, zárt halmazokon, akkor* μ *kiterjeszthető* $B(X,\tau)$*-re, mint olyan véges, additív halmazfüggvény, mely szoros a kompakt, zárt halmazokon.*

Bizonyítás. Lásd a 113. tétel bizonyítása. Q.E.D.

118. következmény. *Legyen* (X,τ) *Hausdorff topologikus tér, és legyen* $A \subseteq B(X,\tau)$ *olyan félgyűrű* ($B(X,\tau)$ (X,τ) *Borel halmazait jelöli), hogy* $X \in \mathcal{A}$. *Ha* μ $\mathcal{A}$*-n additív, véges halmazfüggvény, mely szoros a kompakt halmazokon, akkor* μ *kiterjeszthető* $B(X,\tau)$*-re, mint, olyan véges, additív halmazfüggvény, mely szoros a kompakt halmazokon.*

Bizonyítás. Lásd a 113. tétel bizonyítása. Q.E.D.

119. következmény. *Legyen* (X,τ) *Hausdorff topologikus tér, és legyen* $A \subseteq B(X,\tau)$ *olyan félgyűrű* ($B(X,\tau)$ (X,τ) *Borel halmazait jelöli), hogy* $X \in \mathcal{A}$. *Ha* μ $\mathcal{A}$*-n* σ*-additív és szoros a kompakt halmazokon, akkor* μ *kiterjeszthető* $B(X,\tau)$*-re, mint Radon-mérték.*

Bizonyítás. Lásd a 96. definíciót, a 113. tétel bizonyítását, és a 104. segédtételt. Q.E.D.

Tudjuk, hogy a kiterjesztés nem egyértelmű. Azonban ha pl. (X, τ) bázisa benne van $\mathcal{A}$-ban, akkor a kiterjesztés egyértelmű (lásd a 120. segédtételt.).

120. segédtétel. *Legyen (X, τ) topologikus tér, és legyen $A \subseteq B(X, \tau)$ olyan félgyűrű ($B(X, \tau)$ (X, τ) Borel halmazait jelöli), hogy $X \in \mathcal{A}$. Ha μ $\mathcal{A}$-n additív, véges halmazfüggvény, mely szoros a kompakt, zárt halmazokon, és $\mathcal{A}$ tartalmazza (X, τ) bázisát, akkor μ kompakt, zárt reguláris kiterjesztése $B(X, \tau)$-re egyértelmű.*

Bizonyítás. A 117. következmény miatt μ kiterjesztése létezik.

Indirekt tegyük fel, hogy létezik μ_1, μ_2 Borel halmazokon értelmezett mértékek, hogy $\mu_1|_A = \mu_2|_A$. Ekkor a kompakt, zárt szorosság miatt $\exists C$ kompakt, zárt halmaz, hogy $\mu_1(C) \neq \mu_2(C)$. Legyen $\delta = |\mu_1(C) - \mu_2(C)|$, ekkor mivel a kompakt, zárt szorosságból véges mértékeknél következik a kívülről nyílt regularitás, így C-hez létezik O nyílt halmaz, hogy $\mu_1(O \setminus C) < \frac{\delta}{2}$ és $\mu_2(O \setminus C) < \frac{\delta}{2}$. Mivel $\mathcal{A}$ tartalmazza (X, τ) bázisát, így $O = \cup_\alpha O_\alpha$, ahol $O_\alpha \in A$ $\forall \alpha$. C kompaktsága miatt azonban létezik véges fedés, tehát létezik $O' = \cup_{\alpha < \omega} O_\alpha$, hogy $C \subseteq O'$, így $\mu_1(O') = \mu_2(O')$, de $\mu_1(O' \setminus C) < \frac{\delta}{2}$ és $\mu_2(O' \setminus C) < \frac{\delta}{2}$, amiből $|\mu_1(C) - \mu_2(C)| < \delta$, ami ellentmondás. Q.E.D.

121. következmény. *Legyen (X, τ) Hausdorff topologikus tér, és legyen $A \subseteq B(X, \tau)$ olyan félgyűrű ($B(X, \tau)$ (X, τ) Borel halmazait jelöli), hogy $X \in \mathcal{A}$. Ha μ $\mathcal{A}$-n additív, véges halmazfüggvény, mely szoros a kompakt halmazokon, és $\mathcal{A}$ tartalmazza (X, τ) bázisát, akkor μ kompakt reguláris kiterjesztése $B(X, \tau)$-re egyértelmű.*

Bizonyítás. Lásd a 120. segédtétel bizonyítását. Q.E.D.

122. következmény. *Legyen (X, τ) Hausdorff topologikus tér, és legyen $A \subseteq B(X, \tau)$ olyan félgyűrű ($B(X, \tau)$ (X, τ) Borel halmazait jelöli), hogy $X \in \mathcal{A}$. Ha μ $\mathcal{A}$-n additív, véges halmazfüggvény, mely szoros a kompakt halmazokon, és $\mathcal{A}$ tartalmazza (X, τ) bázisát, akkor μ egyértelműen terjeszthető ki Radon-mértékké.*

Bizonyítás. Lásd a 96. definíciót, a 104 segédtételt, a 108. következményt, és a 120. segédtétel bizonyítását. Q.E.D.

123. megjegyzés. Vegyük észre, hogy a kompakt, zárt szorosság feltétele nem csak a σ-additivitást befolyásolja, hanem az egyértelműséget is.

4.5. A Bochner-tétel általánosítása

Ebben az alfejezetben Bochner [14] és Choski [26] tételét járjuk körbe, és általánosítjuk ki.

124. segédtétel. *Legyen $I = \{j, k\}$, X_i halmazok, $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{P}(X_i)$ σ-kompakt halmazrendszerek $\forall i \in I$. Ha*

1. $f_{ij}(\mathcal{C}_j) \subseteq \mathcal{C}_i$ $\forall (i \leq j)$,
2. $f_{ij}^{-1}(\{x_i\}) \cap \mathcal{C}_j$ *σ-kompakt halmazrendszer* $\forall x_i \in X_i$, $\forall (i \leq j)$,

akkor $\mathcal{C} \triangleq p_i^{-1}(\mathcal{C}_i) \cup p_j^{-1}(\mathcal{C}_j)$ *σ-kompakt halmazrendszer* $\mathcal{P}(P = \varprojlim((X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j}))$*-ben.*

Bizonyítás. Azt fogjuk látni, hogy ha $C_n \in \mathcal{C}$, és $\cap_{n=1}^m C_n \neq \emptyset$ $\forall m \in \mathbb{N}$, akkor $\cap_n C_n \neq \emptyset$.

Két esetet különböztetünk meg:

1. Az i és j elemek nincsenek relációban egymással.

   Ebben az esetben $P = X_i \times X_j$ Descartes-szorzat, $\forall C_n \in \mathcal{C}$, a definíció miatt vagy $\exists C_n^i \in \mathcal{C}_i$, hogy $C_n = p_i^{-1}(C_n^i)$, vagy $\exists C_n^j \in \mathcal{C}_j$, hogy $C_n = p_j^{-1}(C_n^j)$. Ekkor $C_n = C_n^i \times X_j$ vagy $C_n = X_i \times C_n^j$ $\forall n$. Legyen $N_i = \{n \in \mathbb{N} \mid C_n = p_i^{-1}(C_n^i),\ C_n^i \in \mathcal{C}_i\}$, hasonlóan legyen N_j definiálva. Ekkor $\cap_n C_n = (\cap_{n \in N_i} C_n^i) \times (\cap_{n \in N_j} C_n^j)$, ha N_i és N_j halmazok nemüresek. Ha N_i üres, akkor $\cap_n C_n = X_i \times (\cap_{n \in N_j} C_n^j)$, ha pedig N_j üres, akkor $\cap_n C_n = (\cap_{n \in N_i} C_n^i) \times X_j$. Mivel $\mathcal{C}_i$, $\mathcal{C}_j$ σ-kompakt halmazrendszerek, így $\cap_{n \in N_i} C_n^i \neq \emptyset$ és $\cap_{n \in N_j} C_n^j \neq \emptyset$, tehát $\cap_n C_n \neq \emptyset$.

2. Legyen $i \leq j$ ($j \leq i$ eset tárgyalása teljesen azonos).

   Ebben az esetben $P = X_j$, és az *1.* feltevés miatt $p_i(C_n) = f_{ij}(C_n) \in \mathcal{C}_i$ $\forall n$. Mivel $\cap_{n=1}^m C_n \neq \emptyset$ $\forall m \in \mathbb{N}$, $\cap_{n=1}^m f_{ij}(C_n) \neq \emptyset$ $\forall m \in \mathbb{N}$, így $\mathcal{C}_i$ σ-kompaktsága miatt $\cap_n f_{ij}(C_n) \neq \emptyset$. Legyen $x_i \in \cap_n f_{ij}(C_n)$ tetszőleges, ekkor a *2.* feltevés miatt $f_{ij}^{-1}(\{x_i\}) \cap C_n$ $\forall n \in N_j$ σ-kompakt halmazrendszer. x_i választása miatt $\cap_{n=1}^m (f_{ij}^{-1}(\{x_i\}) \cap C_n) \neq \emptyset$ $\forall m \in \mathbb{N}$, így $\cap_n (f_{ij}^{-1}(\{x_i\}) \cap C_n) \neq \emptyset$. Legyen $x_j \in \cap_n (f_{ij}^{-1}(\{x_i\}) \cap C_n)$, ekkor:

   a: $x_i = f_{ij}(\{x_j\})$,

   b: $x_j \in \cap_n C_n$,

tehát, $\cap_n C_n \neq \emptyset$. Q.E.D.

A következő két példa az *1.* és *2.* feltevések szükségességét mutatják.

125. példa. A 124. segédtételben az 1. feltevés nem áll, a 2. feltevés áll.

Legyen $X_i = X_j = [0,1]$.

Legyen $i \leq j$.

Legyen $f_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } x = 0 \\ x & \text{különben} \end{cases}$.

Legyenek $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_j$ $[0,1]$ kompakt halmazai.

Az 1. feltevés nem áll, hiszen $(0, \frac{2}{3}] = f_{ij}([0, \frac{2}{3}])$.

A 2. feltevés áll, hiszen bármely pont inverz képe véges sok pontot tartalmaz.

Legyen

$$\begin{array}{rcl} C_1 & = & f_{ij}^{-1}([0, \frac{1}{3}]) \;=\; (0, \frac{1}{3}] \\ C_2 & = & f_{ij}^{-1}([0, \frac{1}{6}]) \;=\; (0, \frac{1}{6}] \\ & \vdots & \\ C_n & = & f_{ij}^{-1}([0, \frac{1}{3n}]) \;=\; (0, \frac{1}{3n}] \\ & \vdots & \end{array}$$

Ekkor $\cap_{n=1}^m C_n \neq \emptyset$ $\forall m \in \mathbb{N}$, de $\cap_n C_n \neq \emptyset$.

126. példa. A 124. segédtételben a 2. feltevés nem áll, az 1. feltevés áll.

Legyenek $X_i = X_j = [0,1]$.

Legyen $i \leq j$.

$f_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in (0,1) \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$.

$\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_j$ legyenek $[0,1]$ kompakt halmazai.

Az 1. feltevés áll, hiszen a véges sok pontból álló halmazok kompaktak.

A 2. feltevés nem áll, hiszen $(0,1) = f_{ij}^{-1}(\{1\})$, és $(0,1) \cap \mathcal{C}_j$ nem σ-kompakt halmazrendszer.

Legyen

$$\begin{array}{rcl} C_1 & = & f_{ij}^{-1}(\{1\}) = (0,1) \\ C_2 & = & [0, \frac{1}{2}] \\ & \vdots & \\ C_n & = & [0, \frac{1}{n}] \\ & \vdots & \end{array}$$

Ekkor $\forall m \in \mathbb{N}$-re $\cap_{n=1}^m C_n \neq \emptyset$, de $\cap_n C_n \neq \emptyset$.

A 124. segédtétel bizonyításából látható, hogy ha $(I, \leq)$ az üres reláció, vagy ha $(I, \leq)$ mindegyik eleme csak önmagával van relációban, akkor I számosságától függetlenül $\mathcal{C} \overset{\circ}{=} \cup_i p_i^{-1}(\mathcal{C})$ σ-kompakt halmazrendszer.

127. következmény. *Legyenek X_i halmazok, $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{P}(X_i)$ σ-kompakt halmazrendszerek, $(I, \leq)$ az üres reláció, vagy olyan halmaz, hogy mindegyik eleme csak önmagával van relációban. Ekkor $\mathcal{C} \mathrel{\mathring{=}} \cup_{i \in I} p_i^{-1}(\mathcal{C}_i)$ σ-kompakt halmazrendszer $\mathcal{P}(P = \varprojlim(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j}))$-ben.*

Bizonyítás. Azt fogjuk látni, hogy ha $C_n \in \mathcal{C}$, és $\cap_{n=1}^m C_n \neq \emptyset$ $\forall m \in \mathbb{N}$, akkor $\cap_n C_n \neq \emptyset$.

Ebben az esetben $X = \prod_{i \in I} X_i$, és $\forall n$-hez $\exists i(n) \in I$, és $\exists C_n^{i(n)} \in \mathcal{C}_{i(n)}$, hogy $C_n = p_{i(n)}^{-1}(C_n^{i(n)})$. Legyen $N_i = \{n \in \mathbb{N} \mid C_n = p_{i(n)}^{-1}(C_n^{i(n)}),\ C_n^{i(n)} \in \mathcal{C}_{i(n)}\}$, ekkor $C_n = C_n^{i(n)} \times \prod_{j \in I \setminus \{i\}} X_j$ $\forall n$. Tehát $\cap_n C_n = \cap_n (C_n^{i(n)} \times \prod_{j \in I \setminus \{i(n)\}} X_j) = \prod_{i \in I}((\cap_{n \in N_i} C_n^{i(n)}) \cap X_i)$. Mivel $\mathcal{C}_i$ halmazrendszerek σ-kompaktak, és $\cap_{n=1}^m C_n \neq \emptyset$ $\forall m \in \mathbb{N}$, így $\cap_{n \in N_i} C_n^{i(n)} \neq \emptyset$ $\forall i \in I$, tehát a Kiválasztási Axióma miatt $\cap_n C_n \neq \emptyset$. Q.E.D.

Ha $\exists i, j \in I$, hogy $i \leq j$, akkor $\mathcal{C}$ már nem feltétlenül σ-kompakt halmazrendszer.

128. példa. Ha $\exists i, j \in I$, hogy $i \leq j$, akkor $\mathcal{C}$ már nem feltétlenül σ-kompakt halmazrendszer.

Legyenek $X_i = X_j = X_k = [0, 1]$.

Legyen $i \leq j$, $k \leq j$, és i, k elemek ne legyenek relációban egymással.

Legyenek $f_{ij} = id_{[0,1]}$, $f_{kj} = id_{[0,1]}$.

Legyenek $\mathcal{C}_i = \{(0, 1), \{\emptyset\}\}$, $\mathcal{C}_j = \{\emptyset\}$, $\mathcal{C}_k$ a kompakt halmazok.

A 124. segédtétel 1. pontja teljesül, hiszen az üres halmaz képe az üres halmaz.

A 124. segédtétel 2. pontja teljesül, hiszen tetszőleges halmaz metszete az üres halmazzal az üres halmaz, mely σ-kompakt halmazrendszer.

Legyen

$$\begin{aligned} C_1 &= f_{ij}^{-1}((0,1)) = (0,1) \\ C_2 &= f_{kj}^{-1}([0,\tfrac{1}{2}]) = [0,\tfrac{1}{2}] \\ &\vdots \\ C_n &= f_{kj}^{-1}([0,\tfrac{1}{n}]) = [0,\tfrac{1}{n}] \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ekkor $\cap_{n=1}^m C_n \neq \emptyset$ $\forall m \in \mathbb{N}$, de $\cap_n C_n \neq \emptyset$.

129. állítás. *Legyen $((X_i, \mathcal{M}_i, \mathcal{C}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ mérték inverzrendszer, és legyen $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{M}_i$ σ-kompakt halmazrendszer $\forall i \in I$. Ha*

1. *$(I, \leq)$ rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*
   - *van legkisebb eleme,*

- *teljesen rendezett,*
- *minden elemhez van rákövetkező elem,*

2. $f_{ij}(\mathcal{C}_j) \subseteq \mathcal{C}_i \qquad \forall(i \leq j)$,

3. $f_{ij}^{-1}(\{x_i\}) \cap \mathcal{C}_j\ \forall(i \leq j)$ *σ-kompakt halmazrendszer* $\forall x_i \in X_i$,

4. $((X_i, \mathcal{M}_i, \mathcal{C}_i, \mu_i), f_{ij}, (I, \leq))|_{i \leq j}$ *mérték inverzrendszer majdnem sorozatmaximális,*

akkor $\mathcal{C} \doteq \cup_{i \in I} p_i^{-1}(\mathcal{C}_i)$ *μ-majdnem σ-kompakt halmazrendszer* $\mathcal{M}$*-ben, ahol* $(P, \mathcal{M}, \mu) = w - \varprojlim((X_i, \mathcal{M}_i, \mathcal{C}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$.

Bizonyítás. Az *1.*, a *4.* feltétel és a 92. állítás miatt $(P, \mathcal{M}, \mu) = w - \varprojlim((X_i, \mathcal{M}_i, \mathcal{C}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ létezik és egyértelmű.

Azt fogjuk látni, hogy tetszőleges $C_n \in \mathcal{C}$-re, $\exists A \subseteq \varprojlim(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$, hogy $\mu^\star(A) = 0$, és, hogy ha $\forall m \in \mathbb{N}$-re $\complement A \cap (\cap_{n=1}^m C_n) \neq 0$, akkor $\cap_n C_n \neq \emptyset$.

Az *1.* feltétel miatt i_1 legkisebb elem. Tudjuk, hogy $\forall n$-hez $\exists i(n) \in I$, és $\exists C_n^{i(n)} \in \mathcal{C}_{i(n)}$, hogy $C_n = p_{i(n)}^{-1}(C_n^{i(n)})$. Ekkor $\cap_{n=1}^m f_{i_1 i(n)}(C_n^{i(n)}) \neq \emptyset\ \forall m \in \mathbb{N}$. A *2.* feltétel miatt $f_{i_1 i(n)}(C_n) \in \mathcal{C}_{i_1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, a $\mathcal{C}_{i_1}$ σ-kompaktsága miatt $\cap_n f_{i_1 i(n)}(C_n^{i(n)}) \neq \emptyset$.

Legyen $N_i = \{n \in \mathbb{N} \mid C_n = p_i^{-1}(C_n^{i(n)}),\ C_n^{i(n)} \in \mathcal{C}_{i(n)}\}$, $\forall i \in I$.

Legyen $x_{i_1} \in \cap_n f_{i_1 i(n)}(C_n^{i(n)})$ tetszőleges. Ekkor a *3.* feltétel miatt $f_{i_1 i_2}^{-1}(\{x_{i_1}\}) \cap \mathcal{C}_{i_2}$ σ-kompakt halmazrendszer. x_{i_1} választása miatt $\cap_{n=1}^m (f_{i_1 i_2}^{-1}(\{x_{i_1}\}) \cap (\cap_{n \in N_{i_2}} C_n^{i(n)})) \neq \emptyset\ \forall m \in \mathbb{N}$, így $\cap_n (f_{i_1 i_2}^{-1}(\{x_{i_1}\}) \cap (\cap_{n \in N_{i_2}} C_n^{i(n)})) \neq \emptyset$. Legyen $x_{i_2} \in (f_{i_1 i_2}^{-1}(\{x_{i_1}\}) \cap (\cap_{n \in N_{i_2}} C_n^{i(n)}))$ tetszőleges, ekkor:

a: $x_{i_1} = f_{i_1 i_2}(\{x_{i_2}\})$,

b: $x_{i_2} \in p_{i_2}(\cap_n C_n)$.

Alkalmazva ezt az eljárást az $i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq \ldots$ láncra, kapunk pontok egy halmazát, mely pontok a következő tulajdonságokkal bírnak $\forall n \in \mathbb{N}$-re:

c: $x_{i_n} = f_{i_n i_{n+1}}(\{x_{i_{n+1}}\})$,

d: $x_{i_n} \in p_{i_n}(\cap_n C_n)$.

A $d:$ pontból a Kiválasztási Axióma miatt $\exists x \in \prod_{i \in I} X_i$, hogy $x_{i(n)} = pr_{i(n)}(x)\ \forall n$.

A *4.* feltétel miatt, $\exists A_{i_n} \subseteq X_{i_n}$, hogy $\mu^\star_{i_n}(A_{i_n}) = 0\ \forall n$, és $p^{-1}_{i_n i_m}(A_{i_n}) \subseteq A_{i_m}\ \forall (n \leq m)$.

Legyen $A \stackrel{\circ}{=} \cap_n p^{-1}_{i_n}(A_{i_n})$. Ekkor világos, hogy $\mu^\star(A) = 0$. Tegyük fel, hogy $\forall m \in \mathbb{N}$-re $\complement A \cap (\cap_{n=1}^m C_n) \neq 0$. Ekkor x_{i_n}-ek választhatóak a következőképpen: $x_{i_n} \in X_{i_n} \setminus A_{i_n}$ (itt használjuk ki, hogy $p^{-1}_{i_n i_m}(A_{i_n}) \subseteq A_{i_m}\ \forall (n \leq m)$).

A c : pont és a *4.* feltétel miatt $\exists x \in \prod_i X_i$, mely kielégíti $x_{i_n} = f_{i_n i_{n+1}}(x_{i_{n+1}}) = p_{i_n}(x)$, $x_{i_n} \in (X_{i_n} \setminus (A_{i_n}))\ \forall n \in \mathbb{N}$, és $x \in \varprojlim(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$.

Így $\complement(\cap_n p^{-1}_{i_n}(A_{i_n})) \cap (\cap_n C_n) = \complement A \cap (\cap_n C_n) \neq \emptyset$, tehát $\cap_n C_n \neq \emptyset$. Ebből következik, hogy $\mathcal{C}$ μ-majdnem σ-kompakt halmazrendszer $\mathcal{M}$-ben. Q.E.D.

130. következmény. *Legyen $(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j}$ inverzrendszer, és legyen $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{P}(X_i)$ σ-kompakt halmazrendszerek. Ha*

1. *$(I, \leq)$ rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*
   - *van legkisebb eleme,*
   - *teljesen rendezett,*
   - *minden elemhez van rákövetkező elem,*
2. *$f_{ij}(\mathcal{C}_j) \subseteq \mathcal{C}_i \qquad \forall (i \leq j)$,*
3. *$f^{-1}_{ij}(\{x_i\}) \cap \mathcal{C}_j\ \forall (i \leq j)$ σ-kompakt halmazrendszer $\forall x_i \in X_i$,*
4. *$(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j}))$ sorozatmaximális,*

ekkor $\mathcal{C} \stackrel{\circ}{=} \cup_{i \in I} p^{-1}_i(\mathcal{C}_i)$ σ-kompakt halmazrendszer $\mathcal{P}(P = \varprojlim(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})))$-ben, és $P \neq \emptyset$.

Bizonyítás. A 129. állítás bizonyításából közvetlenül látható. Q.E.D.

A két új feltétel (*1.*, *4.*) szerepének illusztrálására íme két példa:

131. példa. A 129. állítás 1. **feltétele nem áll, a többi áll.**

Legyen $I = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots, 0\}$, a szokásos rendezéssel.

Legyen $X_i = (0, 1]\ \forall i \in I \setminus \{0\}$, $X_0 = \{0\}$.

Legyen $f_{ij} = id_{(0,1]}\ \forall (i \leq j)$, $i \neq 0$. $f_{0i} = 0\ \forall i \in I$-re.

Ha $i \neq 0$, akkor legyen $\mathcal{C}_i = \sigma c\{(0, \frac{1}{n}], (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \ldots, (\frac{n-1}{n}, 1]\}$, ahol $n = \frac{1}{i}\ \forall i$ véges halmazrendszer, tehát σ-kompakt halmazrendszer $\forall i \in I \setminus \{0\}$. $\mathcal{C}_0$ pedig legyen a véges sok pontból álló halmazok osztálya.

Az 1. feltétel nem teljesül, hiszen a szokásos rendezést vettük.

A 2. feltétel teljesül, hiszen egyre finomabbak a σ-kompakt halmazrendszerek.

A 3. feltétel teljesül, hiszen bármely pont inverzképe véges sok pont.

A 4. feltétel teljesül, hiszen $(0,1] = \varprojlim(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$.

Legyen

$$\begin{aligned} C_1 &= (0, \tfrac{1}{2}] = p_{\frac{1}{2}}^{-1}(\{(0, \tfrac{1}{2}]\}) \\ C_2 &= (0, \tfrac{1}{4}] = p_{\frac{1}{4}}^{-1}(\{(0, \tfrac{1}{4}]\}) \\ &\vdots \\ C_n &= (0, \tfrac{1}{2n}] = p_{\frac{1}{2n}}^{-1}(\{(0, \tfrac{1}{2n}]\}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ekkor $\cap_{n=1}^m C_n \neq \emptyset \ \forall m \in \mathbb{N}$, de $\cap_n C_n \neq \emptyset$.

132. példa. A 129. állítás 4. **feltétele nem áll, a többi áll.**

Legyen $I = \{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}, \ldots, 1\}$, a szokásos rendezéssel.

Legyen $X_i = [0,1] \ \forall i \in I$.

Legyen $f_{i1} = \begin{cases} 1-i, & \text{ha } x = \frac{1-i}{2m} \ m \in \mathbb{N} \\ id_{[0,1]} & \text{különben} \end{cases}$ $\forall i \in I$. A többi f_{ij}-t generálják ezek a leképezések.

$\mathcal{C}_i$ elemei legyenek a véges sok pontból álló halmazok $\forall i$.

Az 1. feltétel teljesül a szokásos rendezés használata miatt.

A 2. feltétel teljesül, hiszen véges sok pont képe véges sok pont.

A 3. feltétel teljesül, hiszen bármely pont inverz képe elmetszve véges sok pontból álló halmazokkal σ-kompakt halmazrendszert alkot.

A 4. feltétel nem teljesül, hiszen f_{ij}-k nem szürjektívek.

Világos, hogy $[0,1] = P = \varprojlim(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$.

Legyen

$$\begin{aligned} C_1 &= p_0^{-1}(\{1\}) = \{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \ldots\} \\ C_2 &= p_{\frac{1}{2}}^{-1}(\{\tfrac{1}{2}\}) = \{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \ldots\} \\ &\vdots \\ C_n &= p_{\frac{1}{2^n}}^{-1}(\{\tfrac{1}{2^n}\}) = \{\tfrac{1}{2^n}, \tfrac{1}{2^{n+1}}, \ldots\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ekkor $\cap_{n=1}^m C_n \neq \emptyset \ \forall m \in \mathbb{N}$, de $\cap_n C_n \neq \emptyset$.

133. állítás. *Legyen* $((X_i, \mathcal{M}_i, \mathcal{C}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ *mérték inverzrendszer, ahol* $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{M}_i$ *σ-kompakt halmazrendszer* $\forall i \in I$. *Ha*

1. $(I, \leq)$ *felfelé irányított halmaz,*
2. $(X, \mathcal{A}, \mu) = w - \varprojlim((X_i, \mathcal{M}_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ *létezik,*
3. $\forall (i_1 \leq i_2 \leq, \ldots)$ *sorozatra,* $\cup_n p_{i_n}^{-1}(\mathcal{C}_{i_n})$ *μ-majdnem σ-kompakt halmazrendszer,*
4. μ_i *szoros* $\mathcal{C}_i$*-n* $\forall i \in I$,

akkor $(X, \mathcal{M}, \mu) = \varprojlim((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ *létezik.*

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg, hogy μ σ-additív $\cup_{i \in I} p_i^{-1}(\mathcal{M}_i)$-n.

A *4.* feltételből adódik, hogy μ megszorítva $\cup_{i \in I} p_i^{-1}(\mathcal{M}_i)$-re szoros $\cup_{i \in I} p_i^{-1}(\mathcal{C}_i)$-n.

Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \cup_{i \in I} p_i^{-1}(\mathcal{M}_i)$ diszjunkt halmazok. A_n-ek definiciója miatt $\exists i(n) \in I$, és $\exists A_n^{i(n)} \in \mathcal{M}_{i(n)}$, hogy $A_n = p_{i(n)}^{-1}(A_n^{i(n)})$ $\forall n$. Legyen $i_1 = i(1)$. Az *1.* feltétel miatt $\exists i^\star \in I$, hogy $i_1 \leq i^\star$, és $i(2) \leq i^\star$. Legyen $i_2 = i^\star$. Definiáljuk az $i_1 \leq i_2 \leq \ldots$ sorozat többi elemét hasonlóan. Könnyen látható, hogy $\forall n$-hez $\exists A_{i(n)} \in \mathcal{M}_{i_n}$, hogy $A_n = p_{i_n}^{-1}(A_{i(n)})$. Ekkor a *3.* tulajdonság, és a 102. segédtétel miatt μ σ-additív $\cup_{i \in I} p_i^{-1}(\mathcal{M}_i)$-n. Ekkor a 106. tétel miatt $(X, \mathcal{M}, \mu) = \varprojlim((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ létezik. Q.E.D.

A következő állítás Metivier [60] (269. old.) és Mallory & Sion [51] eredményeinek általánosítása.

134. állítás. *Legyen* $((X_i, \mathcal{M}_i, \mathcal{C}_i, \mu_i), f_{ij}, (I, \leq))|_{i \leq j}$ *mérték inverzrendszer, ahol* $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{M}_i$, *σ-kompakt halmazrendszer* $\forall i \in I$. *Ha*

1. $f_{ij}(\mathcal{C}_j) \subseteq \mathcal{C}_i \quad \forall (i \leq j)$,
2. $f_{ij}^{-1}(\{x_i\}) \cap \mathcal{C}_j \quad \forall (i \leq j)$ *σ-kompakt halmazrendszer* $\forall x_i \in X_i$,
3. $((X_i, \mathcal{M}_i, \mathcal{C}_i, \mu_i), f_{ij}, (I, \leq))|_{i \leq j}$ *majdnem sorozatmaximális,*
4. μ_i *szoros* $\mathcal{C}_i$ *halmazrendszeren* $\forall i \in I$,
5. I *felfelé irányított,*

akkor $(X, \mathcal{M}, \mu) = \varprojlim((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ *létezik és egyértelmű.*

Bizonyítás. A 129. állítás miatt tetszőleges $i_1 \leq i_1 \leq \ldots$ sorozat esetén $\cup_n p_{i_n}^{-1}(\mathcal{C}_{i_n})$ μ-majdnem σ-kompakt halmazrendszer. A 92. állítás, a 133. állítás, és 106. tétel miatt $(X, \mathcal{M}, \mu) = \varprojlim((X_n, \mathcal{M}_n, \mu_n), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ létezik és egyértelmű. Q.E.D.

A bizonyítás tanulmányozásából kiderül, hogy a 134. állítás feltételei mellett σ-kompakt halmazcsalád inverzképei által alkotott halmazcsalád nem feltétlenül σ-kompakt. Tehát csak μ σ-additivitása kapható meg a ilyetén feltételekkel.

A következő tétel Bochner [14] és Choski [26] eredménye.

135. tétel (Bochner-Choski-tétel). *Ha* $(((X_i, \tau_i), B(X_i, \tau_i), \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ *olyan majdnem sorozatmaximális, Radon valószínűségi mérték inverzrendszer, ahol* (X_i, τ_i)*-k Hausdorff topologikus terek, és* $(I, \leq)$ *felfelé irányított halmaz, akkor* $(X, \mathcal{M}, \mu) = \varprojlim(((X_i, \tau_i), B(X_i, \tau_i), \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ *mérték inverzlimesz létezik, és egyértelmű* ($\mathcal{M} = \sigma(\cup_i p_i^{-1}(B(X_i, \tau_i)))$).

Bizonyítás. Csak megjegyzéseket teszünk.

1. $(I, \leq)$ felfelé irányított,

2. Hausdorff topologikus tér kompakt halmazai σ-kompakt halmazrendszert alkotnak,

3. f_{ij}-k folytonosak, és kompakt halmaz folytonos képe kompakt halmaz,

4. zárt halmaz inverz képe zárt, és Hausdorff topologikus tér esetén zárt halmaz metszete kompakt halmazzal kompakt halmaz,

5. a Radon valószínűségi mértékek szorosak a kompakt halmazokon, és végesek.

A fenti megjegyzések szerint teljesülnek a 134. állítás feltételei, így $(X, \mathcal{M}, \mu) = \varprojlim(((X_n, \tau_n), B(X_n, \tau_n), \mu_n), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ mérték inverzlimesz létezik, és egyértelmű. Q.E.D.

Az eredmény meglehetősen régi és alapvető. Két megjegyzést fűzünk hozzá:

136. megjegyzés. Fontos látni, hogy μ nem feltétlenül szoros a kompakt halmazokon, így nem feltétlenül Radon-mérték.

137. megjegyzés. $\mathcal{M}$-ban a mérhető halmazok száma nem „elég nagy" (csak szorzatmérhetőségi struktúra van).

Már Bochner is megjegyzi, hogy nyitott az a kérdés, hogy μ mikor Radon-mérték. A radonság fontossága a mérhető halmazok megfelelő számának biztosítása miatt fontos. A sztochasztikus folyamatok elemzésekor fontos, hogy bizonyos halmazok, pl. a mintaösvény, mérhetőek legyenek. Ezt biztosítja μ Radon-mérték volta.

138. következmény. *Legyen* $(((X_i,\tau_i),B(X_i,\tau_i),\mu_i),(I,\le),f_{ij}|_{i\le j})$ *majdnem sorozatmaximális Baire-mérték inverzrendszer, ahol* (X_i,τ_i)*-k Hausdorff topologikus terek,* μ_i*-k szorosak a kompakt halmazokon, és* $(I,\le)$ *felfelé irányított halmaz, ekkor* $((X,\tau),B(X,\tau),\mu)=\underleftarrow{\lim}(((X_i,\tau_i),B(X_i,\tau_i),\mu_i),f_{ij},(I,\le))$ *Baire-mérték inverzlimesz létezik, és egyértelmű* ($\mathcal{M}=\sigma(\cup_i p_i^{-1}(B(X_i,\tau_i))))$.

Bizonyítás. Lásd a 135. tétel bizonyítását, és a 136., 137. megjegyzéseket. Q.E.D.

4.6. A Prohorov-tétel általános formája

A mérték inverzlimeszben a Radon-mérték biztosítására a Prohorov-tétel ad szükséges és elégséges feltételt. A feltétel definiciója a következő:

139. definíció. Egy $(((X_i,\tau_i),\mathcal{M}_i,\tau_i),\mu_i),(I,\le),f_{ij}|_{i\le j})$ mérték inverzrendszer egyenletesen szoros a kompakt halmazokon, ha $\forall\epsilon>0$-hoz $\exists C_\epsilon\in\tau$ kompakt halmaz, ahol $(P,\tau)=\underleftarrow{\lim}((X_i,\tau_i),(I,\le),f_{ij}|_{i\le j})$, hogy

1. $p_i(C_\epsilon)\in\mathcal{M}_i\ \forall i\in I$,
2. $\mu_i(X_i\setminus p_i(C_\epsilon))<\epsilon$, $\forall i$.

A fogalom azt mondja, hogy az inverzrendszer elemei, egyenletesen szorosak a kompakt halmazokon. A következő tétel a Prohorov-tételel [64].

140. tétel (Prohorov-tétel). *Legyen* $(((X_i,\tau_i),\mathcal{M}_i,\mu_i),(I,\le),f_{ij}|_{i\le j})$ *olyan mérték inverzrendszer, ahol* μ_i *szoros a kompakt halmazokon* $\forall i\in I$*-re. Ha* $\forall i\in I$*-re*

1. (X_i,τ_i) *Hausdorff topologikus terek,*
2. $\mathcal{M}_i$ *tartalmazza* (X_i,τ_i) *kompakt halmazait,*
3. $(I,\le)$ *felfelé irányított,*

akkor $(P, \mathcal{M}, \mu) = \varprojlim(((X_i, \tau_i), \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ *mérték inverzlimesz, ahol* μ *szoros a kompakt halmazokon, pontosan akkor létezik, ha* $(((X_i, \tau_i), \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ *egyenletesen szoros a kompakt halmazokon.*

Bizonyítás. Szükségesség: Tfh. $((P, \tau), \mathcal{M}, \mu) = \varprojlim(((X_i, \tau_i), \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ létezik, és μ szoros a kompakt halmazokon. Ekkor $\forall \epsilon > 0$ esetén, $\exists C_\epsilon \in \tau$ kompakt halmaz, hogy $\mu(P \setminus C_\epsilon) < \epsilon$.

Mivel p_i folytonos, így $p_i(C_\epsilon)$ kompakt $\forall i \in I$. A *2.* feltétel miatt $p_i(C_\epsilon) \in \mathcal{M}_i$ $\forall i$. Világos, hogy $\mu(p_i^{-1}(p_i(C_\epsilon))) \geq \mu(C_\epsilon)$, így $\mu(X_i \setminus p_i(C_\epsilon)) < \epsilon$ $\forall i$, tehát $(((X_i, \tau_i), \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ egyenletesen szoros a kompakt halmazokon.

Elégségesség: A $(((X_i, \tau_i), \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ mérték inverzrendszer egyenletesen szoros a kompakt halmazokon. Hasonlóan az elöbbiekhez: $\forall \epsilon > 0$ esetén, $\exists C_\epsilon \in \tau$, hogy $\mu(X_i \setminus p_i(C_\epsilon)) < \epsilon$ $\forall i \in I$.

Legyen

$$(((p_i(C_\epsilon), \tau_i), \mathcal{M}'_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{p_j(C_\epsilon)}|_{i\leq j}), \tag{4.8}$$

kompakt mérték inverzrendszer, ahol $\mathcal{M}'_i = \mathcal{M}_i \cap p_i(C_\epsilon)$ és $f_{ij}|_{C_\epsilon}$-k szürjektívek, tehát a 76. segédtétel miatt a (4.8) rendszer sorozatmaximális.

Mivel ϵ tetszőleges volt, így $(((X_i, \tau_i), \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ mérték inverzrendszer majdnem sorozatmaximális, tehát a $(((X_i, \tau_i), \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ rendszer kielégíti a 134. állítás feltételeit, így $(P, \mathcal{M}, \mu) = \varprojlim(((X_i, \tau_i), \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ létezik.

Azt kell még látnunk, hogy μ szoros a kompakt halmazokon. Legyen $\delta > 0$ tetszőlegesen rögzített, és $A \in \mathcal{N}$ tetszőleges, ahol $\mathcal{N} \doteq \cup_i p_i^{-1}(\mathcal{M}_i)$. Ekkor $\exists i \in I$, $\exists A' \in \mathcal{M}_i$ halmaz, és $\exists C' \in \mathcal{M}_i$ kompakt halmaz, hogy $A = p_i^{-1}(A')$, és $\mu_i(A' \setminus C') < \frac{\delta}{2}$. p_i folytonossága miatt $p_i^{-1}(C') \in \mathcal{N}$ zárt halmaz, tehát μ szoros a zárt halmazokon $\mathcal{N}$-n. Ekkor a 107. segédtétel miatt μ kiterjesztve $\mathcal{M}$-re szintén szoros a zárt halmazokon.

Legyen $\alpha = \mu(P)$. Mivel $(((X_i, \tau_i), \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ egyenletesen szoros a kompakt halmazokon, így $\exists C_{\frac{\delta}{2}} \in \mathcal{M}$ kompakt halmaz, hogy $\mu(P \setminus C_{\frac{\delta}{2}}) < \frac{\delta}{2}$ (hiszen $\forall A \in \cup_{i\in I} p_i^{-1}(\mathcal{M}_i)$, hogy $A \supseteq C_{\frac{\delta}{2}}$-re $\mu(A) \geq \alpha - \frac{\delta}{2}$, tehát μ σ-additivitása miatt $\mu(C_{\frac{\delta}{2}}) \geq \alpha - \frac{\delta}{2}$).

Legyen $A \in \mathcal{M}$ tetszőleges, ekkor $\frac{\delta}{2}$ esetén $\exists Z_{\frac{\delta}{2}}$ zárt halmaz, hogy $\mu(A \setminus Z_{\frac{\delta}{2}}) < \frac{\delta}{2}$ (zárt halmazokon való szorosság). Az *1.* feltétel miatt (P, τ) Hausdorff-tér, így $Z_{\frac{\delta}{2}} \cap C_{\frac{\delta}{2}}$ kompakt halmaz, és $\mu(A \setminus (Z_{\frac{\delta}{2}} \cap C_{\frac{\delta}{2}})) < \delta$. Mivel δ tetszőlegesen választott volt, így μ szoros a kompakt halmazokon. Q.E.D.

A Prohorov-tétel általánosítható additív csoportértékű mértékekre lsd. Millington & Sion [57]. Kikövetkeztethető továbbá, hogy nem csak a σ-additivitást biztosítja a mérték inverzrendszer kompakt halmazokon szorossága feltétel.

141. következmény. *Legyen* $(((X_i,\tau_i),\mathcal{M}_i,\mu_i),(I,\le),f_{ij}|_{i\le j})$ *mérték inverzrendszer, ahol* μ_i*-k szorosak a kompakt halmazokon. Ha* $\forall i\in I$*-re*

1. (X_i,τ_i) *Hausdorff topologikus tér,*

2. $\mathcal{M}_i$ *tartalmazza* (X_i,τ_i) *kompakt halmazait,*

3. $(I,\le)$ *felfelé irányított,*

akkor $(P,\mathcal{M},\mu)=\varprojlim(((X_i,\tau_i),\mathcal{M}_i,\mu_i),(I,\le),f_{ij}|_{i\le j})$ *Radon-mérték inverz limesz pontosan akkor létezik, ha* $(((X_i,\tau_i),\mathcal{M}_i,\mu_i),(I,\le),f_{ij}|_{i\le j})$ *egyenletesen szoros a kompakt halmazokon.*

Ha ráadásul

4. $\mathcal{M}_i$ *tartalmazza* (X_i,τ_i) *Borel halmazait,*

akkor $(P,\mathcal{M},\mu)=\varprojlim(((X_i,\tau_i),\mathcal{M}_i,\mu_i),(I,\le),f_{ij})|_{i\le j}$ *Radon-mérték inverzlimesz pontosan akkor létezik és egyértelmű, ha* $(((X_i,\tau_i),\mathcal{M}_i,\mu_i),(I,\le),f_{ij}|_{i\le j})$ *egyenletesen szoros a kompakt halmazokon.*

Bizonyítás. A 140. tétel miatt μ szoros a kompakt halmazokon, így a 119. következmény miatt kiterjeszthető (X,τ) Borel halmazaira.

A *4.* feltétel teljesülése esetén a 121. következmény miatt a kiterjesztés egyértelmű, így a Radon-mérték inverzlimesz egyértelmű. Q.E.D.

A Bochner-Choski-tétel (135. tétel) kapcsán említettük az inverzlimesz mérhető halmazainak gazdagságának kérdését. Ezen tétel általánosításai ami az inverzlimesz megfelelő gazdagságának biztosítását illeti, két csoportba oszthatóak. A Metevier-féle általánosítás és a Mallory & Sion-féle általánosítás különbözősége abból a tényből fakad, hogy Metevier eredetileg nem a sorozatmaximalitást tette a feltételek közé, hanem p_{ij}-k szürjektívitását, $(I,\le)$ felfelé irányítottságát, és azt, hogy $(I,\le)$-nek van megszámlálható kofinális részhalmaza, míg Mallory & Sion a majdnem sorozatmaximalitást, és $(I,\le)$ felfelé irányítottságát teszi fel. Ez a kicsi eltérés azonban nem következmények nélküli. Erre lássuk a Bourbaki-tételt [18] (53. old.):

142. tétel (Bourbaki-tétel). *Legyen* $(((X_i,\tau_i),\mathcal{M}_i,\mu_i),(I,\leq),f_{ij}|_{i\leq j})$ *olyan mérték inverzrendszer, ahol* μ_i *szoros a kompakt halmazokon* $\forall i\in I$*-re, és ahol* $\forall i\in I$*-re*

1. (X_i,τ_i) *Hausdorff topologikus tér,*
2. $(I,\leq)$*-nek van megszámlálható kofinális részhalmaza,*
3. f_{ij}*-k szürjektívek,*
4. $(I,\leq)$ *felfelé irányított,*
5. $\mathcal{M}_i$ *tartalmazza* (X_i,τ_i) *kompakt halmazait,*

ekkor $((P,\tau),B(P,\tau),\mu)=\varprojlim(((X_i,\tau_i),\mathcal{M}_i,\mu_i),(I,\leq),f_{ij}|_{i\leq j})$ *Radon-mérték inverzlimesz létezik.*

Bizonyítás. A *2.* és a *4.* feltétel miatt $(I,\leq)$-t tekinthetjük $\mathbb{N}$-nek.

Legyen $\epsilon>0$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor a feltételek miatt létezik $C_1\in\tau_1$ kompakt halmaz, hogy $\mu_1(X_1\setminus C_1)\leq\frac{\epsilon}{2}$. Sőt $\exists C_{n+1}\in\tau_{n+1}$ kompakt halmaz, hogy $\mu_n(f_{nn+1}^{-1}(C_n)\setminus C_{n+1})\leq\frac{\epsilon}{2^{n+2}}$. Kis számolással látható, hogy $\mu_n(X_n\setminus C_n)\leq\epsilon\ \forall n$.

Bourbaki [15]-ból tudjuk, hogy $P=\varprojlim(X_i,(I,\leq),f_{ij}|_{i\leq j})$ zárt halmaz $\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n$-ben, így a *3.* feltétel miatt $C=P\cap\prod_{n\in\mathbb{N}}C_n=\cap_{n\in\mathbb{N}}p_n^{-1}(C_n)$ kompakt halmaz. Bourbaki [15] 89. old. miatt $p_n(C)=\cap_{m\geq n}p_m(C)$ és $f_{nm}(C_m)\supseteq p_{ns}(C_s)$, ahol $s\geq m\geq n$, így $\mu_n(X_n\setminus p_n(C))=\lim_{m\to\infty}\mu_n(X_n\setminus p_{nm}(C_m))$, ahol $m\geq n$. Ebből az eredményből és a $\mu_m(X_m\setminus C_m)\leq\epsilon$ $\forall(m\geq n)$ eredményből következik, hogy $\mu_n(X_n\setminus p_{nm}(C_m))\leq\mu_m(X_m\setminus C_m)\leq\epsilon\ \forall n$, tehát $\mu_n(X_n\setminus p_n(C))\leq\epsilon\ \forall n$.

Ekkor alkalmazhatjuk a Prohorov-tételt (140. tétel), így kész is vagyunk. Q.E.D.

143. következmény. *Legyen* $(((X_i,\tau_i),B(X_i,\tau_i),\mu_i),(I,\leq),f_{ij}|_{i\leq j})$ *olyan Radon-mérték inverzrendszer, ahol*

1. (X_i,τ_i) *Hausdorff topologikus tér* $\forall i\in I$*,*
2. $(I,\leq)$*-nek van megszámlálható kofinális részhalmaza,*
3. f_{ij}*-k szürjektívek,*
4. $(I,\leq)$ *felfelé irányított,*

ekkor $((P,\tau), B(P,\tau), \mu) = \varprojlim(((X_i,\tau_i), B(X_i,\tau_i), \mu_i), (I,\leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ *Radon-mérték inverzlimesz létezik, és egyértelmű.*

Bizonyítás. Lásd a 142. tétel bizonyítását. Ekkor a 119. következmény miatt μ kiterjeszthető (P,τ) Borel halmazaira, mint kompakt reguláris mérték, és 122. következmény miatt a kiterjesztés egyértelmű. Q.E.D.

Hasonlítsuk össze a Bochner-Choski-tételt és a Bourbaki-tételt. Látható, hogy a feltételek közötti különbség „látszólag" csak az inverzlimesz gazdagságának két különböző módon való biztosítását célozza. A két tétel állításának összehasonlításakor azonban kiderül, hogy a Bourbaki-tétel többet mond, mint a Bochner-Choski-tétel, tehát a feltételek nem egyenlő erejűek.

A Bourbaki-tételt alkalmazza a teljes egyetemes típustér létezésnek bizonyításakor Mertens & Sorin & Zamir [59], illetve Heifetz [39].

5. fejezet

Korábbi eredmények

„Ha ebben a könyvben kemény szavakkal illetem az emberiség néhány legnagyobb szellemiségét, célom - hitem szerint - nem az, hogy hírnevüket megtépázzam. Inkább abból a meggyőződésből táplálkozik, hogy civilizációnk fennmaradásának érdekében szakítanunk kell a nagy emberek iránti feltétlen tisztelet szokásával."

Karl R. Popper: A nyitott társadalom és ellenségei

Ebben a fejezetben a teljes egyetemes típustér létezésének eddigi eredményeit mutatjuk be. Az egyes eredmények a paramétertérre kikötött feltételekben térnek el egymástól. Ahhoz, hogy egységes keretben tudjuk tárgyalni az eredményeket, fogalmakat kell bevezetnünk, állításokat kell kimondanunk. Hangsúlyozzuk, hogy a tárgyalt eredmények nem ebben a formában jelennek meg az eredeti cikkekben, tehát nem a cikkek bemutatása a célunk.

Történetileg, a típustér fogalma Harsányi [38] cikksorozatában jelenik meg először. Harsányi ebben a munkájában nem ad bizonyítást az egyetemes típus létezésére vonatkozólag, nem is ez volt a célja cikksorozatának. Az első, későbbi fogalmi keretet jelentősen befolyásoló továbblépés Böge & Eisele [19] nevéhez fűződik.

1984-bem egy máig alaperedménynek számító munka jelent meg Mertens & Zamir [58] tollából. Ez a munka kijelölte azt a fogalmi keretet melyben vizsgálhatjuk a teljes egyetemes típustér (ők véleménytérnek hívják) létezésének problémáját, továbbá itt kerültek kijelölésre a lehetséges általánosítási lehetőségek. Erre az eredményre kb. tíz évre rá, közel egyidőben jelent meg Brandenburger & Dekel [23], és Heifetz [39] munkái. Mindkét munka jelentős általánosítást jelent. Brandenburger & Dekel munkája a Kolmogorov-féle Kiterjesztési Tétel egy általánosításának explicit használatával nagyon szép beágyazását adja a problémának a matematikába. Heifetz munkája, láthatólag egy lehető legáltalánosabb megközelítést tárgyal, és itt jelenik meg először a Bourbaki-tétel (a 142. tétel) használata. Ebben a kérdéskörben további jelentős munka Mertens & Sorin & Zamir [59] munkaanyaga. Ez a munka számos megközelítést tárgyal, de szaklapban publikációra nem került.

A legújabb, témában megjelent munka Meier [56] nevéhez fűződik. Ebben a munkában a szerző csak additív halmazfügvényekkel dolgozik, és különböző mérhetőségi struktúrák tulajdonságait vizsgálja. Ugyanebben az évben jelent meg egy áttekintés Aumann & Heifetz-től a *Handbook of Game Theory with Economic Applications III.* [8]-ban. Ez az áttekintés ugyan nem kapcsolódik szorosan a mi általunk vizsgált Bayesi megközelítéshez, mégis fontos, és ebben a megközelítésben is érvényes eredményeket ismertet.

A továbbiakban Mertens & Zamir, Brandenburger & Dekel, Heifetz munkák eredményeit ismertetjük, egy közös keretben. Kitérünk még Mertens & Sorin & Zamir munkájára, de nem érintjük minden eredményét. A közös keret használatának megfelelően, sokszor jelentősen eltérünk a fenti cikkek tárgyalásától, sőt eredményeikre, formailag mindenképp, új bizonyításokat adunk.

5.1. Alapfogalmak

A vélemények, melyek a tárgyalt modellben valószínűségi mértékek, struktúrája alapvető. Tudjuk, hogy a véleményrangsorok (lásd a 24. definíciót) rekurzívan definiáltak. Az itt ismertetett munkákban a véleményterek valamilyen duális struktúrával rendelkeznek, így egyrészt fontos a paramétertér struktúrája, másrészt fontos, hogy milyen duális struktúrát adunk a véleménytereknek.

144. definíció. Legyen $\Delta((X,\tau),\mathcal{M})$ az $((X,\tau),\mathcal{M})$ mérhető téren értelmezett valószínűségi mértékek halmaza. Ekkor $\Delta((X,\tau),\mathcal{M}))$ tér *MSZ gyenge** topológiája az a topológia, melynek bázisát az

$$O = \Big\{\mu \in \Delta((X,\tau),\mathcal{M}) \mid \textstyle\int f d\mu < \alpha, \text{ ahol } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges, és } \forall f \in A \subseteq C_b^f(X,\tau), \\ A \text{ véges halmaz}\}$$

nyílt halmazok adják, ahol $C_b^f(X,\tau)$ az (X,τ)-n értelmezett felülről félig-folytonos korlátos függvények halmaza. Másképpen fogalmazva, $\Delta((X,\tau),\mathcal{M}))$ tér MSZ *gyenge** topológiája az a leggyengébb (legszűkebb) topológia, hogy a

$$\mu \mapsto \mu(f) \mathrel{\mathring{=}} \int f d\mu$$

függvény felülről félig-folytonos, $\forall f \in C_b^f(X,\tau)$ rögzítettre.

A MSZ *gyenge** topológiában vett konvergenciát $\overset{MSZ^\star}{\to}$-lal jelöljük.

145. következmény. *A 144. definícióban bevezetett MSZ gyenge* topológia használható Δ_C $((X,\tau),\mathcal{M})$-re, az $((X,\tau),\mathcal{M})$ mérhető téren értelmezett kompakt, zárt halmazokon szoros valószínűségi mértékek halmazára is.*

A MSZ gyenge* topológiával struktúrát adhatunk a valós számok halmazának is. Ekkor a valós számok halmazán a MSZ gyenge* topológiát a

$$O = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \alpha,\ \textit{ahol}\ \alpha \in \mathbb{R}\} \tag{5.1}$$

nyílt halmazok generálják (tehát MSZ gyenge* topológiát a $(-\infty,\alpha)$ nyílt intervallumok generálják).

146. megjegyzés. A 144. definícióban bevezetett struktúrát Heifetz, és Mertens & Sorin & Zamir munkák használják. Szép tulajdonsága ennek a topológiának, hogy nagyon „jól" viszonyul az alaptér topológiájához, hiszen (X,τ) tetszőleges nyílt (zárt) halmaza megkapható $\mathbb{R}$ valamely nyílt (zárt) halmazának inverzképeként valamilyen $f \in C_b^f(X,\tau)$ felülről félig-folytonos függvénnyel. Tehát míg egy tér topológiáját a rajta lévő folytonos függvények általában nem karakterizálják, addig a felülről (alulról) félig-folytonos korlátos függvények igen.

A függvények korlátossága a generált struktúra tekintetében nem releváns.

147. segédtétel. *Az (X,τ) topologikus téren a $C_b(X,\tau)$ és a $C(X,\tau)$ által indukált mérhető rendszerek megegyeznek.*

Bizonyítás. Azt kell látnunk, hogy $A \in \cup_{f\in C_b(X,\tau)} f^{-1}(B(\mathbb{R}))$ pontosan akkor, ha $A \in \cup_{f\in C(X,\tau)}$ $f^{-1}(B(\mathbb{R}))$. Mivel $C_b(X,\tau) \subseteq C_b(X,\tau)$, így elég azt belátni, hogy ha $A \in \cup_{f\in C(X,\tau)}\ f^{-1}(B(\mathbb{R}))$, akkor $A \in \cup_{f\in C_b(X,\tau)} f^{-1}(B(\mathbb{R}))$.

Indirekten tegyük fel, hogy $\exists A \in \cup_{f\in C(X,\tau)} f^{-1}(B(\mathbb{R}))$, hogy $A \notin \cup_{f\in C_b(X,\tau)} f^{-1}(B(\mathbb{R}))$. Ekkor $\exists D \in B(\mathbb{R})$, és $\exists f \in C(X,\tau)$ de $f \notin C_b(X,\tau)]$, hogy $A = f^{-1}(D)$. Tudjuk azonban, hogy arctan homeomorfizmus $\mathbb{R}$ és $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ között, tehát $\exists D' \in B(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, hogy $\tan D' = D$. Ezzel viszont ellentmondásra jutottunk, hiszen $\arctan \circ f \in C_b(X, \tau)$, és $A = (\arctan \circ f)^{-1}(D')$.

Q.E.D.

148. következmény. *Az (X, τ) topologikus téren a $C_b^f(X, \tau)$ $(C_b^a(X, \tau))$ függvényosztály és a $C^f(X, \tau)$ $(C^a(X, \tau))$ függvényosztály által indukált mérhető rendszerek megegyeznek a Borel mérhető rendszerrel.*

Bizonyítás. Lásd a 146. megjegyzést, és a 147. segédtételt. Q.E.D.

Tehát a következőkben nem kell különbséget tennünk a korlátos folytonos és a nem korlátos folytonos függvényosztályok között. Ez a tulajdonság azért fontos, mert ezen függvényosztályok duálisaiban fogunk vizsgálódni.

Ahhoz, hogy a teljes egyetemes típus teret felépítsük, szükség van a megfelelő inverzrendszerek definiálására. Ezen definíciók ugyan már megszülettek általános értelemben, de konkrét modellek tekintetében csak most kerülnek sorra. Ezen modellekhez van szükség a következő fogalmakra, állításokra.

149. segédtétel. *Legyen (X, τ) topologikus tér, és legyen μ_ω általánosított sorozat, hogy μ_ω, $\mu \in \Delta((X, \tau), B(X, \tau))$. Ekkor a következő három állítás egyenértékű:*

1. $\mu_\omega \overset{MSZ^\star}{\rightarrow} \mu$,
2. $\limsup \mu_\omega(Z) \leq \mu(Z)$ $\forall Z \in \tau$ *zárt halmazra,*
3. $\mu(O) \leq \liminf \mu_\omega(O)$ $\forall O \in \tau$ *nyílt halmazra.*

Bizonyítás. *1.* $\Rightarrow$ *2.*: Legyen $Z \in \tau$ tetszőleges zárt halmaz, és legyen

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \notin Z \\ 1, & \text{ha } x \in Z \end{cases}.$$

Ekkor $f \in C_b^f(X, \tau)$, $\int f d\mu_\omega \overset{MSZ^\star}{\rightarrow} \int f d\mu$, tehát $\limsup \mu_\omega(Z) \leq \mu(Z)$.

2. $\Rightarrow$ *3.*: Legyen $O \in \tau$ tetszőleges nyílt halmaz, ekkor $\mu_\omega(O) = 1 - \mu_\omega(\complement O)$, és $\mu(O) = 1 - \mu(\complement O)$.

$$\mu(\complement O) \geq \limsup \mu_\omega(\complement O) \geq \liminf \mu_\omega(\complement O)$$
$$-\mu(\complement O) \leq -\liminf \mu_\omega(\complement O)$$
$$1-\mu(\complement O) \leq 1-\liminf \mu_\omega(\complement O)$$
$$1-\mu(\complement O) \leq \liminf \mu_\omega(1-\complement O)$$
$$\mu(O) \leq \liminf \mu_\omega(O).$$

3. $\Rightarrow$ *2.*: Legyen $Z \in \tau$ tetszőleges zárt halmaz, ekkor $\mu_\omega(Z) = 1-\mu_\omega(\complement Z)$, és $\mu(Z) = 1-\mu(\complement Z)$.

$$\mu(\complement Z) \leq \liminf \mu_\omega(\complement Z) \leq \limsup \mu_\omega(\complement Z)$$
$$-\mu(\complement Z) \geq -\limsup \mu_\omega(\complement Z)$$
$$1-\mu(\complement Z) \geq 1-\limsup \mu_\omega(\complement Z)$$
$$1-\mu(\complement Z) \geq \limsup \mu_\omega(1-\complement Z)$$
$$\mu(Z) \geq \limsup \mu_\omega(Z).$$

2. $\Rightarrow$ *1.*: Legyen $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$, ekkor $Z_i = f^{-1}([\alpha_i, \infty) \in \tau$ zárt halmaz $i = 1, 2, \ldots, n$. $\limsup \mu_\omega(Z_i \backslash Z_{i-1}) \leq \mu(Z_i \backslash Z_{i-1})$ $i = 2, \ldots, n$, és $\limsup \mu_\omega(Z_1) \leq \mu(Z_i)$, tehát $\limsup \int s d\mu_\omega \leq \int d\mu$, így $\mu_\omega \overset{MSZ^\star}{\rightarrow} \mu$. Q.E.D.

150. definíció. Legyen $((X,\tau), B(X,\tau), \mu)$ Borel-mértéktér, és legyen $A \in B(X,\tau)$ tetszőleges, ekkor A μ-zárt, ha $\mu(intA) = \mu(A) = \mu(\overline{A})$.

151. segédtétel. *Legyenek* $a_\omega^\lambda \rightarrow a^\lambda$ *általánosított valós sorozatok* $\lambda \in \Lambda$, *ekkor* $\inf_\lambda\{a_\omega^\lambda\} \overset{MSZ^\star}{\rightarrow} \inf_\lambda\{a^\lambda\}$.

Bizonyítás. Legyen $\epsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor $\exists \lambda' \in \Lambda$, hogy $a^{\lambda'} < \inf_\lambda a^\lambda + \frac{\epsilon}{2}$. Ekkor $a_\omega^{\lambda'}$ konvergenciája miatt $\exists \omega'$, hogy $a_\omega^{\lambda'} \in (a^{\lambda'} - \frac{\epsilon}{2}, a^{\lambda'} + \frac{\epsilon}{2})$ $\forall \omega \geq \omega'$-re. Ekkor $a_\omega^{\lambda'} < \inf_\lambda a^\lambda + \epsilon$ $\forall \omega \geq \omega'$-re, tehát $\inf_\lambda\{a_\omega^\lambda\} < \inf_\lambda a^\lambda + \epsilon$ $\forall \omega \geq \omega'$-re. Mivel ϵ tetszőlegesen választott volt, így $\inf_\lambda\{a_\omega^\lambda\} \overset{MSZ^\star}{\rightarrow} \inf_\lambda\{a^\lambda\}$. Q.E.D.

152. definíció. Egy (X,τ) topologikus tér TR tulajdonságú, ha $\forall x_0$, és $\forall O$ x_0 nyílt környezetéhez $\exists f : X \rightarrow [0,1]$ folytonos függvény, hogy

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = x_0 \\ 1, & \text{ha } x \in \complement O \end{cases}.$$

A következő állítás Parthasarathy [62] (40. oldal) eredményének általánosítása.

153. állítás. *Legyenek* (X, τ) *TR tulajdonságú topologikus tér, és* μ_ω *általánosított sorozat,* $\mu_\omega, \mu \in \Delta((X, \tau), B(X, \tau))$*. Ekkor a következő négy állítás egyenértékű:*

1. $\mu_\omega(A) \to \mu(A)$ $\forall A \in B(X, \tau)$ *μ-zárt halmazra,*

2. $\mu_\omega \overset{gyenge^\star}{\to} \mu$,

3. $\mu_\omega \overset{MSZ^\star}{\to} \mu$,

4. $\limsup \mu_\omega(Z) \leq \mu(Z)$, $\forall Z \in \tau$ *zárt halmazra, és* $\liminf \mu_\omega(O) \geq \mu(O)$, $\forall O \in \tau$ *nyílt halmazra.*

Bizonyítás. Láncban bizonyítunk.

1. $\Rightarrow$ *2.*: Legyen $f \in C_b$ tetszőleges, rögzített, és legyen $\nu \doteq \mu \circ f^{-1}$, tehát ν valószínűségi mérték $B(\mathbb{R})$-en. $\forall \epsilon > 0$-hoz, $\exists t_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, hogy

- $a < f(x) < b$ $\forall x$ (f korlátos, így $\exists a, b \in \mathbb{R}$, hogy $f(X) \subseteq [a, b]$),
- $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m-1} < t_m = b$, $t_j - t_{j-1} < \epsilon$,
- $\nu(\{t_j\}) = \mu \circ f^{-1}(\{t_j\}) = 0$.

Legyen $A_j \doteq \{x \mid t_{j-1} \leq f(x) < t_j\}$. Világos, hogy A_j halmazok páronként diszjunktak, és $X = \cup_j A_j$. Az is látható, hogy $(\overline{A} \setminus intA) \subseteq f^{-1}(\{t_{j-1}\}) \cup f^{-1}(\{t_j\})$, tehát $\mu(\overline{A} \setminus intA) = 0$, így A_j-k μ-zártak.

Legyen $s_j = \sum_j t_{j-1} 1_{A_j}$ lépcsős függvény. $|s_j(x) - f(x)| < \epsilon$ $\forall x$, ekkor

$$\begin{aligned}\left|\int f d\mu_\omega - \int f d\mu\right| &\leq \int |s_j - f|\, d\mu_\omega + \int |s_j - f|\, d\mu + \left|\int s_j d\mu_\omega - \int s_j d\mu\right| \\ &\leq 2\epsilon + \sum_j |\mu_\omega(A_j) - \mu(A_j)|\, |t_{j-1}|\,.\end{aligned}$$

Tehát,

$$\limsup \left| \int f d\mu_\omega - \int f d\mu \right| \leq 2\epsilon.$$

Mivel ϵ tetszőlegesen választott, és $0 \leq \limsup \left|\int f d\mu_\omega - \int f d\mu\right| \leq 2\epsilon$, így $\int f d\mu_\omega \to \int f d\mu$, tehát $\mu_\omega \overset{gyenge^\star}{\to} \mu$.

2. $\Rightarrow$ *3.*: Bourbaki [16] (Theorem 2., Proposition 5. 144-146. oldal) miatt $\forall f \in C_b^f(X, \tau)$-re, $f = \inf\{g \mid g \geq f,\ g \in C_b(X, \tau)\}$. Tudjuk, hogy $\int f d\mu_\omega \to \int f d\mu$ $\forall f \in C_b(X, \tau)$-re. Ekkor 151. segédtétel miatt $\int f d\mu_\omega \overset{MSZ^\star}{\to} \int f d\mu$ $\forall f \in C_b^f$, tehát $\mu_\omega \overset{MSZ^\star}{\to} \mu$.

3. $\Rightarrow$ *4.*: Lásd a 149. segédtételt.

4. $\Rightarrow$ *1.*: Legyen $A \in B(X,\tau)$ tetszőleges μ-zárt halmaz. $\mu_\omega(intA) \le \mu_\omega(A) \le \mu_\omega(\overline{A})$, így $\mu(intA) \le \liminf \mu_\omega(intA) \le \limsup \mu_\omega(\overline{A}) \le \mu(\overline{A})$. A határátmenet gyenge-reláció tartása, és A μ-zártsága miatt $\mu_\omega(A) \to \mu(intA) = \mu(\overline{A}) = \mu(A)$. Q.E.D.

154. definíció. (X,τ) Hausdorff topologikus tér teljesen reguláris, ha TR tulajdonságú.

155. következmény. *Legyen (X,τ) teljesen reguláris topologikus tér, és μ_ω általánosított sorozat, $\mu_\omega, \mu \in \Delta((X,\tau), B(X,\tau))$. Ekkor a következő négy állítás egyenértékű:*

1. $\mu_\omega(A) \to \mu(A)$ $\forall A \in B(X,\tau)$ *μ-zárt halmazra,*
2. $\mu_\omega \overset{gyenge^\star}{\to} \mu$,
3. $\mu_\omega \overset{MSZ^\star}{\to} \mu$,
4. $\limsup \mu_\omega(Z) \le \mu(Z)$, $\forall Z \in \tau$ *zárt halmazra, és* $\liminf \mu_\omega(O) \ge \mu(O)$, $\forall O \in \tau$ *nyílt halmazra.*

Bizonyítás. Lásd a 153. állítást. Q.E.D.

A 153. állítás azért fontos, mert így a teljesen reguláris terek esetén használhatjuk a „szokásos" *gyenge** topológia eredményeit, és a μ-zárt halmazokon vett konvergenciát.

A következőkben azt a kérdést vizsgáljuk, hogy ha egy szorzattér véges elemű alszorzatain valószínűségi mértékek egy általánosított sorozata tart egy adott valószínűségi mértékhez, akkor vajon az egész szorzattéren is tart-e.

156. segédtétel. *Legyenek (X_n,τ_n) topologikus terek, $n \in \mathbb{N}$, és legyen μ_ω általánosított sorozat, hogy $\mu_\omega, \mu \in \Delta((\Pi_n(X_n,\tau_n)), B(\Pi_n(X_n,\tau_n)))$. Ekkor $\mu_\omega|_{\Pi_{n\in A}(X_n,\tau_n)} \overset{MSZ^\star}{\to} \mu|_{\Pi_{n\in A}(X_n,\tau_n)}$ $\forall A \subset \mathbb{N}$, $card(A) < \infty$ pontosan akkor, ha $\mu_\omega \overset{MSZ^\star}{\to} \mu$.*

Bizonyítás. Azt kell csak látnunk, hogy ha $\mu_\omega|_{\Pi_{n\in A}(X_n,\tau_n)} \overset{MSZ^\star}{\to} \mu|_{\Pi_{n\in A}(X_n,\tau_n)}$ $\forall A \subset \mathbb{N}$, $card(A)$ $< \infty$, akkor $\mu_\omega \overset{MSZ^\star}{\to} \mu$.

Legyen $Z \subseteq \Pi_n(X_n,\tau_n)$ tetszőlegesen rögzített zárt halmaz. Ekkor $Z = \cup_{i=1}^m \cap_{\lambda\in\Lambda_i} Z_\lambda^i$, ahol Z_λ^i olyan zárt halmaz, hogy $\exists A \subset \mathbb{N}$, $card(A) < \infty$, és $Z_\lambda^i = \Pi_{n\in A} pr_n(C_\lambda^i)$ $C_\lambda^i \subset \Pi_{n\in A}(X_n,\tau_n)$ zárt halmaz.

Legyen $F = \{\Lambda^I \mid f(i) \in \Lambda_i \; i \in I\}$, ahol $I = \{1,2,\ldots,m\}$, és $\Lambda = \cup_{i=1}^m \Lambda_i$. Ekkor $Z = \cap_{f\in F} \cup_{i=1}^m Z_{f(i)}^i$. Mivel $\cup_{i=1}^m Z_{f(i)}^i$ szintén benne van valamilyen véges szorzatban, és az egy szorzatból való elemek tetszőleges metszete is benne marad a véges szorzatban, így $Z = \cap_{n\in\mathbb{N}} Z_n$, ahol Z_n olyan zárt halmaz, mely benne van valamilyen véges szorzatban. Legyen $Z_k = \cap_{i=1}^k Z_i$.

Legyen $\epsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített. μ σ-additív, így $\mu(Z_k) \to \mu(Z)$, tehát $\delta > 0$-hoz $\exists a^\star$, hogy $\mu(Z_k) - \mu(Z) < \delta$ $k \geq a^\star$. Azt is tudjuk ($\mu_\omega|_{\Pi_{n\in A}(X_n,\tau_n)} \overset{MSZ^\star}{\to} \mu|_{\Pi_{n\in A}(X_n,\tau_n)}$ $\forall A \subset \mathbb{N}$, $card(A) < \infty$), hogy $\forall\gamma > 0$-hoz, $\exists b^\star$, hogy $\mu_\omega(Z_{a^\star}) < \mu(Z_{a^\star}) + \gamma$ $\omega \geq b^s tar$. Legyen $\gamma = \delta = \frac{\epsilon}{2}$, ekkor

$$\mu_\omega(Z_{a^\star}) < \mu(Z) + \epsilon \quad \omega \geq b^\star.$$

Mivel μ_ω mértékek monotonok, így

$$\mu_\omega(Z) < \mu(Z) + \epsilon \quad \omega \geq b^\star.$$

ϵ tetszőlegesen választott volt, így $\limsup \mu_\omega(\mu) \leq \mu(Z)$.

Z tetszőlegesen választott zárt halmaz volt, így a 156 miatt $\mu_\omega \overset{MSZ^\star}{\to} \mu$. Q.E.D.

157. megjegyzés. A 156. segédtételben az indexhalmaz olyan előrendezett halmaz is lehet (ekkor mérték inverzlimeszben vagyunk), melynek van megszámlálható kofinális részhalmaza.

158. következmény. *Legyenek (X_n, τ_n) teljesen reguláris topologikus terek, $n \in \mathbb{N}$, és legyen μ_ω általánosított sorozat, hogy $\mu_\omega, \mu \in \Delta((\Pi_n(X_n, \tau_n)), B(\Pi_n(X_n, \tau_n)))$. Ekkor $\mu_\omega|_{\Pi_{n\in A}(X_n,\tau_n)} \overset{gyenge^\star}{\to} \mu|_{\Pi_{n\in A}(X_n,\tau_n)}$ $\forall A \subset \mathbb{N}$, $card(A) < \infty$ pontosan akkor, ha $\mu_\omega \overset{gyenge^\star}{\to} \mu$.*

Bizonyítás. Lásd a 156. segédtételt, és a 155. következményt. Q.E.D.

159. megjegyzés. A 158. következményben, tulajdonképpen, a cilinderhalmazokon vett *gyenge** konvergenciából következtettünk a szorzattéren való *gyenge** konvergenciára. Ismert ellenpélda (Shiryayev [75] 313. oldal) arra, hogy általában a cilinder halmazokon való *gyenge** konvergenciából nem következik a szorzattéren való *gyenge** konvergencia.

A 158. következmény esetére nem azért nem működik Shiryayev ellenpéldája mert az indexhalmaz az utóbbiban nem megszámlálható (Shiryayev ellenpéldája átalakítható megszámlálható indexhalmazú esetre), hanem azért, mert az ellenpélda arra épül, hogy két különböző topológia is generálhat egyazon σ-algebrát. Mivel a *gyenge** konvergencia topológiára épül, így természetes, hogy a két eltérő topológia más-más *gyenge** konvergenciát eredményez.

Megállapíthatjuk, tehát, hogy a *gyenge** konvergencia alapvetően két ok miatt romolhat el a szorzattéren:

1. két különböző topológia is generálhat azonos σ-algebrát (Shiryayev ellenpéldája),
2. elképzelhető, hogy a cilinderhalmazok generálta σ-algebra szűkebb, mint a szorzattéren értelmezett mérhetőségi struktúra, és az adott mértékek nem egyértelműen terjeszthetőek ki a bővebb σ-algebrára.

Az 1. pont elkerülése végett a szorzattéren a szorzattopológiát használtuk, míg a 2. pont kiküszöbölésére megszámlálható indexhalmazt használtunk.

5.2. Mertens & Zamir(1984)

Mertens & Zamir [58] cikke áttörést jelentett a teljes típusterek létezésének kérdéskörében. Ez a munka használja először az inverzrendszer és inverzlimesz fogalmakat. Bár a munka kompakt terekkel dolgozik, ami az inverzrendszereknél látottaknak megfelelően elég egyszerű eset, a dolgozat újszerűsége miatt a mondanivaló igen bonyolult nyelven van kifejtve.

A kérdés tárgyalása kapcsán nem kerülhető el a komoly technikai apparátus, de célunk, hogy minden elem szerepe pontosan látható legyen a bizonyítás során.

160. definíció. (X, τ) Hausdorff topologikus tér normális, ha bármely két diszjunkt zárt halmaznak vannak diszjunkt környezetei.

161. megjegyzés. Minden kompakt tér, és minden metrikus tér normális.

162. megjegyzés. Egy alternatív definiciója a normális topologikus térnek: (X, τ) Hausdorff topologikus tér normális, ha bármely két diszjunkt zárt halmazhoz Z_1, Z_2, $\exists f \in C_{[0,1]}(X, \tau)$ függvény, hogy

1. $f(x) = 1\ \forall x \in Z_1$-re,
2. $f(x) = 0\ \forall x \in Z_2$-re.

A következő segédtétel a mértékek reprezentációjához szükséges.

163. segédtétel (Reprezentációs tétel). *(X, τ) normális topologikus téren, a $\lambda(f) = \int f d\mu$ egyenlőséggel definiált megfeleltetés izomorfizmus $C_b(X, \tau)^\star$ és $rba(B(X, \tau))$ elemei között, ahol $rba(B(X, \tau))$ a reguláris, korlátos, additív, (X, τ) Borel halmazain értelmezett halmazfüggvények halmaza.*

Bizonyítás. Lásd Dunford - Schwartz [30] 262. oldal 2 Theorem. Q.E.D.

164. segédtétel (Banach-Alaoglu-tétel). *Legyen X Banach-tér, ekkor $X^\star$-ban az egységgömb gyenge* kompakt.*

Bizonyítás. A bizonyítás közismert (lásd a 3. definíciót). Q.E.D.

165. segédtétel. *Ha (X,τ) kompakt topologikus tér, akkor $\Delta_R((X,\tau), B(X,\tau))$ ahol $\Delta_R((X,\tau), B(X,\tau))$ az (X,τ) topologikus tér Borel halmazain értelmezett reguláris valószínűségi mértékek halmaza $MSZ^\star$ kompakt.*

Bizonyítás. A 161. megjegyzés miatt (X,τ) normális topologikus tér, a Banach-Alaoglu-tétel (164. segédtétel), és a Reprezentációs tétel (163. segédtétel) miatt $M = \{\lambda \in rba(B(X,\tau)) \mid |\lambda(X)| \leq 1)\}$ halmaz *gyenge** kompakt.

(X,τ) kompakt, tehát $rba(B(X,\tau))$ elemei kompakt regulárisak. A 153. állítás miatt $N = \{\lambda \in rba(B(X)) \mid \lambda(X) = 1)\}$ *gyenge** zárt halmaz, így (X,τ) Hausdorff volta és M *gyenge** kompaktsága miatt N *gyenge** kompakt.

A 104. következmény $rba(B(X,\tau))$ elemei miatt σ-additívak, tehát$\Delta_R((X,\tau), B(X,\tau)) = \Delta_R((X,\tau), B(X,\tau)) = N$ *gyenge** kompakt.

Mivel (X,τ) teljesen reguláris, így 155. következmény miatt $\Delta_R((X,\tau), B(X,\tau))$ $MSZ^\star$ kompakt. Q.E.D.

A következő állítás Mertens & Zamir fő eredménye.

166. tétel (Mertens & Zamir tétele). *A paramétertér legyen kompakt topologikus tér (S,τ), a vélemények legyenek reguláris Borel valószínűségi mértékek. Ekkor a korrekt és teljes egyetemes típustér létezik.*

A bizonyítást darabokra szedjük.

167. definíció. A 24. definíciónak megfelelően a véleménytér a következő formát ölti:

$$\begin{aligned}
(T_0, \mathcal{M}_0) &= (S, B(S,\tau)) \\
(T_1, \mathcal{M}_1) &= ((T_0 \times (\Delta_R(T_0))^M), B((T_0 \times (\Delta_R(T_0), \tau_{MSZ^\star})^M)) \\
(T_2, \mathcal{M}_2) &= (T_1 \times (\Delta_R(T_1)^M), B((T_1 \times (\Delta_R(T_1), \tau_{MSZ^\star})^M) \\
&= ((T_0 \times (\Delta_R(T_0))^M \times (\Delta_R(T_1))^M), B(T_0 \times (\Delta_R(T_0), \tau_{MSZ^\star})^M \\
&\quad \times (\Delta_R(T_1), \tau_{MSZ^\star})^M)) \qquad (5.2) \\
&\vdots \\
(T_n, \mathcal{M}_n) &= ((T_{n-1} \times (\Delta_R(T_{n-1}))^M), B(T_{n-1} \times (\Delta_R(T_{n-1}), \tau_{MSZ^\star})^M) \\
&= ((T_0 \times \times_{j=0}^{n-1} (\Delta_R(T_j))^M), B(T_0 \times \times_{j=0}^{n-1} (\Delta_R(T_j), \tau_{MSZ^\star})^M) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Látható, hogy

$$(((T_n, \tau), \mathcal{M}_n), (\mathbb{N} \cup \{0\}, \leq), pr_{nm}|_{n \leq m}) \qquad (5.3)$$

Borel mérhető inverzrendszer, ahol

- pr_{nm} koordináta leképezés (tehát szürjektív),
- $(\mathbb{N} \cup \{0\}, \leq)$ esetén $0 < n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

168. segédtétel. *Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített, és legyen $T^i \doteq \{t^i \in \times_{j=0}^{\infty} \Delta_r(T_j)^i \mid t^i$ következetes véleményrangsor$\}$, ekkor T^i az $i \in M$ játékos típustere. $T^i \subseteq \times_{j=0}^{\infty} \Delta_r(T_j)^i$, $(T^i, \tau_{T^i}) = \times_{j=0}^{\infty} (\Delta_r(T_j)^i, \tau_{MSZ^\star})$, és $(T^i, \mathcal{M}^i) = (T^i, B(T^i, \tau_{T^i}))$, tehát T^i struktúrája származtatott struktúra.*

Bizonyítás. A 18. definíció három tulajdonságát kell belátnunk.

1. A 167. definícióból közvetlenül következik.
2. Legyen $((T,\tau), \mathcal{M}) = \varprojlim(((T_n, \tau), \mathcal{M}_n), (\mathbb{N} \cup \{0\}, \leq), pr_{nm}|_{n \leq m})$ Borel mérhető inverzlimesz. Legyen $\Delta_R((T,\tau), \mathcal{M})$ struktúrája a következő: $(\Delta_R((T,\tau), \mathcal{M}), \tau_{MSZ^\star})$

   Legyenek $i \in M$, és $t^i \in T^i$ tetszőleges rögzítettek, ekkor (S, τ) kompaktsága, és a 165. segédtétel miatt $((T_n, \tau), \mathcal{M}_n, t_n^i), (\mathbb{N} \cup \{0\}, \leq), pr_{nm}|_{n \leq m})$ Radon valószínűségi mérték inverzrendszer. A 143. következmény miatt $((T,\tau), \mathcal{M}, \mu(t^i)) = \varprojlim((T_n, \tau), \mathcal{M}_n, t_n^i), (\mathbb{N} \cup \{0\}, \leq), pr_{nm}|_{n \leq m})$ Radon valószínűségi mérték inverzlimesz létezik, és egyértelmű.

Legyen $f : T^i \to \Delta_R((T,\tau),\mathcal{M})$ leképezés, hogy $f(t^i) \stackrel{\circ}{=} \mu(t^i)$ $\forall t^i \in T^i$-re.

f folytonos: legyen $t^i_\omega \in T^i$ általánosított sorozat, hogy $t^i_\omega \stackrel{\tau_{T^i}}{\to} t^i$, $t^i \in T^i$. Ekkor $(t^i_n)_\omega \stackrel{MSZ^\star}{\to} t^i_n$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$-re. Ekkor azonban a 156. segédtétel miatt $\mu(t^i_\omega) \stackrel{MSZ^\star}{\to} \mu(t^i)$.

Mivel f folytonos, és a mérhetőségi struktúrák a Borel halmazok, így f mérhető leképezés.

3. A mérték inverzlimesz definíciójából közvetlenül látható.

Q.E.D.

A 166. tétel bizonyítása. Legyen f a 168. segédtételben definiált függvény, és legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített.

f injektív: ha $t^i \neq t^j$, akkor $\exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, és $\exists A \in \mathcal{M}_n$, hogy $t^i_n(A) \neq t^j_n(A)$. $t^i_n = \mu(t^i)|_{T_n}$, és $t^j_n = \mu(t^j)|_{T_n}$, így $\mu(t^i) \neq \mu(t^j)$.

f szürjektív: $\forall \mu \in \Delta_R((T,\tau),\mathcal{M})$ esetén $t \stackrel{\circ}{=} (\mu|_{T_0}, \mu|_{T_1}, \ldots, \mu|_{T_n}, \ldots)$ következetes véleményrangsor, és T^i tartalmazza az összes lehetséges következetes véleményrangsort, így $t \in T^i$.

Mivel f bijektív, így invertálható.

f^{-1} folytonos: legyen $\mu_\omega \in \Delta_R((T,\tau),\mathcal{M})$ általánosított sorozat, hogy $\mu_\omega \stackrel{MSZ^\star}{\to} \mu$, $\mu \in \Delta_R((T,\tau),\mathcal{M})$. Ekkor $\mu_\omega|_{T_n} \stackrel{MSZ^\star}{\to} \mu|_{T_n}$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$-re. Ekkor azonban τ_{T^i} definiciója, és $(\nu|_{T_0}, \nu|_{T_1}, \ldots, \nu_{T_n}, \ldots)$ következetes véleményrangsor $\forall \nu \in \Delta_R((T,\tau),\mathcal{M})$ volta miatt $(\mu_\omega|_{T_0}, \mu_\omega|_{T_1}, \ldots, \mu_\omega|_{T_n}, \ldots) \stackrel{\tau_{T^i}}{\to} (\mu|_{T_0}), \mu|_{T_1}, \ldots, \mu_{T_n}, \ldots)$.

Mivel f és f^{-1} folytonosak (lásd a 168. segédtétel bizonyítását), így f homeomorfizmus. $\Delta_R((T,\tau),\mathcal{M})$ tartalmazza az összes véleményt (reguláris valószínűségi mérték), és T^i homeomorf vele, így T^i egyetemes típustér (lásd a 23. definíciót).

T^i tartalmazza az összes lehetséges következetes véleményrangsort, tehát minden típus meghatároz egy véleményrangsort, így T^i korrekt (lásd a 28. definíciót) és teljes (lásd a 31. definíciót).

Q.E.D.

A nem teljes egyetemes típusterek létezésének vizsgálata azt mutatja (lásd a 3. fejezetet), hogy a teljesség vizsgálata eszközigényes. Sokkal kisebb apparátussal vizsgálható a nem teljes egyetemes típustér létezése, mint a teljes egyetemes típustér létezése.

Történetileg azonban fordított a helyzet. Először a teljességen keresztül próbálták meg bizonyítani az egyetemes típustér létezését, tehát nem is választották szét a teljes és nem teljes eseteket. Később, mikor látszott, hogy milyen nehézségekbe ütközik a vizsgálat (lásd fent Mertens & Zamir), akkor fordultak könnyebb, „fifikásabb" utak felé.

5.3. Brandenburger & Dekel(1993)

Brandenburger & Dekel [23] cikke olyan inverzrendszerre épül, melynek elemei Polish-terek.

169. definíció. (X, d_p) metrikus tér Polish-tér, ha teljes és szeparábilis. Tehát (X, d_p) metrikus tér Polish-tér, ha teljes és ha $\exists A \subseteq X$ megszámlálható számosságú halmaz, hogy $X = \overline{A}$.

A matematikai feladat most az, hogy megmutassuk, hogy ha (X, d_p) Polish-tér, akkor $(\Delta((X, d_p), B(X, d_p)), \tau_{MSZ^\star})$ is Polish-tér.

A következő állítás a metrizálhatóság, és a szeparabilitás kapcsolatát mutatja.

170. segédtétel. *Legyen $(X, \|\cdot\|)$ szeparábilis Banach tér, ekkor a gyenge* topológia metrizálható $X^\star$ zárt egységgömbjén.*

Bizonyítás. A bizonyítás közismert (lásd a 3. definíciót). Q.E.D.

171. megjegyzés. A fenti állítás élesíthető, X Banach-tér esetén, $X^\star$-ban a zárt egységgömb pontosan akkor metrizálható, ha X szeparábilis.

172. segédtétel. *Legyen (X, τ) kompakt metrizálható topologikus tér, ekkor $C_b(X, \tau)$ szeparábilis az egyenletes konvergencia topológiában ($\|f\| \doteq \sup |f(x)|$ $f \in C_b(X, \tau)$).*

Bizonyítás. Lásd Bourbaki [16] 155. oldal Definition 4., 156. oldal Proposition 12., 298. oldal Theorem 1.. Q.E.D.

173. következmény. *Tetszőleges (X, τ) kompakt metrizálható topologikus téren $\Delta((X, \tau), B(X, \tau))$ gyenge* kompakt metrizálható tér.*

Bizonyítás. A 165. segédtétel, és a 155. következmény miatt $\Delta_R((X, \tau), B(X, \tau))$ *gyenge** kompakt. A 172. segédtétel miatt $C_b(X, \tau)$ szeparábilis Banach-tér, így a 170. segédtétel miatt $\Delta_R((X, \tau), B(X, \tau))$ *gyenge** metrizálható. Tudjuk, hogy metrizálható tereken minden σ-additív halmazfüggvény reguláris, így $\Delta((X, \tau), B(X, \tau)) = \Delta_R((X, \tau), B(X, \tau))$, így $\Delta((X, \tau), B(X, \tau))$ *gyenge** kompakt metrizálható tér. Q.E.D.

174. segédtétel. *Legyen (X, d_p) Polish-tér, ekkor tetszőleges $\mu \in \Delta((X, d_p), B(X, d_p))$ halmazfüggvény kompakt reguláris.*

Bizonyítás. Lásd Medvegyev [54] 142. oldal 4.2. állítás. Q.E.D.

175. következmény. *Ha* (X, d_p) *Polish-tér, akkor* $\Delta((X, d_p), B(X, d_p)) = \Delta_R((X, d_p), B(X, d_p)) = \Delta_C((X, d_p, B(X, d_p))$.

Bizonyítás. Lásd a 174. segédtételt. Q.E.D.

Sajnos az nem igaz, hogy Polish-terek esetén reguláris additív halmazfüggvények kompakt regulárisak, így σ-additívak.

A következő példa sok mindenre enged következtetni. Ez a példa Jacobs [47] (53. old., 273. old.) könyvében található, de feladatként ki van tűzve Dunford-Schwartz [30]-ban is.

176. példa. Létezik teljes szeparábilis metrikus téren, csak végesen additív reguláris (nem kompakt reguláris) valószínűségi halmazfüggvény.

Legyen $\mathbb{N}$ a diszkrét topológiával (ami nem más, mint a $\mathbb{R}$-ból örökölt struktúra, tehát metrizálható), ekkor

1. $(\mathbb{N}, \tau)$ szeparábilis, teljes, metrikus tér, tehát Polish-tér,

2. $B(X) = \mathcal{P}(X)$.

Legyen l^∞ a korlátos, valós sorozatok halmaza.

Ekkor l^∞ normált tér a $\|\mathbf{x}\|_\infty \triangleq \sup_n |x_n|$ normával.

Legyen $m : l^\infty \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, melyre $m(\mathbf{0}) = 0$, $m(\mathbf{1}) = 1$.

A Hahn-Banach-tétel miatt létezik m' Banach-limesz, tehát:

1. $m'(\mathbf{x}) \geq 0 \ \forall \mathbf{x} \in l^\infty$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$,

2. $m'(\mathbf{1}) = 1$,

3. $m'(x_1, x_2, \ldots) = m'(x_0, x_1, \ldots) \ \forall (x_0, x_1, \ldots) \in l^\infty$.

Legyen $\mu(A) \triangleq m'(1_A)$ $A \in B(\mathbb{N})$, ekkor

1. μ additív, hiszen m' lineáris,

2. $\mu(\mathbb{N}) = 1$, a Banach-limesz definíciója miatt,

3. μ pozitív, a Banach-limesz definiciója miatt,

4. μ szoros a zárt halmazokon, hiszen minden halmaz zárt,

5. μ nem σ-additív, hiszen az egy elemű halmazok 0 mértékűek.

177. megjegyzés. A 176. példából több dolog is következik:

1. a σ-additivitás garantál regularitást a Baire struktúrán de a regularitás nem feltétlenül biztosít σ-additivitást. Tehát, egy reguláris additív halmazfüggvény, mely egy teljesen reguláris téren van értelmezve, kivetítése egy kompakt halmazra nem feltétlenül lesz (kompakt) reguláris. Ez a tény fontos a későbbi állításunk meggondolásakor (204. állítás),
2. egy reguláris kiterjesztés nem lesz feltétlenül σ-additív. Tehát s 113. tételben még ha μ σ-additív is, akkor sem lesz feltétlenül a kiterjesztés σ-additív,
3. láttuk, hogy Polish-téren a Borel halmazokon értelmezett σ-additív véges halmazfüggvények kompakt regulárisak, és a kompakt reguláris additív halmazfüggvények σ-additívak. Látható azonban, hogy Polish-téren sem igaz, hogy minden véges, reguláris halmazfüggvény kompakt reguláris.

178. megjegyzés. Meg kell továbbá jegyeznünk, hogy a Banach-limesz létezése Hahn-Banach-tétellel megy, tehát nem konstruktív.

179. segédtétel. *(X, d) szeparábilis metrizálható tér beágyazható (C, d) kompakt metrizálható térbe.*

Bizonyítás. (X, d) teljesen reguláris topologikus tér, így beágyazható (C, τ) kompakt topologikus térbe, mint sűrű részhalmaz ($\hat{C}ech-Stone$ kompaktifikáció). (X, d) szeparábilis topologikus tér, így (C, τ) is szeparábilis topologikus tér.

Legyen $e : X \to C$ a fent említett beágyazás. Kelley [50]. 116. oldal 5 Embedding lemma miatt e nyílt leképezés.

Tudjuk, hogy egy normális tér pontosan akkor metrizálható, ha megszámlálható bázisú (M2), lásd Schuebert [74] 109. oldal 2. tétel (Uriszon). Tehát azt kell látnunk, hogy $\exists\Lambda$ megszámlálható halmaz, és $\exists O_\lambda \in \tau$ nyílt halmaz, hogy $\forall O \in \tau$ nyílt halmaz esetén $\exists\lambda \in \Lambda$, hogy $O_\lambda \subseteq O$.

Tudjuk, hogy (X, d) megszámlálható bázisú tér. Legyen O_n (X, d) bázisa. Azt mutatjuk meg, hogy $e(O_n)$ bázis (C, τ)-ban (e nyílt leképezés, tehát $e(O_n)$-ek nyílt halmazok).

Legyen $O \in \tau$ tetszőlegesen rögzített nyílt halmaz. Ekkor $e^{-1}(O) \in d$ nyílt halmaz. Mivel O_n bázisa (X, d)-nek, így $\exists n$, hogy $O_n \subseteq e^{-1}(O)$. Ekkor $e(O_n) \subseteq O$, tehát O tetszőlegesen választott volta miatt kész is vagyunk. Q.E.D.

180. segédtétel. *Legyen* (X, d_p) *Polish-tér. Ekkor* $\Delta((X, d_p), B(X, d_p))$ $MSZ^\star$ *Polish-tér.*

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható (nem kirészletezve) Dellacherie-Meyer [28] 73. oldal (60), és (részben) Parthasarathy [62] 46. oldal Theorem 6.5.

(X, τ) szeparábilis metrikus tér, így a 179. segédtétel miatt beágyazható (C, τ) kompakt metrikus térbe. A 173. következmény miatt $\Delta_R((C, \tau), B(C, \tau))$ *gyenge** kompakt metrikus tér. Kompakt metrikus tér teljes (lásd Kolmogorov-Fomin [49]) 112. oldal 2.7.2. tétel), tehát $\Delta((C, \tau), B(C, \tau))$ *gyenge** Polish-tér.

A 174. segédtétel miatt $\Delta((X, d_p), B(X, d_p))$ elemei kompakt regulárisak. Legyen $i : X \to C$ a $\hat{C}ech - Stone$ kompaktifikációnál használt beágyazás. Legyen $\nu \doteq \mu \circ i^{-1}$, ahol $\mu \in \Delta((X, d_p), B(X, d_p))$ tetszőleges, ekkor $\nu \in \Delta((C, \tau), B(C, \tau))$, tehát $\Delta((X, d_p), B(X, d_p))$-t felfoghatjuk, mint $\Delta((C, \tau), B(C, \tau))$ alterét.

Bourbaki [16] 197. oldal Theorem 1. miatt $\exists O_n \in \tau$ nyílt halmazok, $n \in \mathbb{N}$, hogy $X = \cap_n O_n$. Legyenek

$$A_n^m \doteq \{\nu \in \Delta((C, \tau), B(C, \tau)) \mid \nu(\complement O_n) < \frac{1}{m}\},$$

ahol $m \in \mathbb{N}$.

$\complement A_n^m$ zárt $\forall n, m \in \mathbb{N}$-re. Legyenek n, m tetszőlegesen rögzítettek. Ekkor

$$\complement A_n^m = \{\nu \in \Delta((C, \tau), B(C, \tau)) \mid \nu(\complement O_n) \geq \frac{1}{m}\}.$$

Legyen $\nu_\omega \overset{gyenge^\star}{\to} \nu$ tetszőleges konvergens általánosított sorozat $\Delta((C, \tau), B(C, \tau))$-ben. Ekkor a 153. állítás miatt $\frac{1}{m} \leq \limsup \nu_\omega(\complement O_n) \leq \nu(\complement O_n)$, tehát $\nu \in \complement A_n^m$. Mivel n, m tetszőlegesen választott volt, így $\complement A_n^m$ *gyenge** zárt halmaz.

Látható, hogy $\Delta((X, d_p), B(X, d_p)) = \cap_n \cap_m A_n^m$, tehát Bourbaki [16] 197. oldal Theorem 1. miatt $\Delta((X, d_p), B(X, d_p))$ *gyenge** Polish-tér.

A 155. következmény, és (X, d_p) teljesen reguláris volta miatt $\Delta((X, d_p), B(X, d_p))$ $MSZ^\star$ Polish-tér. Q.E.D.

A következő tétel Brandenburger & Dekel [22] fő állítása.

181. tétel (Brandenburger & Dekel tétele). *A paramétertér legyen Polish-tér* (S, d_p)*, a vélemények legyenek Borel valószínűségi mértékek, és a játékosok halmaza megszámlálható számosságú. Ekkor a korrekt és teljes egyetemes típustér létezik.*

A bizonyítás a 166. tétel bizonyításával analóg módon történik.

182. megjegyzés. A 180. segédtétel, M megszámlálható volta, és (S, τ) Polish-tér volta miatt (5.2)-ban T_n-ek Polish-terek. Metrizálható tereken $\Delta((X, d_p), B(X, d_p)) = \Delta_R((X, d_p), B(X, d_p))$, így a 167. definícióban Δ_R-ek Δ-ra cserélhetőek.

183. megjegyzés. A 182. megjegyzés, a 174. segédtétel miatt a 168. segédtételben Δ_R-ek Δ-ra cserélhetőek.

A 181. tétel bizonyítása. A 182., és a 183. megjegyzések miatt a 5.2. bizonyításban Δ_R-ek Δ-ra cserélhetőek. Q.E.D.

Brandenburger & Dekel cikke három szempontból is fontos újításokat tartalmaz:

1. közvetlenül hivatkozik a Kolmogorov-féle Kiterjesztési Tételre,
2. a modellükben közismert, hogy a vélemények következetes véleményrangsorok (bár nem közvetlenül a mérték inverzrendszer vizsgálatakor építik be ezt a tulajdonságot a modelljükbe),
3. a vélemények valószínűségi mértékek (igaz, hogy Polish-tereken a valószínűségi mértékek kompakt regulárisak, de ennek ellenére újításnak tartjuk ezt a megoldást).

Mindhárom pont fontos abból a szempontból, hogy pontosan megértsük milyen problémát is vizsgálunk valójában, amikor a teljes egyetemes típusterek létezését vizsgáljuk.

5.4. Heifetz(1993)

Heifetz [39] munkája a lehető legáltalánosabb feltételeket próbálta megtalálni, melyeket ha felteszünk a paramétertérre, akkor még biztosítható a korrekt, teljes egyetemes típustér létezése.

184. segédtétel. *Legyen $C_1, C_2 \in \tau$ két kompakt halmaz (X, τ) Hausdorff topologikus téren, hogy $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, ekkor $\exists O_1, O_2 \in \tau$ nyílt halmazok, hogy $O_1 \supseteq C_1$, $O_2 \supseteq C_2$, és $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.*

Bizonyítás. Legyen $c \in C_1$ tetszőleges rögzített. (X, τ) Hausdorff topologikus tér, így $\forall b \in C_2$ $\exists O(c), O(b) \in \tau$ nyílt halmazok, hogy $O(c) \cap O(b) = \emptyset$. Világos, hogy $\cup_{b \in C_2} O(b) \supseteq C_2$, és $\exists 1, 2, ..., n$, hogy $\cup_{i=1}^n O(b_i) \supseteq C_2$, hiszen C_2 kompakt. Ekkor legyen $O(c^\star) = \cap_{i=1}^n O(c_i)$, és $O(b^\star) = \cup_{i=1}^n O(b_i)$. Könnyen látható, hogy $O(c^\star)$, és $O(b^\star)$ nyílt halmazok, $O(b^\star) \supseteq C_2$, és $O(a^\star) \cap O(b^\star) = \emptyset$.

Oldjuk fel c rögzítettségét. Ekkor $\cup_{c\in C_1} O(a^\star) \supseteq C_1$, és $\exists 1, 2, \ldots, m$, hogy $\cup_{i=1}^m O(c_i^\star) \supseteq C_1$, hiszen C_1 kompakt. Legyen $O_1 = \cup_{i=1}^m O(c_i^\star)$, és $O_2 = \cap_{i=1}^m O(b_i^\star)$. Ekkor $O_1 \supseteq C_1$, és $O_2 \supseteq C_2$, hiszen $O(b^\star) \supseteq C_2$ $\forall b^\star$. Q.E.D.

185. segédtétel. *Ha (X, τ) Hausdorff topologikus tér, akkor $(\Delta_C((X, \tau), B(X, \tau)), \tau_{MSZ^\star})$ is Hausdorff topologikus tér.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\exists A \in \tau$, hogy $\mu, \nu \in \Delta_C((X, \tau), B(X, \tau))$-re $\mu(A) > \nu(A)$. Ekkor μ, ν kompakt regularitása miatt $\exists C_1, C_2 \in \tau$ kompakt halmazok, hogy $A \supseteq C_1$, és $\complement A \supseteq C_2$, továbbá $\mu(C_1) + \nu(C_2) > 1$. A 184. segédtétel miatt $\exists O_1, O_2 \in \tau$ nyílt halmazok, hogy $O_1 \supseteq C_1$, $O_2 \supseteq C_2$, és $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, és $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, hogy $\alpha + \beta > 1$, és $\mu(O_1) > \alpha > \nu(O_1)$, $\nu(O_2) > \beta > \mu(O_2)$.

Legyenek $f(x) \circeq \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \complement O_1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$, és $g(x) \circeq \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \complement O_2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$, ekkor $f, g \in C_b^f(X)$. Az is látható, hogy $O(\mu) = \left\{v \in \Delta_C \mid \int f dv < \alpha\right\}$, és $O(\nu) = \left\{v \in \Delta_C \mid \int g dv < \beta\right\}$ esetén $O(\mu) \cap O(\nu) = \emptyset$. Q.E.D.

186. tétel (Heifetz tétele). *A paramétertér legyen Hausdorff topologikus tér (S, τ), a vélemények legyenek Radon valószínűségi mértékek. Ekkor a korrekt és teljes egyetemes típustér létezik.*

A bizonyítás a 166. tétel, és a 181, tétel bizonyításával analóg módon történik.

187. megjegyzés. A 185. segédtétel, és (S, τ) Hausdorff topologikus tér volta miatt (5.2)-ben T_n-ek Hausdorff topologikus terek. Kompakt tereken $\Delta_C((X, d_p), B(X, d_p)) = \Delta_R((X, d_p), B(X, d_p))$, így a 167. definícióban Δ_R-ek Δ_C-re cserélhetőek.

188. megjegyzés. A 187. megjegyzés miatt a 168. segédtételben Δ_R-ek Δ_C-re cserélhetőek.

A 186. tétel bizonyítása. A 187., és a 188. megjegyzések miatt a 5.2. bizonyításban Δ_R-ek Δ_C-re cserélhetőek. Q.E.D.

Heifetz munkája úgy lép a lehető legáltalánosabb feltételek felé, hogy a Radon-mérték inverzlimesz létezését kimondó tételt (143. következmény) nem vizsgálja. Nem nézi meg, hogy az egyes feltételek miként „dolgoznak" a tételben, tehát „fekete doboz"-ként kezeli azt.

Igaz, hogy sem Heifetz, sem Mertens & Zamir, sem Brandenburger & Dekel nem vizsgálja az inverzlimesz létezését kimondó tételeket, de ezen munkák elsődleges célja nem az általánosítás volt. Ezen munkák arra irányultak, hogy elég tipikus esetekben megmutassák, hogy a típustér fogalmának használata nem túl erős feltételezés.

5.5. Mertens & Sorin & Zamir(1994)

Mertens & Sorin & Zamir [59] munkájából csak a teljesen reguláris paramétertér esetét vizsgáljuk.

189. segédtétel. *Legyen* (X, τ) *teljesen reguláris topologikus tér, ekkor* $(\Delta_C((X, \tau), B(X, \tau)), \tau_{MSZ^\star})$ *teljesen reguláris.*

Bizonyítás. (X, τ) teljesen reguláris, tehát $\exists i : X \to C$ beágyazás, ahol $(C, \tau$ kompakt tér ($\hat{C}ech - Stone$ kompaktifikáció). Legyen $\mu \in \Delta_C((X, \tau), B(X, \tau))$ tetszőleges, legyen $\mu' \doteq \mu \circ i^{-1}$, ekkor $\mu' \in \Delta_C((X, \tau), B(X, \tau))$, hiszen tetszőleges $A \in B(C, \tau)$-re, és tetszőleges $\epsilon > 0$-ra, $i^{-1}(A) \in B(X, \tau)$. $\mu \in \Delta_C((X, \tau), B(X, \tau))$, így $\exists Z \in B(X, \tau)$ kompakt halmaz, hogy $Z \subseteq i^{-1}(A)$, és $\mu(i^{-1}(A) \setminus Z) < \epsilon$. $i(Z) \in B(C, \tau)$ kompakt halmaz, hiszen i folytonos, $i(Z) \subseteq A$, így μ' definiciója miatt $\mu(A \setminus i(Z)) < \epsilon$. A, ϵ tetszőlegesen választott volt, így $\mu' \in \Delta_C((X, \tau), B(X, \tau))$.

Az eddigiekből következik, hogy $\Delta_C((X, \tau), B(X, \tau))$ úgy tekinthető, mint $\Delta_C((C, \tau), B(C, \tau))$ egy altere.

A 165. segédtétel miatt $\Delta_C((C, \tau)B(C, \tau))$ $gyenge^\star$ kompakt, így $\Delta_C((X, \tau), B(X, \tau))$ $gyenge^\star$ teljesen reguláris, hiszen kompakt tér tetszőleges altere teljesen reguláris.

A 155. következmény miatt $\Delta_C((X, \tau), B(X, \tau))$ $MSZ^\star$ teljesen reguláris topologikus tér.

Q.E.D.

A következő állítás az alapja Mertens & Sorin & Zamir teljesen reguláris paramétertér esetére vonatkozó fő eredménye.

190. tétel (Mertens & Sorin & Zamir tétele). *A paramétertér legyen teljesen reguláris topologikus tér* (S, τ)*, a vélemények legyenek Radon valószínűségi mértékek. Ekkor a korrekt és teljes egyetemes típustér létezik.*

Bizonyítás. Mivel minden teljesen reguláris tér Hausdorff, így a 5.4. bizonyítás használható.

Q.E.D.

191. megjegyzés. Látható, hogy a 186. tétel általánosabb, mint a 190. tétel. A külön tárgyalás oka az, hogy a 190. tétel feltételeinek teljesülésekor (5.3)-ben a Borel mérhető inverzrendszer inverzlimeszében az alaptér teljesen reguláris topologikus tér.

Hangsúlyozzuk, hogy Mertens & Sorin & Zamir munkája a teljes egyetemes típustérre vonatkozó vizsgálatok sokkal szélesebb területet fed le, mint amit mi itt ismertetünk (tárgyalja többek között az analitikus halmazok kérdését is).

6. fejezet

Egy lehetséges általánosítás

Kiindulásképpen legyen S paramétertér, mely paramétertér tartalmazza az összes lehetséges tényt, amelyeknek befolyása lehet a játékra. Ekkor a játékosok véleményének modellezéséhez az S generálta véleményteret kell vennünk, tehát figyelembe kell venni, hogy miként vélekednek az egyes játékosok S-ről, miként vélekednek az egyes játékosok arról, hogy miként vélekednek a játékosok S-ről, s.i.t.

192. definíció. A paramétertér mérhető tér $(S, \mathcal{A}_S)$, ahol $\mathcal{A}_S$ az S téren definiált σ-algebra.

A paramétertérről csak azt tesszük fel, hogy mérhető. Modellünkben a játékosok olyan fogalmakkal operálnak, mint esemény, kimenetel, valószínűség, tehát egy tisztán mértékelméleti modell tűnik alkalmasnak. Tudjuk azonban, hogy tisztán mértékelméleti modell nem feltétlenül eredményez teljes egyetemes típusteret (lásd Heifetz & Samet [45])-t, és a 43. példát).

193. definíció. Jelölje $\Delta(S, \mathcal{A}_S)$ az $(S, \mathcal{A}_S)$-en értelmezett valószínűségi mértékek halmazát, és legyen $d(\mu_1, \mu_2) = \sup_{A \in \mathcal{A}_S} |\mu_1(A) - \mu_2(A)|$. Ekkor $(\Delta(S, \mathcal{A}_S), d)$ röviden (Δ, d) metrikus tér. (Δ, d) Baire mérhetőségi struktúráját jelöljük $B(\Delta, d)$-vel.

Ahol ez nem vezet félreértéshez, ott $\Delta(S, \mathcal{A}_S)$ helyett a rövidebb $\Delta(S)$ vagy Δ jelöléseket használjuk. Hasonlóan járunk el $B(\Delta(S), d)$ és $B(\Delta(S))$ esetében is.

194. definíció. Definiáljunk terek egy sorozatát rekurzív módon, ahol M a játékosok halmaza:

[0]Ezen fejezet forrása: [63].

$$\begin{aligned}
T_0 &= (S, \mathcal{A}_S) \\
T_1 &= T_0 \otimes (\Delta(T_0)^M, B(\Delta(T_0)^M)) \\
T_2 &= T_1 \otimes (\Delta(T_1)^M, B(\Delta(T_1)^M)) \\
&= T_0 \otimes (\Delta(T_0)^M, B(\Delta(T_0)^M)) \otimes (\Delta(T_1)^M, B(\Delta(T_1)^M)) \\
&\vdots \\
T_n &= T_{n-1} \otimes (\Delta(T_{n-1})^M, B(\Delta(T_{n-1})^M)) \\
&= T_0 \otimes \otimes_{j=0}^{n-1} (\Delta(T_j)^M, B(\Delta(T_j)^M)) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

ahol $\otimes$ a szorzat mérhető struktúrát jelöli.

T_0 egy pontját paraméter értéknek nevezzük, egyszerűen egy lehetséges paramétere a játéknak. T_1 egy pontja nem más, mint egy lehetséges paraméter érték, és a hozzá tartozó első rendű vélemények (a játékosok véleménye a lehetséges paraméterekről), s.i.t.

Vegyük a $T_\infty = S \times \times_{j=0}^{\infty} \Delta(T_j)^M$ végtelen szorzatot. Ha $t \in T_\infty$, akkor t nem más, mint $t = (s, \mu_1^1, \mu_1^2, \ldots, \mu_2^1, \mu_2^2, \ldots)$, ahol μ_j^i jelentése, hogy az „i" játékos j-ed rendű véleménye. Tehát T_∞ minden eleme felfogható úgy, mint egy *véleményrangsor* i.e. $(\mu_1^i, \mu_i^2, \ldots)$ minden játékosra, és még egy lehetséges paraméter, ami nem más, mint egy lehetséges világállapot. T_∞-t *véleménytérnek* nevezzük.

195. megjegyzés. $(s, \mu_1^1, \mu_1^2, \ldots, \mu_2^1, \mu_2^2, \ldots)$ elemei tekinthetőek úgy, mint egy általánosított sorozat elemei, ahol a rendezés: az első elem s, és $\mu_j^i \leq \mu_k^l$ pontosan akkor ha $j \leq k$.

196. definíció. Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített. Egy vélemény sorozat $(\mu_1^i, \mu_2^i, \ldots)$ következetes ha $n \geq 2$-re

1. $marg_{T_{n-2}} \mu_n^i = \mu_{n-1}^i$,
2. $marg_{[\Delta(T_{n-2})]^i} \mu_n^i = \mu^i_{\mu_{n-1}^i}$,

ahol μ_n^i $[\Delta(T_{n-1})]^i$-ból való ($[\Delta(T_{n-1})]^i$ az i-ik másolata $\Delta(T_{n-1})$-nek), továbbá, $marg_{T_n}$ jelöli a T_n-en lévő marginális mértéket, és $\mu^i_{\mu_{n-1}^i}$ Dirac-mérték mely a μ_{n-1}^i pontra koncentrál.

Az első feltétel azt rögzíti, hogy az adott játékos véleménye egy adott dologról nem változik a véleményrangsorban. A második feltétel szerint az adott játékos pontosan ismeri a saját véleményét (lásd Harsányi [38]). A fenti két feltétel felfogható, mint a játékosok logikája, feltesszük, hogy ez a logika *közismert*.

197. megjegyzés. A mérhetőségi struktúra $[\Delta(T_{n-1})]^i$-n $\forall i$,$\forall n$ Baire halmazokkal definiált, mely struktúra egybeesik a Borel struktúrával metrizálható terek esetén, így minden egyes pont mérhető halmaz.

198. definíció. Vegyünk azokat a pontokat $(s, \mu_1^1, \mu_1^2, \ldots, \mu_2^1, \mu_2^2, \ldots)$ T_∞-ből, melyek esetén a véleményrangsorok $(\mu_1^i, \mu_i^2, \ldots)$ következetesek $\forall i \in M$. Legyen az összes ilyen pont halmaza T_∞^c, és hívjuk T_∞^c-t *következetes alterének.*

A ^{c} jelölést, más terek esetében is használjuk, és jelentése megegyezik a 198. definícióban elmondottakkal.

199. definíció. Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített, és vegyük a következő halmazt

$$T^i = (\times_{k=0}^{\infty}[\Delta(T_k^c)]^i)^c.$$

Ekkor T^i az „i" játékos típustere, T^i egy pontja az „i" játékos egy lehetséges típusa.

Az „i" játékos típustere tartalmazza az összes lehetséges következetes véleményrangsort. Tehát, ha $t \in T^i$, akkor $t = (\mu_1^i, \mu_2^i, \mu_3^i, \ldots)$, és t következetes. Ezen tulajdonságok miatt T^i „egyetemes típustér".

200. következmény. *T^i metrizálható, hiszen altere megszámlálható sok metrikus tér szorzatának. Ez a metrika a $d_p(\mu, \mu') = \sum_n \frac{1}{2^n} d(\mu_n, \mu_n')$ távolsággal adott, ahol $\mu, \mu' \in T^i$, és $\mu_n, \mu_n' \in [\Delta(T_{n-1}^c)]^i$ (d-t a 193. definícióban adtuk meg).*

201. megjegyzés. Ha M számossága nagyobb, mint megszámlálható, akkor $\Delta(T_n)^M$ Baire halmazrendszere gyengébb, mint Borel struktúrája. Másrészt, ez a struktúra (Baire halmazok) egybe esik $\otimes_{m \in M} B(\Delta(T_n))^m$-mel, a szorzat mérhetőségi struktúrával. Fontos látni, hogy ez a konstrukció nagyon hasonlít egy tisztán mértékelméleti felépítéshez, hiszen nem használjuk a topológiát, hogy finomítsuk a mérhetőségi struktúrát.

202. következmény. *Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített,*

$$((T_n^c, B(T_n^c), \mu_{n+1}^i), (\mathbb{N} \cup \{0\}, \leq), pr_{mn}|_{m \leq n}) \tag{6.1}$$

mérték inverzrendszer, ahol pr_{mn} koordináta leképezés T_n^c-ből T_m^c-be $\forall (m \leq n)$, és $(\mu_1^i, \ldots, \mu_{n+1}^i, \ldots) \in T^i$.

Bizonyítás. A mérték inverzrendszerének definiciója megtalálható a 49. definícióban.

- $pr_{mn} = pr_{mk} \circ pr_{kn}$ $\forall (m \leq k \leq n)$, a koordináta leképezések definiciója miatt,
- $pr_{nn} = id_{T_n^c}$ $\forall n$ közvetlenül adódik a koordináta leképezések definíciójából,
- pr_{mn} mérhető $\forall (m \leq n)$, a szorzat mérhetőségi struktúra közvetlen következménye,
- $\mu^i_{n+1}(pr^{-1}_{mn}(A)) = \mu^i_{m+1}(A)$ $\forall m < n$ és $\forall A \in B(T^c_m)$ a véleményrangsorok következetessége miatt.

Q.E.D.

A 202. következmény kapcsolatot teremt a véleménytér és a mérték inverzlimesz fogalmak között. A továbbiakban tehát az a kérdés, hogy létezik-e a megfelelő tulajdonságokkal bíró mérték inverzlimesz (lásd az 57. megjegyzést).

Már említettük, hogy ha M számossága nagyobb, mint megszámlálhatóan végtelen, akkor a Baire struktúra durvább, mint a Borel struktúra. Ebben az esetben egy pont T^c_n-ben ($n > 0$) nem mérhető. Ezt a jelenséget úgy interpretálhatjuk, hogy a játékosok ebben az esetben nem tudják pontosan, hogy mik a többi játékosok véleményei. A játékosok csak megszámlálható számosságú másik játékos véleményét tudják pontosan. Gyakran találkozunk a következő kijelentéssel: „Nem tudom ki, de valaki tudja ezt a dolgot ....!". A valószínűségszámítás nyelvén megfogalmazva: „X tudja azt a dolgot" a kimenetel, „valaki tudja azt a dolgot" az esemény. Ebben a példában egy játékos nem ismer olyan eseményt, hogy „i-nek a véleménye ez ..., j véleménye az ..., " minden játékosra, de olyan eseményt ismer, hogy „1-nek a véleménye ..., 2-nek a véleménye ..., ..., valakinek a véleménye ...", tehát egyszerre „csak" megszámlálható sok játékos véleményének pontos ismerete esemény. Ez a tulajdonság tipikus mérhetőségi tulajdonság.

A következő állítás azt mutatja, hogy az igazi kérdés a σ-additivitása μ^i-nek, tehát hogy létezik-e a mérték inverzlimesz.

203. állítás. *Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített. A (6.1)-ban definiált mérték inverzrendszer esetén létezik $(T, \mathcal{A}_T, \mu^i)$ gyenge mérték inverzlimesz (lásd az 59. definíciót), hogy $T = T^c_\infty$.*

Bizonyítás. Lásd a 92. állítást, és a 198. definíciót. Q.E.D.

A 203. állítás μ^i additivitására koncentrál. Általában a mérték inverzlimesz létezése két problémába ütközhet. Az első az inverzlimesz „gazdagsága", tehát az a kérdés, hogy az inverzlimesz elég sok pontot tartalmazzon, a Heifetz & Samet [46] cikkbeli ellenpélda erre a problémára épül. A második tipikus probléma μ^i σ-additivitása, erre támaszkodik a 43. példa.

Az első fajta probléma elkerülésére koordináta leképezéseket használunk, míg a második típusú probléma kezelése a valószínűségi mértékek valami fajta regularitását követeli meg.

A következő állítás a legfontosabb lépés fő eredményünk bizonyításához.

204. állítás. *Definiáljuk a csonka véleményterek következő sorozatát (lásd a 194. definíciót):*

$$\begin{aligned}
C_0 &= (\Delta_C(T_0)^M, B(\Delta_C(T_0)^M) \\
C_1 &= C_0 \otimes (\Delta_C(T_1)^M, B(\Delta_C(T_1)^M)) \\
&= (\Delta_C(T_0)^M, B(\Delta_C(T_0)^M)) \otimes (\Delta_C(T_1)^M, B(\Delta_C(T_1)^M)) \\
&\vdots \\
C_n &= C_{n-1} \otimes (\Delta_C(T_{n-1})^M, B(\Delta_C(T_{n-1})^M)) \\
&= \otimes_{j=0}^{n-1} (\Delta_C(T_j)^M, B(\Delta_C(T_j)^M)) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

ahol $\Delta_C(\cdot)$ a kompakt reguláris valószínűségi mértékek halmazát jelöli.

Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített, és vegyük a gyenge mérték inverzlimeszt:

$$(C, \mathcal{A}_C, \nu^i) = w - \varprojlim(((C_n^c, B(C_n^c), \nu_n^i), (\mathbb{N} \cup \{0\}, \leq), pr_{mn}|_{m \leq n}),$$

Ekkor ν^i σ-additív.

Bizonyítás. Lásd a Bourbaki-tételt (142. tétel). Q.E.D.

205. megjegyzés. A 204. állításban a kompakt regularitás feltétel nem hagyható el. Ennek illusztrálására nézzük a következő gondolatmenetet:

„A 203. állítás azt mondja, hogy $\mathcal{A}_C$ algebra és ν^i additív halmazfüggvény. Továbbá, $\mathcal{A}_C \subset B(C)$, hiszen minden p_n folytonos C szorzat topológiájára nézve (amely a leggyengébb topológia amire minden p_n folytonos).

Teljesen reguláris topologikus terek szorzata teljesen reguláris, ezért C is teljesen reguláris topologikus tér.

Könnyen látható, hogy ν^i reguláris halmazfüggvény.

A teljesen reguláris tereket jellemzi az a tulajdonság, hogy beágyazhatjuk egy kompakt térbe, mint mindenütt sűrű halmaz ($\hat{C}ech - Stone$ kompaktifikáció).

Legyen b egy injektív függvény, mely beágyazza C-t K kompakt térbe, és legyen $\nu^i_K = \nu^i \circ b^{-1}$ egy halmazfüggvény $\mathcal{A}_K$-án, K részhalmazainak egy rendszerén, amelyet $\mathcal{A}_K \triangleq \{X \subseteq K \mid b^{-1}(X) \in \mathcal{A}_C\}$ definiál.

Könnyen látható, hogy ν^i_K reguláris. Mivel K kompakt halmaz, így ν^i_K kompakt reguláris. A 104. következmény miatt ν^i_K σ-additív.

Másrészről, C tartalmazza ν^i_K tartóját, és ν^i megszorítása ν^i_K-nak C-n, így ν^i is σ-additív.

Következmény: ν^i σ-additív $\mathcal{A}_C$-n $\forall i$."

Az álló betűvel kiemelt résszel van a probléma. Elképzelhető ugyanis, hogy a beágyazott halmaz külső mértéke ($\nu^{i\star}_K(C) < 1$) kisebb mint egy, tehát annak megszorítása (ν^i) nem feltétlenül σ-additív. A 176. példában lévő Polish-tér beágyazható kompakt metrikus térbe (lásd a 179. segédtételt). Ekkor a „pusztán" additív halmazfüggvény (μ) kivetítése a kompakt térbe σ-additív. Az eredeti tér ($\mathbb{N}$) mértéke a kompakt térben azonban 0, így a kivetített σ-additív mérték megszorítása az eredeti térre ($\mathbb{N}$-re) „természetesen" csak „pusztán" additív.

A kompakt regularitás feltételének szerepe a mérték inverzlimesz létezésében három helyen jelentkezik. Egyrészt a kompakt regularitás biztosítja a σ-additivitást, másrészt biztosítja az inverzlimesz megfelelő gazdagságát, harmadrészt a kompakt reguláris mértékek kiterjeszthetőek a Borel halmazokra, mégpedig többnyire egyértelműen.

Az utolsó tulajdonság nagyon fontos a sztochasztikus folyamatok elméletében (a mintaösvény mérhetőségét biztosítja), de a mi problémánkban nem releváns. A mi célunk, hogy egy olyan modellt építsünk, mely a lehető leginkább hasonlít egy tisztán mértékelméleti modellhez.

A következő tétel a fő eredményünk.

206. tétel. *T^i egyetemes típustér, így létezik egy homeomorfizmus $f : T^i \to (\Delta_{PC}(\mathcal{A}_T), \tau_p)$, ahol $\Delta_{PC}(\mathcal{A}_T)$ a $\mathcal{A}_T$-n értelmezett olyan valószínűségi mértékek halmaza, hogy $marg_{(C,\mathcal{A}_C)}\mu \in \Delta_C(C, \mathcal{A}_C)$ $\forall \mu \in \Delta_{PC}(\mathcal{A}_T)$, és $(\Delta_{PC}(\cdot), \tau_p)$ a pontonkénti konvergencia topológia $\Delta_{PC}(\cdot)$-n.*

A tétel bizonyítását két alapvető részre osztottuk.

207. definíció. Legyen $g : \Delta_{PC}(\mathcal{A}_T) \to T^i$ $\forall \mu$ mértékhez azt a $t = (\mu^i_1, \mu^i_2, \ldots, \mu^i_n, \ldots)$ pontot rendel T^i-ből, ahol

$$\mu^i_n = marg_{T_{n-1}}\mu \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

208. segédtétel. *Legyenek $(M, \mathcal{A}_M, \mu_M), (N, \mathcal{A}_N, \mu_N)$ valószínűségi mértékterek, és legyen μ additív halmazfüggvény $\mathcal{A}_M \otimes \mathcal{A}_N$-en, legyen továbbá p_M és p_N koordináta leképezések. Ha*

$\mu \circ p_M^{-1} = \mu_M$ és $\mu \circ p_N^{-1} = \mu_N$, akkor μ σ-additív $\mathcal{A}$-n, mely a cilinder halmazok által generált algebra.

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy $\mathcal{A}$ elemei felírhatók a következő formában: $\cup_{j=1}^{m}(M_j \times N_j)$, ahol $m \in \mathbb{N}$, $M_j \in \mathcal{A}_M$, $N_j \in \mathcal{A}_N$. Ismert (lásd Jacobs [47] 274. oldal 3.1. Proposition) hogy, μ σ-additív $\mathcal{A}$-n pontosan akkor, ha tetszőleges $A_{n+1} \subseteq A_n$ halmazsorozatra $(\cap_n A_n = \emptyset) \Longrightarrow (\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0)$.

Legyen A_n tetszőleges halmazsorozat, hogy $A_{n+1} \subseteq A_n$, és $\cap_n A_n = \emptyset$. Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}$-hez legyen $k_n \in \mathbb{N}$, hogy $A_n = \cup_{j=1}^{k_n}(M_j^n \times N_j^n)$. Legyen $F \doteq \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f(n) \leq k_n \quad \forall n$, ekkor $\cap_n A_n = \cup_{f\in F} \cap_n (M_j^{f(n)} \times N_j^{f(n)})$. Tudjuk, hogy

$$(\cap_n A_n = \emptyset) \Longrightarrow (\cap_n (M_{f(n)}^n \times N_{f(n)}^n) = \emptyset \quad \forall f \in F-re). \tag{6.2}$$

Osszuk az $\cap_n (M_{f(n)}^n \times N_{f(n)}^n)$ halmazokat két csoportba. Tartalmazza az első csoport, F_1 azokat az f elemeket, ahol $\cap_n M_{f(n)}^n = \emptyset$, és a maradék elemek alkossák a második csoportot F_2-őt.

Legyen $M_n \doteq \cup_{f\in F_1} M_{f(n)}^n$, ahol n tetszőlegesen rögzített. Minden n-re véges sok $M_{f(n)}^n$ halmaz van, tehát $M_n \in \mathcal{A}_M$. Könnyen látható, hogy $M_n \supseteq M_{n+1}$ $\forall n$, tehát M_n monoton halmazsorozat. Azt kell még látnunk, hogy $\cap_n M_n = \emptyset$

$\cap_n M_n = \cup_{f\in F_1} \cap_n M_{f(n)}^n$. (6.2)-ből $\cap_n M_{f(n)}^n$ $\forall f \in F_1$-re, tehát $\cap_n M_n = \emptyset$.

A fentiekből következik, hogy $\cap_n (M_n \times N) \supseteq \cup_{f\in F_1} \cap_n (M_{f(n)}^n \times N_{f(n)}^n)$. μ_M σ-additivitása miatt $\mu_M(M_n) \to 0$, tehát

$$\lim \mu_M(M_n) = \lim \mu(M_n \times N) \geq \lim \mu(\cup_{f\in F_1} \cap_n (M_{f(n)}^n \times N_{f(n)}^n)),$$

így $\mu(\cup_{f\in F_1} \cap_n (M_{f(n)}^n \times N_{f(n)}^n)) \to 0$.

Az F_2 halmazra teljesen hasonlóan látható, hogy $\mu(\cup_{f\in F_2} \cap_n (M_{f(n)}^n \times N_{f(n)}^n)) \to 0$.

μ additivitása miatt

$$\begin{aligned} &\mu(\cup_{f\in F_1} \cap_n (M_{f(n)}^n \times N_{f(n)}^n)) + \mu(\cup_{f\in F_2} \cap_n (M_{f(n)}^n \times N_{f(n)}^n)) \\ &\geq \mu((\cup_{f\in F_1} \cap_n (M_{f(n)}^n \times N_{f(n)}^n)) \cup (\cup_{f\in F_2} \cap_n (M_{f(n)}^n \times N_{f(n)}^n))). \end{aligned} \tag{6.3}$$

Legyen $\epsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, hogy $\mu(\cup_{f\in F_1} \cap_n (M_{f(n)}^n \times N_{f(n)}^n)) < \frac{\epsilon}{2}$, ahol $n \geq n_1$, és $\exists n_2 \in \mathbb{N}$, hogy $\mu(\cup_{f\in F_2} \cap_n (M_{f(n)}^n \times N_{f(n)}^n)) < \frac{\epsilon}{2}$, ahol $n \geq n_2$. Ekkor $\mu(\cup_{f\in F_1} \cap_n (M_{f(n)}^n \times N_{f(n)}^n)) + \mu(\cup_{f\in F_2} \cap_n (M_{f(n)}^n \times N_{f(n)}^n)) < \epsilon$, ahol $n \geq \max\{n_1, n_2\}$. (6.3) egyenlőtlenség, és ϵ tetszőlegesen választott volta miatt $\mu(A_n) \to 0$. Q.E.D.

209. segédtétel. *g bijekció.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy g injektív. Ha $\mu \in \Delta_{PC}(\mathcal{A}_T)$ adott, akkor μ egyértelműen meghatározza a perem mértékeit, tehát, meghatároz egy pontot T^i-ben.

Most azt mutatjuk meg, hogy g szürjektív. Legyen $t \in T^i$ rögzített. A 203. állítás, és a 204. állítás miatt $\mathcal{A}_S \times \mathcal{A}_C \subset \mathcal{A}_T$. Legyen $q_1 : (T, \mathcal{A}_T) \to (S, \mathcal{A}_S)$, és $q_2 : (T, \mathcal{A}_T) \to (C, \mathcal{A}_C)$ koordináta leképezések. Definiáljuk μ-t a cilinder halmazokon a következő módon (lásd a 194. definíciót, és 204. állítást):

$$\mu = \mu_1^i \circ q_1, \quad \text{és} \quad \mu = \nu^i \circ q_2.$$

A cilinder halmazokon μ és μ^i egybeesnek (μ^i a gyenge mérték inverzlimeszből való, lásd a 203. állítást) és μ^i additív halmaz függvény, így μ kiterjeszthető a cilinder halmazok generálta algebrára, úgy, hogy μ és μ^i egybeesnek azon. A 208. segédtételből tudjuk, hogy μ σ-additív halmazfüggvény ezen az algebrán, tehát egyértelműen kiterjeszthető $\mathcal{A}_T$-ra (lásd a 106. tételt).

Azt kell még bizonyítanunk, hogy $\mu = \mu^i$ $\mathcal{A}_T$-n. Indirekt tegyük fel, hogy $\exists A \in \mathcal{A}_T$, hogy $\mu(A) \neq \mu^i(A)$. Ekkor $\exists k$, és $\exists B \in B(T_k^c)$, hogy $A = p_k^{-1}(B)$. Tudjuk azonban, hogy μ_{k+1}^i σ-additív, így $marg_{T_k^c}\mu = \mu_{T_k^c}^i$, ami ellentmondás, tehát g bijekció. Q.E.D.

210. definíció. Legyen $f = g^{-1}$.

211. segédtétel. *f homeomorfizmus.*

Bizonyítás. f folytonos ($t_k \xrightarrow{d_p} t \Longrightarrow f(t_k) \xrightarrow{p} f(t)$): $t_k \xrightarrow{d_p} t$ melyből $\forall l$, $\forall A_l \in B(T_l^c)$ $t_k^l(A_l) \to t^l(A_l)$, továbbá $p_l^{-1}(A_l) \in \mathcal{A}_T$, és $f(t_k) \circ p_l^{-1}(A_l) = t_k^l(A_l)$, így $f(t_k) \xrightarrow{p} f(t)$ $\mathcal{A}_T$-n.

f^{-1} folytonos ($\mu_k \xrightarrow{p} \mu \Longrightarrow f^{-1}(\mu_k) \xrightarrow{d_p} f^{-1}(\mu)$): $\mu_k \xrightarrow{p} \mu$ $\mathcal{A}_T$-n, amely azt jelenti, hogy μ_k perem mértékek konvergálnak μ-höz pontonként, tehát $f^{-1}(\mu_k) \xrightarrow{d_p} f^{-1}(\mu)$. Q.E.D.

A 206. tétel bizonyítása. Legyen f definiálva a 210. definícióval.

A 209. segédtétel miatt f bijekció.

A 211. segédtétel miatt f homeomorfizmus. Q.E.D.

212. megjegyzés. A 206. tétel egyetemes típustere korrekt és teljes (lásd a 28., és a 31. definíciót).

213. megjegyzés. A homeomorfizmus létezését $\Delta_{PC}(\mathcal{A}_T)$-re és nem $\Delta_{PC}(\sigma(\mathcal{A}_T))$-ra bizonyítottuk, mert az utóbbira nem feltétlenül létezik (lásd a 214. példát).

A következő ellenpélda a 206. tételhez fűzött 213. megjegyzést támasztja alá.

214. példa. Legyen $\Omega \doteq [0,1]^{\{1,1/2,1/3,\dots,1/n,\dots\}}$, tehát az $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$ pontokon értelmezett függvények halmazát.

Legyen $f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1/n \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$,

legyenek továbbá $\delta_{f_n}(A) = \begin{cases} 1, & \text{ha } f_n \in A \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$ Dirac-mértékek. Ekkor Ω kompakt metrikus tér, mérhetőségi struktúráját a koordináta leképezések generálják (szorzattopológia), és látható, hogy a Borel és Baire halmazok egybeesnek.

Az is látható továbbá, hogy a koordináta leképezések segítségével megadott algebra (cilinder halmazok) generálja a Borel mérhetőségi struktúrát.

Legyen $f_0 = 0$ konstans függvény, és legyen δ_{f_0} a fent definiáltaknak megfelelően Dirac-mérték. Látható, hogy $\delta_{f_n} \to \delta_{f_0}$ pontonként az algebra (cilinder halmazok) összes elemén, de a $B = \{f_0\}$ (minden pontban nulla függvény) halmazon, ami nem eleme az algebrának csak a σ-algebrának, $\delta_{f_n}(B) \nrightarrow \delta_{f_0}(B)$.

215. megjegyzés. A 206. tétel a pontonkénti konvergencia topológia fontosságát is mutatja. Tetszőleges topologikus tér mérhető halmazain értelmezett valószínűségi mértékek halmazán a *MSZ gyenge** vagy a *gyenge** topológia gyengébb, mint a pontonként konvergencia struktúránk.

A következő példa (216. példa) azt demonstrálja, hogy a mi modellünk mennyiben lehet előrelépés a korábbi modellekhez képest (lásd az 5. fejezetet).

216. példa. Legyen két játékos, mindkét játékosnak legyen két-két stratégiája. Ez a játék normál formában egy pont $\mathbb{R}^8$-ban. Van két valószínűségi változó, melyek meghatározzák a játékosok kifizetéseit. Tehát, a paraméter tér legyen $S = \mathbb{R}^{8^{\mathbb{R}^2}}$ (a paraméterek függvények $\mathbb{R}^2$-ből $\mathbb{R}^8$-ba). S nem kompakt, nem Polish-tér, így Mertens & Zamir és Brandenburger & Dekel modelljei nem működnek ebben az esetben. Legyen S mérhető struktúrája a Borel halmazai. A mi modellünkben, a lehetséges vélemények az összes valószínűségi mértékek halmaza S-en, de ezek között lehetnek olyanok, melyek nem kompakt regulárisak, tehát Heifetz, Mertens & Sorin & Zamir modelljei kevésbé általánosak, mint a miénk.

A fent ismertetett modellnek fő „erénye" az, hogy a különböző rendű vélemények terén olyan topológiát definiál, mely független az alacsonyabb rendű vélemények topológiájától. Ráadásul ezen tér a vélemények gazdagabb ábrázolását teszi lehetővé, mint a megelőző munkák, továbbá ezen tér egy teljesen reguláris topologikus tér, tehát használhatjuk a Kolmogorov-féle Kiterjesztési Tétel egy általános formáját (204. állítás, 206. tétel).

7. fejezet

Összefoglalás

Már a játékelmélet legegyszerűbb problémái kapcsán is felmerülnek a játékosok informáltságára vonatkozó feltevések. Általában „elsiklunk" ezen kérdések felett, hiszen vizsgálatuk igen „messzire" vezet. Nos, e munka egy ilyen lehetséges kitérőt igyekezett bemutatni.

Felmerülhet a kérdés: Mire ez a sok apparátus, biztosan kellenek ezek az eszközök, vagy csupán a kérdés egy túlbonyolítása az ami itt történik? A probléma bemutatására a dolgozat leginkább hangsúlyozott fejezete. Azt gondoljuk, hogy a problémák ismertetése során mindenki meggyőződhet arról, hogy valóban elkerülhetetlenek a bonyolultabb matematikai fogalmak használata.

A [63] munkára épülő fejezet tovább finomította a teljes típusterek létezésének bizonyításakor a topológia szerepét. Nem csupán arról van szó, hogy általánosabb ezen modell (PMP), mint a korábbiak (Mertens & Zamir [58], Brandenburger & Dekel [23], Heifetz [8], Mertens & Sorin & Zamir [59]), hanem abban is, hogy rávilágít arra tényre, hogy a *gyenge** (*gyenge* $MSZ^\star$) topológia szép tulajdonságai mellett (lásd a 158. következményt) milyen „felesleges" megkötéseket tartalmaz a paramétertérre vonatkozóan. Tehát, a paramétertéren topológiára csak azért van szükség, hogy meglegyen a *gyenge** (*gyenge* $MSZ^\star$) topológia a különböző rendű vélemények terén.

Végezetül, egy fontos eredményre hívjuk fel a figyelmet, mely eredmény rávilágít arra, hogy az e dolgozatban tárgyalt probléma korántsem tekinthető lezártnak.

Nem tudjuk, hogy mit is jelent valójában egy a dolgozatban tárgyalt típustérrel rendelkező modell. Simon [76] példája mutatja, hogy nem feltétlenül igaz, hogy egy Bayesi-játéknak van mérhető Bayesi-Nash-egyensúlya Mertens & Zamir-féle típustér esetén. Tehát, kapunk egy létezést (köztudott játék normál formában), de elvesztettünk egy fontos eredményt, t.i. a Bayesi-Nash-egyensúly létezését.

Simon példája az egyetemes típusterek vizsgálatának egy új irányát mutatja. Rendben van, hogy létezik, de mennyiben használható egy egyetemes típustér?

8. fejezet

Melléklet

egyetemes vélemény tér	universal beliefs space
egyetemes típustér	universal type space
vélemény altér	beliefs subspace
hipotetikus tudás	hypothetical knowledge
korrekt	sound
következetes véleményrangsor	coherent hierarchy of beliefs
közismert	common belief
közismert racionalitás	common belief of rationality
köztudott	common knowledge
köztudott racionalitás	common knowledge of rationality
majdnem sorozatmaximális	almost sequentially maximal
mintaösvény	sample path
sorozatmaximális	sequentially maximal
teljes egyetemes típustér	complete universal type space
tudás rangsor	hierarchy of knowledges
véleményállapot	state of mind
véleményrangsor	hierarchy of beliefs
véleménytér	beliefs space
visszafelé lépegetés	backward induction
VL	BI

Irodalomjegyzék

[1] Aumann R. J.: "Agreeing to disagree" *Annals of Statistics* **4**, 1236–1239. (1976)

[2] Aumann R. J.: "Bacward induction and common knowledge of rationality" *Games and Economic Behavior* **8**, 6–19. (1995)

[3] Aumann R. J.: "Rationality and bounded rationality" *Games and Economic Behavior* **21**, 2–14. (1997)

[4] Aumann R. J.: "On the centipede game" *Games and Economic Behavior* **23**, 97–105. (1998)

[5] Aumann R. J.: "Interactive epistemology I.: Knowledge" *International Journal of Game Theory* **28**, 263–300. (1999)

[6] Aumann R. J.: "Interactive epistemology II.: Probability" *International Journal of Game Theory* **28**, 301–314. (1999)

[7] Aumann R. J., Brandenburger A.: "Epistemic conditions for nash equilibrium" *Econometrica* **63**, 1161–1180. (1995)

[8] Aumann R. J., Heifetz A.: "Incomplete Information" *Handbook of Game Theory with Economic Applications III.*, 1665–1686. North-Holland (2002)

[9] Battigalli P., Siniscalchi M.: "Hierarchies of conditional beliefs and interactive epistemology in dynamic games" *Journal of Economic Theory* **88**, 188–230. (1999)

[10] Binmore K.: "Modeling rational players: part I." *Essays on the Foundations of Game Theory*, 151–185. Basil Blackwell (1990)

[11] Binmore K.: "Modeling rational players: part II." *Essays on the Foundations of Game Theory*, 151–185. Basil Blackwell (1990)

[12] Binmore K.: "A note on backward induction" *Games and Economic Behavior* **17**, 135–137. (1996)

[13] Binmore K., Brandenburger A.: "Common knowledge and game theory" *Essays on the Foundations of Game Theory*, 105–150. Basil Blackwell (1990)

[14] Bochner S.: *Harmonic Analysis and the Theory of Probability*, University of California Press (1955)

[15] Bourbaki N.: *Elements of Mathematics, General Topology I.*, Hermann (1966)

[16] Bourbaki N.: *Elements of Mathematics, General Topology II.*, Hermann (1966)

[17] Bourbaki N.: *Elements of Mathematics, Theory of Sets*, Hermann (1968)

[18] Bourbaki N.: *Éléments de Mathématque, Intégration, Livre VI, Chapitre IX, Intégration sur Les Espaces Topologiques Séparés*, Hermann (1969)

[19] Böge W., Eisele T.: "On solutions of bayesian games" *International Journal of Game Theory* **8**, 193–215. (1979)

[20] Brandenburger A.: "On the existence of a 'complete' possibility structure" *manuscript* (2002)

[21] Brandenburger A.: "The power of paradox" *manuscript* (2002)

[22] Brandenburger A., Dekel E.: "Common knowledge with probability 1" *Journal of Mathematical Economics* **16**, 237–245. (1987)

[23] Brandenburger A., Dekel E.: "Hierarchies of beliefs and common knowledge" *Journal of Economic Theory* **59**, 189–198. (1993)

[24] Brandenburger A., Keisler H. J.: "An impossibility theorem on beliefs in games" *manuscript* (1999)

[25] Brandenburger A., Keisler H. J.: "Epistemic condition for iterated admissibility" *manuscript* (2000)

[26] Choksi J. R.: "Inverse limits of measure spaces" *Proc. London Math. Soc.* **8(Ser 3)**, 321–342. (1958)

[27] Dancs I. *Halmazelmélet*, Aula (2001)

[28] Dellacherie C., Meyer P-A.: *Probabilities and Potential*, Hermann (1978)

[29] Dudley R. M.: "Distances of probability measures and random variables" *The Annals of Mathematical Statistics* **39**(5), 1563–1572 (1968)

[30] Dunford N., Schwartz J. T.: *Linear Operators Part I: General Theory*, Interscience Publishers, Inc. (1964)

[31] Epstein L. G., Wang T.: "'beliefs about beliefs' without probabilites" *Econometrica* **64**, 1343–1373. (1996)

[32] Forgó F., Szép J.: Bevezetés a Játékelméletbe, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, (1974)

[33] Forgó F., Szép J., Szidarovszky F.: *Introduction to the Theory of Games: Concepts, Methods, Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1999)

[34] Forgó F., Zalai E.: "Neumann János hozzájárulása a játékelmélethez és a matematikai közgazdaságtanhoz" Ki Volt Igazából Neumann János? 99–137. Nemzeti Tankönyvkiadó, (2003)

[35] Fudenberg D., Tirole J.: *Game Theory*, MIT Press (1991)

[36] Geanakoplos J.: "Common Knowledge" *Handbook of Game Theory and Its Applications II.*, 1437–1496. Elsevier Science Publishers (North-Holland) (1994)

[37] Halmos P. R.: *Mértékelmélet*, Gondolat (1984)

[38] Harsányi J.: "Games with incomplete information played by bayesian players part I., II., III." *Management Science* **14**, 159–182., 320–334., 486–502. (1967-1968)

[39] Heifetz A.: "The bayesian formulation of incomlete information - the non-compact case" *International Journal of Game Theory* **21**, 329–338. (1993)

[40] Heifetz A.: "Non-well-founded-type spaces" *Games and Economic Behavior* **16**, 202–217. (1996)

[41] Heifetz A., Hart S., Samet D.: "'knowing whether,', 'knowing that,' and the cardinality of state spaces" *Journal of Economic Theory* **70**, 249–256. (1996)

[42] Heifetz A, Mongin P.: "Probability logic for type spaces" *Games end Economic Behavior* **35**, 31–53. (2001)

[43] Heifetz A., Samet D.: "Knowledge spaces with arbitary high rank" *Games and Economic Behavior* **22**, 260–273. (1998)

[44] Heifetz A., Samet D.: "Topology-free typology of beliefs" *Journal of Economic Theory* **82**, 324–341. (1998)

[45] Heifetz A., Samet D.: "Coherent beliefs are not always types" *Journal of Mathematical Economics* **32**, 475–488. (1999)

[46] Heifetz A., Samet D.: "Hierarchies of knowledge: An unbounded stairway" *Mathematical Social Sciences* **38**, 157–170. (1999)

[47] Jacobs K.: *Measure and Integral*, Academic Press, (1978)

[48] Kolmogorov A. N.: *A Valószínûségszámítás Alapfogalmai*, Gondolat (1982)

[49] Kolmogorov A. N., Fomin SZ. V.: *A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei*, Műszaki Könyvkiadó (1981)

[50] Kelley J. L.: *General Topology*, D. Van Nostrand Company, Inc. (1955)

[51] Mallory D. J., Sion M.: "Limits of inverse systems of measures" *Ann. Inst. Fourier* **21**, 25–57. (1971)

[52] Mas-Colell A., Whinston M. D., Green J. R.: *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, (1995)

[53] McKelvey R., Palfrey T.: "An experimental study of centipede game" *Econometrica* **60**, 803–836. (1992)

[54] Medvegyev P.: *Valószínûségszámítás*, Aula (2002)

[55] Meier M.: "An infinitary probability logic for type spaces" *CORE Discusson paper No. 0161* (2001)

[56] Meier M.: "Finitely additive beliefs and universal type spaces" *CORE Discusson paper No. 0275* (2002)

[57] Millington H., Sion M.: "Inverse systems of group-valued measures" *Pacific Journal of Mathematics* **44**, 637–650. (1973)

[58] Mertens J. F., Zamir S.: "Formulations of bayesian analysis for games with incomlete informations" *International Journal of Game Theory* **14**, 1–29. (1985)

[59] Mertens J. F., Sorin S., Zamir S.: "Repeated games part A" *CORE Discussion Paper No. 9420* (1994)

[60] Metivier M.: "Limites projectives de measures. martingales. applications" *Annali di Matematica* **63**, 225–352. (1963)

[61] v. Neumann J., Morgenstern O.: *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, (1953)

[62] Parthasarathy K. R.: *Probability Measures on Metric Spaces*, Academic Press (1967)

[63] Pintér M.: "Type space on a purely measurable parameter space" *Economic Theory* accepted

[64] Prokhorov Yu. V.: "Convergence of random processes and limit theorems on probability theory" *TV* **1**, 157–214. (1956)

[65] Rao M. M.: *Stochastic Processes and Integration*, Sijthoff & Noordhoff (1979)

[66] Rao M. M.: *Foundations of Stochastic Analysis*, Academic Press (1981)

[67] Rao M. M.: *Measure Theory and Integration*, John Wiley & Sons (1987)

[68] Rao M. M.: *Conditional Measures and Applications*, Marcel Dekker, Inc. (1993)

[69] Rényi A.: *Valószínűségszámítás*, Tankönyvkiadó, (1973)

[70] Rosenthal R.: "Games of perfect information, predatory pricing, and the chain store paradox" *Journal of Economic Theory* **25**, 92–100. (1981)

[71] Rudin W.: *Real and Complex Analysis*, WCB McGraw-Hill (1987)

[72] Samet D.: "Ignoring ignorance and agreeing to disagree" *Journal of Economic Theory* **52**, 190–207. (1990)

[73] Samet D.: "Hypothetical knowledge and games with perfect information" *Games and Economic Behaivor* **17**, 230–251. (1996)

[74] Schubert H.: *Topológia*, Műszaki Könyvkiadó (1986)

[75] Shiryayev A. N.: *Probability*, Springer-Verlag (1984)

[76] Simon R. S.: "Games of Inomplete Information, Ergodic Theory, and the Measurability of Equlibria" *Mathematica Gottingensis, No. 05/2001*, (2001)

[77] Simonovits A.: "Bevezetés a játékelméletbe: Vázlat" *kézirat* (2000)

[78] Szatmári A.: "Aukciók, avagy képbe kerül, ha a Louvre a képbe kerül?" *Közgazdasági Szemle*, **XLIII**, 303–314. (1996)

[79] Vassilakis S., Zamir S.: "Common belief and common knowledge" *Journal of Mathematical Economics* **22**, 495–505. (1993)