

MAROSSY ZITA

**A SPOT VILLAMOSENERGIA-ÁRAK ELEMZÉSE
STATISZTIKAI ÉS ÖKONOFIZIKAI ESZKÖZÖKKEL**

Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék

Matematikai Közgazdaságtan és Gazdaságelemzés Tanszék

Témavezető: Csekő Imre egyetemi docens, Ph. D.

Copyright ©Marossy Zita, 2010

BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM

KÖZGAZDASÁGTANI DOKTORI ISKOLA

**A SPOT VILLAMOSENERGIA-ÁRAK ELEMZÉSE
STATISZTIKAI ÉS ÖKONOFIZIKAI ESZKÖZÖKKEL**

Ph. D. értekezés

MAROSSY ZITA

Budapest, 2010.

Tartalomjegyzék

TARTALOMJEGYZÉK	5
ÁBRÁK JEGYZÉKE	8
TÁBLÁZATOK JEGYZÉKE.....	10
ELŐSZÓ	11
1. A VILLAMOSENERGIA-PIACOK BEMUTATÁSA.....	15
1.1. VILLAMOSENERGIA-PIACI LIBERALIZÁCIÓ	15
1.2. VILLAMOSENERGIA-TŐZSDÉK	19
2. FELHASZNÁLT ADATOK	24
2.1. AZ ADATOK ELŐFELDOLGOZÁSA	24
2.2. NAPI ÁRAK	26
2.3. HOZAMOK	27
3. A SZAKIRODALOM MÓDSZEREINEK ÉS EREDMÉNYEINEK BEMUTATÁSA	29
3.1. A VILLAMOSENERGIA-ÁR MODELLEZÉSÉNEK CÉLJA.....	29
3.2. A VILLAMOSENERGIA-ÁRAK STILIZÁLT TÉNYEI.....	32
3.2.1. <i>Kiugró értékek</i>	33
3.2.2. <i>Szezonalitás</i>	36
3.2.3. <i>Magas autokorreláció</i>	38
3.2.4. <i>Változó volatilitás</i>	39
3.2.5. <i>Vastag szélek</i>	41
3.2.6. <i>Hosszú távú memória, átlaghoz való visszahúzás és multifraktál jelleg</i>	46
3.2.7. <i>Egységgyök</i>	59
3.3. MODELLEZÉSI LEHETŐSÉGEK	62
3.3.1. <i>A modellezendő változó</i>	62
3.3.2. <i>Eloszlás</i>	63
3.3.3. <i>Előszűrés</i>	64
3.3.3.1. <i>Az ártüskék eltávolítása az adatsorból</i>	65
3.3.3.2. <i>Szezonalitás-szűrés</i>	65

3.3.3.3.	Az ártüskék és a szezonális szűrésének összefüggése	67
3.3.3.4.	A frakcionális késleltetés kiszűrése ARFIMA modellek esetén	67
3.3.4.	<i>Modellek</i>	68
3.3.4.1.	Modelltípusok	69
3.3.4.2.	Redukált modellek	70
3.3.4.3.	Idősormodellek.....	73
3.3.4.4.	Ártüske-előrejelzés.....	75
4.	SAJÁT KUTATÁSI EREDMÉNYEK	78
4.1.	A VILLAMOSENERGIA-ÁR HURST EXPONENSE, PERZISZTENCIÁJA.....	78
4.1.1.	<i>A Hurst exponens kiszámítása</i>	78
4.1.2.	<i>A multiscaling jelenség</i>	81
4.1.3.	<i>Ár kontra hozam</i>	84
4.1.4.	<i>A H mutató a nap órájának függvényében</i>	84
4.2.	MULTIFRAKTÁL JELLEG	87
4.2.1.	<i>Multifraktál elemzés</i>	87
4.2.2.	<i>A kiugró árak természete</i>	90
4.2.2.1.	<i>A Markov rezsinváltó modellek alkalmasságának ellenőrzése</i>	90
4.2.3.	<i>Az idősor nemstacionárius jellege</i>	93
4.3.	A VILLAMOS ENERGIA ÁRÁNAK ELOSZLÁSA.....	96
4.3.1.	<i>GEV eloszlás az árak modellezésében</i>	96
4.3.2.	<i>Az extrémérték-elmélet megjelenése</i>	103
4.3.3.	<i>Egy kapacitásbővítési modell</i>	107
4.4.	DETERMINISZTIKUS REZSIMVÁLTÁS.....	117
4.5.	A HÉTEN BELÜLI SZEZONALITÁS SZŰRÉSE.....	123
4.5.1.	<i>A GEV-szűrő</i>	124
4.5.2.	<i>A GEV-szűrt árak Hurst exponense</i>	127
4.5.3.	<i>Még egyszer a determinisztikus rezsinváltó modellről</i>	128
4.6.	ALKALMAZÁS	131
4.7.	AZ EREDMÉNYEK ÁTTEKINTÉSE AVAGY A STILIZÁLT TÉNYEK ÚJRAGONDOLÁSA	133
	ÖSSZEGZÉS	137
	FÜGGELÉK.....	139

A. A FRAKCIONÁLIS WIENER-FOLYAMAT SZIMULÁCIÓJA ÉS H MUTATÓJA	139
B. A BLOKKMAXIMUMOK KONVERGENCIÁJA	141
HIVATKOZÁSOK JEGYZÉKE.....	143

Ábrák jegyzéke

1. ÁBRA: AZ ÁRAMPIACOK KAPCSOLÓDÁSA	20
2. ÁBRA: A PIACTISZTÍTÓ ÁR ÉS A KERESKEDETT MENNYISÉG MEGHATÁROZÁSA A BORZEN ESETÉN	22
3. ÁBRA: AZ EEX ÉS NORD POOL ÓRÁNKÉNTI IDŐSOR.....	26
4. ÁBRA: AZ EEX ÉS NORD POOL NAPI IDŐSOR.....	27
5. ÁBRA: A HOZAMOK IDŐSORA	28
6. ÁBRA: AZ ENERGIAPIACI TERMÉKEK FELHASZNÁLÁSA A FOGYASZTÁS ELŐREJELZÉSÉNEK ISMERETÉBEN	30
7. ÁBRA: AZ ÁRAK HISZTOGRAMJA.....	33
8. ÁBRA: ÉVES SZEZONALITÁS AZ EEX NAPI ÁR ESETÉN	36
9. ÁBRA: HETI SZEZONALITÁS	37
10. ÁBRA: AZ ÁRAK KORRELOGRAMJA 180-AS ÉS 2000-ES KÉSLELTETÉSIG	39
11. ÁBRA: A NAPI HOZAM NÉGYZETÉNEK KORRELOGRAMJA	40
12. ÁBRA: A VOLATILITÁS SZEZONÁLIS JELLEGE (ÁTLAGOS ABSZOLÚT VÁLTOZÁS ÓRÁNKÉNT)	41
13. ÁBRA: AZ ÁRAK LOGARITMUSÁNAK Q-Q PLOTJA (A NORMÁLIS ELOSZLÁSSAL SZEMBEN).....	42
14. ÁBRA: HILL-PLOTOK.....	46
15. ÁBRA: A FRAKCIONÁLIS WIENER-FOLYAMAT SZIMULÁCIÓJA KÜLÖNBÖZŐ H ESETÉN	49
16. ÁBRA: A SZIMULÁLT FRAKCIONÁLIS WIENER-FOLYAMAT NÖVEKMÉNYEINEK AUTOKORRELÁCIÓS FÜGGVÉNYE LOG-LOG SKÁLÁN	50
17. ÁBRA: EEX ÉS NORD POOL DFA ELEMZÉS	81
18. ÁBRA: A H BECSLÉSEI AZ EEX ÉS NORD POOL ESETÉN (MF)DFA MÓDSZERREL A NAP 24 ÓRÁJÁRA	85
19. ÁBRA: AZ EEX ÉS NORD POOL ÁRAK MF-DFA ELEMZÉSE.....	87
20. ÁBRA: 168 DARAB NORD POOL KEVERT RÉSZIDŐSOR ÁLTALÁNOSÍTOTT HURST EXPONENSE	88
21. ÁBRA: 168 DARAB NORD POOL RÉSZIDŐSOR ÁLTALÁNOSÍTOTT HURST EXPONENSE: EREDETI ÉS MÓDOSÍTOTT $H(Q)$	88

22. ÁBRA: A SZIMULÁLT ADATSOROK ÁLTALÁNOSÍTOTT (H), A MÓDOSÍTOTT ÁLTALÁNOSÍTOTT (H_{MOD}) HURST EXPONENSE, ILLETVE A KEVERT IDŐSORT ÁLTALÁNOSÍTOTT HURST EXPONENSE (H_{SH})	92
23. ÁBRA: A (SZTENDERD) GEV ELOSZLÁSOK BEMUTATÁSA	96
24. ÁBRA: A GEV BECSLÉS ILLESZKEDÉSE AZ EEX ÉS APX NAPI ÁRAK ESETÉN	98
25. ÁBRA: AZ EMPIRIKUS ÉS ILLESZTETT ELOSZLÁSFÜGGVÉNY KÜLÖNBSÉGE A GEV ÉS A LÉVY ESETÉN	102
26. ÁBRA: A KÍNÁLATI GÖRBE FELÉPÍTÉSE KÉT VILÁGÁLLAPOT ÉS ÖT VÁLLALAT ESETÉN ..	110
27. ÁBRA: A VÁRHATÓ AGGREGÁLT KÍNÁLATI GÖRBE KONSTANS VALÓSZÍNŰSÉGEK ESETÉN	111
28. ÁBRA: A VÁRHATÓ AGGREGÁLT KÍNÁLATI GÖRBE HATVÁNYSZERŰ ELOSZLÁS ESETÉN.	112
29. ÁBRA: AZ ÓRÁNKÉNTI EEX ELOSZLÁSOK ÁTLAGA ÉS MAGAS KVANTILISE	117
30. ÁBRA: A BECSÜLT GEV ELOSZLÁSOK μ LOKÁCIÓS ÉS K ALAKPARAMÉTERE A NORD POOL ESETÉN	118
31. ÁBRA: REZSIMVÁLTÁS A NORD POOL ESETÉN	119
32. ÁBRA: REZSIMVÁLTÁS AZ EEX ESETÉN	120
33. ÁBRA: A KIUGRÓ ÉRTÉKEK VALÓSZÍNŰSÉGE AZ EEX (<i>BAL</i>) ÉS A NORD POOL (<i>JOBB</i>) ESETÉN ADOTT TR KÜSZÖBÖK MELLETT	121
34. ÁBRA: A NORD POOL ÁRAK PERIODOGRAMJA	123
35. ÁBRA: A NORD POOL SZŰRT ÁRAK PERIODOGRAMJA: DIFFERENCIÁLÁS (<i>BAL</i>) ÉS ÁTLAGOS HÉT (<i>JOBB</i>).....	124
36. ÁBRA: A GEV SZŰRŐ MŰKÖDÉSÉNEK ILLUSZTRÁLÁSA	126
37. ÁBRA: A NORDPOOL SZŰRT ÁRAK PERIODOGRAMJA	127
38. ÁBRA: A FRAKCIONÁLIS WIENER-FOLYAMAT SZIMULÁCIÓINAK ÁLTALÁNOSÍTOTT HURST EXPONENSEI ÉS FELBONTÁSUK	140
39. ÁBRA: A T-ELOSZLÁS BLOKKMAXIMUMAINAK KONVERGENCIÁJA AZ M BLOKKMÉRET FÜGGVÉNYÉBEN	142

Táblázatok jegyzéke

1. TÁBLÁZAT: EURÓPAI ÁRAMTŐZSDÉK	19
2. TÁBLÁZAT: VOLATILITÁSOK	34
3. TÁBLÁZAT: A H BECSLÉSEI AZ EEX ÉS NORDPOOL ESETÉN.....	80
4. TÁBLÁZAT: A MARKOV REZSIMVÁLTÓ MODELLEK PARAMÉTERBECSLÉSEI WERON (2006) ALAPJÁN.....	91
5. TÁBLÁZAT: A MULTIFRAKTALITÁS TESZT EREDMÉNYEI A MARKOV REZSIMVÁLTÓ MODELLEK ESETÉN.....	92
6. TÁBLÁZAT: A GEV BECSLÉS EGYÜTTHATÓI AZ EEX ÉS APX NAPI ÁRAK ESETÉN	99
7. TÁBLÁZAT: ILLESZKEDÉSVIZSGÁLAT AZ APX ÉS EEX ESETÉN: GEV ÉS LOGNORMÁLIS ELOSZLÁS.....	100
8. TÁBLÁZAT: PÉLDA AZ ELADÁSI AJÁNLATOKRA KÉT VILÁGÁLLAPOT ESETÉN.....	106
9. TÁBLÁZAT: AZ EREDETI ÉS GEV-SZŰRT ÁRAK H MUTATÓI.....	128
10. TÁBLÁZAT: AZ ARFIMAT-GARCH BECSÜLT EGYÜTTHATÓI.....	131
11. TÁBLÁZAT: HIPOTÉZISEK ÉS TÉZISEK	136
12. TÁBLÁZAT: A FRAKCIONÁLIS WIENER-FOLYAMAT SZIMULÁCIÓINAK H BECSLÉSEI	140

Előszó

Amikor először találkoztam a villamosenergia-kereskedés rendszerével, már akkor is nagyon érdekesnek találtam ezt a piacot. Az árupiacokon megszokott termékeknél absztraktabb, ha a villamos energiát adják-veszik. A tőzsdei formában működő árampiac esetén az elszámolás mellett a fizikai leszállítás megszervezése és megszervezhetősége is jelentős feladat. Az áram tárolhatóságának hiánya is bonyolultabbá és izgalmasabbá teszi a piac vizsgálatát.

A kutatásaim során elsődleges célom az volt, hogy megértsem a piaci ár alakulásának folyamatát a spot (másnap, *day-ahead*) árampiacon. Az természetesen egyszerűen megválaszolható, hogyan képezi az áramtőzsde a piaci árat egy adott óra esetén. A kérdésem arra vonatkozik, hogy a különböző időszaki villamos energia árai hogyan kapcsolódnak egymáshoz. Ez egyrészt idősor-elemzési feladat, hiszen a különböző időszaki árak függőségi viszonyának modellezéséről van szó. Ehhez kapcsolódóan két nagyobb témakört érintek a tervezetben: a villamosenergia-ár folyamat memóriájának jellegét és struktúráját, illetve a szezonális jelenséget.

Látni fogjuk azonban, hogy az árak viselkedésének megértéséhez a villamos energia árának (feltétel nélküli, illetve feltételes) eloszlását is hasznos ismerni. A kutatási eredményemet, miszerint az árak jól leírhatók Fréchet eloszlással, véletlenül fedeztem fel. Miután meggyőződtem arról, hogy az eloszlás illeszkedése jó, elméleti modellt építettem annak megvizsgálására, hogy mi az oka, hogy pont a Fréchet eloszlás jelenik meg az árak eloszlásaként. A periodikusan váltakozó paraméterű Fréchet eloszlást elfogadva pedig megérthetjük az áram árának empirikusan igazolt idősoros jellemzőit is.

Az idősoros modellezés és az eloszlás vizsgálata érdekes, de a piaci szereplőket elsősorban nem ez hozza lázba. Két (egymástól földrajzilag nagyon távol eső) helyen tartott előadásom után is azzal fordultak hozzám, hogy érdekes ugyan a kutatásom, de mit tudnék mondani a kiugróan magas villamosenergia-árakról, a *spike*-okról. Ez az a jelenség, ami a piaci szereplők pénztárcáját nagyon komolyan érinti.

Bár az eredeti kutatásaim nem a *spike*-ok felé fordultak, a további vizsgálatok az átlagos szintű árak viselkedésének leírása mellett a kiugró értékekről is árulkodtak. Az eredmények sajnos nem biztatóak a modellezők és a piaci szereplők számára. Azt találtam ugyanis, hogy a magas árak semmiben sem speciálisak a villamos energia idősorában: nem

rendelkezik sajátos korrelációs struktúrával, tehát nem tekinthetjük őket külön rezsimnek, nem érdemes bonyolult ugrásos modelleket építeni a megjelenésük leírására. Nem mások ugyanis, mint egy vastag szélű eloszlás magas realizációi.

Ezzel kapcsolatban hadd osszam meg az Olvasóval egy olvasmányélményemet. Buchanan [2004] Itt és mindenütt című könyvében arról ír, hogy a kutatók nehézségekbe ütköztek a nagy földrengések előrejelzésével. Mozog a földkéreg, de a mozgás olyan összetett, hogy nem lehet tudni, hogy ha bekövetkezik egy földrengés, akkor mekkora lesz. A szerző javaslata, hogy foglalkozunk tehát a földmozgás modellezésével és a földrengések eloszlásával, ne csak és kizárólag a nagy földrengésekkel, mert az nem lehetséges. Ezt az analógiát érzem a villamos energia árának előrejelzésével kapcsolatban is: nem külön a kiugró értékekkel érdemes foglalkozni, hanem az eloszlás vizsgálatával.

Az állításaim megfogalmazásához statisztikai és ökonofizikai módszereket használok fel, illetve ökonometriai fogalmakkal is dolgozom. Ezek közül az ökonofizika terminus esetében szükség lehet bővebb magyarázatra. Az ökonofizika tudományterület a statisztikus fizikai módszereket használja fel pénzügyi-gazdasági alkalmazások esetén. Különösen elterjedt a statisztikus fizika módszereinek felhasználása a pénzügyi piacok modellezése területén, ahol rengeteg adat áll az elemzők rendelkezésére. Az ökonofizika ugyanis a rendelkezésre álló adatokból indul ki, és azok alapján próbál meg minél általánosabb következtetéseket levonni. A disszertációmban én is ezt az utat követem. A spot villamosenergia-árak viselkedését leíró stilizált tényekből kiindulva keresem az ár viselkedését jól leíró és a stilizált tényeket magyarázó modellt.

A disszertációban szereplő saját eredményeimet három fő témakörbe lehet sorolni:

- I. A spot árak fraktál jellegének vizsgálata
- II. A spot árak eloszlásának modellezése
- III. Egy determinisztikus rezsimváltó modell felépítése és felhasználása szűrési eljárás tervezésére

Ezekben a témakörökön belül az elemzés célja hármas jellegű:

1. a szakirodalomban szereplő ellentmondások feloldása;

Megmagyarázom és feloldom a különböző nagyságrendű Hurst exponensek jelenlétének dilemmáját.

2. a szakirodalommal ellentétes vélemény megfogalmazása és bizonyítása;

Megmutatom, hogy az ár multifraktál jellegének oka az eloszlás vastag széle, nem pedig a korreláció struktúrája, ezért korrelációs szempontból monofraktálnak tekinthető.

3. új állítások megfogalmazása.

Ki fogom mutatni, hogy a kiugró értékek nem jelentenek az ár folyamatában különálló viselkedési mintát, hanem egyszerűen egy vastag szélű eloszlás magas realizációi, és jelenlétük oka a kereskedés mechanizmusában és a kínálat jellegében keresendő.

A disszertációban empirikus illeszkedésvizsgálattal és egy elméleti modellel igazolom, hogy az ár eloszlása általánosított extrémérték-eloszlás, ezen belül Fréchet eloszlás.

Levezetem, mi a kapcsolat a villamosenergia-kínálat struktúrája és az ár eloszlása között.

Bemutatok egy determinisztikus rezsinváltó modellt, amely leírja, hogyan változik a kiugró értékek intenzitása.

Az előző modellt felhasználva tervezek egy eljárást, amely segítségével kiszűrhető a héten belüli szezonális, a vastag szélek és a heteroszkedaszticitás egy része az idősből.

A disszertációban közölt eredmények a villamosenergia-modellezés szokásos megközelítésétől jelentősen eltérnek. Meg fogom mutatni, hogy a villamosenergia-árak alakulása mögött egy univerzális mechanizmus húzódik meg, amely leírja mind az átlagos szintű árak, mind a kiugró árak viselkedését: a villamos energia ára minden egyes időszakban általánosított extrémérték eloszlás, csak az eloszlás paraméterei periodikusan változnak az időben. Az eloszlások tehát determinisztikusan váltakoznak, mintha az ár más-más rezsime között mozogna, így a modellt determinisztikus rezsinváltó modellnek neveztem el. Ez a modell leírja a héten belüli szezonális, a változó intenzitású kiugró árak megjelenését, és részben magyarázza az árak heteroszkedaszticitását. A determinisztikus rezsinváltó modell alapján megtervezett szűrési módszer („GEV-szűrő”) ezért eltávolítja az idősből a héten belüli szezonális, szűri a kiugró árakat és a heteroszkedaszticitás egy részét. Ezeket az eredményeket soroltam a dolgozat III. témakörébe, és a 6. és 7. hipotézis foglalkozik a kapcsolódó állításokkal.

Az univerzális modell kidolgozásához szükség van a II. témakör eredményeire, miszerint a spot villamosenergia-ár eloszlása általánosított extrémérték eloszlás. Ezt empirikusan is igazolom, illetve elméleti modellt is felépítek az általánosított extrémérték eloszlás megjelenésének magyarázatára. Az 5. hipotézis tartalmazza a II. témakör állításait.

Az I. témakör eredményei bátorítanak fel arra, hogy a II. témakör tárgyalása során egy közös eloszlással modellezem az átlagos szintű és a kiugró árakat. A I. témakör vizsgálata során (az idősor multifraktál jellegének vizsgálatával) tudtam levonni azt a

következtetést, hogy a kiugró árak az idősor szerves részét képezik, és egy vastag szélű eloszlás magas realizációi. Az I. témakörben ezen kívül tárgyalom még az idősor egyéb fraktáljellemzőit is. Az 1-4. hipotézis fogalmazza meg az I. témakör állításait.

A saját eredményeket I, II, III sorrendben fogom tárgyalni, hiszen az eloszlások vizsgálatához (II.) szükség van a fraktálelemzés (I.) eredményeire, és a determinisztikus rezsimváltó modell (III.) felhasználja a levezetett eloszlást (II.). Bár a dolgozat szekvenciálisan a determinisztikus rezsimváltás és GEV-szűrés levezetése felé igyekszik, a megfogalmazott hipotézisek mindegyike a villamosenergia-árak viselkedésével kapcsolatos fontos állítást fogalmaz meg, így azokat egymással egyenrangúnak kezelem.

A disszertáció-tervezet felépítése a következő: Az első fejezetben bemutatom a villamosenergia-piacok és -tőzsdék működését. A második fejezetben az empirikus elemzések során felhasznált adatokat mutatom be. A harmadik fejezet a szakirodalom ismertetését tartalmazza. Mivel irodalom-összefoglalást technikai jellegű vizsgálatok során nehéz módszertani kérdések nélkül tárgyalni, ezért a módszertan bemutatását részben ez a fejezet tartalmazza. A szakirodalomban nem használt módszertani eszköztárat a saját eredményeket bemutató negyedik fejezet ismerteti.

Végezetül szeretném mindenkinek megköszönni a segítséget, aki segítségemre volt a disszertáció-tervezet elkészülésében: kollégáimnak a Befektetések és Vállalati Pénzügy, illetve a Matematikai Közgazdaságtan és Gazdaságelemzés Tanszéken, kutatótársaimnak a Collegium Budapestben. Külön köszönöm témavezetőmnek, dr. Csekő Imrének, aki az egyetem első félévétől kezdve figyelemmel kíséri a munkámat; dr. Száz Jánosnak, hogy figyelmemet a kvantitatív pénzügyek felé irányította; és dr. Kondor Imrének, akitől ökonofizikát tanulhattam. Köszönöm családom minden tagjának, hogy lehetővé tették a disszertáció elkészülését.

Köszönetemet szeretném kifejezni a Multiráció Kft. és az Európai Bizottság (MANMADE projekt, száma: 043363) támogatásáért.

2010. február

Marossy Zita

1. A villamosenergia-piacok bemutatása

Ebben a fejezetben a liberalizált villamosenergia-piacok működését, az európai villamosenergia-tőzsdéket és a tőzsdei spot árak képzését mutatom be. Ezek az árak képezik a disszertációban szereplő vizsgálódások tárgyát.

1.1. Villamosenergia-piaci liberalizáció

Villamos energiára szükség van a mindennapjainkban: otthon és a munkánk során is. Este rutinszerűen kapcsoljuk fel a villanyt, a munkába érve szinte elsőként a számítógép bekapcsoló gombja után nyúlunk, miközben egy nagyvállalat állandóan működő gépe folyamatosan fogyasztja a villamos energiát. A villamosenergia-ellátásra szükségünk van.

A villamosenergia-piaci ellátás három alapvető¹, jól elkülöníthető funkcióra bontható, ezek az alábbiak (Verschuere [2003]):

1. előállítás,
2. szállítás a távvezeték rendszeren keresztül: átvitel és elosztás,
3. ellátás.

Az **előállítás** (*generation*) a villamos energia fizikai előállítását jelenti az erőművekben. A távvezeték rendszeren keresztüli szállítás az **átviteli** (*transmission*) nagyfeszültségű hálózaton történik a nagykereskedők felé, akik viszont a kiskereskedőknek értékesítik tovább a megvásárolt villamos áramot az **elosztási** (*distribution*) rendszeren keresztül. Az **ellátás** a végfelhasználók kiszolgálását jelenti, például a számlázást, karbantartást.

Az átvitel és az elosztás jellemzően nem kompetitív tevékenység (Verschuere [2003]), mely arra hivatott, hogy a villamos energia eljusson az azt termelő erőművektől a végső fogyasztókhoz. Ezt a feladatot az országok jellemzően a rendszerirányító (általános angol elnevezése a *system operator*, ezen belül lehet *transmission system operator* (TSO) vagy *independent system operator* (ISO) modelltől beszélni annak függvényében, hogy a rendszerirányító rendelkezik-e a hálózati eszközök tulajdonjogával vagy sem²) intézményén keresztül végzik el, ami a „villamosenergia-rendszer üzemének tervezését, irányítását

¹ Ezen kívül léteznek egyéb szolgáltatások is, pl. kiegyenlítő szolgáltatás.

² REKK műhelytanulmány, REKK [2008].

ellátó, a termelőktől, kereskedőktől, fogyasztóktól független szakmai szervezet. Feladata a rendszerszintű operatív üzemirányítás, forrástervezés, hálózati üzem-előkészítés, villamosenergia elszámolás, a rendszerszintű szolgáltatások, a hálózathoz való szabad hozzáférés biztosítása”³. Magyarországon a rendszerirányító a Magyar Villamosenergia-ipari Rendszerirányító (MAVIR) ZRt, amely

- „gondoskodik a magyar villamosenergia-rendszer megbízható, hatékony és biztonságos irányításáról, a szükséges tartalékokról az erőművekben és a hálózaton,
- felügyeli és gyarapítja a hálózati vagyont, elvégzi a megfelelő, üzembiztos ellátáshoz szükséges felújításokat, karbantartásokat és fejlesztéseket,
- biztosítja a villamosenergia-piac zavartalan működését, további bővítését, az egyenlő hozzáférést a rendszerhasználók számára,
- összegzi a villamosenergia-ellátás szereplőitől kapott adatokat,
- tájékoztatja a piac szereplőit, hogy ne kössenek megvalósíthatatlan szerződések,
- összehangolja a magyar villamosenergia-rendszer működését a szomszédos hálózatokkal,
- koordinálja a nemzetközi szakmai együttműködéseket,
- a jövőbe tekintve elkészíti a hálózatfejlesztési stratégiát és javaslatot tesz az erőműpark fejlesztésére”⁴.

A rendszerirányító feladata az, hogy Kirchhoff I. törvényének („Az egy csomópontba befolyó és onnan elfolyó áramok algebrai összege mindig nulla”) megfelelően a rendszerbe belépő és az onnan kilépő villamos energia nagysága megegyezzen, tehát mindig tudnia kell arról, ki és mennyi villamos energiát biztosít a rendszernek, illetve fogyaszt a rendszerből. Ez tervezést igényel. Mivel az egyes országok villamos-energiái rendszerei egymástól nem függetlenek, hanem összekapcsolódnak, valamint határokat átlépő villamos-energiái szolgáltatások is léteznek, a rendszerirányítónak ezeket is figyelembe kell vennie a tervezés során, beleértve azokat a tranzit tranzakciókat is, amikor a villamos energia termelője és felhasználója nem az adott ország villamosenergia-rendszeréhez tartozik, de a villamos energia a szállítás során átmegy a villamosenergia-hálózaton.

Napjainkban elfogadottá vált az a nézet, hogy a szállítással és elosztással szemben az előállításnak és az ellátásnak kompetitív piacokon kell történnie, hogy hatékonyan

³ Forrás: www.mavir.hu. Letöltés ideje: 2009. március 27.
(http://www.mavir.hu/domino/html/www/mavirwww.nsf/vAllPages/pKislexikon_WEB?OpenDocument)

⁴ Forrás: www.mavir.hu. Letöltés ideje: 2009. március 27.
(http://www.mavir.hu/domino/html/www/mavirwww.nsf/vAllPages/pFeladataink_WEB?OpenDocument)

valósuljon meg a villamos energia termelése és felhasználása (Verschuere [2003]). A kompetitív piacok létrehozásának céljából több országban energiapiaci liberalizáció zajlik/zajlott le. A 96/92/EC EU direktívának megfelelően az EU országok 2005-ig, néhány később csatlakozott ország (beleértve Magyarországot is) 2007-ig (az összes piaci szereplőt érintően) kaptak határidőt a villamosenergia-piacok liberalizációjára. A teljes liberalizáció Magyarországon 2008. január 1-jével valósult meg keresleti oldalról: minden fogyasztó szabadon választhatja meg áramszolgáltatóját (REKK Műhelytanulmány, REKK [2008]).

A jellemző érv a kompetitív piacok létrehozása mellett az, hogy ekkor a villamosenergia-piacok hatékonyabban működnek, így a villamos energia ára alacsonyabb lesz, mint a dereguláció előtti időszakban (l. pl. Weron [2006]). Az alacsonyabb villamosenergia-árat azonban önmagában a liberalizáció és dereguláció nem biztosítja. A kialakuló ár függ a létrejövő piacok működési elvétől, a piac megszervezésétől is. Egyes piacok működési elvei lehetővé teszik a termelők erőfölénnyel történő visszaélését, magasabb árat eredményezve (l. pl. Woo és szerzőtársai [2003]). Az erőfölénnyel való visszaélést tekintik az egyik oknak például a Kaliforniai Áramtőzsde 2000. évi válsága esetén, amely során az árak extrém mértékben megemelkedtek (l. pl. Weron [2006]). A liberalizáció szükségességének és hatásának kérdésével, valamint a piacok tervezésével a dolgozatomban nem foglalkozom.

A villamosenergia-piacok **szereplői**:

- termelők, erőművek;
- kis- és nagyfogyasztók;
- villamosenergia-kereskedők.

A piacokon a termelők jellemzően az eladói oldalon, a fogyasztók a vevői oldalon jelennek meg, míg a kereskedők működésük logikájából adódóan mind eladóként, mind vevőként is funkcionálhatnak.

A **termék**, amivel ezeken a piacokon kereskednek, egy adott időszak (pl. egy negyedév vagy egy óra) alatt szolgáltatott egységnyi (pl. 1 MWh) villamos energia. Fontos jellemzője ennek a terméknek, hogy ésszerű veszteségek mellett nem tárolható. A tárolásra példaként szokták emlegetni a víztározók működtetését: adott időszaki árammal felpumpálják a vizet egy hegyi víztározóba, ott tárolják, majd egy későbbi időszakban a vizet leengedik, és a víz helyzeti energiáját felhasználva áramot generálnak. Ez a megoldás alacsony hatásfokú, ezért is szokták inkább elfogadni, hogy a villamos energia nem tárolható.

Az áram adásvétele történhet közvetlenül a felek között OTC piacokon (pl. hosszú távú szolgáltatási szerződések kötése), illetve szervezett piacokon. A szervezett árampiac nem egyenlő a villamosenergia-tőzsdével. A tőzsdei forma mellett létezik az ún. *pool* rendszer is, amelyben a termelők egy becsült keresletnek megfelelő mennyiség eladásáért versenyeznek egymással, például egyoldali aukció keretében (Weron [2006]). A tőzsdéken ezzel szemben mind a termelők, mind a fogyasztók megjelennek. A *pool*-okra jellemző továbbá a kötelező részvétel, míg a tőzsdén rendszerint önkéntesen jelennek meg a piaci szereplők. A két fogalom a gyakorlatban sokszor keveredik, példa erre a Nord Pool elnevezése is, ami valójában nem pool rendszerben, hanem áramtőzsdei keretek között működik. A továbbiakban én az áramtőzsdékkal és az ott képzett árakkal foglalkozom.

1.2. Villamosenergia-tőzsdék

Az Európában működő áramtőzsdéket az 1. táblázat foglalja össze. Bár a Nord Pool működési helyeként a szerzők Norvégiát jelölték meg, annak tevékenysége kiterjed Finnország, Svédország, Dánia és Németország területére is. A Nord Pool honlapjának információja szerint 2008 szeptemberében⁵ 325, 2009 áprilisában⁶ 333 résztvevő kereskedik a Nord Pool spot piacán naponta. A Nord Pool Elspot rendszerén belül a kereskedett mennyiség 2008 (2007) folyamán 297,6 (290,6) TWh volt, ami a skandináv országok fogyasztásának több mint 70%-a (69%-a). A Nord Pool 1993-ban kezdte meg működését.

Tőzsde elnevezése	Ország	Honlap
European Energy Exchange	Németország	www.eex.com
Powernext	Franciaország	www.powernext.fr
APX Power NL	Hollandia	www.apxgroup.com
APX Power UK	Egyesült Királyság	www.apxgroup.com
Energy Exchange Austria	Ausztria	www.exaa.at
Prague Energy Exchange	Csehország	www.pxe.cz
Opcom	Románia	www.opcom.ro
Polish Power Exchange	Lengyelország	www.polpx.pl
Nord Pool	Norvégia	www.nordpool.com
Borzen	Szlovénia	www.borzen.si
Italian Power Exchange	Olaszország	www.mercatoelettrico.org
OMEL Madrid	Spanyolország	www.omel.es
Belpex	Belgium	www.belpex.be

1. táblázat: Európai áramtőzsdék⁷

Másik példaként a European Energy Exchange-et, az EEX-et emelném ki. Az EEX-et 2002-ben hozták létre a frankfurti és a lipcsei áramtőzsde fúziójával⁸. Az EEX honlapja

⁵ Forrás: Nord Pool honlap. Letöltés ideje: 2009. március 30.
(<http://www.nordpoolspot.com/about/>)

⁶ Forrás: Nord Pool honlap. Letöltés ideje: 2009. november 12.
(<http://www.nordpoolspot.com/about/>)

⁷ Forrás: RMR Áramár Portál. Letöltés ideje: 2009. március 30.
(<http://www.rmr.hu/?q=node/44>)

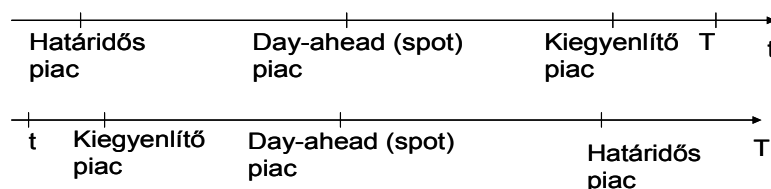
⁸ Forrás: EEX honlap. Letöltés ideje: 2009. március 30.
(<http://www.eex.com/en/EEX/EEX%20AG/Group%20structure>)

szerint⁹ az EEX piacain összesen 215 piaci szereplő tevékenykedik a kereskedés, az elszámolás, a brókeri feladatok és az árjegyzői funkciók területén.

Európán kívüli tőzsdére példa a már említett Kaliforniai Áramtőzsde.

A magyar villamosenergia-tőzsde előkészítésére létrehozott HUPX Magyar Szervezett Villamosenergia Piac Zrt. 2008. szeptember 11-én adta be a szervezett villamosenergia-piac létrehozására, illetve működtetésére vonatkozó engedélykérelmi dokumentációt (HUPX Sajtóközlemény, HUPX [2008]). A remények szerint a magyar áramtőzsde nemsokára elkezdheti működését¹⁰.

Bár a konkrét kereskedési szabályok mindig tőzsdéspecifikusak, az általános kereskedési elvek sok hasonlóságot mutatnak. A **kiegyenlítő (*adjustment*) kereskedés** esetén a szinte azonnal következő időszakra vásárolhatunk/adhatunk el villamos energiát. A **másnapi (*day-ahead*) piacokon** a következő munkanapra vagy naptári napra (ill. a nap egy órájára, napszakára, csúcsidőszakra, csúcsidőszakon kívülre stb.) lehet áramot venni. A **határidős tőzsdéken** hosszabb periódussal az áram szolgáltatása előtt állapotnak meg az adásvételről, és rendszerint a szolgáltatási időszak is hosszabb (pl. egy negyedév). A határidős kötések mellett kialakultak az **opciós piacok** is, amelyeken jogot szerezhethünk vagy nyújthatunk bizonyos mennyiségű villamos energia vételére, illetve eladására, valamint egyéb összetett opciós jogokkal is találkozhatunk.



1. ábra: Az árampiacok kapcsolódása¹¹

Ha a t jelzi az ügylet megkötésének időpontját, és a T a szolgáltatás idejét jelöli, akkor az 1. ábra mutatja a piacok egymáshoz képesti logikáját. A felső ábrán a T szolgáltatási idő rögzített, a t ügyletkötési idő változik. Ahogy jobbra haladunk a tengely

⁹ Forrás: EEX honlap. Letöltés ideje: 2009. március 30.
(<http://www.eex.com/en/EEX/EEX%20AG/Group%20structure>)

¹⁰ A Magyar Energia Hivatal időközben kiadta a működési engedélyt. Forrás: portfolio.hu. Letöltés ideje: 2009. április 16.

(<http://www.portfolio.hu/cikkek.tdp?k=2&i=113499>)

¹¹ Forrás: Geman [2005].

mentén, egyre közelítünk ahhoz az időponthoz, amikor az áramot venni (eladni) akarjuk. Ha messze vagyunk a lejáratától, akkor a határidős piacokon kereskedhetünk. A lejárat előtt egy nappal a másnapi piacon tevékenykedhetünk, míg közvetlenül a szállítás előtt a kiegyenlítő piachoz fordulhatunk. Az alsó ábrán a t rögzített, és a T változik. Ha pl. most kereskedünk, akkor választhatunk, mikorra szeretnénk áramot venni: a következő egy-két órára, holnapra vagy távolabbi időszakra. Ezek alapján vesszük igénybe a kiegyenlítő, a másnapi, illetve a határidős piacokat.

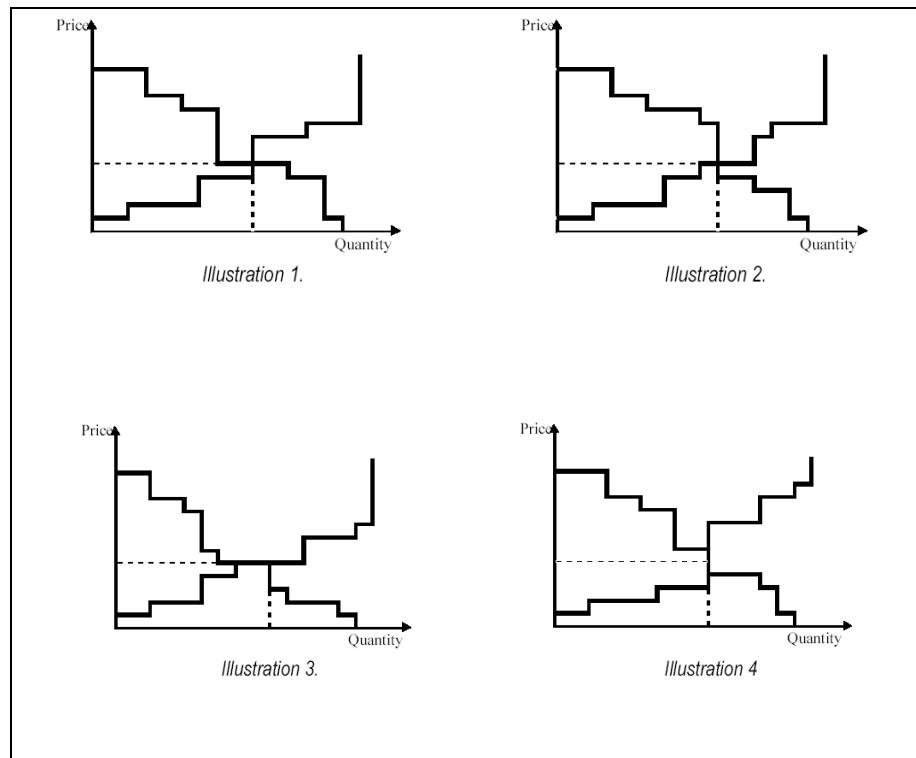
A fenti logika szerint a villamos energiának nem egyféle ára van. Az ár attól függ, mikor és mikorra (milyen szolgáltatási időszakra) vásárolunk, azaz $P(t,T)$. Mindenfajta kockázatkezelési probléma esetén ezt figyelembe kell venni.

A különböző piacok közül én a „spot” piaccal foglalkozom. A piacok bemutatásából látható, hogy mind a másnapi, mind az azonnali (kiegyenlítő) piacot is lehet spot piacnak nevezni. Gyakori az ármodellezés irodalmában, hogy a másnapi piacokat nevezik spot piacnak, az ott kialakuló árat spot árnak. Nézzük meg, hogyan alakul ki a spot ár!

A tőzsdék a spot piacon gyakran kétoldali egyenáras aukciót alkalmaznak. Ez azt jelenti, hogy a vevők és eladók¹² a szolgáltatást megelőző napon vagy munkanapon beadják az árajánlataikat a nap 24 órájára külön-külön. A tőzsde ezekből megkonstruálja a piaci keresleti és kínálati görbét a mikroökonómia szabályai szerint. A piaci keresleti görbe jellemzően rugalmatlan (l. Weron [2006]), míg a piaci kínálati görbe esetén az ár a mennyiség exponenciális függvénye (Bunn [2004]). A piaci kínálati görbét *supply stack*-nek is nevezik, és vizsgáltjuk rajta a különböző villamosenergia-előállítási technológiák költségeinek viszonyát: a víz, az atomenergia, a szén, az olaj és a gáz alapú technológiával rendelkező vállalatok ajánlatai tipikus esetben egyre nagyobb árat tartalmaznak, és az exponenciális jelleget létrehozva egyre kisebb mennyiséget foglalnak magukban (l. Weron [2006]).

A villamos energia piaci ára a piactisztító ár (MCP, *market clearing price*) lesz, amely mellett a piaci kereslet és kínálat megegyezik az adott órában. Ezt illusztrálja a 2. ábra. Minden piaci szereplőnek a piaci árat kell fizetnie, illetve azt kapja.

¹² A tőzsdék nem feltétlenül kötik ki, hogy a termelők csak eladók, a fogyasztók csak vevők lehetnek, ezért használok a termelő és fogyasztó helyett az eladó és vevő kifejezést.



2. ábra: A piactisztító ár és a kereskedett mennyiség meghatározása a Borzen esetén¹³
Vízszintes tengely: mennyiség. Függőleges tengely: ár.

Gyakori alapelv a piactisztító ár meghatározásában, hogy a lehető legnagyobb kereskedett mennyiségre törekszik a tőzsde (l. pl. Borzen kereskedési szabályzat, Borzen [2003]). Erre az elvre akkor van szükség, ha a piaci keresleti és kínálati görbe nem egyértelműen határozza meg az árat. A lehetséges eseteket a 2. ábra szemlélteti. A felső sorban szereplő két esetben („Illustration 1” és „Illustration 2”) a piaci ár és mennyiség egyértelmű. A bal alsó esetben („Illustration 3”) az ár egyértelműen meghatározott, viszont az egyensúlyi mennyiség egy szakaszon, ahol a keresleti és kínálati görbe közösen fut, bármekkora lehet. Ebben az esetben lép életbe a fent említett alapelv, és a mennyiség az ábrán is jelölt lehetséges maximum lesz. A jobb alsó ábrán a mennyiség határozódik meg, az ár pedig nem. Ebben az esetben a Borzen kereskedési szabályzata (Borzen [2003]) úgy rendelkezik, hogy az MCP a lehetséges árak átlaga legyen.

Vannak olyan esetek, amikor a piaci ár nem egyezik meg a piactisztító árral. Például ha a kereskedés eredményeképpen átviteli problémák adódnak. Az ajánlatok megtételekor a szereplőket nem irányítja semmi annak figyelembe vételére, hogy az eredő leszállítandó mennyiségek az átviteli hálózatok kapacitáskorlátainak megfeleljenek. Ha ez az átviteli

¹³ Forrás: A Borzen kereskedési szabályzata, Borzen [2003].

probléma (*transmission congestion*) fennáll, akkor egyes tőzsdék az ún. zóna (*zonal*) vagy csomóponti (*nodal*) árakat alkalmazzák a piactisztító ár helyett.

A korábbiak alapján tehát a spot villamosenergiaár-idősor az egyes órák ára egymás után rendezve, melyek a leszállítást megelőző napon alakultak ki. Mivel tudjuk, hogy az áram nem tárolható, ezért a különböző órákban leszállított áram különböző termék. A spot idősor így más-más termékek egymás után rendezett ára; olyan, mintha az alma ára után a körte és a szilva árát tennénk. Az árampiacon valójában a határidős görbe az, amely egy adott termék áralakulását mutatja be az idő függvényében.

Miért van mégis értelme vizsgálni a spot idősort? Látni fogjuk, hogy az idősor stabil (pl. korrelációs) struktúrával rendelkezik, sejthető, hogy van mögöttes adatgeneráló folyamata, így az ár modellezése értelmes és megvalósítható feladat.

Ezen kívül érv lehet még Koekebakker és Ollmar [2001] cikke, amelyben a Nord Pool határidős árait főkomponens-elemzésnek (PCA) vetik alá, és azt találják, hogy 21 különböző lejáratú határidős görbe változékonysága leírható néhány főkomponens segítségével. Ugyanezt az elemzést végeztem el (Petrimán [2005]) az EEX árai esetén 7 lejáratra (2004. október, 2005. január, 2005. április, 2005. július, 2005. október, 2006. január, 2006. április). A határidős görbe változását (két egymást követő érték hányadosának logaritmus) figyeltem meg. A számításokat SPSS-szel végeztem. Meglepetésemre azt tapasztaltam, hogy a főkomponens elemzés előfeltételei teljesülnek, a minta megfelelő a közös főkomponensek kereséséhez. A futtatás eredményeként azt kaptam, hogy egy faktor 81%-ban magyarázza a hét lejárat mozgását. Az első két faktor 88%-ot, az első három faktor 92%-ot ír le az idősorok változásából.

A fenti eredmények jelzik a különböző időszakok alatt szolgáltatott áram árának együttmozgását¹⁴, ezzel alátámasztja azt az érvelést, hogy a különböző időszaki áram mint különböző termék ára között kapcsolat van, így a spot idősor modellezése indokolt.

A dolgozat középpontjában a spot árak viselkedésének vizsgálata és modellezése áll.

¹⁴ Az érvelés annyiban nem tökéletes, hogy az áram esetén a határidős árak a lejáratkor nem egyeznek meg a spot árral, mint ahogy azt a pénzügyi piacoknál teljesül (l. Hull [2005]). Ennek oka, hogy a határidős ügylet alapterméke más időszak (pl. egy negyedév), nem pedig egy adott óra alatt szolgáltatott áram, nincs átjárás a két piac között. Az érvelés azonban alátámasztja, hogy különböző időszaki áram mint különböző termék ára együttmozog.

2. Felhasznált adatok

Rendelkezésemre álltak az óránkénti adatok a másnapi piacokról

- a Nord Pool¹⁵ esetén az árak 1999. január 2-ától (szombat) 2007. január 26-ig (péntek);
- az EEX¹⁶ esetén az árak 2000. június 16-tól (péntek) 2007. április 19-ig (csütörtök).

Dolgozatomban a szakirodalom eredményeinek reprodukálására, illetve a saját modellek bemutatásához ezeket az adatokat használtam fel.

A számításokat EViews és MATLAB szoftverrel végeztem.

2.1. Az adatok előfeldolgozása

A villamosenergia-árak olyan adatsort generálnak, ami a modellezők álma: az adatok egyenlő időközönként (óránként) jönnek, szemben például egy folyamatos kereskedés keretében gazdát cserélő részvény áralakulásával, ahol kötésenkénti adataink lehetnek, melyek elemzését megnehezíti az, hogy a kötések nem egyenlő időközönként követik egymást. A villamosenergia-árak ekvidisztans jellege lehetővé teszi a hagyományos statisztikai módszerek felhasználását anélkül, hogy az időskálán, illetve az adatokon módosítanunk kellene.

Az egyetlen „szépséghibát” az adatsorban az óráátállítások, azaz a téli és nyári időszámítás közötti átmenet jelenti. Március utolsó vasárnapján hajnal 2-kor 3-ra állítjuk át az órákat Magyarországon, október utolsó vasárnapján pedig 3-kor 2-re kell visszaigazítanunk óráikat. Mivel az EEX és a Nord Pool ugyanennek az időzónának az időszámítását használja, márciusban hiányzik egy adatunk, októberben pedig elvileg egy adattal több van az idősorban az adott napon. Az adatsor tisztításához ki kell tehát pótolnunk egy hiányzó árat, illetve valahogy meg kell válnunk egytől.

A szakirodalomban általában nem szerepel, hogyan korrigálják az adatsort a szerzők, ezért saját szűrési módszert dolgoztam ki. A **márciusi** hiányzó adat pótlásához az alábbi formulát használtam:

¹⁵ Köszönetemet szeretném kifejezni Dr. H. Sivonennek, hogy rendelkezésemre bocsátotta az adatokat.

¹⁶ Köszönetemet szeretném kifejezni a Regionális Energiagazdasági Kutatóközpontnak, hogy rendelkezésemre bocsátotta az adatokat.

$$p_{i,j} = \text{atlag}_j * \text{atl.elteres}_i$$

ahol $p_{i,j}$ a j . hét i . órájának ára, atlag_j a j . hét átlagára, atl.elteres_i pedig azt mutatja meg, hogy az i . óra ára átlagosan hány százaléka a heti átlagnak:

$$\text{atl.elteres}_i = \frac{\sum_j \frac{p_{i,j}}{\text{atlag}_j}}{\text{hetek száma}}$$

A nevezőben a szummán belüli rész azt számítja ki, hogy a j . héten az i . óra hány százaléka a heti átlagnak. Az egész kifejezés pedig ezt átlagolja az összes hét tekintetében az i . órára.

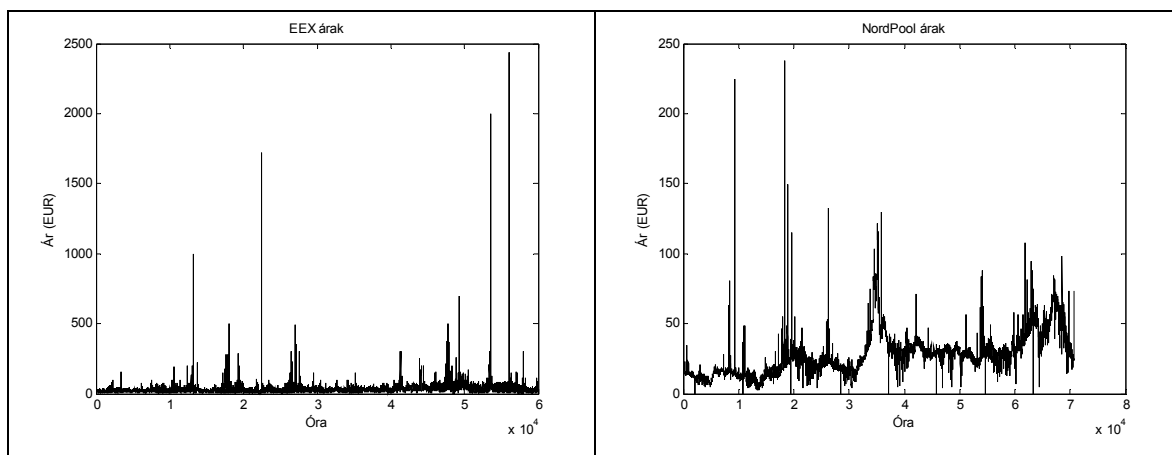
Ez a megoldás azt veszi figyelembe, hogy az árak jól kirajzolódó, stabil heti szezonalitást követnek (l. 3.2. alfejezet), és a heti átlagár, valamint az adott órai ár attól vett százalékos eltérése alapján reprodukálható a hiányzó adat. A multiplikatív korrigálás helyett használhattam volna additívat is (ebben az esetben a heti átlagtól vett átlagos eltérést kellett volna felhasználni), de ez a módszer nem garantál minden esetben pozitív árat, ez pedig jogos elvárás. Az ismertetett módszer nemcsak az óraátállítás miatt, hanem bármely okból hiányzó adatok pótlására használható.

Az **októberi** plusz adat kezelésére nincs minden esetben szükség. A Nord Pool és az EEX ugyanis azt a módszert alkalmazza (l. Nord Pool [2008], EEX [2008]), hogy a kétszer egy órának ugyanaz az ára, tehát amikor a szereplők erre az időszakra megteszik az ajánlataikat, akkor kétszer 60 perc alatt szolgáltatott villamos energiát vesznek, illetve adnak el. Ebben az esetben nincs eggyel több adat az idősorban, tehát nem szükséges korrigálnunk azt. (Az APX-ről 2004-ig állnak rendelkezésemre adatok az árról, itt a téli időszámításra történő átálláskor ténylegesen 25 óra adata szerepel egy napon. Ebben az esetben a 2 és 3 óra közötti adatot a két meglévő ár átlagaként számolnám. Az APX adatait egy helyen használtam fel a dolgozatban: az ár eloszlásának vizsgálatakor, de ott ezt a módszert nem kellett használnom.)

Az ismertetett adatpótlási módszer helyett számos más korrekciós módszer is elképzelhető, a fenti mellett azért döntöttem, mert egyszerű és átlátható.

A dolgozatban a módosított adatsorral dolgoztam. A felhasznált idősort a 3. ábra mutatja be. Az ábrára pillantva rögtön látszik, hogy egyes időszakokhoz tartozó árak

jelentősen nagyobbak a többi időszak áránál. Ez az ún. kiugró árak (*price spikes*) jelensége, amit bővebben a stilizált tényekről szóló alfejezetben mutatok be. Az eredeti idősből ebben a nagyításban nehézkes többlet leolvasni, a további elemzést a későbbi fejezetekben végzem el.



3. ábra: Az EEX és Nord Pool óránkénti idősr

2.2. Napi árak

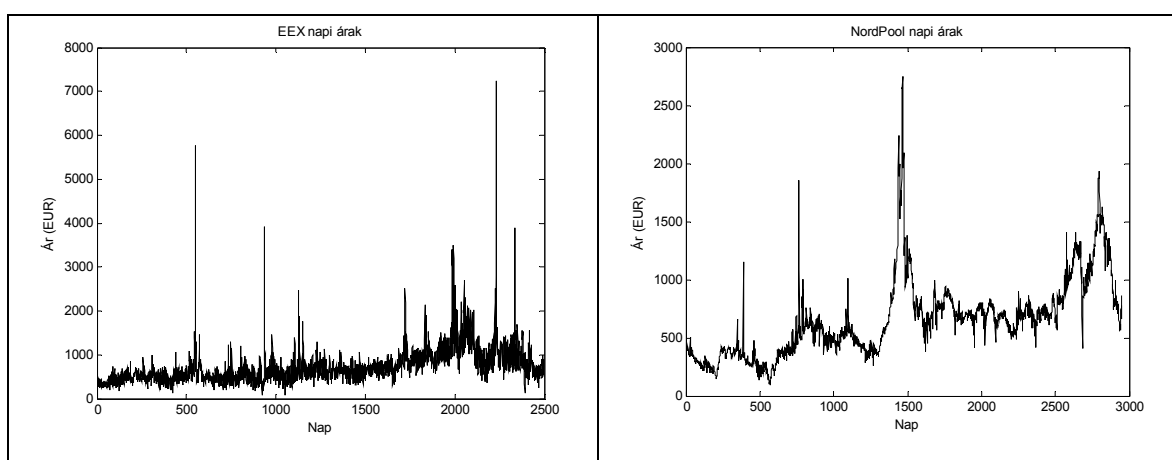
Helyenként az óránkénti adatok helyett napi árakkal dolgoztam. Az egy naphoz tartozó 24 adatot összeadtam, így megkaptam a napi árat. Ezt annak reményében tettem, hogy jobb modellt tudok illeszteni a napi adatokra, mint a több, de sok zajt tartalmazó óránkénti adatra. Bár a módszerrel elveszítem az árak napon belüli eloszlását, de ha meg tudom becsülni a napi összeget, és ismerem a napon belül az egyes órák árának arányait, ki tudom számolni az óránkénti becsült árat is. Ez tulajdonképpen nem más, mint a napon belüli szezonális egyfajta szűrése. A napi adatok kiszámolásának konkrét tartalmát is lehet tulajdonítani: tulajdonképpen a napi szintetikus zsinór termék árát kapjuk meg, azaz annak az árát, ha a (nap 24 óráján keresztül szolgáltatott) zsinór áramot úgy vesszük meg, hogy minden órához tartozó áramot külön-külön megveszünk, így a kiszámolt árösszeget értelmezni is tudjuk.

Van olyan piac, ahol ténylegesen számolják a napi árat, amely kiindulásként szolgálhat például egy származtatott termék kifizetésének meghatározásakor is. Ilyen például az EEX-en a Phelix (Physical Electricity Index), amely a különböző órák árának egyenlő súlyozású átlaga az adott napon (Weron [2006]). Igaz, hogy ez átlag, nem pedig

összeg, mint ahogy én definiáltam, de az eltérés csak egy konstansban van, így ez a számítások lényegét nem befolyásolja.

Az eredeti adatsorra mint „ár” vagy „óránkénti ár” fogok hivatkozni, míg a „napi ár” esetében mindig jelzem hogy az egynapos árról van szó.

A 4. ábra szemlélteti a napi árak idősorát. Ránézésre nem nagyon különbözik az óránkénti adatok idősorától. Mivel a napi ár kiszámítása egyfajta simítás (hiszen nem vesszük figyelembe a napon belüli ingadozásokat), ezért a kiugrások mértéke kisebb, mint az óránkénti adatok esetén.



4. ábra: Az EEX és Nord Pool napi idősor

2.3. Hozamok

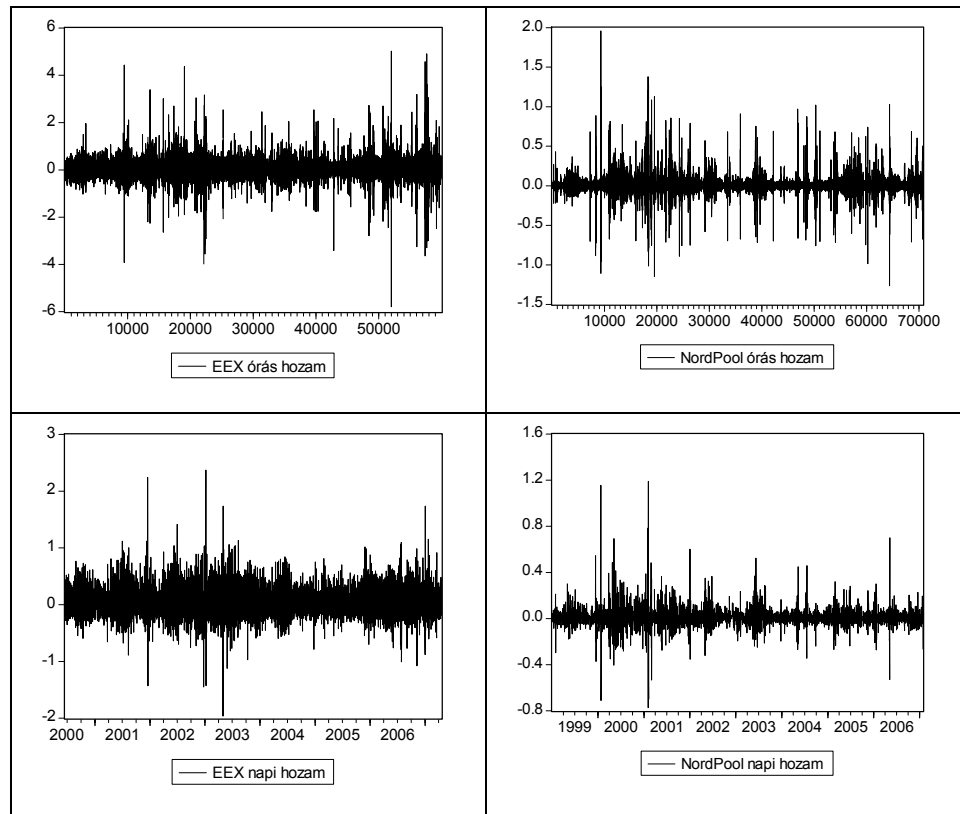
Egyes esetekben nem az ár, hanem a relatív árváltozás az elemzés alapja. Ezt a következőképpen számoltam:

$$r_t = \log\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right)$$

ahol r_t a t . időszaki relatív árváltozás (hozam), p_t a t . időszaki ár, p_{t-1} pedig a t . időszakot megelőző periódus ára.

A napi és órás hozamadatokat az EEX és Nord Pool esetén az 5. ábra szemlélteti. Az ábra bal fele az EEX, jobb fele a Nord Pool idősort tartalmazza. A felső sort az óránkénti, az alsó sort a napi adatokból számoltam. A hozamok esetén is megfigyelhetjük a

kiugró adatokat: például a Nord Pool óránkénti hozam akár 2 is lehet, ami azt jelenti, hogy az ár az egyik óráról a másikra meg is duplázódhat.



5. ábra: A hozamok időszora

Bal felső ábra: EEX óránkénti adatok. *Bal alsó ábra:* EEX napi adatok. (%)
Jobb felső ábra: Nord Pool óránkénti adatok. *Jobb alsó ábra:* Nord Pool napi adatok. (%)

A hozamok további elemzését a stilizált tényekről szóló alfejezet tartalmazza.

Már most meg kell jegyeznünk, hogy a pénzügyi piacokkal ellentétben a hozamnak a villamos energia piacán nincs valós tartalma. A pénzügyi piacok esetén ugyanis a hozam realizálható: az egyik nap veszek, a másik nap eladok, így a vagyonom relatív növekedése a hozam. A villamos energia esetén a hozamnak nem tudjuk ezt az értelmezést adni. A hozam definíciójában szereplő két ár két különböző időszak alatt szolgáltatott villamos energiára vonatkozik, azaz két különböző termék ára. Mivel ráadásul a villamos energia nem tárolható, nem tudom ma eladni a tegnap vett áramot, így nem tudom realizálni a hozamot. Ez a megfigyelés fontos a villamosenergia-ár modellezése szempontjából, és a későbbiekben részletesebben foglalkozom a következményeinek elemzésével.

A következő fejezetben az itt bemutatott idősor jellemzőinek ismertetésével és a szakirodalom eredményeinek bemutatásával folytatom az elemzést.

3. A szakirodalom módszereinek és eredményeinek bemutatása

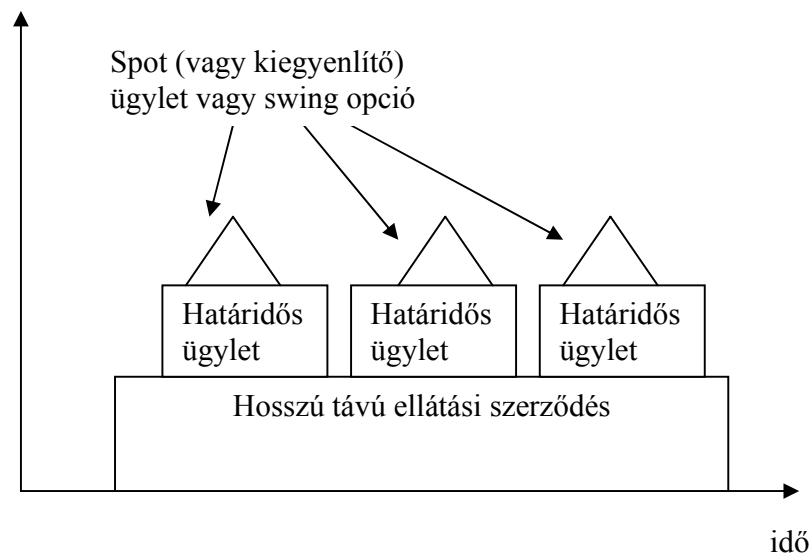
Ebben a fejezetben a kutatásomhoz kapcsolódó szakirodalmat mutatom be. Először arra térek ki, milyen célt szolgál a villamosenergia-ár modellezése. Ezután részletesen foglalkozom az ár stilizált tényeivel. Végül a modellezés egyes kérdéseivel ismertetem meg az Olvasót. A szakirodalomban használt módszereket tematikusan az egyes kutatási kérdésekkel párhuzamosan tárgyalom.

3.1. A villamosenergia-ár modellezésének célja

Az ár modellezése a kockázatkezelést és árazást segíti.

A kockázatkezeléssel kapcsolatban nézzük meg, milyen kockázatkezelési feladattal néz szembe egy villamosenergia-fogyasztó (pl. egy gyár), amely a szabad piacon szerzi be a villamos energiát! A villamos energia kockázatát az elkövetkező három év távlatában szeretné kezelni. Tegyük fel először, hogy az áramfelhasználása előre ismert. Ekkor eldöntheti, hogy megvásárolja az áramot a következő három évre hosszú távú szerződés keretében, vagy vár. Ha a villamos energia ára bizonytalan, és a vállalat a kockázat minimalizálására törekszik, akkor megvásárolja az áramot a következő három évre előre a fogyasztási terv szerint. Ezzel kiszűri a teljes, az áramárhoz kapcsolódó kockázatát. A hosszú távú szerződések tehát ebben az esetben a hatékony kockázatkezelés eszközei. Ekkor a gyár nem fog vásárlóként megjelenni a spot piacon. Ha a vállalat kevésbé érzékeny a kockázatra, és arra számít, hogy a spot piacon olcsóbban be tudja szerezni az áramot a hosszú távú szerződéshez képest, akkor megjelenik a spot piacon, de ekkor kiteszi magát annak, hogy az ott kialakuló árat nem ismeri előre. A kockázat számszerűsítéséhez az ár előrejelzésére, a jövőbeli ár eloszlásának meghatározására van szükség.

Bonyolultabb a helyzet, ha a jövőbeli fogyasztás nem ismert. A gyár lehetőségeit a 6. ábra szemlélteti, amely Geman [2005] könyvének alapján készült. A vállalat az ismert átlagos fogyasztását hosszú távú szerződések keretében biztosítja. A későbbiekben ismertté váló fogyasztással a határidős, végül a másnapi piacon jelenik meg. Ahogy haladunk előre az időben, egyre többet tudunk a jövőbeli fogyasztásunkról, és egyre inkább szűkülnek a lehetőségeink, hogy mely piacokon tudunk kereskedni.



6. ábra: Az energiapiaci termékek felhasználása a fogyasztás előrejelzésének ismeretében¹⁷

Természetesen mindez nem jelenti azt, hogy a vállalatok mechanikusan alkalmazhatják, hogy mikor melyik (még rendelkezésre álló) piacot veszik igénybe a kockázat csökkentéséhez. Mindez bonyolult sztochasztikus optimalizációs feladat, amelynek széles körű szakirodalma van (l. pl. Hochreiter és szerzőtársai [2005]). Az ár előrejelzési modellje ezen optimalizációs feladatok inputja. A modell annyiban árnyalható, hogy mivel a gyárat nem közvetlenül az áram árának, hanem a saját kiadásának kockázata érdekli, ezért az ár és a felhasznált mennyiség idősorának együttmozgása (hogyan változik $P(t,T)$ ár, illetve hogyan változik az információnk a T időszaki fogyasztásról) is számít. A dolgozatban ezzel a kérdéssel nem foglalkozom. Mivel mindig az adott vállalat villamosenergia-felhasználása számít, ezért a kérdést általában konkrét vállalat esetén szokták vizsgálni. Általános stratégiák megadása bonyolult feladat.

A példabeli gyárral párhuzamosan a villamosenergia-termelő vállalat (erőmű) analóg problémával szembesül. Vagy azért jelenik meg a spot piacon, mert a le nem kötött termelését értékesíti, vagy arra számít, hogy a spot piacon drágábban tudja értékesíteni az áramot. Mindkét esetben kiteszi magát az ár változékonyságának.

¹⁷ Forrás: Geman [2005]. A téglalapok a hosszú távon (pl. egy év távlatában) előrejelzett fogyasztást jelölik, míg a csúcsok a fogyasztást csak napokkal megelőző prognosztizálást jelzik.

A villamosenergia-kereskedő cégek a piacon betöltött pozíció függvényében mind a gyár, mind az erőmű szerepéhez hasonlóan felléphetnek. Ennek eredményeként ők is szembesülnek a spot ár változékonyságának kockázatával.

Látható tehát, hogy a spot ár előrejelzése a pénzügyi kockázat feltérképezésében elengedhetetlen. A kockázat konkrét számszerűsítése kérdésében sokszor azt tapasztaltam, hogy a kockázati mérőszámok tekintetében az energiapiacra újraírták és lényegében megismételték a pénzügyi piacokon használatos kockázati irodalmat (l. Jorion [1999] a pénzügyi kockázat, míg pl. Eydeland és Wolyniec [2003] vagy Pilipovic [1997] az energiakockázat mérőszámainak ismertetéséhez). A tipikus kockázati mérőszám a kockázatosított érték (*Value at Risk*, VaR)¹⁸.

Milyen döntést hozhatnak az említett piaci szereplők a kockázat, illetve az ár előrejelzésének (eloszlásának) ismeretében? Mint korábban láttuk, választhatnak a különböző rendelkezésre álló alternatívák közül (mikor melyik piacra lépjenek). Másrészt ezen információk tekintetében meghatározhatják, milyen stratégiát követnek a spot piacon az ajánlatuk megtétele során. A harmadik döntési lehetőség a villamosenergia-kereskedőket érinti. Ezek a cégek eladhatják pl. az alábbi terméket: egy hónap során szolgáltatott 1 MWh. Ha ennek fedezéséhez a másnapi piacot kívánják felhasználni, a spot ár előrejelzése segít a kereskedő cégnek az árképzésben. Negyedrészt: a kockázat csökkentésében származtatott termékeket lehet igénybe venni. A származtatott termékek felhasználását és árazását segíti a rendelkezésre álló villamosenergiaár-modell.

A fenti érvelésből következik, hogy a jövőbeli árak nemcsak a pontszerű előrejelzése kívánatos, hanem célként a jövőbeli időpontokra vonatkozó eloszlásokat szeretnénk ismerni. Ebben az ár statisztikai modellezése van segítségünkre. A modelleknek a valós adatok tulajdonságaihoz kell illeszkedniük, ezért a következő alfejezetben az árak viselkedését leíró stilizált tényekkel foglalkozom. A modellezést és a modellezést segítő eszközöket az azt követő alfejezetben mutatom be.

¹⁸ Az energiaderivatívok és –portfóliók területén megjelennek a görög betűk is.

3.2. A villamosenergia-árak stilizált tényei

Ebben az alfejezetben a villamosenergia-árak stilizált tényeit mutatom be. A stilizált tények alatt olyan megfigyeléseket értek, amelyek a szakirodalom általánosan igaznak fogad el az árak viselkedésével kapcsolatban. A „stilizált” jelző arra utal, hogy ezek az állítások nem feltétlenül igazak minden piacon és minden időszakban, de a legtöbb esetben nem vétünk nagy hibát, ha igaznak fogadjuk el azokat. Látni fogjuk, hogy a hivatkozott irodalmak több tőzsdén hasonló viselkedést találtak, így van értelme stilizált tényekről beszélni.

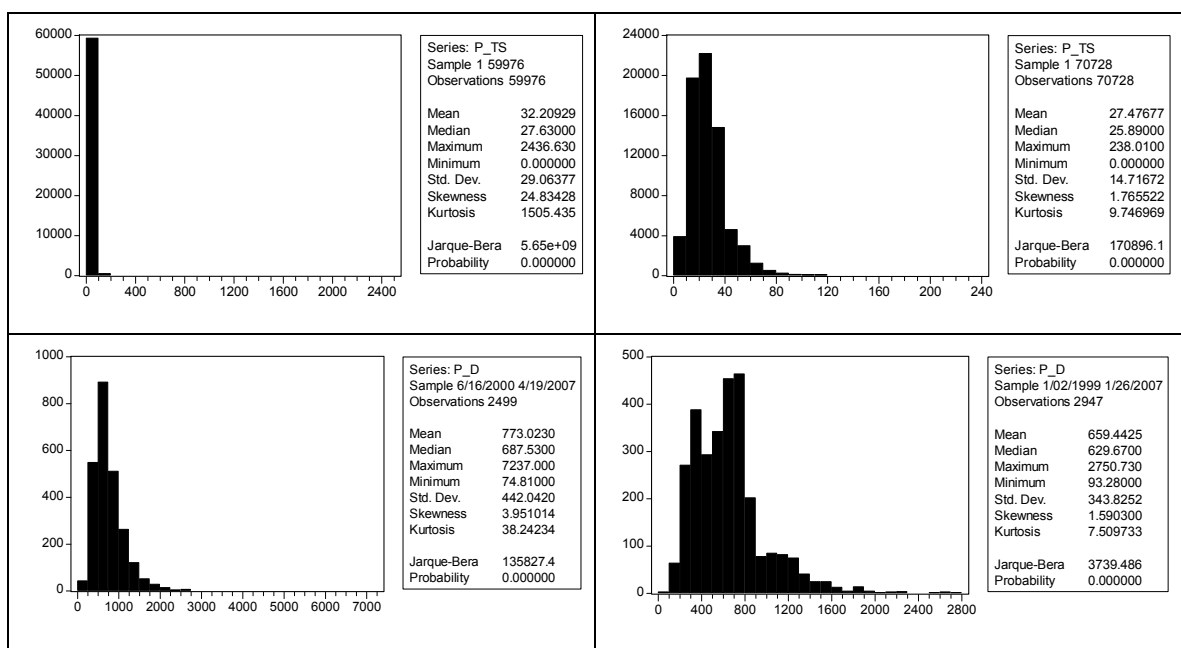
A villamosenergia-piacon leggyakrabban emlegetett **stilizált tények** az alábbiak:

1. Az adatsorban kiugró értékek (*price spikes*) találhatók.
2. Magas az autokorreláció az idősorban.
3. A volatilitás időben változik, az idősor heteroszkedasztikus (*heteroskedasticity*).
4. Az adatsor szezonális vonásokat mutat (*seasonality*).
5. Az árak, hozamok eloszlása vastag szélű (*fat tails*).
6. Egyes szerzők szerint a villamos energia ár antiperzisztens, egy-egy kiugró értéket követően visszatér az átlaghoz (átlaghoz való visszahúzás, *mean reversion*), míg mások szerint az ár idősora hosszú távú memóriával rendelkezik (*long memory*). A vizsgálatok szerint a villamos energia ára multifraktál folyamatot követ (*multifractality*).
7. Nincs konszenzus a szakirodalomban azzal kapcsolatban, vajon található-e egységgyök az ár idősorában, azaz integrált-e a folyamat.

A következő szakaszokban azt nézem végig, hogy a fent felsorolt viselkedések mit jelentenek és hogyan jelennek meg. Most csak a jelenségek leírásával foglalkozom, a modellezésbeli következményeket a következő alfejezetben mutatom be. A stilizált tények részletes tárgyalását azért tartom fontosnak, mert azok leírják az adatok viselkedését, amelyet a modellünkkel le szeretnénk írni. A disszertáció végén visszatérek a stilizált tényekre, és egyesével végignézem, hogy a disszertációban közölt saját eredmények miképpen módosítják a stilizált tényekkel kapcsolatos elgondolásokat.

3.2.1. Kiugró értékek

A 3. ábrán láthattuk, hogy az idősorban néha rövid időre megjelennek kiugró értékek (ártüskék), a jelenség tartalma tehát elég szemléletes: időnként jelentősen megnövekszik a villamos energia ára. Weron [2006] különböző lehetőségeket ad meg arra, hogy formálisan is leírassuk, mikor tekintünk egy értéket kiugrónak. Eszerint kiugróan magas a villamos energia ára, ha az ár vagy az árváltozás (hozam) egy adott küszöböt túllép. Ez elég triviális definíció, mégis nehézségekbe ütközhet annak megállapítása, hova tegyük a küszöböt. A küszöb néha nem rögzített, hanem az adott változó (ár vagy hozam) momentumai alapján határozzák meg, például várható érték + konstans * szórás. Zhao, Dong, Li és Wong [2007] leírja, hogy a konstans a piac, évszak és időszak alapján különböző lehet. Én a konstans 2-3 körüli értékeivel találkoztam az irodalomban.



7. ábra: Az árak hisztogramja

Bal felső ábra: EEX óránkénti adatok. *Bal alsó ábra:* EEX napi adatok. (EUR)

Jobb felső ábra: Nord Pool óránkénti adatok. *Jobb alsó ábra:* Nord Pool napi adatok. (EUR)

A 7. ábra mutatja be az EEX és Nord Pool adatokból számolt hisztogramokat az órák és a napi adatok esetén. Az ábra bal fele az EEX, jobb fele a Nord Pool hisztogramokat tartalmazza. A felső sort az óránkénti, az alsó sort a napi adatokból számoltam. Az ábráról látható, hogy a Nord Pool óránkénti ár 238 euró, napi ár akár 2750 euró, az EEX óránkénti ár 2436 euró, napi ár akár 7237 euró is lehet. A legmagasabb óránkénti EEX ár annyival

nagyobb a többi (átlagos) értéknél, hogy a hisztogram eltorzul, nem látszik rajta az átlagos értékek eloszlása.

A kiugró értékeket a nagy relatív szórás is jelzi. A 7. ábrán látható, hogy a Nord Pool napi árak várható értéke 659,44 euró, szórásuk 343,83 euró, ami 52%-os relatív szórásnak felel meg. Az EEX esetén a napi várható ár 773,02 euró, a szórás 442,04 EUR/KWh, ami 57% relatív szórást ad. A relatív szórás az óránkénti EEX esetén 90%(!), az óránkénti Nord Pool esetén 54%. Az EEX tehát kockázatosabb piac, mint a Nord Pool.

Az adatokból kitűnik, hogy a napi ár kiszámításával a kiugrások mértéke csökken. Ha tovább aggregáljuk az adatokat, akkor ez a tendencia folytatódik: egyre inkább eltűnnek a kiugró értékek. Ebből is látszik, hogy a napi ár kiszámítása kisimítja az idősort.

A szóródást mérhetjük a volatilitással (a hozam szórásával) is. A hozamok szóródására vonatkozó adatokat a 2. táblázat tartalmazza. Itt is azt tapasztalhatjuk, hogy az EEX árak jobban szóródnak, mint a Nord Pool árak: az óránkénti ár volatilitása az EEX-en 23,84%, míg a Nord Poolon csak 5,91%.

	EEX	Nord Pool
Órás	23,84%	5,91%
Napi	33,03%	9,51%

2. táblázat: Volatilitások

Weron [2006] úgy találja, hogy a villamos energia napi ára esetén a volatilitás akár 50%-os értéket is felvehet, és összehasonlításként megadja a rövidebb lejáratú amerikai államkötvények (0,5% alatt), a részvények (1-1,5%, 4% kockázattól függően) és egyes árupiaci termékek (1,5 és 4% között) napi volatilitását. A villamos energia szóródása tehát nagyságrendekkel magasabb a többi piacon tapasztaltnál.

A villamosenergia-piacokon azt is megfigyelték, hogy a kiugrások intenzitása változik: sokkal gyakoribbak a magas árak a csúcsidőszak elején és végén, illetve amikor az ár egyébként is magasabb (l. Simonsen, Weron, Mo [2004]). A szerzők a Nord Pool adatait vizsgálva azt találták, hogy télen sokkal gyakoribbak a kiugróan magas árak. Mivel télen általában magasabbak az árak, ezért ez is megfelel annak a megfigyelésnek, hogy a magasabb átlagos ár azzal jár együtt, hogy a kiemelkedően magas adat valószínűsége is nagyobb.

További vonása a kiugró áraknak, hogy miután ugrásszerűen megnőtt az ár, utána gyorsan visszatér az eredeti nagyságrendre (l. Weron [2006]). Ezenkívül nem minden piacon figyelhetők meg kiugró értékek. Weron [2006] szerint a lengyel áramtőzsdén, a PolPX-en nem észlelhető ez a jelenség. Ezt a szerző annak tulajdonítja, hogy a piac nem elég likvid ahhoz, hogy megjelenjenek a kiugró értékek.

Felmerül a kérdés, hogy mi az ártüskék létének az oka. A széles körben elfogadott magyarázat (l. pl. Weron [2006]) erre az, hogy lecsökkenő kínálat (megnövekedett kereslet) mellett a 2. ábrán (l. 22. oldal) szereplő kínálati görbe balra (keresleti görbe jobbra) tolódik, így a piaci ár megnövekszik, és a nagy határkötségű vállalatok is termelnek áramot. A kiugróan magas költségű termelő egységek belépése okozza a magas árakat („kínálati sokk”). A lecsökkent kínálatot okozhatja egy termelő egység hirtelen kiesése. Megnövekedett keresletre példa, ha a focivébé döntőjekor mindenki bekapcsolja a tévét, így megugrik az áramfogyasztás. Escribano, Pena és Villaplana [2002] leírja, hogy a kínálati sokk esetén kulcsszerepe van annak, hogy a villamos energia nem tárolható, és így a keresleti és kínálati sokkok nem simíthatók el időben, így közvetlenül befolyásolják az adott időszak piaci árát.

Simonsen, Weron és Mo [2004] szerint a keresleti és kínálati sokkokra hivatkozó érvelés magyarázatot ad ugyan arra, hogy nő az ár, de arra nem, hogy ilyen hihetetlen mértékben nő. Szerintük a kiugró értékek oka a kínálat csökkenésén vagy a kereslet növekedésén kívül az aukciós ajánlattételi stratégiában keresendő: egyes vevők mindenképpen vásárolni akarnak bármilyen magas ár mellett is, így nagyon magas ajánlatokat adnak meg, hogy ajánlatuk mindenképpen teljesüljön. Kiugró ár akkor fordul elő, ha a kínálat csak ezeket az ajánlatokat tudja fedezni. Tulajdonképpen a fenti két magyarázat egyszerre érvényesül: a villamosenergia-piacon a kereslet rugalmatlan, ezért a keresleti, illetve kínálati görbe eltolódása nagymértékben befolyásolja az árat. A stratégiai ajánlattételen alapuló érvelés ebbe úgy illeszkedik bele, hogy magyarázatot ad arra, miért rugalmatlan az ajánlatok piaci keresleti görbéje.

A fenti érvelésből azt a következtetést lehet levonni, hogy a kiugró árak esetén a rövid távú hatások (véletlenek, „gaming”) a meghatározóak. Zhao, Dong, Li és Wong [2007] ezzel szemben azt állítják, hogy a kiugró árak előfordulását a piaci faktorok hosszú távú trendjei segítségével előre lehet jelezni. Szerintük a piaci faktorok nem tudják közvetlenül befolyásolni, hogy adott időszakban kiugró ár legyen, de befolyásolni tudják

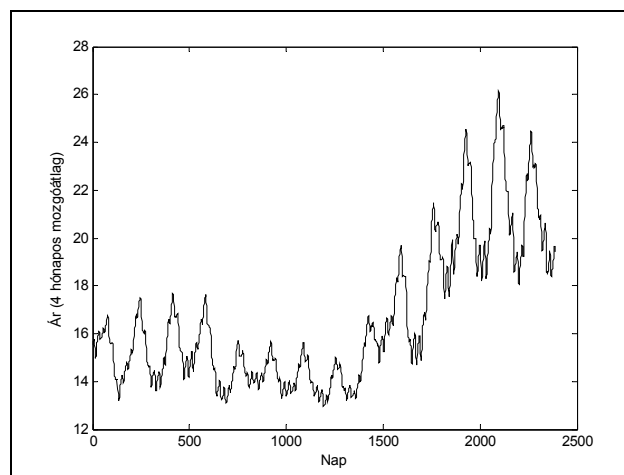
annak eloszlását. Emellett elismerik, hogy néhány esetben a kiugrás nem jelezhető előre, mert stratégiai ajánlattétel eredménye.

A modellezés során a kiugró értékekkel két lehetőségünk van: elfeledkezünk róluk mint kilógó értékekről (*outlier*), vagy beépítjük a modellünkbe. Mivel az árazás és kockázatkezelés lebeg a szemünk előtt, semmiképpen sem akarjuk elhagyni a kilógó (kiugró) értékeket, mert azok ugyanolyan lehetséges események, mint a többi kimenet. Sőt, a kilógó értékek különös figyelmet érdemelnek, mert realizálódásuk esetén kiemelkedő nyereséget vagy veszteséget könyvelhetünk el ügyletünkön. A modellezés során tehát kiemelkedő figyelmet kell tulajdonítanunk a magas árak viselkedésének leírására. A rendelkezésre álló lehetőségeinket a 3.3.4. szakasz, míg a kiugró értékek szűrését a 3.3.3.1. pont tárgyalja.

3.2.2. Szezonálitás

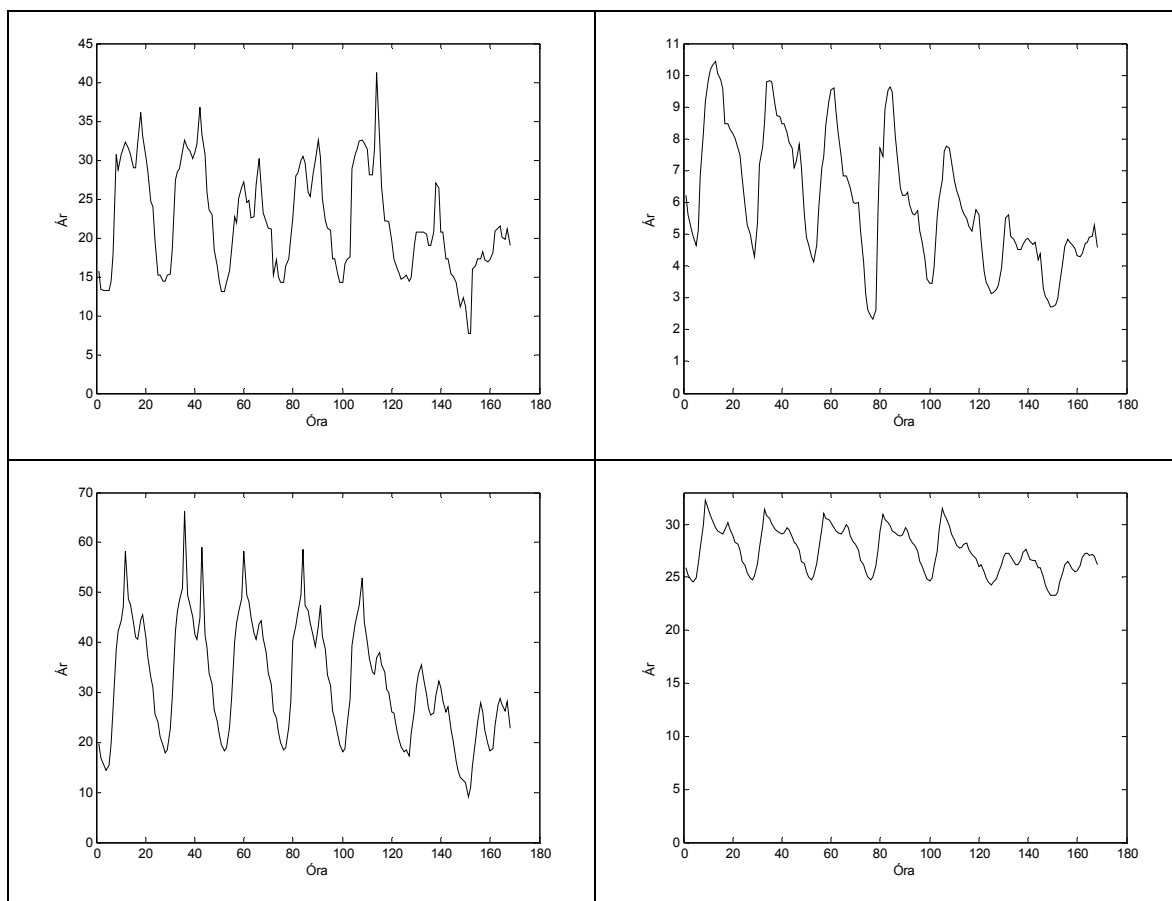
A szezonálitás erőteljesen megjelenik a villamos energia árának adataiban.

Beszélhetünk (1) éves szezonálitásról, ahol az évszakok ciklikussága adja meg a visszatérő mintázatot; (2) heti szezonálitásról, ahol a hétköznapi és hétvégi ütemes változása jelenik meg; illetve (3) napi szezonálitásról, ahol a napi életritmus és a csúcsidő/nem csúcsidő egymásra következése rajzolja ki a naponta hasonló mintázatot.



8. ábra: Éves szezonálitás az EEX napi ár esetén

Az éves, (1)-es típusú szezonális az EEX adatokon nagyon látványos. A 8. ábrán a kb. 4 hónapos mozgóátlaggal szűrt napi árak az időszora látható. Ezen kitűnik, hogy egy év (365-366 nap) alatt két hullámot ír le az ár időszora. Az adatsor júniusban indul, tehát a hullámhegyek a nyarat (légkondicionálás) és a telet (fűtés, világítás) jelentik, míg tavasszal és ősszel alacsonyabb az ár.



9. ábra: Heti szezonális

Bal: EEX. Jobb: Nord Pool.

Fent: egy tetszőlegesen kiragadott hét. Lent: az órák átlagára.

Az adatokon a (2-3)-as típusú szezonális is könnyen bemutatható: a 9. ábra felső sora egy tetszőlegesen kiragadott hetet mutat be, az alsó sorban pedig a különböző órák átlagai láthatók. Mindegyik ábrán ugyanaz a mintázat látszik tisztán kirajzolódni. Hétfőtől péntekig a csúcsidőszakban a magas fogyasztás miatt megemelkednek az árak. Hétfégén napközben szintén magasabb az ár, mint éjszaka, de a hétfégi csúcsidőszaki árak általában elmaradnak a hét közben tapasztalt csúcsidőszaki ártól. Az ábra alapján az árak nagyságrendjéről is képet kaphatunk. Az EEX-en például hétköznap csúcsidőn kívül 20

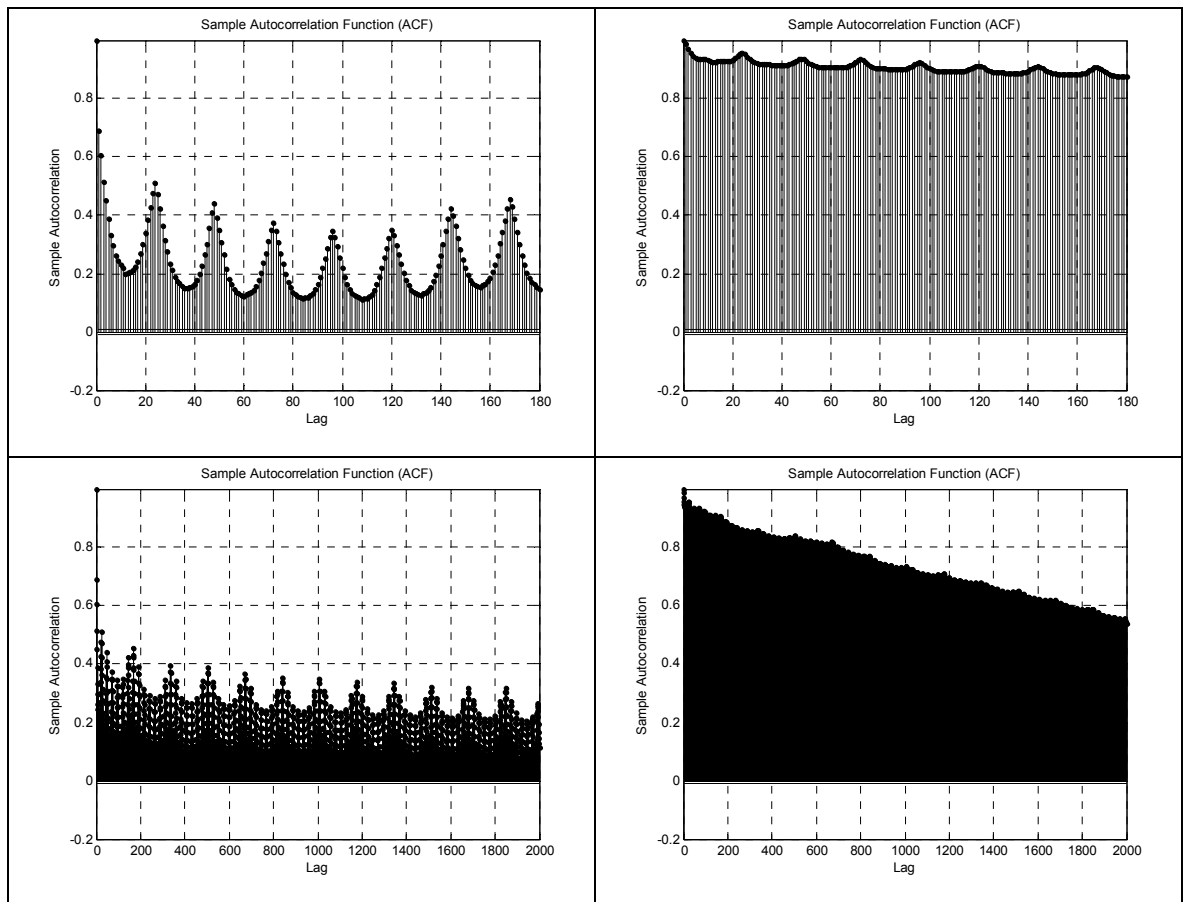
euró is lehet az átlagár az adott órában, csúcsidőben az átlagár ennek akár háromszorosát is elérheti. A Nord Poolon a különbség kevésbé erőteljes.

3.2.3. Magas autokorreláció

A felhasznált adatok bemutatásánál szó volt arról, hogy a különböző órákban szolgáltatott áram más-más termék, és az általunk vizsgált idősor olyan, mintha az alma árát a körte ára, majd a szőlő ára követné. Az idősort akkor érdemes vizsgálni, ha az „alma” és „körte” árából következtetést tudunk levonni a „szőlő” árára vonatkozóan. A spot villamos energia ára esetén szerencsére ez a helyzet: a különböző termékek árai között kapcsolat (autokorreláció) van (l. Putz [2003]), így elhihetjük, hogy létezik egy adatgeneráló folyamat, amiből az idősorunk származik. A feladatunk tehát „csak” az, hogy rátaláljunk erre az adatgeneráló folyamatra.

A keresésben segítségünkre lehet a már említett autokorreláció: a t . időszaki autokorreláció nem más, mint az ár és a t -vel késleltetett ár közötti korreláció. Az autokorrelációs struktúra vizuális elemzésére a korrelogramot szokták használni, amely az autokorrelációkat mutatja be a késleltetés függvényében.

A 10. ábra mutatja be az általam vizsgált termékek árának korrelogramját egészen 180-as és 2000-es késleltetésig. A felső sor mutatja be a korrelogramot 180-as késleltetésig. Ezen megfigyelhető az autokorrelációs struktúra rövid távú viselkedése. Az autokorrelációs értékek a kritikus értékek felett helyezkednek el, tehát minden késleltetésre szignifikánsak. Magasabb az autokorreláció a 24-gyel osztható késleltetések esetén, aminek a napi szezonális az oka. Bár a Nord Pool (jobboldal) esetén a korrelációs értékek nagyobbak, mint az EEX (baloldal) esetén, a korrelogram lefutása hasonló. Ugyanez igaz, ha a hosszabb távú (magasabb késleltetésű) autokorrelációt vizsgáljuk (10. ábra, alsó sor). Szembetűnő, hogy az autokorreláció a késleltetésszám növelésével lassan csökken, azaz ha a mostani időszak ára magas, akkor a későbbi időszaki árak is tendenciájukban magasabbak maradnak. Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy az árak folyamata hosszú távú memóriával rendelkezik, amely jelenséget az 3.2.6. szakaszban további vizsgálatnak vetek alá.



10. ábra: Az árak korrelogramja 180-as és 2000-es késleltetésig
Bal: EEX. Jobb: Nord Pool.

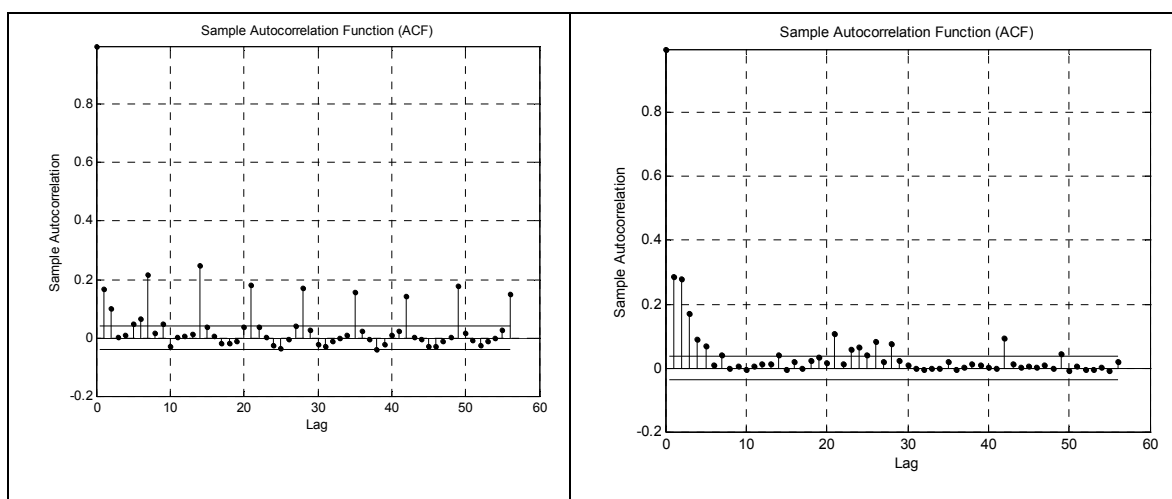
3.2.4. Változó volatilitás

A kiugró árakat bemutató részben már szó volt arról, hogy a villamosenergia-piac sokkal volatilisabb, mint a pénzügyi piacok. A volatilitás azonban nem állandó, azaz az árak időszora heteroszkedasztikus (l. pl. Eydeland és Wolyniec [2003]).

A heteroszkedasztikus jelleg megfigyelhető az 5. ábrán, amelyen észrevehető, hogy a nagyobb árváltozások összecsomósodnak (a volatilitás tömörülése, *volatility clustering*), azaz az abszolút értékben nagyobb hozamok hajlamosak egymáshoz közelebb esni. Ilyen esetben a piacon a csendes időszakokat időnkénti volatilisabb periódusok váltják fel.

A volatilitás tömörülését és a heteroszkedaszticitást gyakran szokás a hozam négyzetének idősorával (Simonsen, Weron, Mo [2004]) vagy a hozam négyzetének

korrelogramjával¹⁹ (l. Tulassay [2006]) szemléltetni. A hozam négyzetének idősorából kb. ugyanazok a következtetések vonhatók le, mint amit a hozam idősorából is kiolvashattunk. A 11. ábra a napi hozam négyzetének korrelogramját mutatja be az EEX és a Nord Pool esetén. A vízszintes folytonos vonalakon kívül eső értékek esetén az adott késleltetéshez tartozó autokorreláció szignifikáns. A baloldali ábrán látható, hogy az EEX esetén a 2 napos késleltetés még szignifikáns. A Nord Pool esetén 5 napos késleltetésig szignifikánsan különbözik 0-tól az autokorreláció²⁰. Mindez azt jelenti, hogy tömörül a volatilitás, és van létjogosultsága a GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) modellek használatának (l 3.3.4.3. pont).



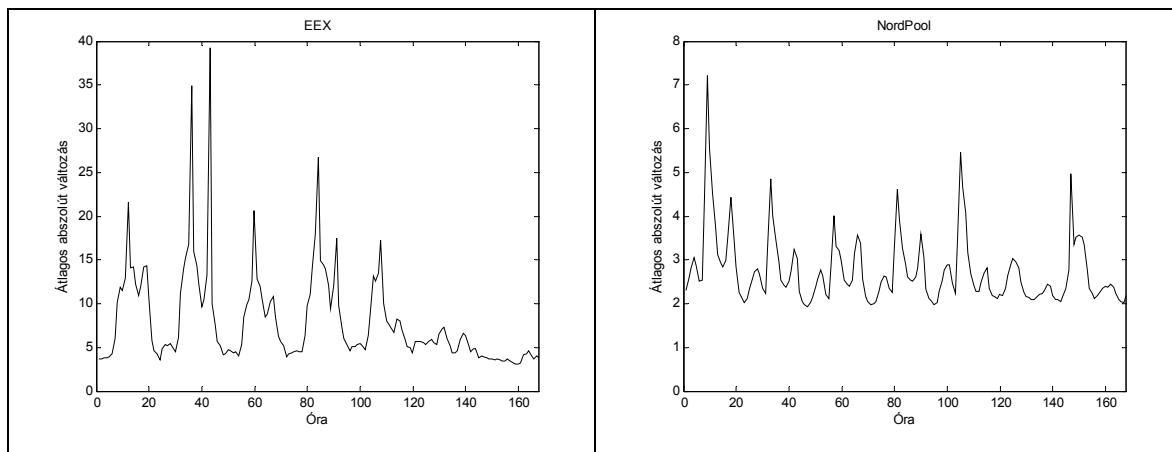
11. ábra: A napi hozam négyzetének korrelogramja
Bal: EEX. Jobb: Nord Pool. (EUR)

Weron [2000] szerint a volatilitás szezonális vonásokat mutat: a volatilitás magasabb csúcsidőben, mint csúcsidőn kívül. Ezt az átlagos abszolút árváltozással (*mean absolute price change*, MAPC) szemlélteti. A hét minden egyes órájára kiszámítja az árváltozás abszolút értékét az előző hét azonos órájához képest, és ezeket átlagolja. Ezt reprodukáltam a rendelkezésemre álló adatok alapján a 12. ábrán. Szembetűnő a MAPC ingadozásából, hogy az abszolút árváltozás azokban az órákban a legmagasabb, amikor csúcsidőszak van, illetve maga az ár is magas. Hétvégéről hétfőre az árváltozás jóval kisebb, mint hétköznap a nappali órákban. Kivétel ezalól a Nord Pool esetén a vasárnap

¹⁹ A magyarázat a GARCH típusú modelleknek azon tulajdonságából fakad, hogy a reziduumból négyzete autokorrelált. Itt implicite feltételezünk egy olyan GARCH modellt, ahol a várható érték egyenletben csak a reziduumból szerepel.

²⁰ A heti szezonálisnak köszönhetően a 7-tel osztható késleltetésszámok esetén a 2-nél és 5-nél magasabb rendű autokorrelációk is szignifikánsak.

hajnali órák esete, amikor a hétköznappokkal nagyjából megegyezik az átlagos árváltozás mértéke.



12. ábra: A volatilitás szezonális jellege (átlagos abszolút változás óránként)

3.2.5. Vastag szélek

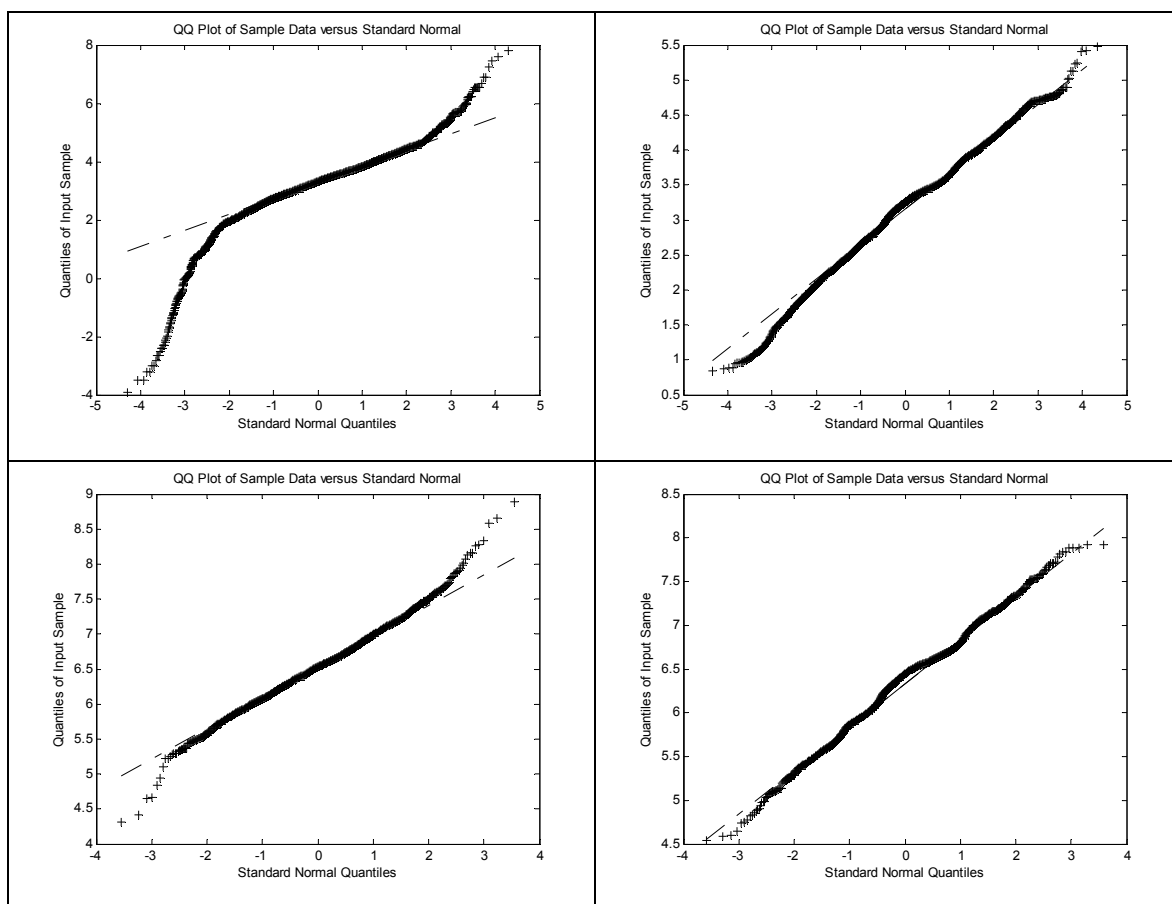
Korábban, a 7. ábrán láttuk az árak hisztogramját a leíró statisztikákkal együtt. Innen leolvasható, hogy az óránkénti ár kurtózinga (csúcsossága) 1505,4 az EEX és 9,7 a Nord Pool esetén. A napi árnál ez az érték rendre 38,2 és 7,5. Mindegyik érték magasabb, mint a normális eloszlásra jellemző 3-as érték, tehát az eloszlások a normális eloszlásnál csúcsosabbak, valamint a kiemelkedően nagy ár valószínűsége is nagyobb, mint amely a normális eloszlás esetén lenne. Mind a négy eloszlás Jarque-Bera tesztje esetén a p-érték sok tizedesjegyre 0, azaz az eloszlás szignifikánsan különbözik a normális eloszlástól.

Célszerűbb azonban a normális eloszlás helyett a lognormális eloszlással összehasonlítani az adatainkat, gondoljunk például arra, hogy az ár jellemzően nemnegatív (pozitív), ami a lognormális eloszlás tartójával jobban összeegyeztethető.

Az eloszlás széleinél különösen érdekel minket a valós eloszlás, hiszen ez a tartomány fejezi ki a piaci szereplők számára nagy kockázattal rendelkező kimeneteket. Az „eloszlás széle” kifejezés alatt ebben az esetben az eloszlás jobb oldalát, a kiemelkedően magas árak viselkedését értem²¹. Ez a vizsgálat tehát kapcsolódik a kiugró értékek elemzéséhez: itt azt nézzük meg, hogy a magas árak eloszlásának milyen a lefutása.

²¹ Természetesen vannak olyan piaci szereplők, akiknek a túlzottan alacsony ár jelent kockázatot. Ezek jellemzően a villamosenergia-termelő cégek, hiszen általában ők vannak eladási pozícióban. Az eloszlás bal

A tapasztalati és a lognormális eloszlás összehasonlítását elvégezhetjük úgy is, hogy az ár logaritmusát vetjük össze a normális eloszlással. A 13. ábra ehhez adja meg a Q-Q plotokat, azaz az empirikus kvantiliseket a normális eloszlás kvantiliseivel szemben. Ha az árak logaritmusai normális eloszlást követne (azaz az ár lognormális eloszlású lenne), akkor a Q-Q plot egyenest mutatna. Minél jobban eltér a Q-Q plot a 45 fokos egyenestől, annál jobban különbözik az empirikus eloszlás a lognormális eloszlástól (l. Kovács [2004]).



13. ábra: Az árak logaritmusának Q-Q plotja (a normális eloszlással szemben)
Bal felső ábra: EEX óránkénti adatok. *Bal alsó ábra:* EEX napi adatok.
Jobb felső ábra: Nord Pool óránkénti adatok. *Jobb alsó ábra:* Nord Pool napi adatok.

A 13. ábrán látható, hogy a valós görbe a legtöbb esetben eltér az egyenestől. Jelentősen különbözik az eloszlás az EEX esetén mind az óránkénti (bal felső ábra), mind a napi (bal alsó ábra) esetén. Az eloszlás szélénél a Q-Q plot az egyenes felett helyezkedik el, ami azt jelenti, hogy a tapasztalati eloszlásnál az eloszlás szélén magasabb valószínűséggel

szélénél vizsgálata éppoly érdekes kérdés, mint a magas árak eloszlásának vizsgálata. Az irodalomban azonban jobbra a kiugróan magas árak eloszlását szokták vizsgálni, hiszen a kiugró árak viselkedése szembetűnőbb az árak nagyságrendje miatt.

fordulnak elő értékek, mint azt a normális (lognormális) eloszlásból várhattuk volna. Az EEX árak eloszlása tehát lassabban esik a lognormálisnál. A Nord Pool óránkénti adatok (jobb felső ábra) esetén is azt láthatjuk, hogy a szélek lassabban esnek a lognormálisnál, de a különbség a két (a tapasztalati és az elméleti) eloszlás között kisebb. Ez összhangban van azzal a korábbi megfigyelésünkkel, hogy az EEX kockázatosabb piac, mint a Nord Pool. A Nord Pool napi adatok (jobb alsó ábra) esetén már azt állíthatjuk, hogy a tapasztalati és elméleti eloszlás között nem látni a különbséget²². Ennek oka valószínűleg az, hogy az óránkénti adatok összeadásával „kisimítottuk” az adatokat.

Az eddigi vizsgálatok azt mutatták, hogy az árak eloszlása nem lognormális, hanem a széleken annál lassabban esik az eloszlás. Milyen az eloszlás lecsengése a széleken? Ennek vizsgálatát a farokkifevő (*tail index*) vizsgálatának segítségével végeztem el, melynek gondolatmenete a következő:

Tételezzük fel, hogy egy adott $F(x)$ eloszlás hatványszerűen esik az eloszlás szélénél, azaz az eloszlásfüggvény az 1-et α hatvánnyal közelíti meg:

$$F(x) = 1 - \frac{konst}{x^\alpha}$$

Átírva túlélőfüggvényre:

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \frac{konst}{x^\alpha}$$

Vegyük mindkét oldal logaritmusát:

$$\ln \bar{F}(x) = \ln(konst) - \alpha \ln(x)$$

Ez azt jelenti, hogy ha log-log ábrán rajzoljuk fel a túlélőfüggvényt, akkor a képe egyenes. Éppen ezen alapszik az α becslésének egyik módszere: lineáris regresszióval becsülhető, ahol a magyarázó változónak különböző x_i -ket, a valószínűségi változó lehetséges értékeit választunk a vizsgált tartományból, eredményváltozónk pedig az ehhez az x_i -khez tartozó

²² Formális statisztikai tesztet végezve továbbra is azt állíthatjuk, hogy a Nord Pool napi árak logaritmusának eloszlása nem normális, hiszen a Jarque-Béra teszt p-értéke $6.89 \cdot 10^{-6}$. Az eloszlás csúcsossága 3,14, tehát az eloszlás a normális eloszlásnál csúcsosabb, vastag szélű.

relatív gyakoriság (azaz a megfigyelések hány százaléka nagyobb az adott értéknél) logaritmus. A magyarázó változó lineáris regresszióval kapott együtthatójának mínusz egyszerese a hatványkitevő becslése. A fenti módszer az ún. **farokregresszió** (l. Clauset, Shalizi, Newman [2009]).

Egy másik módszer az α becslésére a **Hill-becslés** (l. McNeil, Frey, Embrechts [2005]), ami maximum likelihood módszerrel becsli a hatványkitevőt. Tegyük fel, hogy a sűrűségfüggvény az eloszlás szélénél az alábbi alakú:

$$f(x) = \frac{\alpha A^\alpha}{x^{1+\alpha}}$$

Itt azt tételezzük fel, hogy a sűrűségfüggvény $1+\alpha$ kitevővel esik az A szint felett, azaz az eloszlásfüggvény α kitevővel közelít az 1-hez. Ekkor az $x_1, x_2, \dots, x_N$ mintára vonatkozó likelihood és loglikelihood függvény az alábbi:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N, \alpha, A) = \prod_{i=1}^N f(x_i) = \frac{\alpha^N A^{N\alpha}}{\left(\prod_i x_i\right)^{(1+\alpha)}}$$

$$\ln L = N \ln \alpha + N\alpha \ln A - (1+\alpha) \sum_{i=1}^N \ln x_i$$

Ezt maximalizálva a paraméter (α) függvényében kapjuk meg az optimális α^* értéket:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{N}{\alpha^*} + N \ln A - \sum_{i=1}^N \ln x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^* = \frac{N}{\sum_{i=1}^N \ln \frac{x_i}{A}}$$

Mivel azt feltételeztük, hogy a hatványszerű viselkedés az A szint felett érvényes, ezért A -t úgy is megválaszthatjuk, hogy

$$A = \min(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

Természetesen történhet akár fordítva is: adott A -t választunk a legkisebb megfigyelésnek.

A **Hill-plot** a mintába vont elemszám (N) függvényében rajzolja fel a Hill-beccsléssel megkapott hatványkitevő értékét (l. McNeil, Frey, Embrechts [2005]).

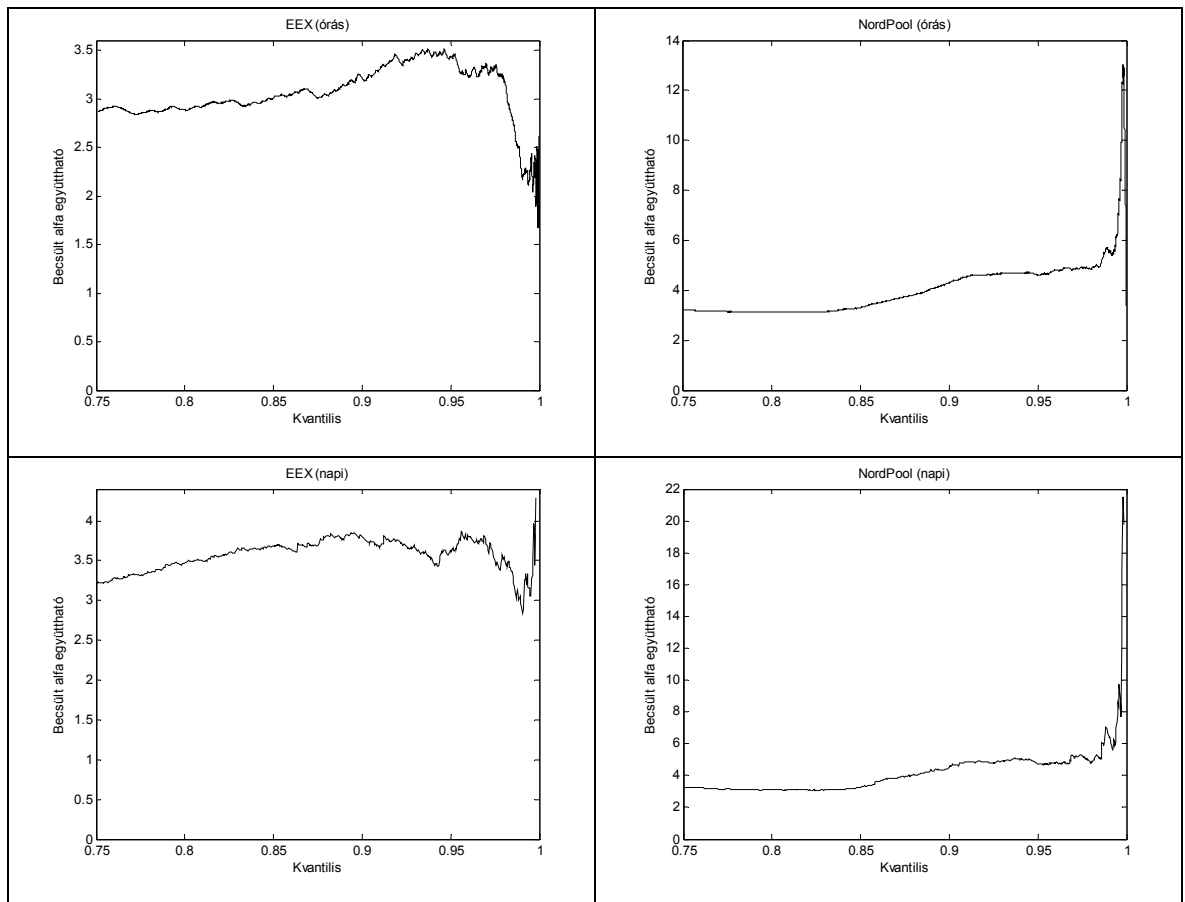
Láttuk, hogy a hatványkitevő nem más, mint egy egyenes illesztése a log-log skálán ábrázolt eloszlásfüggvényre. Ha ez az eloszlásfüggvény ténylegesen egyenes (azaz az eloszlás hatványszerűen esik), akkor ahogy haladunk az eloszlás széle felé, mindig ugyanaz az egyenes illeszkedik a log-log eloszlásfüggvényre. A Hill-beccsléssel tehát ugyanazt a meredekséget kell becsülnünk az adatokra, a Hill-plot vízszintes. Természetesen nem várunk tökéletesen vízszintes ábrát a mintavételi hiba miatt (ami különösen nagy az eloszlás széléhez közel, így a Hill-plot elkezd „ugrálni”), de nagyjából vízszintes ábrát kell látnunk. Ha a Hill-plot nem vízszintes, hanem emelkedő az eloszlás széléhez közeledve, akkor az eloszlásfüggvény nem hatványszerűen, hanem annál gyorsabban esik (ekkor log-log skálán nem vízszintes az eloszlásfüggvény képe, így más-más meredekséget becslünk az egyeneseknek).

A Hill-plotot esetenként nem a mintaelemszám, hanem a kvantilis függvényében ábrázolják, azaz a vízszintes tengelyen az szerepel, hogy az A küszöbszám a megfigyelések hányadik kvantilise. Én ezt az eljárást követem, mert így világosabban látszik, az esetek mekkora százalékán becsültük a hatványkitevőt. A két megoldás természetesen ugyanolyan görbét eredményez, hiszen a kvantilisok esetére áttérve csak lineárisan transzformáltuk a vízszintes tengelyt.

A 14. ábra tartalmazza a Hill-plotokat a szokásos esetekre. Látható, hogy az árak eloszlása a széleknél elég sokáig körülbelül 3-as, 3,5-ös hatvánnyal esik²³. Az eloszlás legszélénél (az 1-es értékhez közeledve) a két piac eltérően viselkedik. A Nord Pool esetén a hatványkitevő nő, azaz ebben az esetben azt állíthatjuk, hogy a Nord Pool árak eloszlása a hatványszerűnél gyorsabban esik. Az EEX-nél a napi árak 3,5-ös, az óránkénti árak 2-es hatvánnyal esnek az eloszlás nagyon magas kvantiliseinél. Ebben az esetben (különösen az óránkénti adatok esetén) elfogadhatjuk a hatványszerű viselkedést.

A vizsgálatok során azt tapasztaltuk, hogy az EEX árak eloszlása hatványszerűen, a Nord Pool árak eloszlása a hatványszerűnél gyorsabban, a lognormálisnál lassabban esik a széleken. A vastag szélek jelensége tehát érvényesül mindkét esetben.

²³ Érdekes, hogy a pénzügyi eszközöknél azt szokták tapasztalni, hogy a hozamok eloszlása 3-as hatvánnyal esik („*cubic law of returns*”), l. Tulassay [2007]. Itt ugyan nem a hozamot, hanem az árat vizsgáltam, ennek ellenére az azonosság figyelemfelkeltő.



14. ábra: Hill-plotok

3.2.6. Hosszú távú memória, átlaghoz való visszahúzás és multifraktál jelleg

Weron [2006], Eydeland és Wolyniec [2003], illetve számos más könyv és cikk azt állítja, hogy a villamosenergia-ár átlaghoz visszahúzó (antiperzisztens, *mean reverting*) folyamatot követ. Ez azt jelenti, hogy ha bekövetkezik egy pozitív sokk az árra, akkor olyan hatások lépnek fel, amelyek a folyamatot visszafordítják, és azt valamilyen hosszú távú átlagként értelmezhető érték felé terelik. Ennek a jelenségnek az ellentéte az ún. perzisztens folyamat, amely hajlamos a sokkokat sokáig megőrizni; erre utal a folyamat egyik alternatív elnevezése, a hosszú távú memóriával rendelkező (*long-memory*) idősor elnevezés. Ennek szélsőséges esete, ha a sokk hatása örökre fennmarad, ekkor ún. integrált folyamatról beszélünk.

A véleményeket arról, hogy a villamos energia ára integrált folyamatot követ-e, a következő szakaszban mutatom be. Ebben a szakaszban csak a hosszú távú memória és átlaghoz való visszahúzás kérdését vizsgálom meg. Természetesen a két jelenség (integráltság foka, sokkok tartóssága) nem független egymástól, de most mégis külön tárgyalom azokat.

Ebben a szakaszban a számítások empirikus adatokon történő igazolását most elhagyom, és a későbbiekben, a saját eredmények bemutatásánál fogom elvégezni. Itt csak a szakirodalomban megtalálható véleményeket gyűjtöm össze. Ezt a stilizált ténnyt részletesebben tárgyalom, mint a többit. Ennek oka, hogy a saját eredmények bemutatásánál hozzá szeretnék szólni az itt bemutatandó vitához, így módszertanilag elő szeretném készíteni a talajt az érvelésemhez, hogy a saját eredmények bemutatásánál már csak fel kelljen használnom az itt bevezetett fogalmakat.

Eydeland és Wolyniec [2003] (114. o.) kifejti, hogy a kiugró árak miatt tévesen találhatjuk úgy, hogy van átlaghoz visszahúzás az ár folyamatában. A magas ár jellemzően csak rövid ideig él, és hamarosan kisebb lesz az áram ára a piacon. Ezt tévesen antiperzisztens viselkedésnek ítéltük meg, ha átlaghoz visszahúzó folyamatot illesztünk az árakra. Két egyszerű módszert ajánlottak ennek a hatásnak a kiszűrésére. Az első esetén csak egy, a kiugró értékeknek kevésbé kitett részmintát vizsgálunk az adatsorból. A második módszer a kiugró értékek eltávolítása. Az előbbi módszer felhasználásával arra jutottak, hogy a Pennsylvania-New Jersey-Maryland (PJM) áramtőzsdén az árak antiperzisztens vonásokat mutatnak, míg a texasi áramtőzsdén (Electric Reliability Council of Texas, ERCOT) nem. Eydeland és Wolyniec [2003] utal arra, hogy a kiugró árak eltávolítása után jellemzően eltűnik az átlaghoz visszahúzó jelleg.

A fenti szerzőpáros a vizsgálódást egy lineáris regresszió segítségével végzi el: megnézik az előző időszak ár hatását az árváltozásra, és amennyiben az negatív, akkor definíciójuk szerint átlaghoz visszahúzás áll fenn. (Ugyanezt megnézik a hozamra és a loghozamra is.) Tulajdonképpen tehát egy Dickey-Fuller tesztet²⁴ (l. Darvas [2005]), azaz egységgyöktesztet végeznek. Az eredményeiket tehát úgy értelmezhetjük, hogy egy sokk hatása nem fog örökké tartani. Ez azonban még nem mond semmit arról, hogy meddig tart a sokk hatása, csak azt, hogy egyszer megszűnik, tehát nem integrált a folyamat. A hasonló logikájú irodalmak boncolgatását tehát a következő alfejezetre hagyom. Itt annyit érdemes megjegyezni, hogy a szakirodalomnak a következőkben bemutatásra kerülő része más

²⁴ Azt le is írják a könyvükben, hogy Dickey-Fuller tesztről van szó.

értelemben hivatkozik az átlaghoz visszahúzó jellegre, mint ahogy azt Eydeland és Wolyniec [2003] tette.

Érdemes tehát a félreértések elkerülése végett formális mutatót bevezetni a perzisztencia (a folyamat perzisztens illetve antiperzisztens jellegének) mérésére. Az általánosan elfogadott mérőszám a **Hurst mutató** (*Hurst exponent*, Hurst exponens, jelölés: H). Ezt Hurst vezette be 1951-es, hidrológiai témájú cikkében (Hurst [1951]). A H mutató értéke 0 és 1 között van. A kitüntetett 0,5-ös érték esetén a folyamat növekményei között nulla az autokorreláció. Példa ilyen folyamatra a Wiener-folyamat (a definíciót l. Medvegyev [2008]), ahol a folyamat növekményei gaussi fehér zajt alkotnak, tehát függetlenek, így autokorrelálatlanok is. A 0,5-nél kisebb értékek jelzik azt, hogy a folyamat antiperzisztens (a folyamat növekményei között negatív az autokorreláció), míg 0,5 feletti értékek esetén a folyamat perzisztens (a növekmények között pozitív az autokorreláció). (1. DEFINÍCIÓ)

Példaként hozhatjuk fel a $w_H(t)$ frakcionális Wiener-folyamatot (fWf , fBm)²⁵, amelynek tulajdonságai az alábbiak (Medvegyev [2008]):

1. $w_H(0)=0$
2. Stacionárius növekményű. A növekmények eloszlása normális, nulla várható értékkel.
3. Az értékek közötti kovariancia:

$$\text{cov}(w_H(t), w_H(s)) = R_H(t, s)$$

ahol

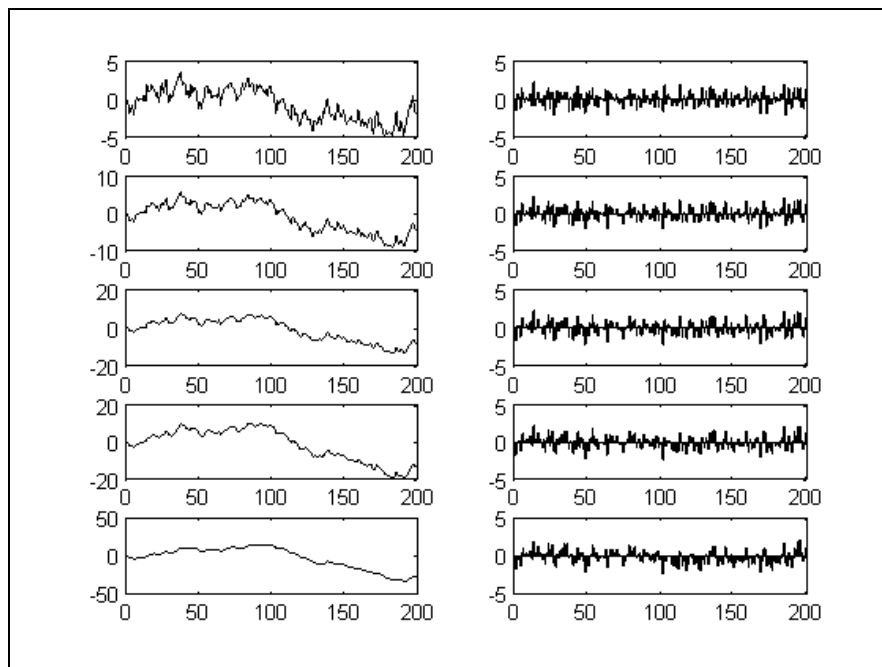
$$R_H(t, s) = \frac{1}{2} \left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H} \right), \quad 0 < H \leq 1$$

4. Trajektóriái folytonosak.

A $H = \frac{1}{2}$ esetben pont a Wiener-folyamatot kapjuk. A H paraméter a folyamat Hurst exponensével egyezik meg. Különböző módszerekkel állíthatunk elő realizációkat a frakcionális Wiener-folyamatból. Egy lehetséges módszer az A. függelékben található.

²⁵ A szakirodalomban gyakran frakcionális Brown-mozgásként (*fractional Brownian motion*, fBm) hivatkoznak rá.

Különböző realizációkat mutat be az A. függelékben ismertetett módszer alapján a 15. ábra. A szimulációt minden H esetén ugyanazokkal a véletlen számokkal végeztem, így a véletlen hatását kiküszöböltem, és világosan megfigyelhető a trajektóriákon a H hatása. Látható, hogy kis H érték mellett (bal felső két sor) a folyamat gyorsan megpróbál visszatérni a hosszú távú átlagához, a 0-hoz, ahonnan a véletlen időnként ellöki. Magas H érték esetén (bal alsó két sor) a folyamat hosszú távú memóriája ott vehető észre, hogy a trajektóriában hosszabb „futamok” figyelhetők meg. $H = 0,5$ mellett (baloldali középső ábra) a folyamat bolyongás, azaz a folyamat várhatóan ott marad, ahol az előző időszakban tartózkodott.



15. ábra: A frakcionális Wiener-folyamat szimulációja különböző H esetén
Baloldal: a folyamat értékei. *Jobboldal:* növekmények.

A sorok esetén a H értékei rendre: 0,25, 0,4, 0,5, 0,6, 0,75.

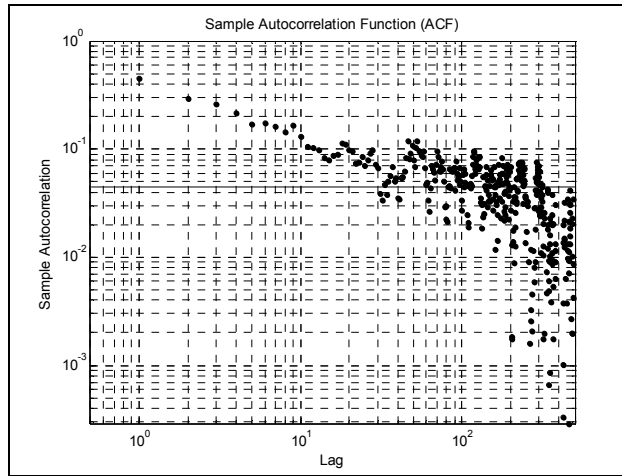
Vízszintes tengely: szimuláció darabszáma. Függőleges tengely: érték, illetve növekmény.

A H mutató önhasonló (*self-similar*), illetve önaffin (*self-affine*) folyamatok vizsgálatára alkalmas. Önhasonló a folyamat akkor, ha a folyamat egy részletét kinagyítva az eredeti folyamat tulajdonságainak megfelelő részfolyamatot találunk. Az önhasonlóság mellett szokták az önaffin definíciót is használni abban az esetben, ha a kinagyított folyamat az eredeti folyamat tulajdonságait átskálázva adja vissza (l. 15. ábra). Gyakran az önaffin folyamatot is szimplán önhasonlónak nevezik (l. Zhang, Barad, Martinez [1990]).

Formális leírását megkaphatjuk a fentieknek egy $B(t)$ sztochasztikus folyamat esetén, ha vesszük a folyamat t hosszúságú szakaszon vett növekményét t_0 -tól:

$$b(t_0, t) = B(t_0 + t) - B(t_0)$$

Ekkor önhasznós a folyamat H Hurst mutatóval, ha a $b(t_0, t)$ és a $r^{-H}b(t_0, rt)$ $r > 0, \forall t$ esetén statisztikailag megkülönböztethetetlen (*statistically indistinguishable*), azaz ha a két növekmény eloszlása ugyanaz (Zhang, Barad, Martinez [1990]). Ha tehát a folyamat nagyobb szeletét tekintjük át, akkor H ütemben skálázódik át a növekmény eloszlása. A 15. ábrán látható, hogy ez a tulajdonság fennáll a frakcionális Wiener-folyamat esetén.



16. ábra: A szimulált frakcionális Wiener-folyamat növekményeinek autokorrelációs függvénye log-log skálán

Látható, hogy a fWf tulajdonságainak leírásában nagy szerepet játszik a növekmény. A növekmények folyamatának külön elnevezése is van: frakcionális zaj vagy frakcionális gaussi zaj (*fractional Gaussian noise*, fGn). A fGn segítségével szemléltethető a hosszú távú memóriával rendelkező folyamatok azon általános tulajdonsága, hogy az autokorrelációs függvény (ACF) hatványszerűen csökken. A 16. ábra tartalmazza a fGn autokorrelációs függvényét. Látható, hogy az ACF hatványszerűen csökken, hiszen log-log skálán egyenes (magas késleltetés és alacsony autokorreláció esetén a becslés zajos). Minél nagyobb a H mutató értéke, a csökkenés üteme annál lassabb. Stacionárius, hosszú távú memóriájú folyamatok esetén az ACF jellemző alakja az s késleltetés függvényében²⁶:

²⁶ L. pl. Kantelhardt et al. [2002] vagy Sarker [2007].

$$C(s) \sim s^{2H-2}$$

Ez szintén az ACF hatványszerű csökkenését írja le, még hozzá $2H - 2$ (<0) ütemben. A fenti összefüggés lehetőséget ad arra, hogy valós adatok esetén megbecsüljük a H mutató értékét.

Másik példa hosszú távú memóriával rendelkező folyamatra a frakcionálisan integrált ARMA (ARFIMA) modell, ahol az ARMA-val szemben (ahol exponenciális ütemben csökken az ACF) hatványszerű viselkedés jelenik meg az ACF-ben. Az ARMA és ARFIMA modellek leírását l. a következő alfejezetben.

A hosszú távú memóriájú folyamatok esetén a sokkok sokáig megőrzik hatásukat az autokorreláció lassú csökkenése miatt. Mivel egy sokk hatása sokáig tart, ezért indokolt a gyakran használt hosszú távú függőség (*long-range dependence*, LRD) alternatív elnevezés ezekre a folyamatokra.

A H mutató definíciójánál és tulajdonságainak leírásánál láthattuk, hogy kulcsszerepet kap a folyamat növekménye. Célszerű átfogalmazni a Hurst 1. definícióját, hogy azt stacionárius folyamatokra értelmezzük:

A 0,5-ös H mutató esetén a folyamat értékei között nulla az autokorreláció. A 0,5-ös mutatóra itt a gaussi fehér zaj hozható fel példának. A 0,5-nél kisebb értékek jelzik azt, hogy a folyamat antiperzisztens (a folyamat elemei között negatív az autokorreláció), míg 0,5 feletti értékek esetén a folyamat perzisztens (az elemek között pozitív az autokorreláció). (2. DEFINÍCIÓ)

A két definíció összekapcsolása megoldható: ha nem stacionárius a folyamatunk, akkor átalakítjuk stacionáriussá, és a 2. definíció alapján kapott H mutatót nevezhetjük az eredeti folyamat Hurst exponensének. Például Wiener-folyamat esetén vesszük a folyamat növekményeit (gaussi fehér zaj), és arra 0,5-ös értéket kapunk a 2. definíció szerint, ami megfelel az 1. definíció alapján kapható értékkel.

A 15. ábrán láthatjuk a frakcionális Wiener-folyamat növekményeit is. Magas H esetén a növekmények pozitívan korrelálnak (előjel-csoportosulások vannak), míg kicsi H esetén az autokorreláció negatív (váltakozik az előjel).

Innentől az új definíció bevezetése miatt elegendő tehát stacionárius folyamatokkal foglalkoznunk. A definíció átfogalmazása fogalmi játszadozásnak tűnhet. A definíciós problémák mégis fontos szerepet kapnak a villamosenergia-ár H mutatója körüli vitában.

A fogalom tisztázása után lássuk a Hurst mutató néhány gyakrabban használt kiszámítási módszerének alapgondolatait stacionárius folyamat esetén²⁷:

1. R/S (Rescaled Range) módszer²⁸

Ha az adatsort n hosszúságú részidősorokra bontjuk, akkor a kumulált részidősor terjedelme és a részidősor szórásának hányadosa (a „range/scale”, úgymint R/S) az n függvényében log-log skálán lineáris, és meredeksége H .

2. Aggregated Variance módszer²⁹

A mintaátlag varianciája $2H - 2$ ütemben csökken, tehát az n hosszúságú részidősorokra bontva az eredeti idősort kiszámítjuk a részidősorok átlagának varianciáját. Ez a mutató az n növelésével $2H - 2$ ütemben csökken, amit log-log skálán lineáris regresszióval megkaphatunk.

3. Differenced Variance módszer³⁰

Az előző módszer alapötletéből kiindulva itt az n hosszúságú részidősorok mintaátlag-varianciája különbségének a logaritmusa („*logarithm of the difference of „the variance of the sample mean”*”) szintén $2H - 2$ ütemben fog változni n növelésével.

4. Periodogram regresszió³¹

Az idősor periodogramjának log-log ábráján az alacsony frekvenciáknál egyenest illesztve az egyenes meredeksége $1 - 2H$.

5. Average Wavelet Coefficient (AWC) módszer³²

Simonsen, Hansen és Nes [1998] levezette, hogy H paraméterű önaffin folyamatok esetén az idősor $W(a,b)$ wavelet transzformáltja az a skála- és b helyzetparaméterek önaffin függvénye $H + \frac{1}{2}$ paraméterrel. Így a $W(a,b)$ kétváltozós függvényt a helyzetparaméter szerint valamilyen módon átlagolva a kapott $W'(a)$ függvény log-log skálán a lineáris függvénye $H + \frac{1}{2}$ meredekséggel.

²⁷ A korábban ismertetett, az autokorrelációs függvényen alapuló módszer is ide sorolható.

²⁸ Weron [2006].

²⁹ Montanari, Rosso, Taqqu [1997].

³⁰ Montanari, Rosso, Taqqu [1997].

³¹ Sarker [2007].

³² Erre a módszerre jellemzően AWC névvel szoktak utalni az irodalomban. Van egy másik módszer is, amely waveletek segítségével számol H mutatót, de ez nem a wavelet transzformálton, hanem az ún. wavelet packet analysis (WPA) módszeren alapszik. Sokszor ezt úgy emlegetik, mint a H wavelet alapú becslése.

6. ARFIMA alapú becslés³³

ARFIMA modellt illesztve megkapjuk a d frakcionális késleltetés becsült nagyságát, és $H = d + 0,5$.

7. DFA (*detrended fluctuation analysis*)

A módszer bemutatását l. alább az MF-DFA módszer ismertetésénél.

A módszerek működését a frakcionális Wiener-folyamat esetén ellenőriztem, ezt az A. függelék tartalmazza. A bemutatott módszerek (az R/S módszer kivételével) alkalmasak integrált folyamatok vizsgálatára is.

Weron [2006] háromféle módszerrel (R/S, DFA és periodogram regresszió) kiszámítja a Nord Pool, az EEX és a Kaliforniai Áramtőzsde esetén a napi átlagos loghozam H mutatóját. Az értékek 0,5-nél kisebbek, tehát azt a következtetést vonja le, hogy a villamosenergia-ár átlaghoz visszahúzó folyamatot képez. A kapott H értékek nagyon szóródnak, a Nord Pool esetén például 0,20-tól 0,40-ig, az EEX esetén 0,04-től 0,30-ig. A kapott értékek tipikusak a szakirodalomban. A teljeség igénye nélkül néhány példa: Norouzzadeh és szerzőtársai [2007] 0,16-ot számolnak spanyol adatokon MF-DFA2 módszerrel³⁴; Erzgräber és szerzőtársai [2008] 0,23 és 0,36 közötti értékeket találtak a NordPool esetén; Weron és Przybyłowicz [2000] a Kaliforniai Áramtőzsdére 0,42-0,43 értéket, a Svéd Áramtőzsdére 0,44-0,53³⁵ értéket becsül. Közös az említett cikkekben, hogy a számítások bemeneti változója a loghozam időszora.

Haldrup és Nielsen [2006] azonban úgy érvel, hogy az ár időszora nem integrált folyamat, ezért nincs szükség a hozam kiszámítására. Közvetlenül az árakat SARFIMA modellel vizsgálva a frakcionális késleltetés d paraméterét (egy kivétellel) több piacon 0,41 és 0,52 körüli értékre becsülik, így a Hurst exponens értéke 0,5 felett található. Ez az antiperzisztenciával szemben éppen hogy a villamos energia árának perzisztens jellegét mutatja. Carnero, Koopman és Ooms [2003] periodikus regARFIMA modellt becsül a Nord Pool logárakra, ahol a periodikus jelleg abban mutatkozik meg, hogy a hét napjának megfelelően változnak a modell paraméterei, többek között a frakcionális késleltetés nagysága. Azt találták, hogy hétfőre és szombatra szignifikánsan 0 felett, de 0,5 alatt van a d értéke, szerdán pedig szignifikánsan negatív, míg a hét többi napján a becsült 95%-os

³³ L. pl. Haldrup és Nielsen [2006].

³⁴ A módszer leírását l. később.

³⁵ Bár a becsült érték nagyobb, mint 0,5, ennek ellenére ez az eredmény is az antiperzisztens jelenséget írja le. Kis részidőszakok esetén ugyanis az R/S várható értéke gaussi fehér zaj esetén 0,5-től eltér. A várható értékeket l. pl. Weron [2006]. Az adott példa esetén minden, a 0,58-as értéknél kisebb meredekség antiperzisztenciát jelent.

intervallum tartalmazza a 0 értéket is. Ezek szerint a H mutató hétfőre és szombatra nagyobb, míg szerdára kisebb mint 0,5. A többi napon elfogadható az a feltételezés, hogy 0,5 a H értéke.

Sapio [2004] spektrálanalízis segítségével a Nord Pool és a CalPX (Kaliforniai Áramtőzsde) esetén úgy találja, hogy a villamosenergia-ár hosszú távú memóriával rendelkezik, és ennek okát viselkedési modellel meg is adja. Mivel a tőzsdék egyenáras aukciókat használnak, ezért a piactisztító ár a marginális termelő által megadott ajánlattal lesz egyenlő. Az ár viselkedése tehát attól függ, hogyan áraznak azok a termelők, amelyek potenciálisan marginális termelők. Ha a múltbeli ajánlataik alapján áraznak hatványszerűen csökkenő (hiperbolikus) súllyal, akkor az áralakulás folyamata hosszú távú memóriával fog rendelkezni. A szerző véleménye szerint ez áll fenn a csúcsidőszakok esetén. A csúcsidőszakon kívül a cikk szerint az árazás úgy alakul, hogy az ajánlat a határköltséggel egyenlő, tehát konstans. Így csúcsidőszakon kívül az áralakulás rövid távú memóriával rendelkezik.

Serletis és Andreadis [2004] szintén az ár mint input változó Hurst mutatóját számítja ki R/S módszer segítségével az albertai villamosenergiatőzsde csúcsidőszaki árait vizsgálva. A szerzők azt kapják, hogy a H mutató 0,5 és 1 között található, tehát az ár perzisztens. Nagy részsorozathossz esetén azonban azt találják, hogy az R/S meredeksége a részidősor hosszának függvényében 1-et túllépi. Ők azt a következtetést vonják le, hogy az idősor másként viselkedik kis késleltetés és nagy késleltetés esetén (*multiscaling*). Én ezt a következtetést fenntartással fogadom. A Molnár és Dang [2000] szerzőpáros ugyanis megvizsgálta az R/S módszer érzékenységet arra, ha lineáris trend vagy eltolás (*level shift*) van az idősorban. Azt találták, hogy ha az idősorban eltolás található, azaz a várható érték egy korábbi konstans értékről egy másikra ugrik, akkor az R/S log-log ábrán ez úgy jelenik meg, hogy nagy részidősorhossz esetén a meredekség 1 lesz. Szerintük a Hurst exponens akkor úgy becsülhető, hogy kihagyjuk a görbe végén azt a szakaszt, ahol a meredekség már 1. Véleményem szerint előfordulhat, hogy Serletis és Andreadis [2004] olyan idősorral dolgozott, ahol ugrás következik be a várható értékben, és a *multiscaling* valójában nem áll fenn.

A hozamokra vonatkozó *multiscaling* jelenséget Simonsen [2003] fedezte fel a Nord Pool árakon. Simonsen szemlélteti, hogy log-log skálán más az AWC meredeksége rövidtávon, mint hosszútávon. Napon belül (a görbe elején) a meredekség 0,87, míg napnál hosszabb időtávon jelenik meg a már emlegetett 0,4 körüli érték. Napon belül tehát erősen

perzisztens a hozam idősora. Ha az AWC helyett az R/S-t vizsgálnánk, a cikk szerint nem lenne lehetséges a két rész ilyen szemléletes elkülönítése. Az R/S-nél ugyanis megintcsak látszik, hogy napon belül magas a H értéke, de a napon kívüli időtávra az R/S görbéje log-log skálán nem egyenes, hiszen az R/S módszer nem különíti el teljesen a rövid és hosszú táv hatását, ezért a hosszú távhoz tartozó értékeknél a rövid táv hatása is belekeveredik. Ez úgy jelenik meg, hogy az R/S görbe a napon kívüli részen nem egyenes. Periodogram regresszió módszerrel a *multiscaling* jelenség nem vehető észre.

Carnero, Koopman és Ooms [2003] mellett Erzgräber és szerzőtársai [2008] is foglalkoznak a H mutató idő szerinti felbontásával. Az utóbbi cikk a nap óráinak megfelelően 24 adatsorra bontja a teljes Nord Pool adatsort, és mindegyikre becsül egy H értéket a loghozam esetén különböző módszerekkel. Azt kapták, hogy nagyjából konstans a H értéke az óra függvényében, kivéve a reggel 9 és este 6 óras idősorokat, ahol a H értéke kisebb. A szerzők megvizsgálják a H időbeli alakulását is: ha időben csak az idősor egy-egy szeletét nézik, és folyamatosan arrébb tolják az ablakot, akkor a H értéke jelentős változékonyságot mutat.

Bassler, Gunaratne és McCauley [2005] levezeti, hogy az $\frac{1}{2}$ -nél nagyobb Hurst mutató nem feltétlenül jelenti azt, hogy magasabb késleltetésű korrelációk vannak jelen a folyamatban. Elő lehet állítani olyan Markov-folyamatot, ahol a H különbözik $\frac{1}{2}$ -től. Ez utóbbi azt jelentené, hogy van memóriája a folyamatnak, de ez ellentmond a folyamat Markov jellegének.

Szét kell tehát választanunk a H mutatón belül a korrelációkból eredő részt az egyéb hatásoktól. Ezt megtehetjük az ún. általánosított Hurst exponens fogalmának segítségével. Az **általánosított Hurst exponenst**, a $h(q)$ -t MF-DFA (multifractal DFA) módszerrel lehet kiszámolni. Ennek menete a következő³⁶:

1. Számítsuk ki a kumulált idősort, az ún. profilt.
2. Osszuk az idősort s hosszúságú részdősorokra.
3. Illesszünk (lineáris, kvadrátikus, stb) trendet³⁷ mindegyik részdősorra. Számítsuk ki az illesztés négyzetes hibáját, $F_{v,s}^2$ -et minden v részdősorra.
4. Átlagoljuk a négyzetes hibákat a részek között az alábbi képlet szerint, ahol v a részsorozatok számát jelöli:

³⁶ A módszert Kantelhardt és szerzőtársai [2002] alapján mutatom be.

³⁷ A trend fokszámának függvényében beszélünk MF-DFA1, MF-DFA2, stb. eljárásokról.

$$F_s = \left(\frac{1}{v} \sum_v (F_{v,s}^2)^{q/2} \right)^{1/q}, \text{ ha } q \neq 0$$

és

$$F_s = \exp \left(\frac{1}{v} \sum_v \ln(F_{v,s}^2) \right), \text{ ha } q = 0$$

5. Végezzük el a fenti számítást sok s esetén, és mivel

$$F_s \sim s^{h(q)}$$

ezért a sorozathosszt és az átlagos hibát log-log skálán ábrázolva a görbe meredeksége fogja adni az adott q értékhez tartozó $h(q)$ -t. Ezt tetszőleges q értékre elvégezve kapunk egy $h(q)$ görbét, és ezt nevezik általánosított Hurst exponensnek. A $h(2)$ érték stacionárius idősor esetén a Hurst mutatót adja vissza ($q = 2$ érték mellett elvégzett MF-DFA egybeesik a DFA-val³⁸). Az MF-DFA módszer előnye, hogy kevésbé érzékeny a folyamat nemstacionárius jellegére (Norouzzadeh és szerzőtársai [2007]). Az MF-DFA módszerrel ugyanis nemstacionárius folyamatokat is vizsgálhatunk. Ráadásul az algoritmus arra is választ ad, hogy stacionárius-e a folyamatunk. Ha $h(2) \geq 1$, akkor az idősor nem stacionárius. Elsőrendben integrált folyamat esetén például a Hurst exponens a következőképpen számítható ki: $H = h(2) - 1$ ³⁹.

A 4. lépésben leírt képletből látszik, hogy nagy q esetén a trendtől jobban eltérő értékek fogják dominálni az F statisztika értékét, kis q esetén a trendhez közeleiek. A nagy q értékek tehát a nagy változások perzisztenciáját, a kis q értékek a kis változások perzisztenciáját mérik. Ha a $h(q)$ függvény vízszintes, akkor a kis és nagy változások hasonlóan viselkednek, és az idősor monofraktál jellegű. Ha a $h(q)$ nem vízszintes, akkor multifraktál idősorról beszélhetünk.

A szakirodalom egységes abban a tekintetben, hogy a cikkek eredményei szerint a villamosenergia-ár multifraktál jellegű. Erzgräber és szerzőtársai [2008], illetve Norouzzadeh és szerzőtársai [2007] egyaránt azt az eredményt kapja, hogy a $h(q)$

³⁸ Kantelhardt és szerzőtársai [2002].

³⁹ Norouzzadeh és szerzőtársai [2007].

általánosított Hurst mutató nem konstans a q függvényében. Az előbbi cikk a Nord Pool, az utóbbi a spanyol áramtőzsde adataival dolgozott. Resta [2004] 6 különböző piacot vizsgál meg. A szerző szerint 2 esetben beszélhetünk multifraktalitásról, a többi esetben (köztük az EEX esetén is) monofraktál az idősor. Az itt említett cikkek mindegyike a logszázalékos árváltozást vizsgálja. Serletis és Andreadis [2004] (más módszerrel ugyan) az albertai villamosenergiatőzsde adatain azt kapják, hogy maga az ár monofraktál.

Kantelhardt és szerzőtársai [2002] a multifraktál jelleg két formáját különböztetik meg az idősorokban. Az első típusú multifraktalitás annak köszönhető, hogy az az eloszlásfüggvény, amely idősor elemeit generálja, vastag szélű. Levezetik, hogy egy olyan esetben, amikor a sűrűségfüggvény $\alpha + 1$ – es hatvánnyal esik, valamint a folyamat egyes elemei függetlenek, akkor az általánosított Hurst exponens a következő alakú:

$$h(q) \sim \begin{cases} 1/q & , q > \alpha \\ 1/\alpha & q \leq \alpha \end{cases}$$

A függvény tehát az α szintig konstans, utána pedig hatványszerűen esik.

A szerzők szerint a második típusú multifraktalitás a hosszabb késleltetésű autokorrelációk viselkedésének tudható be. Ez az a típus, amely ténylegesen szerepet játszik a hosszú távú függőség kialakításában, ezért a multifraktalitásnak ez a típusa érdekel minket. Az első típus csak látszólagos, hiszen a multifraktál jelleget nem a korrelációk, hanem az eloszlás alakja okozza. A szerzők bemutatnak egy módszert, amellyel szeparálni lehet a két hatást. A feladat egyszerűen az, hogy véletlenszerűen össze kell keverni az idősor elemeit, ez szétveri a korrelációkat. Ha így kiszámítjuk az általánosított H mutatót ($h_{\text{shuffled}}(q)$), és multifraktál jellegre utaló jeleket látunk, akkor ennek az oka az eloszlás alakja. Továbbmenve, a korrelációk hatása nem más, mint a $h(q) - h_{\text{shuffled}}(q)$. Ha a folyamatban a normális eloszlás lenne a véletlen hatások motorja, akkor a $h_{\text{shuffled}}(q)$ vízszintes lenne 0,5-ös érték mellett. Ezért kiszámítható a korrigált általánosított Hurst mutató, amely visszaépíti a $h(q)$ függvénybe az eloszlás hatását, csak az eredeti eloszlás helyett normális eloszlást feltételezve, így:

$$h_{\text{mod}}(q) = h(q) - h_{\text{shuffled}}(q) + 0,5$$

Ez már csak tisztán a korrelációk hatását fogja mutatni.

Norouzzadeh és szerzőtársai [2007] a már említett spanyol áramtőzsdei loghozamok $h(q)$ görbáját felbontja a leírt módon. A kevert idősor H mutatója 0,52, míg az eredetié 0,14. Ebből az látszik, hogy a hosszú távú memóriáért a korrelációk a felelősek. Emellett a szerzők azt a következtetést vonják le, hogy magas q esetén a multifraktalitásban erősebb a korrelációk hatása, míg alacsonyabb q esetén a jelenségben a vastag szélek dominálnak. Erzgräber és szerzőtársai [2008] szintén azt találták, hogy a kevert idősor általánosított Hurst exponense 0,5 körül van, tehát a multifraktalitás és a hosszú távú memória oka a korrelációk struktúrája.

Formális **multifraktalitási tesztet** ír le Jiang és Zhou [2007]. Kantelhardt és szerzőtársai [2002] leírják, hogy a skálázási kitevő (*scaling exponent*) kiszámítható az általánosított Hurst exponens segítségével:

$$\tau(q) = qh(q) - 1$$

Ebből az ún. Hölder exponens (*Hölder exponent*):

$$\alpha(q) = \tau'(q)$$

Jiang és Zhou [2007] úgy érvel, hogy ha a $h(q)$ vízszintes, akkor a $\tau(q)$ egyenes, az $\alpha(q)$ pedig konstans. A teszt azon alapszik, hogy ha az α -beli nem vízszintes jelleg megegyezik a kevert idősor α -jának a vízszintestől eltérő jellegétől, akkor a multifraktál jelleg oka az eloszlás vastag széle, nem pedig a korrelációk struktúrája. Az α nem egyenes jellegét az α terjedelmével méri:

$$\Delta\alpha = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$$

A teszt nullhipotézise és ellenhipotézise:

$$H_0 : \Delta\alpha \leq \Delta\alpha_{\text{shuffled}}$$

$$H_1 : \Delta\alpha > \Delta\alpha_{\text{shuffled}}$$

ahol $\Delta\alpha_{\text{shuffled}}$ a kevert idősor α -jának terjedelme. A nullhipotézis azt jelenti, hogy az α -beli változékonyság az eloszlásnak tulajdonítható, míg az ellenhipotézis esetén az α változékonysága nagyobb, mint amit az eloszlás széle indokol. Ezek alapján a teszt nullhipotézise a monofraktál, ellenhipotézise a multifraktál jelleg. A kevert idősor $\Delta\alpha_{\text{shuffled}}$ eloszlását szimulációval határozhatjuk meg, az elemeket újra és újra keverve, majd p -értéket számítunk: $1 - (\text{a } \Delta\alpha \text{ a } \Delta\alpha_{\text{shuffled}} \text{ eloszlásának hányadik kvantilise})$. Ha a p -érték 0,05 felett van, akkor a nullhipotézist nem tudjuk elutasítani, azaz a folyamat monofraktál. Ellenkező esetben a folyamat multifraktál.

Összefoglalva tehát azt mondhatjuk, hogy jelenleg van egy tisztázatlan ellentmondás a szakirodalomban arra vonatkozóan, hogy mennyi a H mutató értéke a villamosenergia-árak esetén, és teljesül-e valóban az átlaghoz való visszahúzás. Jelenleg azon indokok tűnnek hangosabbnak, amelyek szerint ez a jelenség fennáll. A saját eredmények bemutatásánál teszek egy kísérletet arra, hogy meggyőzzem az Olvasót ennek ellenkezőjéről. A szakirodalom azonban többé-kevésbé egységesnek tűnik a tekintetben, hogy a villamos energia ára multifraktál folyamatot követ, és ebben vegyesen játszik szerepet a korrelációk és a vastag szélek hatása.

3.2.7. Egységgyök

Eydeland és Wolyniec [2003] érveléséből az előző alfejezetben azt a következtetést vontuk le, hogy a villamosenergia-ár folyamat nem integrált, amit ők úgy fogalmaztak, hogy átlaghoz visszahúzó. Ha azonban eltávolítjuk a kiugró értékeket, akkor szóhasználatuk szerint az átlaghoz visszahúzó jelleg eltűnik, azaz valójában integrálttá válik a folyamat. Ennek oka, hogy a kiugró értékek rövid ideig tartanak, majd visszatér az ár az átlagos szintre.

Atkins és Chen [2002] az albertai tőzsde két kiragadott óráján végeznek Augmented Dickey-Fuller (ADF), valamint KPSS tesztet⁴⁰. Azt találják, hogy az ADF elutasítja az egységgyök létezését, míg a KPSS elutasítja az integráltság hiányának⁴¹ hipotézisét. Összességében azt találják, hogy az ár hosszú távú memóriájú folyamatot követ.

⁴⁰ Az egységgyök tesztekhez l. Darvas [2005].

⁴¹ Vegyük észre, hogy valójában a stacionaritást utasítják el ezzel a teszttel, nem pedig az integráltság hiányát.

A hagyományos egységgyök tesztek azonban Bosco, Parisio, Pelagatti és Baldi [2007] szerint nem alkalmazhatóak a villamosenergia-árak esetén. Ennek oka szerintük az, hogy ezek a módszerek nem veszik figyelembe az additív kiugró értékeket, az árat generáló folyamatban szereplő innovációk vastag szélét, a heteroszkedaszticitást és a szezonalitást. A szerzők véleménye az, hogy a villamos energia árának integrálnak kell lennie, legalábbis azonban az országokban, ahol a villamos energiát olaj vagy gáz segítségével állítják elő, és azok (integrált idősorral rendelkező) ára határozza meg a villamos energia árát.

Escribano, Peña és Villaplana [2002] is azt hangsúlyozza, hogy a Dickey-Fuller teszt homoszkedasztikus és ugrások nélküli adatsoron működik jól, melyek közül a villamos energia áralakulása egyik feltételt sem teljesíti. A számítások során öt piacot vizsgálnak. Eredményeik szerint a hagyományos ADF teszt minden piacon elutasítja az egységgyököt. A szerzők a hagyományos Dickey-Fuller teszt mellett olyan egységgyökteszteket végeznek, amelyek figyelembe veszik 1. a GARCH hatást, 2. a kiugró értékeket és 3. GARCH hatást kiugró értékek mellett. Az első esetben szintén minden piacon elutasítják az egységgyök nullhipotézisét. A második esetben egy outlier szűrési eljárás után végeznek ADF tesztet, és szintén mindenhol elutasítják az egységgyököt. A két előző eset módszereinek kombinálásával a GARCH hatás és kiugró értékek jelenléte melletti tesztelés során is azt kapják, hogy az ár folyamata egyik piacon sem tartalmaz egységgyököt, bár nagyon közel van az egységgyökhöz.

Bosco és szerzőtársai [2007] olyan robusztus egységgyök-tesztelési és stacionaritási eljárást használnak, amely nem érzékeny a kiugró értékekre. Azt az eredményt kapták hat piacot vizsgálva, hogy az árak szignifikánsan nem stacionáriusak. Az egységgyökteszt nullhipotézisét (az egységgyök létezését) nem tudták elvetni, tehát szerintük egységgyököt tartalmaz az áralakulás folyamata. Megemlítendő azonban, hogy a szerzők nem az eredeti adatsorral dolgoztak, hanem a heti medián árakkal.

Látható tehát, hogy nincs egyetértés az irodalomban az egységgyök létezését illetően. Az utóbb hivatkozott két cikk közül nem tudom nyugodt szívvel kiválasztani a „meggyőzőbbet”. Mindkét esetben nem az eredeti adatsorral, hanem annak transzformáltjával dolgoztak a szerzők, kiszűrték a heteroszkedaszticitást és kiugró értékek hatását, mégis ellenkező eredményre jutottak. Bár a dolgozatban lesz olyan állításom, ami az egységgyök (nem)létezéséhez kapcsolódik, az teljesen más módszereken alapszik. A formális teszteléssel kapcsolatban nem szeretnék állást foglalni.

A következő alfejezetben a villamosenergia-árak leírására szolgáló modelleket mutatom be. A modellek célja, hogy az imént bemutatott jelenségeket visszaadja, és segítségével például előrejelzést készíthessünk a villamos energia jövőbeli árára.

3.3. Modellezési lehetőségek

Ebben az alfejezetben a villamosenergia-ár modellezési kérdéseivel foglalkozom. Először is azt tárgyalom, hogy pontosan mely változót (az árat vagy annak valamilyen transzformáltját) használják a modellezés során. Ezután bemutatom azokat az eloszlásokat, amelyek a villamosenergia-ár leírása során megjelennek a szakirodalomban. Végül az ár előrejelzésére használt modellekről, illetve a modellezés előtt elvégzett előszűrésekről írok.

3.3.1. A modellezendő változó

Serati, Manera és Plotegher [2008] áttekintést ad néhány, a spot villamosenergia-ár leírására felépített modellről. Az általuk idézett cikkek közül négy modell az árat, hat az ár logaritmusát, kettő az ár növekményeit, egy pedig a loghozamot tekintette modellezendő változónak. Ez jól példázza, mennyire változatos képet mutatnak a villamosenergiaár-modellek a szakirodalomban.

Gyakran a log ár kerül a modellezés középpontjába. Ennek egyik oka valószínűleg az, hogy az ármodellek (bemutatásukat l. a 3.3.4. szakaszban) közül több a pénzügyi piacok területéről került a villamosenergia-piacokra. A pénzügyi piacokon a log ár használata megjelenik például a részvényármodellekben (pl. Black-Scholes modell, l. Száz [2003]), amelyekben az ár lognormális eloszlású, és így a log ár normális eloszlású. A másik ok, hogy maguk a modellezők is megszokták, hogy a log ár viselkedésének vizsgálatában gondolkodzanak.

Weron [2008a] szerint csak egy közhiedelem, hogy a log árakat célszerű felhasználni a villamosenergiaár-modellezés során. Ő azzal érvel, hogy a log ár modellezése során gyakran akkor is kiugró értéknek adódik egy árváltozás, ha maga az eredeti ár kicsi és az árváltozás nem túl nagy. A logaritmus függvény alakja miatt az árváltozást ebben az esetben akár nagyobbnak is láthatjuk, mint amikor az ár nagy és az árváltozás nagyobb, mint az előző esetben. Az általa használt Markov rezsinváltó modell⁴² ezért sokszor tévesen azonosítja az ártüskéket. Ha azonban magát az árat és annak változását nézzük, az említett hibát kiküszöböljük, és a Markov rezsinváltó modell is jól működik az empirikus adatokon.

⁴² Ennek bemutatását l. 3.3.4.2. pontban.

3.3.2. Eloszlás

A stilizált tényekről szóló 3.2. alfejezetben láttuk, hogy a villamosenergia-hozamok és -árak a normális eloszlásnál vastagabb szélűek, ezért ennek megfelelően vastagabb szélű eloszlással kell őket leírni. Weron [2006] három eloszlástípust emel ki: az α -stabil (Lévy-stabil, Lévy) eloszlást, a hiperbolikus eloszlást és a NIG (*normal inverse Gaussian*) eloszlást. A következőkben ezeket tekintem át Weron [2006] alapján.

Az α -stabil eloszlás onnan kapta a nevét, hogy zárt az összeadásra és a konstanssal való szorzásra (Bouchaud és Potters [2003]). Az eloszlást az általánosított központi határeloszlás tétel emeli ki a többi eloszlás sorából, amely kimondja, hogy független és azonos eloszlású valószínűségi változók centrált és normált összegének nemdegenerált határeloszlása kizárólag Lévy eloszlás lehet. Az eloszlás sűrűség- illetve eloszlásfüggvényét nem minden esetben lehet zárt alakban felírni, ezért a felírást az eloszlás karakterisztikus függvénye (a sűrűségfüggvény Fourier-transzformáltja) formájában szokták megadni:

$$\ln \varphi(z) = \begin{cases} i\mu z - \sigma^\alpha |z|^\alpha \left(1 - i\beta \frac{z}{|z|} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \right) & \alpha \neq 1 \\ i\mu z - \sigma^\alpha |z|^\alpha \left(1 + i\beta \frac{z}{|z|} \frac{2}{\pi} |z| \right) & \alpha = 1 \end{cases}$$

Látható, hogy az eloszlásnak 4 paramétere van: az $0 < \alpha \leq 2$ karakterisztikus paraméter, amely az eloszlás alakját határozza meg; a μ lokációs paraméter, amely az eloszlás helyzetét befolyásolja; a σ skálaparaméter, amely az eloszlás szóródásáért felelős; végezetül a $-1 \leq \beta \leq 1$ aszimmetriát leíró paraméter. A Lévy-eloszlás tulajdonképpen egy eloszláscsaládot takar. Az $\alpha = 2$ és $\beta = 0$ esetben például a normális eloszlást kapjuk vissza. Az eloszlás az $\alpha = 2$ esetet kivéve hatványszerűen esik a széleken, α hatványkivevővel. $\alpha < 2$ esetben az eloszlás varianciája, $\alpha \leq 1$ esetben az eloszlás várható értéke is végtelen.

A hiperbolikus és a NIG eloszlás sűrűségfüggvénye az alábbi alakú:

$$f_H(x) = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\alpha\delta} \frac{1}{K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} e^{-\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2} + \beta(x-\mu)}$$

$$f_{NIG}(x) = \frac{\alpha\delta}{\pi} e^{\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(x-\mu)} \frac{K_1(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2})}{\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}}$$

Mindkét eloszlás négyparaméteres. A $\delta > 0$ a skálaparaméter, a μ az eloszlás helyzetét befolyásoló paraméter, az α az eloszlás lecsengéséért felelős, $0 \leq |\beta| < \alpha$ pedig az aszimmetriát leíró paraméter. A K_1 az ún. MacDonald függvény. A hiperbolikus eloszlás képe logaritmikus skálán egy hiperbola (Weron [2008a]), innen kapta az elnevezését is. A NIG eloszlás lassabban esik a széleken, mint a normális eloszlás, de az α -stabil eloszlásnál gyorsabban („*semi-heavy*”).

Weron [2006] a (mozgóátlagolással) szezonálisan szűrt EEX napi árak esetén vizsgálja meg ezeknek az eloszlásoknak az illeszkedését. Mind az árkülönbség, mind a loghozam esetén megvizsgálja az illeszkedés jóságát (pl. az 4.3. alfejezetben említésre kerülő Kolmogorov-Smirnov statisztikával). Mind az árkülönbség, mind a loghozam esetén az α -stabil eloszlás mutatja a legjobb illeszkedést. A NIG eloszlás az α -stabil eloszlást megközelítő illeszkedést mutat, míg a normális és a hiperbolikus eloszlás alulbecsli az eloszlás szélét.

Weron [2006] számos más hasonló cikket idéz, amelyek lényegében ugyanerre a következtetésre jutnak.

3.3.3. Előszűrés

A később bemutatásra kerülő villamosenergia-modellek különböző feltevésekkel dolgoznak. Ahhoz, hogy az idősorunk a modellek feltételeit teljesítse, az adatok előfeldolgozására, előszűrésre van szükség. A következőkben a kiugró értékek, a szezonális és a hosszú távú memória előszűrési lehetőségeit mutatom be.

3.3.3.1. Az ártüskék eltávolítása az adatsorból

Az ártüskék jelenléte a villamosenergiaár-idősorban szembeűnő. A kiugró értékeket vagy beleillesztjük a modellünkbe (l. a később bemutatásra kerülő ugrásos, rezsinváltó, stb. modelleket), vagy szűréssel eltávolítjuk azokat az idősorból.

Weron [2006] vizsgálatai szerint a kiugró értékek előzetes szűrése nem szükséges. ARX modellben a Kaliforniai Áramtőzsde adatait vizsgálja háromféle szűrési eljárással. Az azonos nap (*similar day*) módszer az előző és a következő hét azonos órájának átlagával helyettesíti az adott küszöböt átlépő árat. A küszöb (*limit*) módszer a küszöbvel helyettesíti a küszöböt átlépő árat. A csillapító (*damped*) módszer esetén a T küszöb feletti P értékeket $T + T \log_{10}(P/T)$ értékre írja át. Kiugró értéknek azt tekintették, amikor az ár az átlagnál legalább három szórással magasabb. Az empirikus vizsgálatok azt mutatják, hogy a kiugró adatok előzetes kiszűrése csak a nyugodt periódusok esetén ad jobb eredményt ahhoz képest, mintha nem szűrnénk az adatokat. A volatilitás növekedésekor a kiugró értékek eltávolítása vagy módosítása nem optimális.

A fenti három módszer mellett érdemes megemlíteni Geman és Roncoroni [2006] módszerét, akik a modellezés során paraméterként kezelték a kiugró érték határát: ha az árváltozás átlép egy adott küszöböt, akkor kiugró árnak tekintik. A modellezést több küszöbvel is elvégzik, és a legjobb illeszkedést adó modell fogja megadni az optimális küszöböt.

További lehetséges módszer a kiugró árak szűrésére a waveletek alkalmazása (Stevenson [2001]). A szerző egy robusztus („*fast and robust smoother-cleaner wavelet transform*”) eljárást használ a wavelet együtthatók becslésére, amely kevésbé érzékeny a kiugró értékekre. Ezután a kis együtthatóval rendelkező waveleteket kiveszi a közelítésből (*wavelet shrinkage*), és így határozza meg a szűrt idősort.

3.3.3.2. Szezonális-szűrés

A szezonális esetben szintén dönthetünk, hogy a modell keretén belül (l. SARIMA) kezeljük a szezonális kérdését, vagy a modellezés előtt eltávolítjuk szűréssel.

A szezonális szűrés gyakran használt módszereit Weron [2006] mutatja be:

1. differenciálás

Az alapötlet, hogy napi adatokból eltávolítható a heti szezonális, ha képezzük a hetes késleltetésű értékkel vett különbség idősorát ($x_t - x_{t-7}$). Hátránya, hogy nem létező

függőségi struktúrát visz az adatsorba. Ha óránkénti adatokat szeretnénk szűrni, akkor a képlet némileg bonyolultabb, mert akkor 7-es és 24-es periodicitást is kell egyszerre szűrni.

2. medián vagy átlagos hét

Az idősor szezonális részét úgy képezzük, hogy megkeressük az átlagos hetet úgy, hogy a hét adott napjának vagy órájának megfelelően átlagot vagy mediánt számolunk. A szűrés során az értékből kivonjuk a szezonális kapott értékét. A módszer hátránya szerintem, hogy a szűrés során a szűrt árak sokszor negatív értéket kapunk, amely nehezen kezelhető a későbbi modellezés során. Természetesen a szűrt árak eltolhatók a pozitív tartományba, de a későbbiekben látni fogjuk, hogy a medián vagy átlagos hét módszernek további hátrányai vannak.

3. mozgóátlagolás

Mozgóátlagolással először kiszámítjuk a trendet az idősorban (a mozgóátlagolás hossza az adatsor típusától és a kiszűni kívánt szezonalitástól függően 7, 24, illetve 168). A szezonális komponens ezután a trendtől vett átlagos eltérések értékeként adódik (centrálva úgy, hogy a szezonális komponensek összege 0 legyen).

4. az éves szezonális kiszűrése trigonometriai függvényekkel

A módszer 1/1 év (1/365 nap, 1/8760 óra) frekvenciájú sinus függvény illesztésén alapszik.

5. spektrálfelbontás

Az adatsor Fourier-transzformáltjából eltávolítjuk a magas frekvenciájú komponenseket (*lowpass filtering*), így megkaphatjuk a szezonális komponenst.

6. gördülő volatilitásos technika

Az éves szezonális kiszűrését megcélzó módszer, amely a gördülő volatilitással (annak évek között kiátlagolt értékével) normálja az adatokat.

7. wavelet felbontás

Wavelet analízis segítségével egy adatsort (jelet) két részre bonthatunk (lowpass szűrés segítségével): trendre (S_1) és zajra (D_1). A trend ezután tovább bontható trendre (S_2) és zajra (D_2). Az adatsorunk (f) felépítése n lépés után:

$$f = S_n + D_n + D_{n-1} + \dots + D_1$$

Az n nagyságának függvényében kapunk részletesebb trendvonalat vagy a trend durva ábrázolását. Az S_n az adatsor trendjének és szezonálisának becslését adja.

Az említett módszerek közösek abban a tekintetben, hogy az áramár-idősorot úgy tekintik mint egy előrejelezhető periodikus komponens és egy sztochasztikus rész összege (l. Weron [2008a]). A saját eredmények tárgyalása során bemutatom, hogy ez nem szerencsés, hiszen ez a módszer azt feltételezi, hogy a szezonális csak a várható értékek szezonális különbözőségéből adódik. Látni fogjuk, hogy a valóságban ez nem áll fenn: az eloszlások nemcsak a várható értékükben különböznek, ezért a fenti módszerek nem megfelelően szűrik ki a szezonalitást a villamosenergia-ár idősorából.

3.3.3.3. Az ártüskék és a szezonális szűrésének összefüggése

Trück, Weron és Wolff [2007] a kiugró értékek és a szezonális szűrésnek kölcsönhatásaira hívja fel a figyelmet. Ha az adatsorban kiugró érték van, akkor az befolyásolja a szezonális szűrés számításait. Ha szezonális van, akkor nem egyértelmű, mit tekintünk kiugró értéknek, hiszen vannak órák magasabb árakkal, amiket így hajlamosabbak vagyunk outliernek tekinteni. A szezonális szűrés előtt ki kell szűrni a kiugró értékeket, és fordítva: a kiugró értékek szűrése előtt ki kell szűrni a szezonalitást. A szerzők ennek a problémának a megoldásához azt javasolják, hogy iteratív technikákat alkalmazzunk: először távolítsuk el a szezonalitást, majd szűrjük ki a kiugró értékeket, végül szűrjünk ismételtén szezonalitást.

A saját eredményekről szóló részben bemutatásra kerülő modellem kikerüli a problémát: olyan szűrési eljárást dolgoztam ki, amely egyszerre (párhuzamosan) szűri ki az ártüskéket és a szezonalitást.

3.3.3.4. A frakcionális késleltetés kiszűrése ARFIMA modellek esetén

Mint már felvetettem (és később igazolom), a villamosenergia-ár hosszú távú memóriával rendelkezik. Ha ARMA alapú modellel szeretnénk a villamos energia árát modellezni, akkor ez pl. ARFIMA (FARIMA) modellel lehetséges. Az ARFIMA(p,d,q) modell felírása az alábbi (l. pl. Soofi és Payesteh [2002]):

$$\phi(L)\nabla^d y_t = \theta(L)$$

ahol ϕ és θ rendre p és q fokszámú polinom az egységkörön kívüli gyökökkel, ε_t független és azonos eloszlású, nulla várható értékű valószínűségi változó, és ∇^d a d frakcionális

differentiáló operátor. Az L a késleltetési operátort jelöli. Ha $-0,5 < d < 0,5$, akkor az ARFIMA modell stacionárius és invertálható (l. pl. Leite és szerzőtársai [2007]). Ha $0 < d < 0,5$, akkor a folyamat hosszú távú memóriával rendelkezik (l. pl. Soofi és Payesteh [2002]).

Illeszthetjük közvetlenül az ARFIMA modellt az adatainkra, de a d ismeretében⁴³ a frakcionális késleltetés kifejtésével és az adatok transzformálásával ARMA modellt illeszthetünk, ami lényegesen egyszerűbb és a statisztikai programcsomagok számára ismertebb feladat. Ha tehát

$$x_t = \nabla^d y_t$$

akkor

$$\phi(L)x_t = \theta(L)$$

ami a fenti feltételek esetén egy stacionárius ARMA modell felírása. A frakcionális késleltetés a következő transzformációval lehetséges (l. pl. Soofi és Payesteh [2002]):

$$\nabla^d = (1-L)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-d)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-d)} L^k$$

ahol $\Gamma()$ a gamma függvényt jelöli. Ez a kifejezés megadja az y_t késleltetettjeinek együtthatóit a transzformáció során. Így kiszűrhető a frakcionális késleltetés az idősorból⁴⁴.

3.3.4. Modellek

Ebben a szakaszban a villamosenergia-ár előrejelzésének céljából felépített modelleket mutatom be. Az ismertetés csak áttekintő jellegű, hiszen az ár előrejelzésének irodalma rendkívül széles, modellek teljes körű bemutatása meghaladja a dolgozat kereteit.

⁴³ Emlékezzünk rá, hogy a Hurst együttható ismeretében a d frakcionális késleltetés is ismert: $d = H - 0,5$.

⁴⁴ A valóságban természetesen nem vesszük figyelembe az idősor végtelen régi késleltetettjét, ahogy azt a képlet sugallja. A gyakorlatban elég, ha „megfelelően sok” késleltetéssel dolgozunk (ahol például a késleltetés együtthatója elég kicsi), vagy a rendelkezésünkre álló idősor elejéig végezzük el a késleltetést.

Úgy gondolom, hogy az előrejelző modellek strukturálása hozzátartozik a dolgozat témájához, de a hangsúlyt azoknak a modelleknek az ismertetésére helyezem, amelyek kulcsfontosságúak a saját eredmények tekintetében (például az idősormodellek és az ártüskét előrejelző modellek). A többi, a mondanivalóm szempontjából kevésbé releváns esetben olyan irodalmat ajánlok az Olvasónak, amelyből bővebb információkat szerezhet az adott témakörben.

3.3.4.1. Modelltypusok

Weron [2006] az alábbi hat csoportba sorolja a villamosenergia-ár modelleket:

1. Költség alapú modellek

A termelési egységek működésének leírásával meghatározzák, hogyan lehet az adott nagyságú keresletet kielégíteni minimális költség mellett. Hátrányuk: nem veszik figyelembe az ajánlattétel során a stratégiai döntéseket, illetve a piaci erőfölényt. A költség alapú modellek részletesebb bemutatásához l. Eydeland és Wolyniec [2003], 252-253. oldal.

2. Játékelméleti (egyensúlyi) modellek

A költség alapú modelleket kiegészítik az ajánlattétel során fellépő stratégiai megfontolások figyelembe vételével. Hátrányuk: lassúak, nem jelezhető előre közvetlenül az ár, sok feltétellel dolgoznak a piaci szereplőket és stratégiájukat illetően. Bompard és szerzőtársai [2008] például egy középtávon működőképes, valós adatokkal dolgozó játékelméleti modellt ad az olasz villamosenergia-piacra, illetve -árra.

3. Fundamentális (strukturális) modellek

Az árak meghatározó faktorok (pl. időjárás) modellezése, valamint az ár és a faktor összefüggéseinek leírása. Hátrány: erőmű-specifikus adatok szükségessége, a faktorokat leíró modelleket ismerni kell. A gyakorlatban használt fundamentális alapú modell például az EPIS által Észak-Amerikára kifejlesztett AURORA modell (Barney [2002]).

4. Sztochasztikus (redukált, kvantitatív, ökonometriai) modellek

Ebben az esetben feltételezzük, hogy az ár egy adott formájú sztochasztikus modell szerint viselkedik, és kalibrációval meghatározzuk a sztochasztikus modell paramétereit. Hátrány: meg kell találni a megfelelő sztochasztikus modellt.

5. Statisztikai modellek

Gyakran technikai elemzésnek is tekintik, hiszen ezek a modellek az árak múltbeli viselkedése alapján építenek fel ökonometriai-statisztikai idősormodellt. Hátrány: nem veszik figyelembe az elérhető fundamentális információkat.

6. Mesterséges intelligencia alapú modellek

Mesterséges intelligencia alapú módszerek (pl. neurális hálók, support vector machines) alkalmazása az ár leírására. Hátrányuk általában: fekete doboz jellegű. A support vector machines (SVM) módszer alkalmazására a villamosenergia-árak esetén példa Sun és Zhang [2008], míg neurális hálós modellt láthatunk Mandal és szerzőtársai [2005] cikkében.

A modellek gyakran nem tisztán a leírt modellfajták egyikeként jelennek meg, hanem előfordulnak hibrid modellek is, például a statisztikai modellekben megjelenhetnek fundamentális faktorok magyarázó változóként. Másik példa hibrid modellre az Eydeland és Wolyniec [2003] könyvében leírt modell, amelyet a szerzők „fundamentális hibrid modellnek” neveztek el. A modelljük 6 blokkból áll. A termelési költségeket (1.) és a leállásokat leíró (2.) blokkok alapján meghatározzák a kínálati leképezést (3.), míg a hőmérsékletet modellező (4.) blokk alapján a keresletet (5.); a kereslet és kínálat összefüggése pedig megadja az árat (6.). A szerzők úgy találták, hogy a modell jól leírja a piac stilizált tényeit (pl. kiugró értékek, átlaghoz visszatérés, vastag szélek, szezonális, volatilitás-tömörülés). A vastag szélek megjelenését azzal indokolták a modellben (bár formális levezetést nem adtak), hogy az ár a keresett mennyiség növekvő és meredek függvénye (a kínálati görbén), és mivel a keresletet a normálishoz közeli eloszlású időjárás határozza meg, ez visszaadja a vastag széleket.

Mivel a dolgozatban a villamosenergia-ár statisztikai kérdéseivel foglalkozom, a bemutatott modellek közül a redukált és a statisztikai (idősoros) modellek kapcsolódnak a saját eredményekhez. A következőkben ezekről a modellcsaládokról lesz szó.

3.3.4.2. Redukált modellek

Eydeland és Wolyniec [2003] (4. fejezet) és Weron [2006] (4.4. alfejezet) részletesen foglalkozik a redukált modellek bemutatásával és értékelésével. Az általuk említett redukált modellek az alábbiak:

- Geometriai Brown-mozgás (GBM);
- GBM átlaghoz visszahúzással;

- Sztochasztikus volatilitásos modellek:

- „Constant Elasticity of Volatility” (CEV) modell;

A volatilitás a folyamat értékének függvénye.

- Lokális volatilitásos modellek;

A volatilitás felület a folyamat értékének és az időnek a függvénye.

- Hull-White modell;

A folyamat volatilitása is GBM-et követ, a két folyamatot meghajtó Wiener-folyamatok korrelálatlanok.

- Heston modell;

A folyamat volatilitásának négyzete átlaghoz visszahúzó folyamatot követ a volatilitással arányos sztochasztikus taggal, a két folyamatot meghajtó Wiener-folyamatok korrelációja rögzített.

- Ugrásos folyamatok;

A sztochasztikus folyamat növekményét leíró sztochasztikus differenciálegyenletben megjelenik egy ugró (pl. Poisson) folyamat növekménye is.

- Markov rezsimmváltó modellek.

A folyamat n db állapotban lehet. A különböző állapotok között a folyamat rögzített átmenetmátrixszal ugrál, az egyes állapotokban a folyamat értéke más paraméterű vagy más típusú folyamatot követhet.

Az említett modellek különböző kombinációi is előfordulhatnak (pl. ugrásos modell sztochasztikus volatilitással vagy átlaghoz visszahúzó ugrásos modell).

A különböző modellek között annak függvényében választunk, mennyire tudják visszaadni a korábban ismerttetett stilizált tényeket. A dolgozat szempontjából a kiugró értékek leírására felírt modellek, azaz az ugrásos folyamatok és a rezsimmváltó modellek érdekesek.

Mindkét idézett könyv egyetért abban, hogy az ugrásos folyamatok esetén be kell építeni az átlaghoz visszahúzást, hogy a folyamat visszatérjen a normális szintre. Az empirikus vizsgálatok azonban azt találták (l. az idézett két könyvet), hogy nagyon erős visszahúzást kell beépíteni a modellbe, hogy az megfelelően leírja a nagy sokkok utáni csökkenést, ilyenkor azonban a modell az átlagos szintű árak viselkedésére nem illeszkedik megfelelően. Számos megoldást kidolgoztak a probléma kezelésére (pl. pozitív ugrást negatív ugrás követ – l. Weron, Simonsen és Wilman [2004], illetve az empirikus alkalmazáshoz Weron, Bierbrauer, Trück [2004]; vagy az átlagtól való távolságtól függ a

visszahúzási ráta – Borovkova és Permana [2006]). Huisman és Mahieu [2001] hibásnak tartja az ugrás és az átlaghoz visszahúzás együttes szerepeltetését a villamosenergiaár-modellekben, és alternatívaként egy rezsimváltó modellt ajánl, amely a normál árak, az ugrások és a normális árszintre való visszatérés leírását szolgálja („*regime jump model*”). Geman és Roncoroni [2006] szerint ezeknek a modelleknek a hátránya, hogy nem engednek meg két egymás utáni ugrást, illetve ezek a modellek nem adnak Markov folyamatot. Az ő modelljükben úgy próbálják megőrizni a Markov jelleget, hogy az ugrás előjelét az ár nagyságától teszik függővé. Ha a (log) ár egy adott küszöb alatt van, akkor az ugrás felfelé, míg az adott küszöb felett lefelé történik („*signed jump model*”). A szerzők szerint ez visszaadja az árak idősorának mind az idősoros, mind a keresztmetszeti (pl. momentumok) tulajdonságait.

A sztenderd ugrásos modellben az ugrások intenzitása rögzített. Ez nem felel meg a stilizált tényeknek, hiszen a kiugró árak magasabbak az egyébként magasabb árú időszakokban. Eydeland és Geman [1999] ezt úgy oldotta meg, hogy az intenzitást az ár nagyságától tette függővé. Weron [2008b] nem homogén Poisson folyamatot javasol a probléma megoldására, ahol az ugrás intenzitása az idő determinisztikus függvénye. Geman és Roncoroni [2006] arra a következtetésre jut empirikus adatok alapján, hogy a sztochasztikus intenzitás beépítése nem javít a „signed jump” modellen. A nem homogén Poisson folyamatok hátránya (l. Weron [2008b]), hogy a kiugró árak ritkák, így nehéz illeszteni a modellt.

Az említett ugrásos modellek empirikus összehasonlítását az EEX esetén l. Seifert [2007].

Mint láttuk, a rezsimváltó modellek az ugrásos modellek alternatíváját képezik a kiugró árak modellezése tekintetében. Weron [2006] Nord Pool adatokon azt találja, hogy az ár logaritmus esetén a rezsimváltó modellek nem teljesítenek jobban, mint az ugrásos modellek. Későbbi cikkében (Weron [2008a]) azonban azt az eredményt mutatja be, hogy az árak (és nem a log árak) esetén a kiugró árakat jellemző rezsimben Pareto eloszlású valószínűségi változóval meghajtott rezsimváltó modell jól működik az empirikus adatokon.

De Jong [2006] több tőzsde adataival összehasonlítja több említett rezsimváltó és ugrásos modellt az illeszkedés tekintetében (a vizsgált modellek pl.: átlaghoz visszahúzó, ugrásos, Huisman-Mahieu, Geman-Roncoroni). Az elemzése alapján egy kétállapotú rezsimváltó modell és egy szintén két, de egymástól független árdinamikájú rezsimváltó

modell bizonyult a legjobbnak. Ezekben a modellekben a normál árszintű rezsimben átlaghoz visszahúzás található.

Sanctis és Mari [2007] egy kétrezsimes modellt épít, amely tartalmaz egy átlaghoz visszahúzó modellt az átlagos árszintek leírására, illetve egy másik rezsimet, amelyhez egy, a neurobiológiában használt modellt („*excitable dynamics*”) tartalmaz. A cikk bemutatja, hogy a kétrezsimes, valamint az (átlaghoz visszatérést leíró harmadik rezsimmel kiegészített) háromrezsimes modell a log árak megfigyelt statisztikai tulajdonságait reprodukálni tudja, de empirikus becsléseket nem mutatnak be.

Az ismertetett redukált modellekből látható, hogy a szakirodalomban a kiugró értékeket vagy sajátos viselkedésű különálló rezsimnek vagy egy ugrásnak (amely utána gyorsan visszatér) tekintik.

3.3.4.3. Idősormodellek

A villamosenergia-ár modellezése során leggyakrabban megjelenő modellek az alábbiak (l. Weron [2006]):

- ARMA alapú modellek:

- ARMA, ARIMA;
- ARFIMA(p,d,q);

Ebben az esetben a modellezett idősor d integráltsági fokáról azt feltételezzük, hogy törtszám is lehet, ezért az idősort frakcionálisan differenciálva kapunk ARMA(p,q) reprezentációt (l. 3.3.3.4. pontot).

- SARIMA (szezonális ARIMA);
- PAR (Periodic Autoregression) modellek;

Az autoregresszív együtthatók függenek pl. attól, hogy a hét mely órájában vagyunk. Példa ilyen modellre Varga [2005].

- TAR (*Threshold Autoregressive*) modellek:

Más dinamikát feltételeznek egy adott küszöb alatt és felett.

- GARCH modellek;

Használatukat a volatilitás tömörülése indokolja.

- Markov rezsimváltó modellek:

A redukált modellek esetén említett rezsimváltó modelltől annyiban különbözik, hogy az egyes rezsimeteket leíró modellek itt idősoros modellek.

Természetesen ezek a modellek is megjelenhetnek vegyesen, pl. AR-GARCH modell, l. Ujfalusi [2008]. Példákat ad a különböző modellekre Weron [2006].

A modellekben gyakran megjelennek exogén változók is a villamosenergia-ár késleltetettjein kívül. Az exogén faktorok köre jellemzően az alábbi (Weron [2006]):

- a kereskedett mennyiség (kereslet);
- a szezonalitást leíró változók (óra, nap);
- időjárás;
- a villamosenergia-termelés inputjainak árai (pl. gázár);
- rendelkezésre álló kapacitások.

Az említett modellek előrejelző képességének értékelésére széles körűen használt mérőszám a MAPE (*mean absolute percentage error*), amely a következőképpen számítható ki (l. Weron [2006]):

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|P_i - \hat{P}_i|}{P_i}$$

ahol a P_i a tényleges árat, míg annak kalapos verziója az előrejelzett árat jelenti minden i periódus esetén.

A modellek csoportosítása után néhány cikket és modellt tekintek át, amelyek tárgyalása fontos a disszertáció szempontjából.

Weron és Misiorek [2005] ARMA és ARIMA modelleket hasonlít össze a Kaliforniai Áramtőzsde adatain. Úgy találják, hogy az AR modell jobban teljesít az ARIMA modellnél. Eredményeik szerint a nap 24 óráját külön modellezve (ARMA folyamattal) jobb modellt lehet kapni, mintha egybevennénk a teljes idősort.

Több cikk (pl. Haldrup és Nielsen [2006], Carnero et al. [2003]) azt találja, hogy a Nord Pool esetén a frakcionális modell jól illeszkedik. Weron [2006] ezt azzal magyarázza, hogy a Nord Pool kínálatának jelentős része származik vízenergiából, amely esetén a vízhozamról ismert, hogy hosszú távú memóriája van.

Weron és Misiorek [2006] szerint a TAR modell jól illeszkedik az adatokra a „sima” AR modellhez képest, de az előrejelző képessége rosszabb.

Misiorek, Trück, Weron [2006] a Kaliforniai Áramtőzsde adatain azt az eredményt kapja, hogy a Markov rezsinváltó modellek a nyugodt időszakok esetén rosszul jeleznek

előre, míg a sok kiugró értéket tartalmazó időszakban jól működnek. Összességében úgy ítélik meg, hogy az ARMA és TAR modellek jobban teljesítenek az előrejelzés során.

Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy az említett modellek közül a TAR és a Markov rezsimműködő modell képes a kiugró értékek közvetlen visszaadására, de az empirikus vizsgálatok azt mutatják, hogy az előrejelző képességük nem múlja felül a sztenderd ARMA modelleket. Az ARMA modellek előrejelző képességén úgy javíthatunk, ha felbontjuk az adatsort a nap 24 órájának megfelelően.

3.3.4.4. Ártüske-előrejelzés

A fenti modellek ismertetéséből úgy tűnik, hogy a kiugró értékeket nem sikerül tökéletesen beilleszteni egy, az árak általános viselkedését leíró modellbe. Sem az ugrásos, sem a rezsimműködő, sem a TAR modellek nem bizonyultak univerzális válasznak arra a kérdésre, hogyan mozognak az árak és ezen belül a kiugróan magas árak. A szakirodalom megpróbálkozott tehát külön a kiugró árak modellezésével.

Zhao, Dong, Li és Wong [2007] leírja, hogy a kiugró értékek modellezése két lépésre bontható. Első lépésben előrejelezzük, hogy a lesz-e kiugró érték (*spike occurrence*), és ha igen, akkor a második lépésben előrejelezzük annak értékét (*spike value prediction*). Hatékony modellezéshez mindkét modul jó teljesítményére van szükség. Látni fogjuk, hogy már az előfordulás előrejelzése is nehézségekbe ütközik.

A már hivatkozott szerzők definiálják a módszerek értékelésére használható mérőszámot. Hagyományosan a csoportosítás pontosságát a jól besorolt adatpontok arányával mérjük (l. Kovács [2004]). A kiugró árak esetében ez nem célszerű, hiszen kicsi a kiugró értékek aránya, és már azzal is jó százalékos eredményt lehetne elérni, ha egy adatpontra sem jeleznénk előre kiugró értéket. Zhao, Dong, Li és Wong [2007] ezért két mutatót definiál:

$$SPA = \frac{\#(F(S), A(S))}{\#(A(S))}$$

$$SPC = \frac{\#(F(S), A(S))}{\#(F(S))}$$

Az ártüske előrejelző pontosság (*spike prediction accuracy*, SPA) az ártüskéként előrejelzett (F(S)) és a ténylegesen ártüske (A(S)) adatok számát vetíti az ártüskék valós számára, azaz hány százalékban szoltunk előre a kiugró értékről. Az ártüske előrejelzési megbízhatóság (*spike prediction confidence*, SPC) a jól előrejelzett ártüskék számát osztja az ártüskék előrejelzett számával, azaz a modell hány százalékban találta el, ha valamit ártüskének vélt. Ideális esetben mindkét mutató magas.

Zhao, Dong, Li és Wong [2007] az ún. probability classifier módszerrel dolgozik: ha a spike valószínűsége egy adott küszöböt átlép, akkor kiugró értéket jeleznek előre. A magyarázó változók a modellezés során: kereslet, kínálat, ártüske előfordulás (1, ha volt aznap ártüske; 0 egyébként), nettó villamosenergia-külkereskedelem, évszak és napon belüli idő. Az ausztrál áramtőzsde (Australia National Electricity Market, NEM) adatain 100%-os SPC-t és 52,6%-os SPA-t érnek el a tesztidőszak (egy hónap) előrejelzésével. Ha tehát a modell kiugró értéket jelez előre, akkor valószínűleg az is lesz. A modell a kiugró értékek kb. felében figyelmeztet a kiugró értékekre.

Zhao, Dong és Li [2007] több klasszifikációs módszert (döntési fa, naiv Bayes-i klasszifikáció, neurális háló, SVM, „Winnow” algoritmus, k-legközelebbi szomszéd módszer) hasonlít össze a kiugró érték megjelenésének előrejelzése tekintetében a NEM napi adatokon. Még az általuk legjobbnak ítélt SVM modellel is előfordul (8-ból 2-szer), hogy egy adott hónapban a kiugró értékek 11-13 százalékát találja el a kiugró értékeknek. Összességében a legkisebb hibát egy adott hónapban a naiv Bayes-i klasszifikációs módszer érte el: 44%-ot. Ez azt jelenti, hogy ha ezt a módszert használjuk az általuk vizsgált hónapokban az ártüske előrejelzésére, akkor a kiugró értékek legalább 44%-át előre tudtuk volna jelezni.

Wang és szerzőtársai [2007] ún. Extreme Learning Machine (ELM) módszert hasonlítja össze az SVM-mel az ártüske-megjelenés előrejelzése esetén. Egyes hónapok esetén az ELM jelentősen jobb eredményeket ad az SVM-nél, de az ELM-mel is előfordul, hogy egy adott hónapban az ártüskék csak 4%-át találja el.

Összességében Zhao, Dong, Li és Wong [2007] foglalja össze a levonható konklúziót: „An effective method of predicting the occurrence of spikes has not yet been observed in the literature so far.”⁴⁵

⁴⁵ „A kiugró értékek megjelenésének előrejelzésére nem figyelhettünk meg hatékony módszert eddig a szakirodalomban.”

Azok a modellek sem működnek tehát megbízhatóan, amelyek külön a kiugró értékek előrejelzésére törekcszenek. A szakirodalom bemutatása után úgy tűnik, sem a közös, sem a külön modell nem működik. A saját eredmények tárgyalása során megmutatom, hogyan lehet a kiugró árakat a villamosenergia-ár modellezése során kezelni.

4. Saját kutatási eredmények

Ebben a fejezetben bemutatom saját kutatási eredményeimet. Mondanivalómat tematikusan bontottam alfejezetekre, és ezeken belül adott esetben több hipotézis elemzését is elvégzem. A következtetéseket az egyes alfejezetek végén foglalom össze.

4.1. A villamosenergia-ár Hurst exponense, perzisztenciája

1. hipotézis: A villamos energia ára perzisztens folyamatot követ, tehát hosszú távú memóriája van.

2. hipotézis: Célszerű a modellezés során nem a hozamot, hanem az árat vagy az ár logaritmusát használni.

4.1.1. A Hurst exponens kiszámítása

A stilizált tényekkel foglalkozó 3.2. alfejezetben bemutatott módszerek⁴⁶ alapján elvégeztem az EEX és a Nord Pool esetén a Hurst exponens kiszámítását a villamos energia árára, annak logaritmusára, a logaritmus növekményére (loghozamra), illetve az árak növekményeire. Az eredményeket a 3. táblázat foglalja össze. A táblázatban lévő összes számra lehetne mondani, hogy az lehet az adott piacon a villamos energia árának Hurst mutatója.

A 3. táblázatban szereplő módszereket (az R/S módszer kivételével) integrált adatokra is lehet alkalmazni, és az integrált adatsor Hurst kitevője az eredeti idősor H mutatójánál elméletileg 1-gyel nagyobb (l. pl. Norouzzadeh, Dullaert és Rahmani [2007]). Így a 3. táblázatban a log ár H mutatójának a loghozam H mutatójánál 1-gyel nagyobbnak kellene lennie. Ugyanez igaz az ár és az árnövekmény esetén. Ha ez nem áll fenn, akkor ez a felhasznált módszer pontatlanságára utal. Az MF-DFA módszer például meglehetősen pontatlan erősen antiperzisztens adatsor esetén, amikor a $h(q)$ közel van 0-hoz (l. Kantelhardt és szerzőtársai [2002]). Amint azt a 3. táblázat mutatja, az árnövekmény és a loghozam becsült Hurst mutatója közel van 0-hoz. Ez azt jelenti, hogy az árnövekmény és a

⁴⁶ Az A. függelékben látható, hogy az R programcsomag `fracdiff` könyvtár ARFIMA becslése esetén az eredmények megbízhatatlanok, ezért nem szerepeltetem azokat a táblázatban.

loghozam erősen antiperzisztens idősor, de a becült Hurst mutatókat fenntartással kell elfogadnunk. A 3. táblázatban szereplő becslések az EEX árak és log árak esetén az integráltság hiányára utalnak, míg a Nord Pool esetén ellentmondó eredményeket kaptunk a különböző módszerekkel.

Láttuk, hogy a villamos energia ára (napi, heti és éves) szezonális vonásokat mutat. Változó intenzitású kiugróan magas árakat is tartalmaz az idősor. Ezek a hatások azt eredményezik, hogy a spot ár nem stacionárius, és ez befolyásolja a számítások eredményét. A 4.2. alfejezetben adok a kiugró értékeket és a szezonalitást is figyelembe vevő Hurst becslést.

Az eredmények nagymértékben szóródnak a 3. táblázatban. Ez két dolgot jelent. Egyrészt a táblázat oszlopai különböző változókat testesítenek meg, melyek alapvetően máshogy viselkednek. Ez nem meglepő eredmény, hiszen például a részvényárfolyamok esetén is más viselkedést tanúsít maga az ár, illetve a loghozam. Ennek ellenére elfeledkezni sem szabad erről a triviális tényről. A szakirodalomban kapott szintén sokféle Hurst mutató oka, hogy a szerzők más-más változókat (az árat, a hozamot, a logaritmizált árat) helyeztek az elemzés középpontjába, és a Hurst exponens más definíciójával dolgoztak (l. 3.2.6. szakasz). Ha tehát a „villamos energia Hurst exponense” a kérdés, akkor célszerű nemcsak a piacok, hanem a vizsgált változók szerint is megkülönböztetnünk az állításainkat. Így ha stilizált tényt szeretnénk gyártani, akkor a két példánk alapján azt mondhatjuk, hogy az ár Hurst exponense 0,8 és 1 körül mozog, a logaritmizált ár H mutatója is 0,8 és 1 között helyezkedik el, illetve a loghozam és az árnövekmény esetén a H értékét 0 és 0,3 (maximum 0,4) közé tenném.

Az oszlopok közötti különbséghez hozzájárul az is, hogy két különböző piacot vizsgálunk. Az eredményeket közelebbről megnézve azt állíthatjuk, hogy a két piac (bár máshogy viselkedik) alapvető vonásaiban nem tér el egymástól. A különbséget abban látom, hogy az ár és az ár logaritmusa tekintetében a H mutató az EEX esetében 0,8 – 0,9 körül található, addig a Nord Poolnál ez a sáv 0,9 és 1 között található. A loghozam esetén a H értékek mindkét piac esetén erőteljesen szóródnak.

	EEX				NordPool			
	Ár	Ár logaritmus	Loghozam	Ár- növekmény	Ár	Ár logaritmus	Loghozam	Ár- növekmény
R/S ⁴⁷	0,88 (0,0929)	0,77 (0,0703)	0,26[0,77]* (0,0404)[0,5623]	0,30[0,71]* (0,0323)[0,2865]	0,87 (0,0399)	0,86 (0,0412)	0,36[0,88]* (0,0327)[0,5981]	0,39[0,87]* (0,0329)[0,5171]
Aggregated Variance ⁴⁸	0,86 (0,0167)	0,88 (0,0309)	-0,03 (0,0807)	-0,03 (0,0441)	0,99 (0,0244)	0,99 (0,0095)	0,07 (0,0769)	0,19 (0,0475)
Differenced Variance ⁴⁹	0,79 (0,0505)	0,70 (0,1625)	0,11 (0,1149)	-0,02 (0,0966)	0,98 (0,2064)	0,90 (0,2066)	-0,03 (0,2295)	0,11 (0,1789)
Periodogram regresszió ⁵⁰	0,83 (0,0037)	1,07 (0,0066)	0,22 (0,0041)	-0,08 (0,0037)	1,21 (0,0037)	0,96 (0,0042)	0,06 (0,0042)	0,30 (0,0039)
AWC ⁵¹	0,85 (0,0874)	0,94 (0,0858)	0,11 (0,0931)	0,05 (0,0478)	0,93 (0,0480)	0,93 (0,0688)	-0,01 (0,0558)	0,03 (0,1027)
h(2) ⁵²	0,84	0,87	0,06	0,08	1,15	1,11	0,18	0,17
h _{mod} (2) ⁵³	0,83	0,86	0,06	0,08	1,14	1,11	0,11	0,17

3. táblázat: A H becslései az EEX és NordPool esetén

Egyes esetekben a számítási módszer és az adatsor jellege folytán nem feltétlenül kapunk a definíciónak megfelelő ($0 < H < 1$) értékeket.

A becslések alatt zárójelben feltüntettem a becslések sztenderd hibáit.

* A „multiscaling” jelenség következtében napon belül és napon kívül különbözik a H értéke. Szögletes zárójelben a „napon belüli” értékek, illetve azok sztenderd hibái.

⁴⁷ R programcsomag fArma könyvtár.

⁴⁸ R programcsomag fArma könyvtár.

⁴⁹ R programcsomag fArma könyvtár.

⁵⁰ R programcsomag fArma könyvtár.

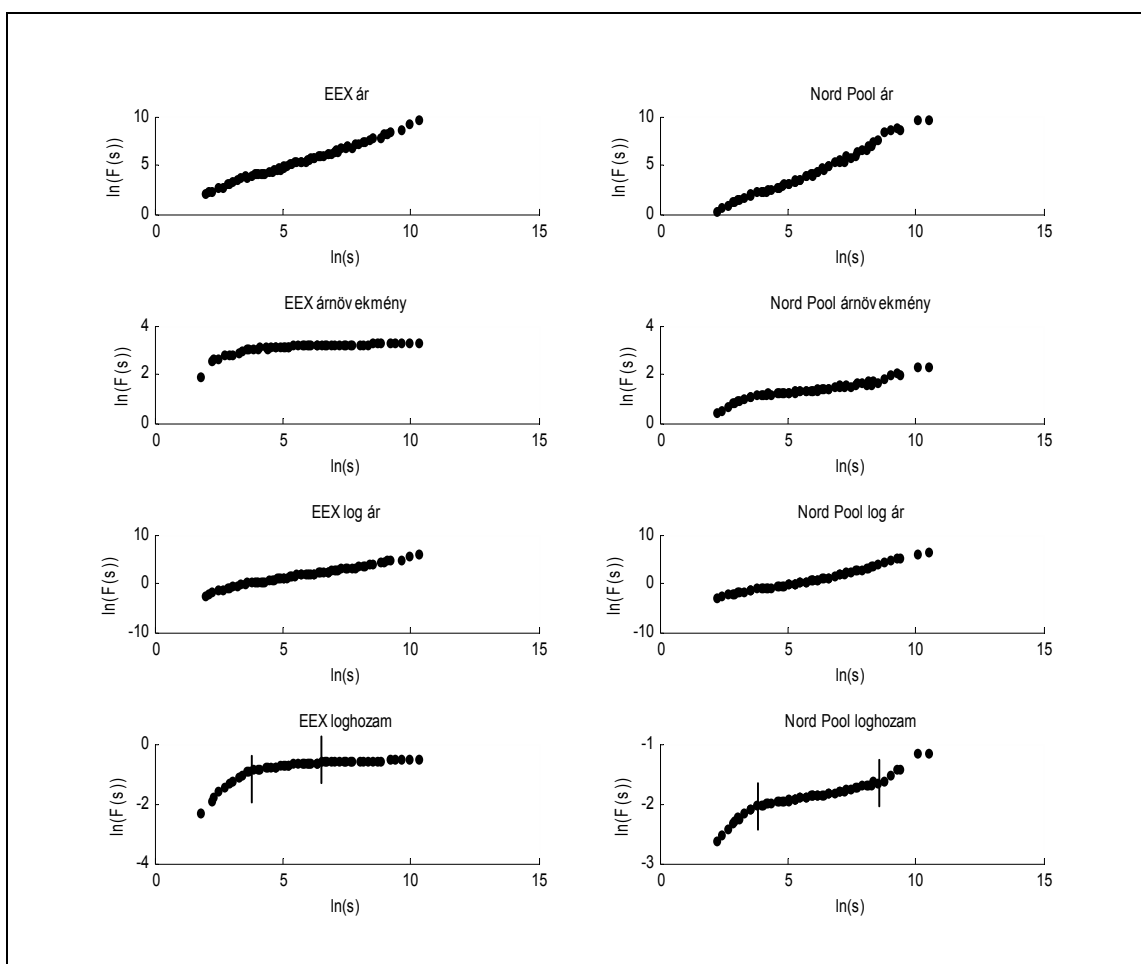
⁵¹ R programcsomag fArma könyvtár.

⁵² MATLAB saját program.

⁵³ MATLAB saját program.

4.1.2. A multiscaling jelenség

A másik jelenség a 3. táblázatban szereplő számok különbségeinek magyarázatában, hogy az eredmények nemcsak az oszlopok szerint változnak. Egy adott változó vizsgálata egy adott piacon különböző eredményt ad, ha eltérő módszerrel vizsgáljuk. A szóródás különösen nagy a loghozam vizsgálatakor. Ez azt sejtetheti, hogy 1. a loghozam nem önaffin, tehát a módszerek eleve nem megfelelőek a változó vizsgálatára; vagy 2. a speciális vonásokat (pl. a szezonalitást) eltérően veszik figyelembe a különböző módszerek. Az első esetben az 3. táblázatban szereplő számok egyike sem értelmes a loghozam esetén, míg a második esetben a számok közül valamelyiket ki kell választanunk.



17. ábra: EEX és Nord Pool DFA elemzés

Az első eset mellett érv lehet a 17. ábrán bemutatott DFA elemzés. Önaffin folyamatok esetén (ahogy azt az 3.2.6. szakaszban leírtam) az $F(s)$ átlagos hiba az s

sorozathossz log-log skálán lineáris függvénye. Látható a 17. ábrán, hogy a loghozam esetén ez nem áll fenn, az ár (valamint log ár) esetén viszont igen. A loghozam esetén a függőleges vonallal (az ábra alapján intuitíven) elválasztott részek meredekségei a Nord Pool esetén rendre (0,39; 0,08; 0,28), míg az EEX esetén rendre (0,76; 0,11; 0,03). Emlékeztünk arra, hogy ennek az okát egyes szerzők a *multiscaling* jelenségben látják, miszerint napon belül másként viselkedik a hozam, mint napok között. Ennek a magyarázatnak ellentmond az a tény, hogy az első szakasztörés nem az $\ln(24) \approx 3,18$ értéknél következik be, hanem kb. $\ln(44,7) \approx 3,8$ értéknél. Az R/S módszerrel ugyanezt a jelenséget vizsgálva azt találtam, hogy a Nord Pool és az EEX esetén a törés $10^{1,5} \approx 58$ óra értéknél következik be.

Bár a DFA és az R/S módszer nem különbözteti meg úgy a különböző frekvenciájú ingadozásokat, mint az AWC módszer, a DFA és R/S módszer mégis használható a strukturális törések (*crossover*) vizsgálatára. Bashan és szerzőtársai [2008] a DFA-t vizsgálták meg a strukturális törések felismerése tekintetében. Úgy találták, hogy a DFA meglehetősen pontosan ismeri fel a strukturális törés igazi helyét. A szerzők az alábbi képletet adták meg, hogy meg tudjuk határozni a törés s_x valós helyét a becsült s'_x alapján a DFA esetében:

$$\ln s_x \approx \ln s'_x - 0,25$$

Ebbe behelyettesítjük a törés becsült helyét:

$$\ln s_x \approx \ln s'_x - 0,25 = 3,8 - 0,25 = 3,55$$

Így megkapjuk a strukturális törés tényleges idejét:

$$s_x \approx \exp(3,55) = 34,8$$

A számítások szerint a strukturális törés nem 24 óránál, hanem kb. 35 óránál következik be, ezért nehéz elméleti magyarázatot találni rá. Ráadásul létezik második töréspont is, amelynek helye a két piac esetén nincs is közel egymáshoz. Véleményem szerint előfordulhat, hogy a *multiscaling* jelenség nem is áll fenn, azaz amit a szerzők eddig

különböző viselkedésnek tulajdonítottak, az tulajdonképpen abból állt, hogy önaffin folyamatot akartak belelátni egy nem önaffin viselkedésbe. Amit ugyanis a 17. ábrán vita nélkül látni lehet, az a jelenség, hogy az $F(s)$ az s függvényében log-log skálán nem egyenes.

A multiscaling jelenség tehát a szakirodalomban szereplő formájában kétségbe vonható. Ha fenn is áll, akkor sem a napon belüli és a napok közötti viselkedés szeparálható, hanem kb. másfél napon belül viselkednek másként a loghozamok. Másfél napon belül a H mutató nagyságrendje a loghozam esetén $0,8 - 0,9$, míg két napon túl a H mutató a loghozam viselkedésének nem feltétlenül jó mérőszáma.

Kisebb szóródást mutatnak az ár és a log ár H értékei az 3. táblázat szerint. A 17. ábrán az említett változók esetén az ábra képe egyenes, ezért elfogadható az önaffin jelleg feltételezése. Az EEX esetén a H mutató $0,9$, míg a Nord Pool esetén 1 körüli az árak H értéke. Az 1 -es H mutatóval rendelkező folyamatokat szokás **rózsaszín zajnak (*pink noise*) vagy $1/f$ zajnak** nevezni. Ez utóbbi elnevezést az indokolja, hogy ebben az esetben a periodogram 1 -es hatványkitevővel esik. A NordPool esetén a kapott H eredmények tükrében feltételezhető, hogy az ár folyamata rózsaszín zaj. Ez magyarázatot ad arra is, hogy a különböző egységgyök-tesztelési eljárások miért jutnak ellentmondó eredményekre. Ennek oka lehet, hogy a folyamat „határeset” az egységgyököt tekintve. A villamosenergia-ár tehát szerintem nem egységgyök, hanem perzisztens folyamatot követ, illetve határesetként ölthet rózsaszín zaj jelleget is.

Az ár és a log ár tehát hosszú távú memóriával rendelkezik. Meg kell azonban említeni, hogy néha előfordulhat, miszerint egy adatsorban hosszú távú memóriát találunk a számítások során, valójában pedig ez nem áll fenn. Diebold és Inoue [2000] megmutatja, hogy rezsimváltó folyamatok esetén tévesen hosszú távú memóriát diagnosztizálhatunk, ha a rezsimváltás valószínűsége kicsi. Bár a kiugró árakat és a normál árakat külön modellben szerepeltető rezsimváltó modellek elterjedtek a villamos energia szakirodalmában, és a kiugró árak megjelenése (így a rezsimváltás a kiugró árak rezsime felé) ritka, ez nem felel meg az említett kritériumnak. Diebold szerint ugyanis akkor merül fel ez a probléma, ha mindkét rezsimból való távozás valószínűsége kicsi. Mint tudjuk, a kiugró villamosenergia-árak nem tartanak sokáig, így a kiugró árak rezsiméből nagy valószínűséggel ugrik ki az ár folyamata. A villamosenergia-ár idősora tehát nem felel meg Diebold feltételének, így nyugodtak lehetünk a hosszú távú memória következtetésével kapcsolatban.

4.1.3. Ár kontra hozam

A Hurst exponens és hosszú távú memória témaköréhez tartozik annak tisztázása is, hogy az árat vagy a hozamot célszerű-e modellezni a villamos energia esetén. Két érvem van amellett, hogy az árat (log árat) célszerű használni a loghozammal szemben:

1. A fenti elemzésből kiderült, hogy nincs egyértelmű statisztikai oka annak, hogy loghozamot számoljunk. Mint korábban láttuk, az ár folyamata nem feltétlenül egységgyök, nincs szükség a differenciálásra. Továbbá a loghozam nem bír számunkra kedvezőbb viselkedési formával az önaffin jelleget tekintve.

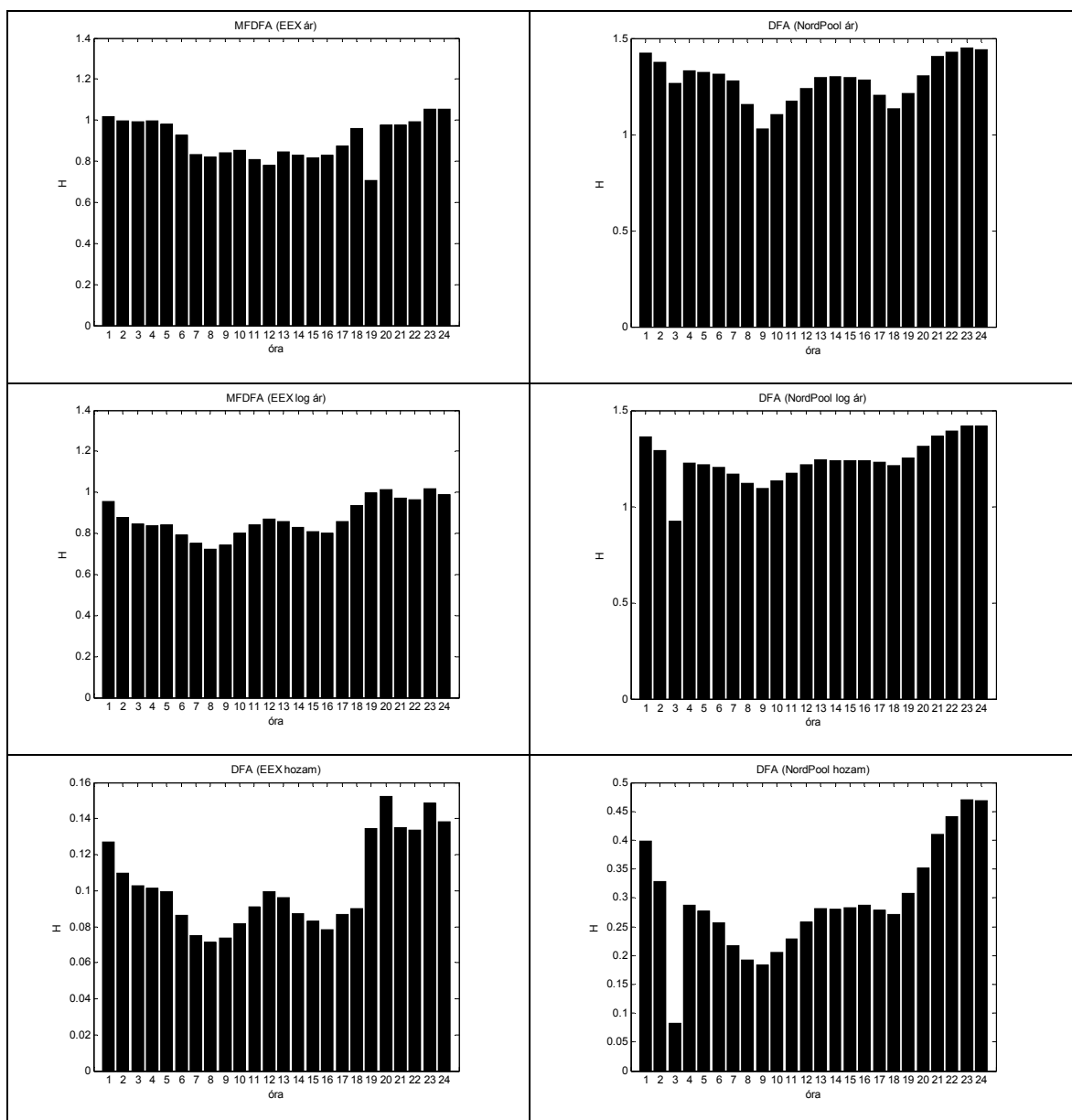
2. A loghozamnak nincs közvetlenül értelmezhető tartalma. A pénzügyi piacok esetén ésszerű hozam jellegű mutatót használni, hiszen az minden időszakban megmutatja a befektetett vagyonunk változásának mértékét. Ha az egyik nap 1% a loghozam, másnap pedig -1%, akkor az induló értéket éri a befektetésünk. A villamosenergia-piacon mind a termelők, mind a fogyasztók napról napra ugyanazzal a gazdálkodási problémával kerülnek szembe: a villamos energia árát ki kell fizetni, vagy elkönnyvelhetik bevételként. Ha például egy adott órában 100-ról 99-re csökken a villamos energia ára, akkor ez egy egységgel változtatja meg az adott időszaki eredményemet, termelőként csökkenti azt. Hiába lesz a következő órában ismét 100 az ár, összességében 1 egységet vesztettem (a várakozásaimhoz képest), pedig a hozam először negatív, utána pozitív volt. A villamos energiát nem megvesszük, tároljuk, eladjuk, és realizáljuk rajta a hozamot a következő időszakban, hanem (termelőként) minden egyes időszakban eladjuk. A termelők (fogyasztók) nem abban érdekelhet, hogy a hozam legyen magas (alacsony), hanem hogy az ár legyen magas (alacsony). Az ár áll tehát a piaci szereplők érdeklődésének középpontjában, tehát ha nem kell mást szem előtt tartanunk, akkor az ár lehet a modellezés természetesen kiválasztott célpontja.

A modellezéshez tehát célszerű az árat vagy az ár logaritmusát választani, hosszú távú memóriájú modellel, ahol a H értéke 0,8 és 1 között van.

4.1.4. A H mutató a nap órájának függvényében

A Hurst exponens azonban nem feltétlenül konstans. Erzgräber és szerzőtársai [2008] bemutatják a Nord Pool loghozam esetén, hogy a H változik időben, illetve változik akkor is, ha a nap órájának megfelelő részydősorokat választunk ki a teljes idősorból, és

azokra végezzük el a számítást. A szerzők nagyjából konstans értékeket kapnak, kivéve a reggel 9 és este 6 körüli időszakokat, amikor a H értéke kicsit alacsonyabb a többi óránál. A korábbiakkal összhangban most ugyanezt az elemzést végzem el, az ár és log ár változókra is kiterjesztve a vizsgálódást. Az eredményeket a 18. ábra szemlélteti. Látható, hogy a hivatkozott cikk eredményeit sikerült reprodukálni, ugyanis a loghozam H mutatói mindkét piac esetén a reggel 9 és este 6 óra körüli időszakokban alacsonyabbak az átlagos szintnél.



18. ábra: A H becslései az EEX és Nord Pool esetén (MF)DFA módszerrel a nap 24 órájára

A 18. ábráról az is leolvasható, hogy az EEX ár és log ár homogénebben viselkedik a Nord Pool változóknál abban a tekintetben, hogy az óránkénti értékek közelebb vannak a

teljes idősor 3. táblázatban szereplő értékeihez. Az EEX árhoz tartozó ábrán az is látható, hogy az éjjeli (csúcsidőszakon kívüli) időszakok árai rózsaszín zaj jellegűek. Az eredetileg rózsaszín zaj közelien viselkedő Nord Pool viszont máshogy viselkedik, ha szétbontjuk az egyes órákat. A csúcsidőszakon kívüli órák inkább a barna zaj (Brown zaj, *brown noise*, *Brownian noise*) jelleget veszik fel. (A 3. táblázatból kiderül, hogy a Nord Pool esetén a DFA módszerrel a többi módszerhez képest magas H értéket kaphatunk. Itt a teljes idősor H értéke is 1 feletti.) Általánosságban azt mondhatjuk, hogy az egyes órák nem viselkednek azonos módon a memóriát tekintve. A csúcsidőszakon kívüli, alacsony fogyasztású órák H mutatója nagyobb az átlagnál. Ennek a magyarázata az lehet, hogy a kereskedők az éjszakai órákra adott ajánlataik meghatározásánál jobban támaszkodnak a múltbeli árakra, a nap többi részében pedig jobban figyelembe veszik az aktuális piaci viszonyokat. Ez összefüggésben van Sapio [2004] eredményeivel, melyet a 3.2.6. szakaszban mutattam be.

Összefoglalva:

1a. tétel: A villamos energia ára perzisztens folyamatot követ, tehát hosszú távú memóriája van. A Hurst mutató értékének nagyságrendje az ár esetén 0,8 és 1 között található. A logaritmizált ár Hurst exponensének nagyságrendje szintén 0,8 és 1 közé tehető. A NordPool ár folyamata rózsaszín zaj lehet.

1b. tétel: A loghozam és az árnövekmény 0,8 – 0,9 körüli H értékkel rendelkezik rövidtávon, azaz kb. 35 órán belül. Hosszabb időhorizonton a loghozam nem mutat tiszta önaffin jelleget.

1c. tétel: Ha az idősort feldaraboljuk, akkor a nap különböző órájához tartozó részydősorok H mutatói eltérnek. Az éjszakai (csúcsidőszakon kívüli) órákban a Hurst exponens magasabb.

2. tétel: A loghozam és az árnövekmény nem mutat önaffin jelleget, nincs közvetlenül értelmezhető tartalma, nincs egyértelmű bizonyíték az áralakulás folyamatának integrált voltára, ezért a modellezés során célszerű nem a hozamot vagy az árnövekményt, hanem az árat vagy az ár logaritmusát használni.

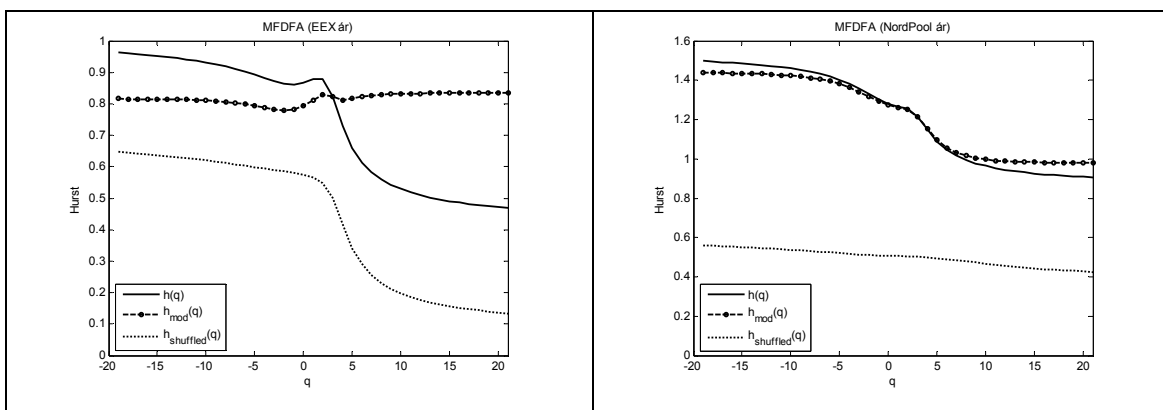
4.2. Multifraktál jelleg

3. hipotézis: A villamos energia árának multifraktál jellegét az eloszlás vastag széle okozza. A vastag eloszlásszél okozta hatás kiszűrése után a folyamat monofraktál.

4. hipotézis: A kiugró villamosenergia-árak az idősor szerves részét képezik, ugyanúgy viselkednek, mint az átlagos szintű árak, ezért kiugró árakról sem beszélhetünk.

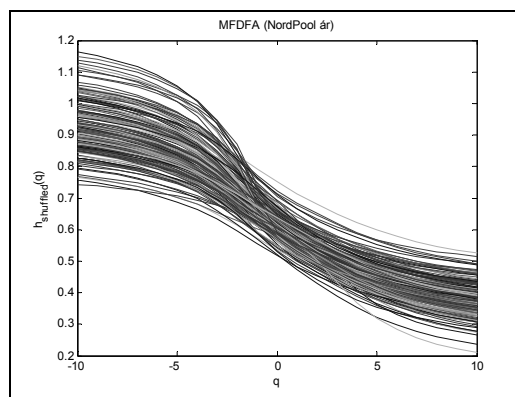
4.2.1. Multifraktál elemzés

Az EEX és a Nord Pool MF-DFA elemzését a 19. ábra foglalja össze. A folytonos vonal mutatja a $h(q)$ általánosított Hurst exponens függvényt mindkét esetben. Jól kivehető, hogy mind az EEX, mind a Nord Pool ár multifraktál jellegű, hiszen a folytonos vonalak mindkét esetben eltérnek a vízszintestől. A pöttyös vonal a megkevert idősorra ábrázolja ugyanezt. Tudjuk, hogy elméletileg ennek vízszintesnek kellene lennie 0,5-es szinten. Ettől abban az esetben tér el, ha a megfigyeléseket generáló eloszlás vastag szélű. Az EEX esetén a pöttyös vonal jelentősen eltér a vízszintestől, és a korrigált általánosított Hurst exponens (szaggatott vonal jelölővel) vízszintes valamivel 0,8 feletti szinten. Az EEX ár tehát multifraktál ugyan, de a multifraktál jelleg oka az eloszlás vastag széle, nem pedig a korrelációs struktúra alakulása. A Nord Poolra vonatkozó ábráról az derül ki, hogy a kevert árakra vonatkozó görbe nem tér el 0,5-től, így úgy tűnik, hogy a Nord Pool ár nem az eloszlás alakja miatt multifraktál folyamat, hanem az autokorrelációk struktúrája miatt. Érdekes azonban ezt mélyebben megvizsgálni.



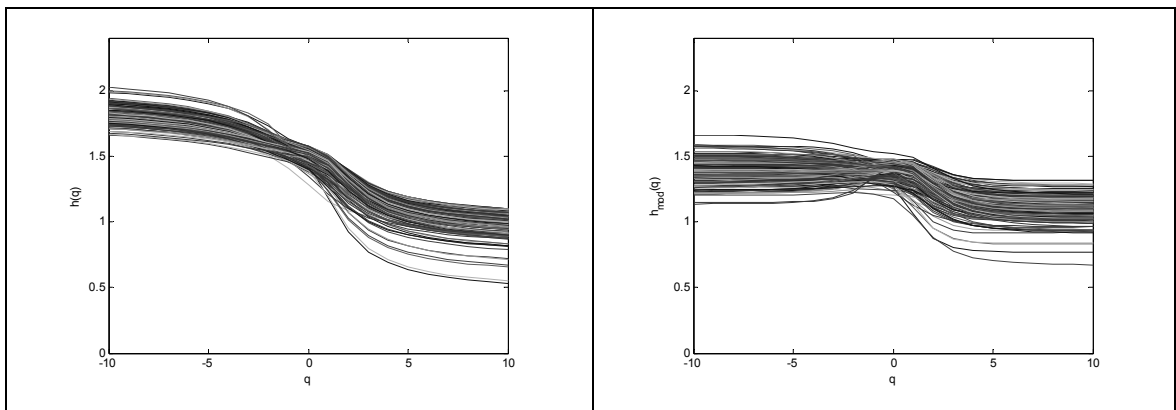
19. ábra: Az EEX és Nord Pool árak MF-DFA elemzése

Ha a NordPool idősort a hét óráinak megfelelően részidősorokra bontjuk, és a 168 idősort külön vizsgáljuk, akkor meglepő eredményt kapunk. A kevert idősorok $h(q)$ általánosított Hurst exponensei ebben az esetben már el fognak térni a 0,5-ös vízszintes vonaltól, amint azt a 20. ábra mutatja (az ábrán 168 darab függvényt látunk). A látszólagos ellentmondás oka, hogy a 19. ábrán a 168 darab részidősor egyben vizsgáltuk, és az egyes eloszlások jellege nem érvényesült. Egyúttal levonhatjuk azt a következtetést is, hogy a 168 órához tartozó eloszlásokat nem célszerű egyben vizsgálni.



20. ábra: 168 darab Nord Pool kevert részidősor általánosított Hurst exponense

Érdeemes megnézni a 21. ábrát, ahol a $h(q)$ és a $h_{\text{mod}}(q)$ szerepel mind a 168 idősor esetén. Bár az egyes görbéket nehéz kivenni az ábrán, mégis jól látható, hogy (néhány kivételtől eltekintve) a módosított Hurst exponensek vízszinteshez közelítenek. Az eredeti multifraktalitást jelentősen sikerült lecsökkenteni azzal, hogy figyelembe vettük az eloszlás hatását.



21. ábra: 168 darab Nord Pool részidősor általánosított Hurst exponense: eredeti és módosított $h(q)$

Bár a 21. ábrán a módosított $h(q)$ ugyan nem teljesen vízszintes, úgy gondolom, hogy nem követünk el nagy hibát, ha ezek után a Nord Poolt is monofraktálnak tekintjük a korrelációk tekintetében. Először is, amint az a függelékben a 37. ábrán is látszik, a nem vízszintes jelleg származhat abból is, hogy véges minta áll rendelkezésünkre az adatsorban. Másodszor, a 21. ábrán a görbék a $q \approx 0$ érték körüli szakasz kivételével közel vízszintesek. A $q < 0$ szakaszon a $h_{\text{mod}}(q)$ értéke ugyan átlagosan 0,28-cal magasabb, mint a $q > 0$ szakaszon, de ez az érték nem jelenti azt, hogy szignifikáns különbség lenne a két szakasz között.

A 3.2.6. szakaszban leírt multifraktalitási tesztet elvégezve ugyanerre a következtetésre juthatunk. A teljes adatsorra az EEX esetén a p -érték 0,36, míg a Nord Pool esetén 0,00, tehát ez alapján azt a következtetést vonhatjuk le, hogy az EEX idősor a korrelációkat tekintve monofraktál (elfogadjuk a nullhipotézist), míg a Nord Pool nem (elutasítjuk a nullhipotézist). Ha azonban az idősort 168 darab részre bontjuk, és úgy végezzük el a tesztet, akkor a 168 darab idősorból 14 esetén nem éri el a 0,05-öt a p -érték, azaz csak 14 idősorról állíthatjuk, hogy multifraktál. Ráadásul ezen 14 érték közül 4 esetén lesz a p -érték 0,01-nél kisebb, azaz 99%-os szignifikanciaszinten már csak 4 részüidősor viselkedik multifraktálnak megfelelően. Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a részüidősorok döntő többsége monofraktál az eloszlás lecsengése hatásának kiszűrése után, azaz nem állítható, hogy a nagy sokkok jelentősen másként viselkednének az idősorban, mint a kis sokkok.

Ha kiszámítjuk a módosított Hurst exponenst a 168 részüidősor esetén, akkor 0,87 és 1,42 közötti $h_{\text{mod}}(2)$ értékeket kapunk. A becsült H együtthatók fele az 1,21-1,32 intervallumon belül helyezkedik el.

A Nord Pool árakat monofraktálnak találtuk a feldarabolt adatsor esetén, míg a teljes idősor multifraktál. A vastag szélek jelensége tehát csak az óránkénti idősorok esetén van jelen. Erre egy lehetséges magyarázat az, hogy az óránkénti eloszlások jelentősen különböznek egymástól. Ha ezeket a különböző eloszlásokat összerakjuk egy eloszlásba, akkor a kevert eloszláson a vastag eloszlásszélek nem érvényesülnek, így a multifraktál jelleg az eloszlás-korrekciónál is fennmarad. Az EEX óránkénti árak kevésbé különböznek egymástól, így az eloszlások összekeverése kevésbé káros az eloszlás szélére, így a teljes idősorból számított eloszlás vastag szélű, és az idősor monofraktál.

4.2.2. A kiugró árak természete

Az előző szakaszban azt a következtetést vontuk le, hogy a villamosenergia-ár folyamata monofraktál folyamat a korrelációk tekintetében. Ez azt jelenti, hogy a kiugróan magas árak (ártüskék) ugyanúgy viselkednek korrelációs szempontból, mint az átlagos szintű árak. Ez azt jelenti, hogy az ártüskék az árfolyamat szerves részét képezik. Mivel az ártüskék korrelációs szerkezete nem különbözik az átlagos szintű árak korrelációs szerkezetétől, az ártüskék nem tekinthetők outliernek. A nagy sokkok és a kis sokkok ugyanannyi ideig tartanak.

A 3.3.4.2. pontban láthattuk, hogy az átlaghoz visszahúzással kombinált ugrásos modellek esetén az átlaghoz visszahúzás üteme nagyon nagy az empirikus becslések esetén, és nem írja le az átlagos szintű árak viselkedését. Ennek a problémának a megoldására kidolgozott módszerek (l. szintén a 3.3.4.2. pontban; például pozitív sokkot negatív sokk követ, a visszahúzási ráta az ár és annak szezonális értéke közötti távolságtól függ) lényege az, hogy a magas ársokkok esetén az ár gyorsabban térjen vissza az átlagos szintre, mint az a kis sokkok esetén történik. Ez ellentmond annak a következtetésnek, hogy az ár monofraktál folyamat, és a nagy sokkok ugyanannyi ideig tartanak, mint a kis sokkok. Ezért az átlaghoz visszahúzással kombinált ugrásos modellek nem megfelelőek a villamosenergia-árak leírására: egységes visszahúzási ráta esetén rosszul becslik az árfolyamatot, változó visszahúzási ráta esetén nem adnak monofraktál folyamatot. Az árakat ezért nem tekinthetjük ilyen ugrásnak.

Hasonló érvelés adható annak igazolására, hogy az ártüskék nem alkotnak külön rezsimit. A Markov rezsimváltó modellekben (l. 3.3.4.2. pont) az ártüskéket leíró rezsimben más a korrelációs szerkezet, mint az átlagos szintű árak korrelációs szerkezete. Ennélfogva ezek a modellek sem megfelelőek az áram árának leírására.

4.2.2.1. A Markov rezsimváltó modellek alkalmasságának ellenőrzése

Ezt az állítást szimulációs módszerrel támaszthatjuk alá. Weron (2006) könyvében bemutat egy Markov rezsimváltó modellt, melynek a szerző három modellváltozatát vizsgálja meg. Weron azt feltételezi, hogy az áram ára két rezsim (1: alaprezsim, 2: ártüske rezsim) mozog q_i valószínűséggel ($i = 1, 2$). Az Y_t árfolyamat az alaprezsimben egy átlaghoz visszahúzó folyamattal írható le az alábbi formában:

$$dY_{t,1} = (c_1 - \beta Y_{t,1})dt + \sigma_1 dW_t$$

ahol a dW_t -k a Wiener folyamat növekményei, ennél fogva ezek független és azonos (normális) eloszlású valószínűségi változók. Az ártüske rezsimben az ár egy normális, lognormális vagy egy Pareto eloszlásból származó realizációként adódik a modellváltozattól függően:

- normális: $Y_{t,2} \sim N(c_2, \sigma_2^2)$
- lognormális: $\log(Y_{t,2}) \sim N(c_2, \sigma_2^2)$
- Pareto: $Y_{t,2} \sim F_{Pareto}(c_2, \sigma_2^2) = 1 - \left(\frac{c_2}{x}\right)^{\sigma_2^2}$

Weron a szezonálisan szűrt napi átlagos árak logaritmusát használta fel a fenti modellek paramétereinek illesztésére. A paraméterbecsléseket a 4. táblázat tartalmazza.

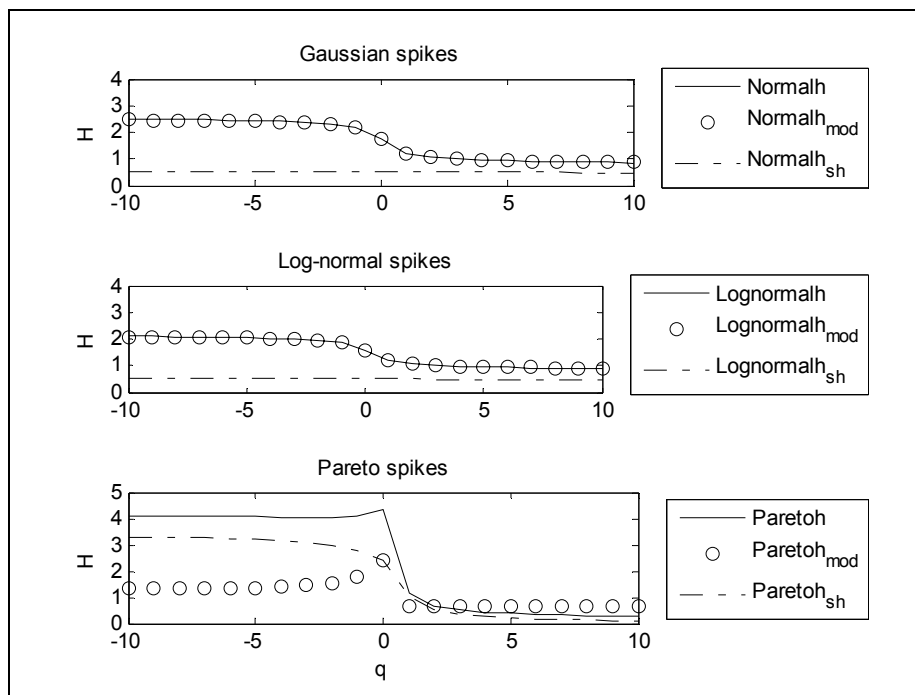
Rezsime	β	c_i	σ_i^2	Várható érték	q_i
Normális eloszlású ártüské					
1: alap	0,0427	0,2086	0,0018	4,8801	0,9802
2: ártüske		4,9704	0,0610	4,9704	0,6337
Lognormális eloszlású ártüské					
1: alap	0,0425	0,2077	0,0018	4,8807	0,9800
2: ártüske		1,6018	0,0024	4,9678	0,6325
Pareto eloszlású ártüské					
1: alap	0,0459	0,2242	0,0020	4,8822	0,9861
2: ártüske		6,5782	4,2382	4,9980	0,5497

4. táblázat: A Markov rezsimváltó modellek paraméterbecslései Weron (2006) alapján

A bemutatott modellváltozatok mindegyikét szimulációs módszerrel elemeztem. Mindhárom modell esetén előállítottam egy trajektóriát az alaprezsimből kiindulva, a 4. táblázat paramétereinek felhasználásával. A kiinduló log árat az alaprezsime várható értékeként adtam meg. A generált idősor hossza 35040 volt. A szimuláció végén a log árakat árákká transzformáltam.

A 22. ábra mutatja be a három modellváltozat szimulációjának multifraktál elemzését. Mindhárom esetben azt találjuk, hogy az általánosított Hurst exponens (folytonos vonal) nem vízszintes, azaz multifraktál adathalmazaink vannak. Az idősor újramezítése után a kevert idősor általánosított Hurst exponense (szaggatott vonal)

vízszintes a normális és lognormális ártüskék esetében, jelezve, hogy nem a vastag szél okozza a multifraktál jelleget. A módosított általánosított Hurst exponens (jelölő, vonal nélkül) majdnem megegyezik az eredeti $h(q)$ -val, tehát a multifraktál jelleg a vastag szélek hatásának kiszűrése után is jelen van. Bár Pareto ártüskék esetén a módosított $h(q)$ különbözik az eredeti $h(q)$ -tól, a módosított $h(q)$ nem vízszintes, tehát a Pareto esetben is multifraktál a szimulált trajektória a korrelációk tekintetében.



22. ábra: A szimulált adatsorok általánosított (h), a módosított általánosított (h_{mod}) Hurst exponense, illetve a kevert idősort általánosított Hurst exponense (h_{sh}).

A modellváltozatok: normális („Gaussian spikes”), lognormális („Log-normal spikes”) és Pareto („Pareto spikes”) eloszlású ártüskék.

Modellváltozat	p-érték
Normális eloszlású ártüskék	0,00
Lognormális eloszlású ártüskék	0,00
Pareto eloszlású ártüskék	0,00

5. táblázat: A multifraktalitás teszt eredményei a Markov rezsimváltó modellek esetén

A multifraktalitás teszt ugyanezeket az eredményeket mutatja. Az 5. táblázat szerint mindhárom modellváltozat esetén elutasíthatjuk a nullhipotézist, miszerint az adatsor monofraktál. A három modellváltozat tehát (korrelációs szempontból) multifraktál árfolyamatot ír le. Ez nem konzisztens az áramárak korrelációs monofraktál

tulajdonságával, ezért az elemzett modellek nem megfelelőek a villamos energia árának leírására.

Úgy gondolom, hogy az áramár adatsorának monofraktál jellegéből adódóan a korrelációs szerkezet egységes a teljes idősorra (ártüskékre és átlagos szintű árakra egyaránt). Nincs szükség arra, hogy „ártüskékről” beszéljünk, mert azok ugyanolyan tulajdonságokkal rendelkeznek, mint az átlagos szintű árak. Összefoglalva: nem lehet ártüskékről beszélni, „nincsenek ártüskék”.

Természetesen magas árak időnként megjelennek a villamosenergia-ár idősorában. Ráadásul empirikusan az is megállja a helyét, hogy a magas árak gyorsan visszatérnek az átlagos szintre, és a nagy sokkok ténylegesen gyorsabban szűnnek meg, mint a kis sokkok. Ez ellentmondani látszik az áramár-adatsor monofraktál jellegének. A multifraktál elemzésünk eszközül szolgál, hogy feloldjuk ezt az ellentmondást. A nem valós multifraktalitást a vastag szélű óránkénti eloszlások okozzák. A 4.2.1. szakasz eredménye az volt, hogy ha a vastag szélek hatását kiszűrjük, akkor a multifraktál jelleg eltűnik. Ez azt jelenti, hogy a kiugróan magas árak csak a vastag szélű óránkénti eloszlásokból származó magas realizációk. Ha egy órában magas az ár (magas realizációt húzunk az eloszlásból), a következő órában az áram ára szintén egy adott eloszlásból származó realizáció, amely nagy valószínűséggel átlagos szintű lesz. Ez olyan hatást kelt, mintha felfelé ugrott volna az ár, és gyorsan visszatért volna az átlagos szintre, de ennek semmi köze a korrelációkhoz. Következtetésképpen az „ártüskéket” vastag szélű eloszlásokkal célszerű leírni ugrások vagy sztochasztikus rezsimmváltás helyett.

Mivel nincs éles határvonal a normál szintű árak és a kiugró árak között, ezért a kiugró árak definíciója körüli zavar és a 3.3.4.4. pontban bemutatott modellezési nehézség is érthető. Mivel az ártüske tulajdonképpen egy magas realizáció tetszőleges értékkel, nem pedig egy outlierként vagy külön rezsimmként kezelendő érték, ezért maga a fogalom használata sem szerencsés.

4.2.3. Az idősor nemstacionárius jellege

A villamosenergia-árak viselkedése rendkívül komplex. Úgy gondolhatnánk, hogy a napi, heti és éves szezonális elrontja a számítási eredményeket és csökkenti a belőlük

levonható következtetések erejét. A szezonális és a változó intenzitású kiugróan magas árak (l. 3.2.1. szakasz) megjelenése ugyanis az áridősor nemstacionárius jellegéhez vezet.

Azzal, hogy az idősort 168 részre osztottuk a hét órájának megfelelően, sikeresen megszabadultunk a napi és heti szezonális hatásától. Ennélfogva a bemutatott multifaktál elemzés héten belüli szezonális jelenléte esetén is érvényes. A 168 részdősor esetén kapott $h_{\text{mod}}(2)$ értékeket (l. 4.2.1. szakasz) a Nord Pool árak Hurst mutatójának tekinthetjük. Ezek az értékek már nem tartalmazzák a héten belüli szezonális hatását.

A 4.1.2. szakaszban megmutattam, hogy az ártüskék vastag szélű eloszlásból származó magas realizációk. A módosított általánosított Hurst exponens kiszűri a vastag szélű eloszlások hatását, így az ártüskék hatását eltávolítottuk a multifraktál elemzésből. Ennek következtében az árfolyamat monofraktálnak tekinthető a korrelációk tekintetében.

A változó intenzitás az ártüskék esetén azt jelenti, hogy a magas árak nagyobb valószínűséggel jelennek meg a csúcsidőszak elején és végén (l. 3.2.1. szakasz). Más nézőpontból ez azzal analóg, hogy az ár eloszlása vastagabb szélű a csúcsidőszak elején és végén. Ha az idősort 168 részre osztjuk a hét órájának megfelelően, és azután számítjuk ki a módosított általánosított Hurst exponenst, a vastag szélek (és így a változó ártüske-intenzitás) hatása eltűnik az egyes órák esetén, így a fejezetben levont következtetések érvényben maradnak változó intenzitású ártüskék esetén is.

Az idősor felbontása segített a nemstacionárius hatások eltávolításában. Ezt az ötletet továbbfejleszttem a 4.4. alfejezetben a villamosenergia-ár idősorának viselkedésének leírásához és a 4.5. alfejezetben egy szezonális szűrési eljárás megtervezéséhez.

Összefoglalva:

3a. tézis: A villamos energia árának multifraktál jellegét döntően az eloszlás vastag széle okozza. A vastag eloszlásszél okozta hatás kiszűrése után a folyamat monofraktálnak tekinthető.

3b. tézis: A multifraktál elemzésben a vastag szélek hatása nem minden esetben szűrhető ki a teljes adatsor vizsgálatával. A Nord Pool esetén a monofraktál jelleg csak a hét órájának megfelelően felbontott részdősorokban mutatható ki.

4a. tézis: A kiugró villamosenergia-árak a korrelációk tekintetében ugyanúgy viselkednek, mint az átlagos szintű árak.

4b. tézis: A kiugró ár (ártüske) egy magas realizáció egy vastag szélű eloszlásból, nem pedig outlier vagy másik rezsím. Külön névvel illetni csak zavart okoz.

4c. tézis: A változó intenzitású kiugró értékek és a héten belüli szezonális okozta nemstacionáris jelleg hatása kiszűrhető a Hurst exponens becsléséből a módosított általánosított Hurst exponens használatával és az idősor óránkénti részidősorokra bontásával.

A 4.1. és 4.2. alfejezetből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a villamosenergia-árak eloszlása vastag szélű eloszlás, amely egyaránt leírja az ártüskéket és az átlagos szintű árakat. A következőkben az ár eloszlásának jellegét vizsgálom meg.

4.3. A villamos energia árának eloszlása

5. hipotézis: A villamosenergia-ár eloszlása általánosított extrémérték eloszlás.

4.3.1. GEV eloszlás az árak modellezésében

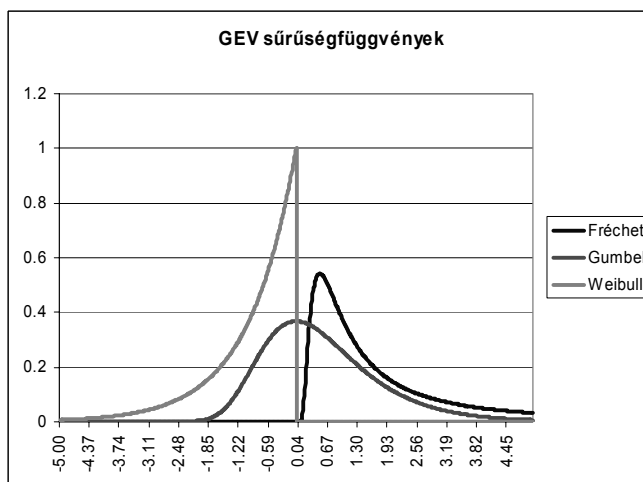
Az általánosított extrémérték eloszlások (*generalized extreme value –GEV– distributions*) eloszlásfüggvénye a következő alakú:

$$F_{k,\mu,\sigma}(x) = \exp \left\{ - \left[1 + k \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/k} \right\}$$

ha

$$1 + k(x - \mu)/\sigma > 0$$

A GEV eloszlásoknak három paramétere van: k az eloszlás jellegét meghatározó alakparaméter, σ (>0) az eloszlás szóródásáért felelős skálaparaméter és μ a lokációs paraméter. A GEV eloszláscsalád három eloszlás általánosítása. Fréchet eloszlásról beszélünk, ha $k > 0$; Weibullról, ha $k < 0$; és Gumbelről, ha $k \rightarrow 0$. A három eloszlás sűrűségfüggvényét a 23. ábra mutatja be $\mu = 0$ és $\sigma = 1$ esetén.



23. ábra: A (sztemderd) GEV eloszlások bemutatása

A későbbiekben azt szeretném bemutatni, hogy a GEV eloszlások jó jelöltek lehetnek a villamosenergia-ár modellezésére. Mint az a 23. ábrán látható, a három eloszlás közül a Fréchet eloszlás az, ami hasonlít az árák 3.2. alfejezetben bemutatott eloszlásához, így nem meglepő, hogy ezt az eloszlást fogjuk a becslések során visszakapni. A Fréchet eloszlás eloszlásfüggvényének alternatív alakja (Embrechts, Klüppelberg, Mikosch [2003]):

$$F_{\alpha, \mu', \sigma'}(x) = \exp \left(- \left(\frac{x - \mu'}{\sigma'} \right)^{-\alpha} \right)$$

ha

$$x > \mu'$$

Könnyen levezethető, hogy a két felírás közötti kapcsolat az alábbi:

$$k = \frac{1}{\alpha}$$

$$\sigma = \frac{\sigma'}{\alpha}$$

$$\mu = \mu' + \sigma'$$

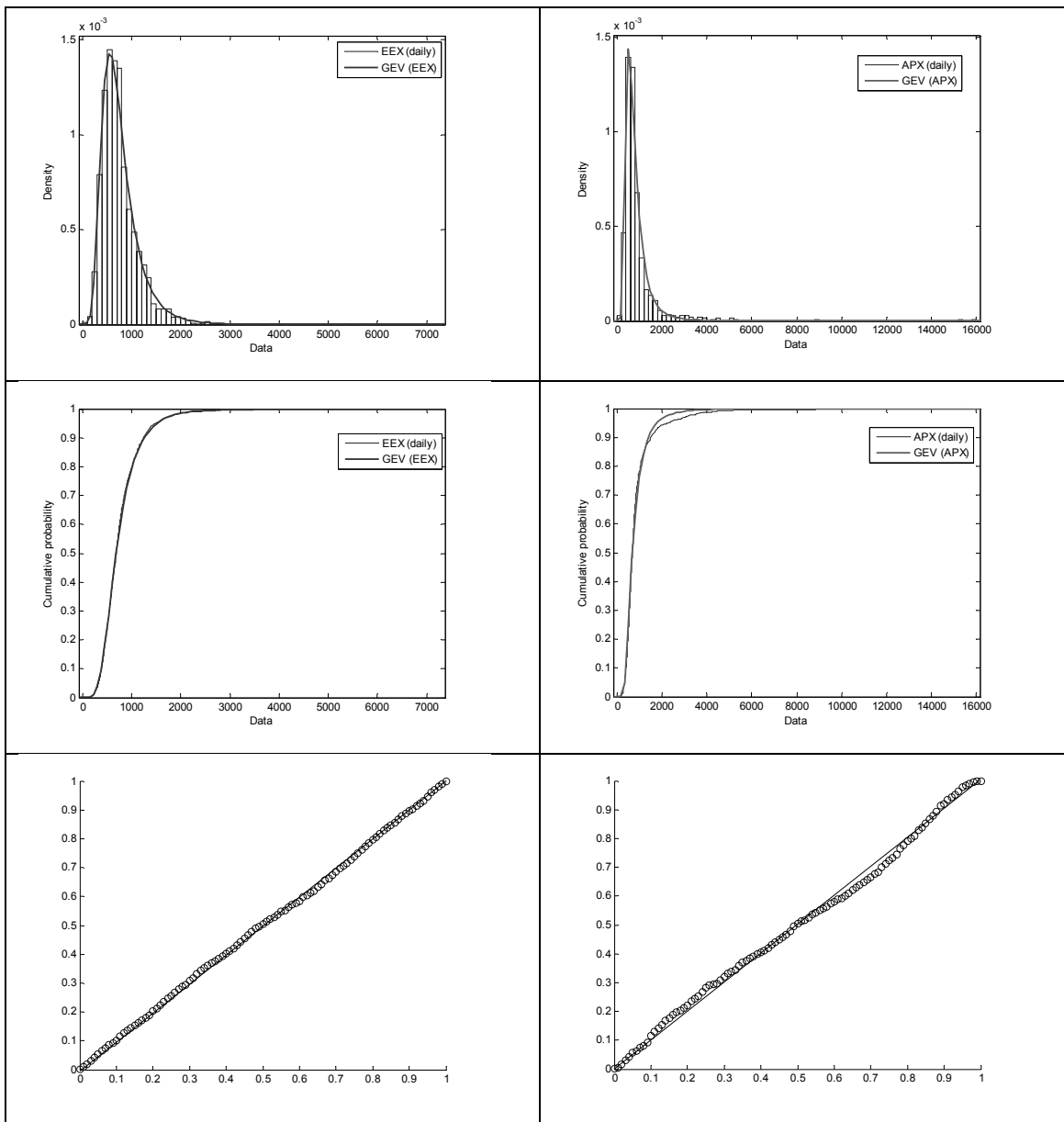
A MATLAB az első (GEV alakú) felírást használja, tehát a kapott számeredményeket ennek megfelelően kell értelmezni.

A Fréchet eloszlás α kitevővel esik az eloszlásfüggvény jobb szélén (l. Embrechts, Klüppelberg, Mikosch [2003]), tehát minél nagyobb az α , annál gyorsabban esik az eloszlásfüggvény a végtelen felé közeledve. Mivel az α és a k ellentétes irányban mozog, ezért a k esetén a kicsi érték jelenti az eloszlásfüggvény gyors esését (és a kis kockázatot), míg a nagy k mellett az eloszlásfüggvény lassabban esik, és a nagy értékek kockázata nagyobb.

A 24. ábrán az EEX és APX⁵⁴ napi árák esetén látható a GEV eloszlás illeszkedése az adatokra. A becsléseket a MATLAB dfittool toolboxával készítettem. Az illesztett GEV eloszlásból számított elméleti gyakoriság követi a hisztogram alakulását (felső ábrák), míg a kumulált hisztogram az EEX esetén ránézésre nem különböztethető meg az illesztett GEV eloszlás ugyanezen elméleti értékeitől (bal középső ábra), és az APX esetén sem nagy az

⁵⁴ 2002 januárjától 2003 decemberéig tartó időszak árai álltak rendelkezésemre a számításokhoz.

eltérés (jobb középső ábra). A Q-Q plotok (alsó ábrák) jól illeszkednek a 45 fokos meredekségű egyenesre, ezért a grafikus módszerek alapján azt állíthatjuk, hogy az EEX és APX napi árak eloszlása GEV eloszlás.



24. ábra: A GEV becslés illeszkedése az EEX és APX napi árak esetén

Baloldali ábrák: EEX napi árak. *Jobboldali ábrák:* APX napi árak.

Felső ábrák: hisztogram és gyakoriság az elméleti eloszlás alapján. Vízszintes tengely: ár. Függőleges tengely: gyakoriság. Oszlopdiagram: empirikus gyakoriság. Vonal: elméleti gyakoriság.

Középső ábrák: kumulált relatív gyakoriság az empirikus és elméleti eloszlás esetén. Vízszintes tengely: ár. Függőleges tengely: kumulált relatív gyakoriság. A két függvény eltérése annyira kicsi, hogy szinte nem is fedezhető fel az ábrán az eltérésük.

Alsó ábrák: Q-Q plot.

A 6. táblázat mutatja az illesztett együtthatókat az EEX és APX napi árak esetén. Mivel a k értéke mindkét esetben pozitív, ezért Fréchet eloszlást kaptunk mindkét esetben. Az APX esetén az alakparaméter értéke magasabb, így az eloszlás nagyobb kockázatot testesít meg. Az EEX esetén az ár eloszlása $1/0,124 = 8,06$ -os hatványkitevővel, az APX esetén $1/0,266 = 3,76$ -os hatványkitevővel esik az eloszlás szélénél, a magas árnál. A helyzet- és szóródási paraméter értéke a két tőzsde esetén nagyságrendileg hasonló.

Paraméter	Becslés (EEX)	Becslés (APX)
k	0,124 (0,0132)	0,266 (0,0277)
μ	586,8 (5,729)	584,9 (10,838)
σ	258,4 (4,325)	261,8 (8,885)

6. táblázat: A GEV becslés együtthatói az EEX és APX napi árak esetén
Zárójelben a sztenderd hibák szerepelnek.

A becsült eloszlások esetén meg kell néznünk, hogy szignifikánsan illeszkednek-e az empirikus adatokra. A tesztelést khi-négyzet teszttel végeztem el. A khi-négyzet teszt esetén az adatokat osztályközös gyakorisági sorokba soroljuk, és az egyes osztályközös esetén kiszámítjuk az osztályközbe esés f^* elméleti és f empirikus gyakoriságát. A tesztstatisztika értéke:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(f_i - f_i^*)^2}{f_i^*}$$

ahol i az osztályközre vonatkozik. A teszt nullhipotézise, hogy az empirikus adatok eloszlása megegyezik az elméleti eloszlással. Ellenhipotézise, hogy a két eloszlás nem egyezik meg. Nagy minta⁵⁵ és a nullhipotézis fennállása esetén a tesztstatisztika eloszlása khi-négyzet eloszlás, amelynek szabadságfoka = osztályközös száma – az eloszlás becsült paramétereinek száma – 1 (Hunyadi, Mundruczó, Vita [1997]).

A 7. táblázatban az illeszkedésvizsgálat eredményeit mutatom be. A tesztstatisztikák értékei és a p-értékek alapján azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a szokásos szignifikancia-szinteken nem utasítható el az a hipotézis, miszerint az EEX és APX árak GEV eloszlást követnek a becsült paraméterekkel. Összevetésképpen megadtam a

⁵⁵ A nagy minta jelen esetben azt jelenti, hogy az egyes osztályközökben az elméleti gyakoriságok meghaladják az ötöt (I. Kovács [2003]).

lognormális eloszlás esetén is a tesztstatisztikákat és a p-értékeket. A táblázatból látható, hogy elutasítható az a hipotézis, hogy az árak lognormális eloszlást követnek, hiszen a p-értékek kisebbek 0,05-nél. A GEV és a lognormális eloszlás esetén a tesztelést ugyanazzal az osztályközös bontással végeztem.

	GEV eloszlás		Lognormális eloszlás	
	Khi-négyzet statisztika	p-érték	Khi-négyzet statisztika	p-érték
APX	39,63	0,112	96,43	0,000
EEX	141,87	0,075	154,75	0,015

7. táblázat: Illeszkedésvizsgálat az APX és EEX esetén: GEV és lognormális eloszlás

A khi-négyzet illeszkedésvizsgálat hátránya, hogy meglehetősen nagy osztályközöket kell képeznünk ahhoz, hogy teljesítsük a nagy minta követelményét, azaz hogy legalább öt mintaelem legyen az elméleti eloszlás szerint az osztályközökben. Ez különösen nehéz az eloszlás szélénél, amely az eloszlás lecsengéséről ad információt. A durva felbontás téves következtetésekhez vezethet.

A khi-négyzet teszt mellett felhasználtam a Kolmogorov-Smirnov (KS) statisztikát is az illeszkedés jóságának meghatározására. A KS statisztika az elméleti és empirikus eloszlásfüggvény közötti távolság (Weron [2006]):

$$D = \sup |F - F_{emp}|$$

ahol F az elméleti eloszlásfüggvényt, az F_{emp} a kumulált relatív gyakoriságokat jelöli. Minél kisebb a D távolság, annál inkább illeszkednek az empirikus adatok az elméleti eloszláshoz. Sőt, a Glivenko-Cantelli tétel értelmében a D 1 valószínűséggel 0-hoz tart, ha az empirikus értékeket az F eloszlásból származó IID⁵⁶ mintaként kaptuk, feltéve, hogy a felbontást végtelenül finomítjuk, azaz az eloszlásfüggvényeket minden valós számnál kiértékeljük (Kahle [2006]). Ha a D n darab véges mintaelemszámból származik (D_n), akkor a $D_n n^{0,5}$ statisztika n növelésével az ún. Kolmogorov eloszláshoz tart, ha F folytonos, és ha a mintaelemek az F eloszlásból származnak (Hess [2008]). Erre épül az ún. Kolmogorov teszt, amely illeszkedésvizsgálatként használható. Ha az F paraméterei ismertek, akkor a

⁵⁶ Független és azonos eloszlású (FAE).

Kolmogorov eloszlás kvantilisei felhasználhatók az illeszkedésvizsgálat során kritikus értékeként. Az 5%-os szignifikancia-szinthez tartozó kritikus érték például $1,36^{57}$, azaz a D_n -re lefordítva: ha a D_n $1,36/n^{0,5}$ -nél kisebb, akkor elfogadható a nullhipotézis, ami az eloszlások azonosságát tételezi fel. Ha F paraméterei nem ismertek, akkor Monte Carlo módszerrel kell meghatározni a teststatisztika eloszlását a $D_n n^{0,5}$ nullhipotézis fennállása alatt.

A Kolmogorov-Smirnov statisztikát használtuk fel Szenes Márkkal végzett elemzésünk (Marossy és Szenes [2008]) során az EEX adatok esetén arra, hogy megnézzük, a Lévy vagy a GEV eloszlás illeszkedik-e jobban az adatokra. Az árakra illesztettünk GEV és Lévy eloszlást (ez utóbbit paraméterkorlátozás mellett, hogy biztosítsuk az árak pozitivitását). Felírtuk az elméleti és empirikus eloszlásfüggvényeket, majd kiszámítottuk a

$$D(x_i) = F_{emp}(x_i) - F(x_i)$$

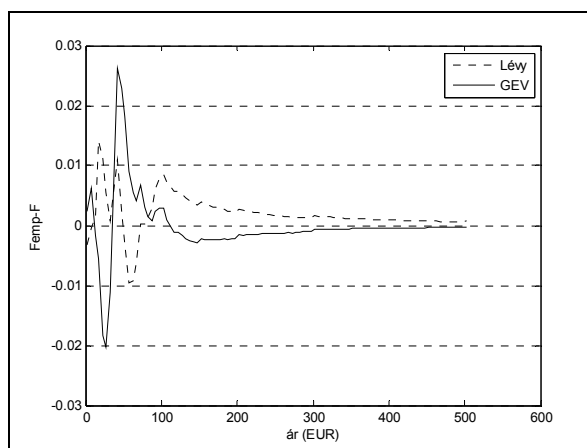
különbségeket a valószínűségei változó (az ár) adott x_i értékei mellett. A KS statisztika a $D(x_i)$ értékek abszolút értékének maximuma. Ez a Lévy esetén 0,0141, míg a GEV esetén 0,0262. 401 darab x_i mellett értékeltük ki az eloszlásfüggvények értékét, így a Kolmogorov kritikus érték $= 1,36/401^{0,5} = 0,068$. Mivel mindkét teststatisztika értéke ennél kisebb, ezért mindkét eloszlást elfogadhatnánk mint lehetséges áreloszlást. Mivel azonban az eloszlások paramétereit mindkét esetben becsléssel kaptuk, ezért a Kolmogorov teszt esetén a $D_n n^{0,5}$ teststatisztika nem Kolmogorov eloszlás lesz, és más eloszlást követ a Lévy és mást a GEV esetén.

Bár a tesztet a paraméterek becslése mellett is gyakran használják a Kolmogorov kritikus értékekkel (l. pl. SPSS, illetve Weron [2006]), az eloszlások eltérése miatt itt csak a D távolság alapötletét, nem pedig a formális tesztelést használjuk, és azt vizsgáljuk, hogy melyik eloszlás illeszkedik jobban az adatokra. Mivel a D távolság a Lévy esetében kisebb, ez alapján azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a Lévy jobban illeszkedik az adatokhoz, mint a GEV. Ha azonban a $D(x_i)$ abszolút értékeinek nem a maximumát, hanem az átlagát vesszük, akkor ez a Lévy esetén $8,07 \cdot 10^{-4}$, a GEV esetén $7,18 \cdot 10^{-4}$. Ez azt jelenti, hogy bár a KS statisztika alapján azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a Lévy eloszlás jobban

⁵⁷ Forrás: Dave Garson (North Carolina State University) honlapja. Letöltés ideje: 2009. április 7. (<http://faculty.chass.ncsu.edu/garson/PA765/kolmo.htm>)

illeszkedik az EEX árakra, hiszen az eloszlásfüggvény a Lévy esetén jobban követi az empirikus kumulált relatív gyakoriságokat, de a GEV eloszlás átlagosan kevesebbet téved. Ha a hiba (az eloszlásfüggvények eltérése) legnagyobb értékét nézzük, akkor a Lévy teljesít jobban, ha az átlagos hibát tekintjük, akkor a GEV eloszlást preferálhatjuk. Érdekes tehát megvizsgálni a hibák alakulását.

A 25. ábra mutatja be a $D(x_i)$ távolságokat a Lévy és a GEV esetén. Az ábráról ténylegesen leolvasható, hogy a GEV nagy hibát vét az eloszlás közepén, de az eloszlás jobb szélén (az ár nagy értékeinél) a GEV kisebb hibákat produkál (közelebb van a 0-hoz). Az eloszlásnak ez az a területe, amely a kockázat szempontjából a legfontosabb. Az eloszlás szélét a GEV, az eloszlás közepét a Lévy közelíti jobban. Látni fogjuk, hogy a GEV eloszlás viselkedése magyarázható extrémérték-elmélet segítségével.



25. ábra: Az empirikus és illesztett eloszlásfüggvény különbsége a GEV és a Lévy esetén
Vízszintes tengely: ár. Függőleges tengely: az eloszlásfüggvények $D(x_i)$ különbsége.

Az eloszlás Fréchet jellegének elfogadása beleillik az árak viselkedéséről alkotott képbe. A 3.2. alfejezetben láttuk, hogy az árak eloszlása hatványszerűen esik, ez megfelel a Fréchet eloszlásnak. A Fréchet eloszlás rugalmasságát az illesztés során az adja, hogy bármekkora hatványkitevő előállhat, míg a Lévy eloszlás csak 2-es hatványkitevőig működhet⁵⁸. Az APX esetén a 3,5 körüli hatványkitevőt sikerült is reprodukálni. Az eloszlás lecsengése, momentumainak létezése szempontjából tehát elfogadható a Fréchet eloszlás mint az árak viselkedését leíró eloszlás.

⁵⁸ Vessük össze ezt a tényt a 14. ábrán látható Hill-plotok alapján levont következtetésekkel! Az adatok alapján azt a következtetést vontam le, hogy az ár eloszlása esetén a hatványkitevő nem lehet 2-nél kisebb, így az árak eloszlása nem Lévy-eloszlás.

4.3.2. Az extrémérték-elmélet megjelenése

A GEV eloszlásokat a **Fisher-Tippett tétel** emeli ki a többi eloszlás közül a blokkmaximumok eloszlásával kapcsolatban (McNeil, Frey, Embrechts [2005]):

Ha léteznek $c_n > 0$, d_n konstansok, hogy a centrált és normált $M_n = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$ maximumok eloszlásának határértéke nem degenerált H eloszláshoz tart

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{\text{eloszl.}} H$$

akkor H GEV típusú eloszlás, ha az $x_1, x_2, \dots, x_n$ független és azonos eloszlású.

Meghatározható az is, hogy az eredeti eloszlás ismeretében mely GEV (Fréchet, Gumbel, Weibull) eloszláshoz fog tartani a centrált és normált maximum (l. Embrechts, Klüppelberg, Mikosch [2003]). Ha az eredeti eloszlás hatványszerűen esik az eloszlás szélénél (a valószínűségi változó nagy értékeinél), azaz az eloszlásfüggvény hatványszerűen közelíti meg az 1-et, akkor a Fréchet eloszláshoz fog tartani a centrált és normált összeg. Ekkor azt mondjuk, hogy a hatványszerűen eső eloszlások a Fréchet eloszlás vonzási medencéjébe tartoznak. A szélén hatványszerűenél gyorsabban (pl. exponenciálisan) eső eloszlások a Gumbel, míg a korlátos tartójú eloszlások a Weibull eloszlás vonzási medencéjéhez tartoznak.

A blokkmaximumok módszere az extrémérték-elmélet (*extreme value theory*, EVT) egyik irányzata. A másik irányvonal a POT (*peaks over threshold*) módszer, amely az adott szint feletti értékek (meghaladások) eloszlását írja le. A Pickands-Balkema-de Haan tétel (McNeil, Frey, Embrechts [2005]) alapján az eloszlások széles családjára a meghaladások jól közelíthetők általánosított Pareto eloszlás (*generalized Pareto distribution*, GPD) segítségével, feltéve, hogy „közel vagyunk” az eloszlás széléhez. A POT módszer alkalmazása a villamosenergia-árak modellezésében már bevett módszer. Ha a villamosenergia-ár esetében EVT módszerről hallunk, akkor az a POT módszerre szokott utalni. A leggyakrabban hivatkozott cikk Byström [2001], amelyben a szerző a Nord Pool esetén AR-GARCH modellel szűrt adatokra illeszt GPD eloszlást. Mint azt a 4.6. alfejezetben látni fogjuk, a szerző jó eredményeit az EEX esetén Ujfalusi [2008]-nak nem sikerült reprodukálnia.

Én az EVT-t a blokkmaximumok modellje és a Fisher-Tippett tétel formájában szeretném felhasználni, mivel ez kapcsolódik a GEV eloszlásokhoz. A GEV (konkrétan Fréchet) eloszlás jelenléte annak is lehet az eredménye, hogy a háttérben a Fisher-Tippett tétel működik. Van a jelen esetben szó maximumokról? Igen. Mint azt az 1.2. alfejezetben láthattuk, az adott órai villamosenergia-ár a kétoldali aukció piactisztító ára. Az ár tehát nem más, mint a vételi ajánlatok közül a legalacsonyabb olyan, amely teljesül; illetve az eladási ajánlatok közül a legmagasabb a teljesülők között. Ha a teljesülő eladási ajánlatokat független és azonos eloszlásúnak tételezzük fel, akkor a centrált és normált ár eloszlása határértékben GEV a Fisher-Tippett tétel alapján.

A Fisher-Tippett tétel jelenlétére utalhat a 25. ábrán a GEV eloszlás illeszkedésének alakulása. Ahogy azt a B. függelékben bemutatom, ha a blokkmaximumok eloszlását véges mintán vizsgáljuk, akkor a blokkmaximumok eloszlásának konvergenciája a Fréchet eloszláshoz a széleken gyorsabb, mint az eloszlás közepén. Azaz véges blokkméret esetén az eloszlás széle jobban illeszkedik a Fréchet eloszláshoz, mint az eloszlás közepe.

A statisztikai vizsgálatok a Fréchet eloszlás jó illeszkedését (különösen az eloszlás szélénél) alátámasztották, tehát alkalmazható a további modellezés során. Az, hogy ennek háttérében a Fisher-Tippett tétel áll-e, nem igazolható egyértelműen. A következőkben azt szeretném megvizsgálni, hogy milyen következtetések vonhatók le, ha elfogadjuk, hogy az árak viselkedését az extrémérték-elmélet befolyásolja.

A Fisher-Tippett tétel alkalmazása a villamosenergia-ár esetén a centrált és normált árra vonatkozik. Milyen következtetést vonhatunk le ebből az árra? Ha a blokkmaximumok határeloszlását centrálás és normálás nélkül vizsgálnánk, akkor elfajult eloszlást kapnánk (Embrechts, Klüppelberg, Mikosch [2003]). Két eset lehetséges:

1. Ha az eredeti eloszlás lehetséges értékei felülről korlátosak, akkor a végtelenben a maximum eloszlása erre az egy értékre húzódik rá, az eloszlás elfajult.
2. Ha az eredeti eloszlásban tetszőlegesen nagy értékek is lehetségesek, akkor a blokkmaximum eloszlása szintén elfajult: a blokkmaximum 1 valószínűséggel végtelen értéket vesz fel.

Ugyanez a helyzet a (véges szórású esetre vonatkozó, klasszikus) központi határeloszlás tétel (*central limit theorem*, CLT) esetén is, amelynél nem a maximum, hanem az összeg eloszlását vizsgáljuk. A centrált és normált összeg határeloszlása sztenderd normális eloszlást követ; de ha csak az összeget vizsgáljuk, akkor az eloszlás elfajult (végtelen a szórása). Véges minták esetén azonban jó közelítést jelenthet, ha az

összeget normális eloszlásúnak tekintjük. Mivel a centrált és normált összeg a sztenderd normális eloszláshoz tart, ezért nagy változószám esetén a centrált és normált összeg (ugyan nem feltétlenül normális eloszlású, de) jól közelíthető sztenderd normális eloszlással. A közelítés az eloszlás közepén (a várható érték körül) a legjobb, és a mintaelemszám növelésével egyre terjed a szélek felé (l. Bouchaud és Potters [2003]). Ha a centrált és normált összeg sztenderd normálissal közelíthető, akkor az összeget normális eloszlásúnak tekinthetjük (véges mintaelemszám, azaz az összeg véges szórása esetén).

Ha a villamos energia eladási árajánlatok centrált és normált maximumát tekintjük, akkor az elég nagy mintaelemszám esetén jól fogja közelíteni a GEV eloszlást, így a maximum, azaz a piaci ár eltolt és átskálázott GEV eloszlás lesz közelítőleg. A modellből az következik, hogy ha végtelen sok eladási ajánlatot fogadnának el (végtelen nagy lenne a kereskedett mennyiség, vagy véges mennyiség mellett végtelen kicsi lenne a kereskedési egység), akkor a villamosenergia-ár elfajult lehetne. Véges esetben azonban egy GEV-et közelítő eloszlással foglalkozhatunk.

A véges mintaelemszámnak azonban nagynak kell lennie, hogy ténylegesen GEV közelítő eloszlással legyen dolgunk. Láttuk, hogy a jelentősebb villamosenergia-piacokon 200-300 piaci szereplő jeleik meg. Bár a termelő vállalatok száma általában nem túl nagy, a kereskedő vállalatok is potenciálisan elfogadott eladási ajánlatot tehetnek. Vegyük tekintetbe ezzel párhuzamosan azt a tényt, hogy a statisztikai vizsgálatok során („jól viselkedő” eloszlások esetén) a 30-as mintaelemszámnál nagyobb már nagy mintának szoktuk tekinteni, és alkalmazzuk a normális eloszlást (Hunyadi, Mundruczó, Vita [1997]). A 39. ábrán (B függelék) láthatjuk, hogy néhány százas blokkméret esetén a Fréchet eloszlás nagyon jól leírja az eloszlás szélét, így a GEV eloszlás levezetése véges esetben sem tűnik elfogadhatatlannak.

A modellünk feltételezése az volt, hogy az elfogadott eladási ajánlatoknak független és azonos eloszlásúnak kell lennie. Első látásra úgy tűnik, hogy ez erős feltételezés. Az alacsonyabb határkölségű erőművek általában alacsonyabb ajánlatot tudnak tenni, mint a magasabb határkölségű erőművek, amelyek ajánlatait még elfogadják. Ebből azonban nem következik, hogy a két erőmű ajánlata ne származhatna azonos eloszlásból. Mivel a modell egyperiódusú, ezért a modellben az adott időszak ajánlatnál nem számít, mekkora ajánlatot szokott tenni az erőmű. Ha az elfogadott ajánlatok adott időszak eloszlását tekintjük, akkor minden erőmű ajánlata egy ebből származó mintaelem. Ha tekintünk minden egyes lehetséges világállapotot egy adott periódusban, és megnézzük az elfogadott ajánlatokat,

akkor máris rendelkezésre áll az elfogadott ajánlatok eloszlása. Ezt az eloszlást a valóságban sosem fogjuk látni, csak egy mintát belőle. A kérdés csak az, hogy a konkrét realizáció független mintának tekinthető-e az eloszlásból. A válasz az, hogy általános esetben nem.

Nézzünk erre egy egyszerű példát! Legyen a kereslet 100 egység rögzített, és nem függ a kínálatot befolyásoló tényezőktől. A 8. táblázat olyan esetet mutat be, amikor két erőmű (eladó) van a piacon, és két világállapot következhet be (20% és 80% valószínűséggel). Az első esetben az elfogadott ajánlatok 10%-át az első erőmű adja, 90%-ot a második erőmű. A második világállapotban az első erőmű nem ad ajánlatot (illetve: nem ad elfogadott ajánlatot, pl. mert nem ad ajánlatot), ezért az összes elfogadott ajánlatot a 2. erőmű adja. Az első erőmű ajánlata mindig 1, a másodiké 2. Az ár eloszlása az első esetben: 1-et felvesz 10% valószínűséggel, 2-t 90% valószínűséggel. A második világállapotban az 1-es ár 0%-ot, a 2-es ár 100%-ot kap. A teljes valószínűség tételéből az elfogadott ajánlatok eloszlása a következő: 1-et felvesz 2% valószínűséggel, 2-t 98% valószínűséggel. Erre tekinthetünk úgy mint az elfogadott eladási ajánlatok eloszlása, és a modellünk szerint ebből az eloszlásból húzunk IID mintát. A valóságban azonban két dolog történhet: az 1. világállapot vagy a 2. világállapot következik be.

Erőmű	1. eset	2. eset	Elfogadott ajánlatok eloszlása	Ár
1	10%	0%	2%	1
2	90%	100%	98%	2
	$P1 = 20\%$	$P2 = 82\%$		

8. táblázat: Példa az eladási ajánlatokra két világállapot esetén

Ha az elfogadott ajánlatok eloszlásából IID mintát veszünk, akkor előállhat (noha kis valószínűséggel) az is, hogy a teljes kínálatot az első erőmű adja. A valóságban (a világállapotok alapján) azonban ez nem történhet meg. Ebben az esetben tehát az elfogadott ajánlatok nem tekinthetők az elfogadott ajánlatok eloszlásából származó független és azonos eloszlású mintának.

A következőkben egy olyan modellt mutatok be, amelyben teljesül a függetlenség és azonos eloszlás feltételezése, és megvizsgálom, milyen feltételek esetén fog a maximum a Fréchet eloszláshoz közelíteni.

4.3.3. Egy kapacitásbővítési modell

Legyen adott n darab erőmű, amelyek versenyeznek előre megadott (véges) K nagyságú keresletért. A mennyiségeket a piacon egyesével hirdetik meg. Az erőművek eldönthetik, hogy tesznek-e ajánlatot az egy egység szolgáltatására. A megtett ajánlatok közül a legalacsonyabb árú erőmű fog „nyerni”, és ennek az erőműnek az ajánlatát fogják elfogadni. Kíváncsiak vagyunk az elfogadott árak eloszlására.

Ha egy erőmű ajánlatát elfogadták, akkor ez azt jelenti, hogy az erőmű legalább ekkora árat hajlandó kérni az egy egység értékesítéséért. Hogy az eljárásunk során az azonos termékért az erőművek ugyanakkora árat kapjanak, tehát az eljárás ne diszkriminatív áras legyen, az elfogadott árak közül a legnagyobb lesz a piaci ár: ez az az ár, amin mindenki hajlandó eladni, akinek elfogadták az ajánlatát. Kíváncsiak vagyunk a piaci ár eloszlására is.

Az n darab erőműről feltételezzük, hogy fix határköltséggel rendelkezik, és ajánlott áraik rendre $1, 2, \dots, n$. Ha tehát egy erőmű i ajánlatot tesz, akkor mindig $p_i = i$ árat ajánl. Az erőművek ajánlatai tehát nem az árra vonatkoznak, hanem hogy adnak-e ajánlatot a felkínált egy egységre vagy sem. Az egyes erőművek akkor adnak ajánlatot, ha van lehetőségük rá: ha van kapacitásuk az egy egység teljesítésére. Tegyük fel, hogy minden egyes i erőmű p_i valószínűséggel tudja egy egységgel bővíteni a kapacitását, tehát p_i valószínűséggel ad ajánlatot.

Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy adott i erőmű fog eladni, azaz mekkora a valószínűsége annak, hogy az elfogadott ár i ? Nyilvánvaló, hogy egy i erőmű ajánlatát akkor fogadják el, ha tesz ajánlatot, és a nála kisebb árú erőművek nem tettek. Az első erőmű akkor fog termelni, ha a bővíteni tudja kapacitását, azaz p_1 valószínűséggel. A második erőmű ajánlatát akkor fogják elfogadni, ha az első erőmű nem adott ajánlatot, a második viszont igen, így annak valószínűsége, hogy az elfogadott ár 2, egyenlő lesz $(1 - p_1) p_2$. Tetszőleges i erőmű esetén annak valószínűsége, hogy annak ajánlatát fogadják el, azaz az elfogadott ár egyenlő lesz i -vel:

$$\hat{p}_i = p_i \prod_{j=1}^{i-1} (1 - p_j)$$

Mi történik akkor, ha egyik vállalat sem tudja a kapacitását bővíteni? Két lehetőség van: 1. megengedünk egy $n+1$. vállalatot, amelyik minden olyan esetben termel, amikor a többi erőmű nem; 2. végtelenre növeljük a vállalatok számát, így 0 annak a valószínűsége, hogy egyik vállalat sem termel. Én az utóbbi lehetőséget választottam. Az előbb megadott valószínűségek ebben az esetben is érvényesek.

Vegyük észre, hogy ha minden $p_i = p$, akkor a valószínűségek:

$$\hat{p}_i = (1 - p)^{i-1} p$$

Ez azt jelenti, hogy annak az elfogadott ár eloszlása p paraméterű geometriai eloszlás.

Ha adott a bővítési valószínűségek alakulása, egy konkrét kereslet meghirdetésének esetében az elfogadott ár a fenti eloszlásból származó minta. Ha a keresletet darabonként, egymástól függetlenül hirdetik meg, akkor az elfogadott ajánlatok realizációi a szintén a fenti eloszlásból származó független mintaelemek. A piaci ár ezen független és azonos eloszlású mintaelemek maximuma lesz. Ha a K kereslet nagysága a végtelenhez tart, a Fisher-Tippett tétel feltételei fennállnak, véges és nagy K esetén pedig közelítőleg segíthet meghatározni a piaci ár eloszlását.

Mivel a p_i valószínűségeket nem ismerjük, ezért általános esetben nem tudunk semmit mondani az ár eloszlásáról. Ha létezik a centrált és normált maximumnak határeloszlása, akkor ez a Fisher-Tippett tétel értelmében GEV eloszlás. Mivel az empirikus adatok azt sugallják, hogy a piaci ár Fréchet eloszlású, ezért a modellben azt szeretném megvizsgálni, hogy milyen feltételeket kell szabnunk a p_i valószínűségekre, hogy Fréchet eloszlás legyen a piaci ár eloszlása. Mivel a Fréchet eloszlás vonzási medencéjébe a szélen hatványszerűen viselkedő eloszlásfüggvényű valószínűségi változók tartoznak, ezért azt kell megvizsgálni, hogy mely esetben fog az elfogadott ajánlatok eloszlásfüggvénye hatványszerűen esni.

A speciális $p_i = p$ esettel nincs szerencsénk. Szimulációval könnyű igazolni, hogy geometriai eloszlásból generált valószínűségi változók esetén a blokkok maximumaira illesztett GEV eloszlás alakparamétere nem különbözik szignifikánsan 0-tól, azaz Gumbel eloszlás illeszkedik a maximumokra. Ez az eredmény nem meglepő. A geometriai eloszlás folytonos megfelelője az exponenciális eloszlás, amely tényleg a Gumbel eloszlás vonzási medencéjébe tartozik.

Mivel azt szeretnénk, hogy az elfogadott ajánlatok eloszlása hatványszerű legyen, azaz az exponenciálisnál lassabban essen az eloszlás szélén, ezért az i növelésével egyre kisebb valószínűséget kell adnunk annak, hogy az adott erőmű ajánlatát elfogadják. Ehhez az kell, hogy nagyobb i esetén kisebb legyen annak a valószínűsége, hogy az erőmű bővíteni tudja a kapacitását. A konstans $p = p_i$ esethez képest tehát csökkenő valószínűségekre van szükség ahhoz, hogy az ár határeloszlása Fréchet eloszlás legyen.

Mennyiben reális a csökkenő valószínűség a villamosenergia-piacon? Vegyük például egy atomerőművet és egy gázzal működő erőművet. A csökkenő valószínűség azt jelenti, hogy a (kisebb költségű) atomerőmű kapacitásának kibővítése könnyebb, mint a gázzal működő erőműé. Ez az állítás hamisnak tűnhet első látásra, hiszen az atomerőmű újabb blokkjának beindítása nagyobb erőfeszítésnek tűnhet, mint a gáz alapú erőmű termelésének fokozása. Az érvelésben azonban hiba van. Az atomerőmű esetén ugyanis csak azt a lehetőséget veszi figyelembe, hogy éppen egy blokk kapacitásának a végén vagyunk. Mivel a modellem érvelése az első termelési egységtől indul, ezért az atomerőmű esetén is érdemesebb azt az erőfeszítést figyelembe venni, ami átlagosan egy termelési egységre jut. A pótlólagos blokk beindításának magas költsége a modell egy másik feltételét, a keresleti mennyiségtől független p_i valószínűségek feltételét érinti, amelynek értékelésére később visszatérek.

Ha a modellben a kapacitás bővítésének valószínűsége hatványszerűen alakul, azaz

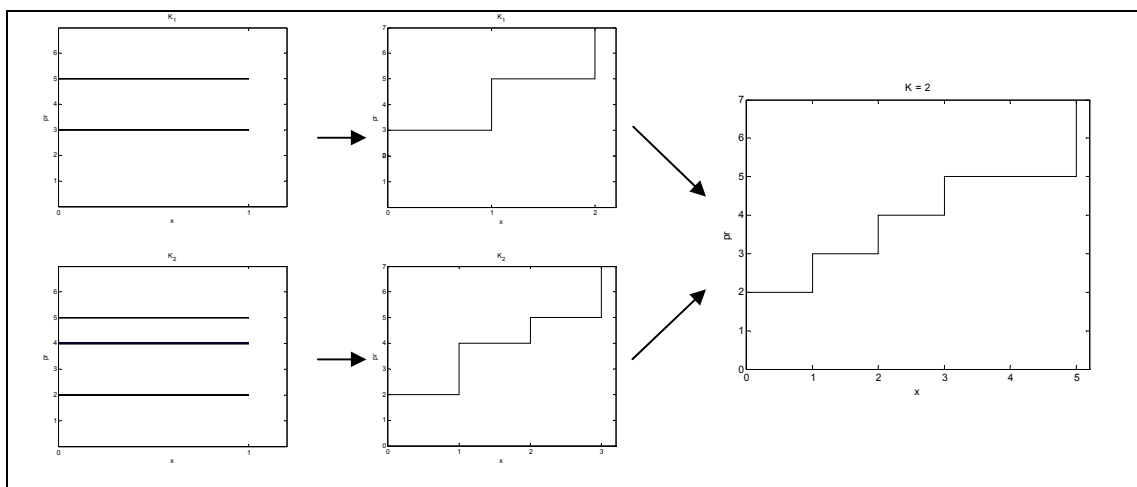
$$p_i = \frac{konst}{i^\alpha}$$

és az α kitevő elegendően nagy, akkor az ajánlat elfogadásának valószínűsége is hatványszerű lecsengést fog mutatni. Szimuláció segítségével kiszámítható, hogy az $\alpha = 1$ és a $konst = 0,9$ esetben például az elfogadott ajánlatok eloszlása hatványszerű, és hatványkitevője 1,9. Ha ugyanezen paraméterek segítségével szimulációt végzünk, és 2000 alkalommal kiszámítjuk a piaci árat, egyenként $K = 1000$ -es keresleti nagyság mellett, akkor a GEV eloszlás becsült paramétere 1,17 (95%-os konfidencia-intervallum: 1,11-1,23), tehát ténylegesen Fréchet eloszlás adódik az ár eloszlására.

A $konst = 0,9$ esetben tehát az $\alpha = 1$ elegendően nagy, azaz a bővítési valószínűségek elegendően gyorsan esnek ahhoz, hogy a piaci ár eloszlása Fréchet eloszlás legyen. Ugyancsak az említett szimulációs módszerrel kiszámítható, hogy a $konst = 0,9$

esetben az $\alpha = 0,22$ körül van az a határ, amikor a piaci ár adott konfidencia-intervallum még nem tartalmazza a 0-t. Ez azt jelenti, hogy 0,22-nél nagyobb α -k esetén a piaci ár Fréchet eloszlású lesz. Ez azt jelenti, hogy a bővítési valószínűségeknek 0,22-nél nagyobb hatvánnyal kell esniük. Természetesen a kapott határ a *konst* értékétől is függ (például a *konst* = 0,5 esetben a határ $\alpha = 0,1$ körül van). Ugyanilyen határ számolható nem hatványszerű, hanem exponenciálisan csökkenő bővítési valószínűségek esetén is. Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy a bővítési valószínűségeknek „jelentősen csökkenőnek” kell lenniük ahhoz, hogy a piaci ár Fréchet eloszlású legyen. A „jelentősen csökkenő” nem jelent feltétlenül nagyon gyors csökkenést (mint azt a hatványszerű esetben láttuk), de elegendőt ahhoz, hogy az elfogadott ajánlatok eloszlása hatványszerű legyen.

A modellben tehát azt kaptuk eredményül, hogy ha a kapacitás bővítésének valószínűsége az ajánlott ár jelentősen csökkenő függvénye, akkor az elfogadott ajánlatok eloszlása hatványszerű eloszlású, így a piaci ár magas kereslet esetén jól közelíthető Fréchet eloszlással.



26. ábra: A kínálati görbe felépítése két világállapot és öt vállalat esetén

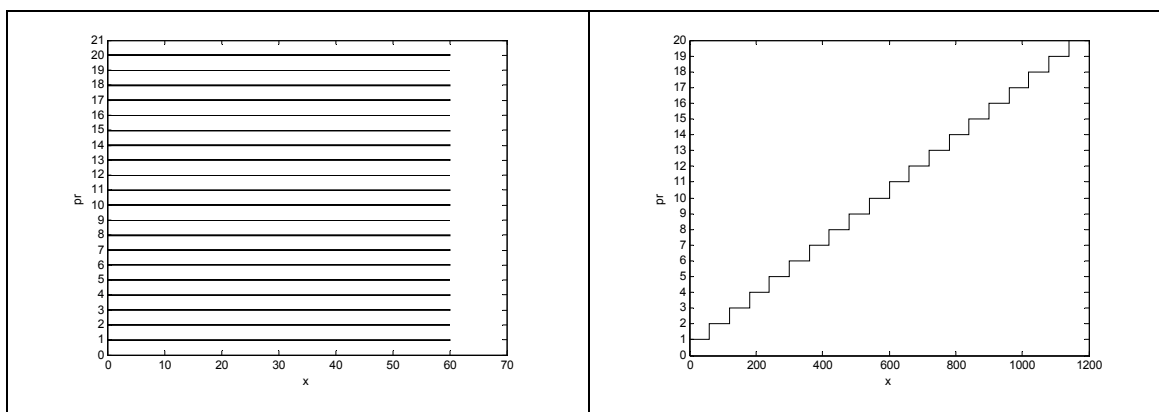
Sorok: első és második „meghirdetett” kereslet.

Első oszlop: kínálatok. *Második oszlop:* piaci kínálat. *Harmadik oszlop:* aggregált kínálat.

Vízszintes tengely: mennyiség. *Függőleges tengely:* ár.

Az említett feltétel, miszerint a bővítés valószínűsége az ár jelentősen csökkenő függvénye, értelmezhető a szakirodalom megszokott terminológiáiban is. A modellbeli kínálati görbe felépítését a 26. ábra mutatja be $K = 2$ kereslet és az első öt vállalat esetén. Mindegyik vállalat 0 vagy 1 egységnyi kínálattal lép ki a piacra egy egységnyi keresletre történő licitáláskor, ezért a kínálati görbét azok az erőművek adják, amelyek az adott egységre ajánlatot tettek (baloldali ábrák). Látható, hogy az első kereslet esetén a 3-as és 5-

ös, a második esetén pedig a 2-es, 4-es és 5-ös tudja bővíteni a kapacitását, és ad ajánlatot, így az adott árhoz tartozó kínálat 1 lesz. Az „elemi” (adott keresleti egységhez tartozó) piaci kínálati görbe az adott ajánlatok kumuláltja, ahogy azt a mikroökonómiában megszoktuk (26. ábra, középső oszlop). $K = 2$ nagyságú kereslet esetén az aggregált kínálati görbe az elemi piaci kínálati görbék összege (utolsó oszlop).

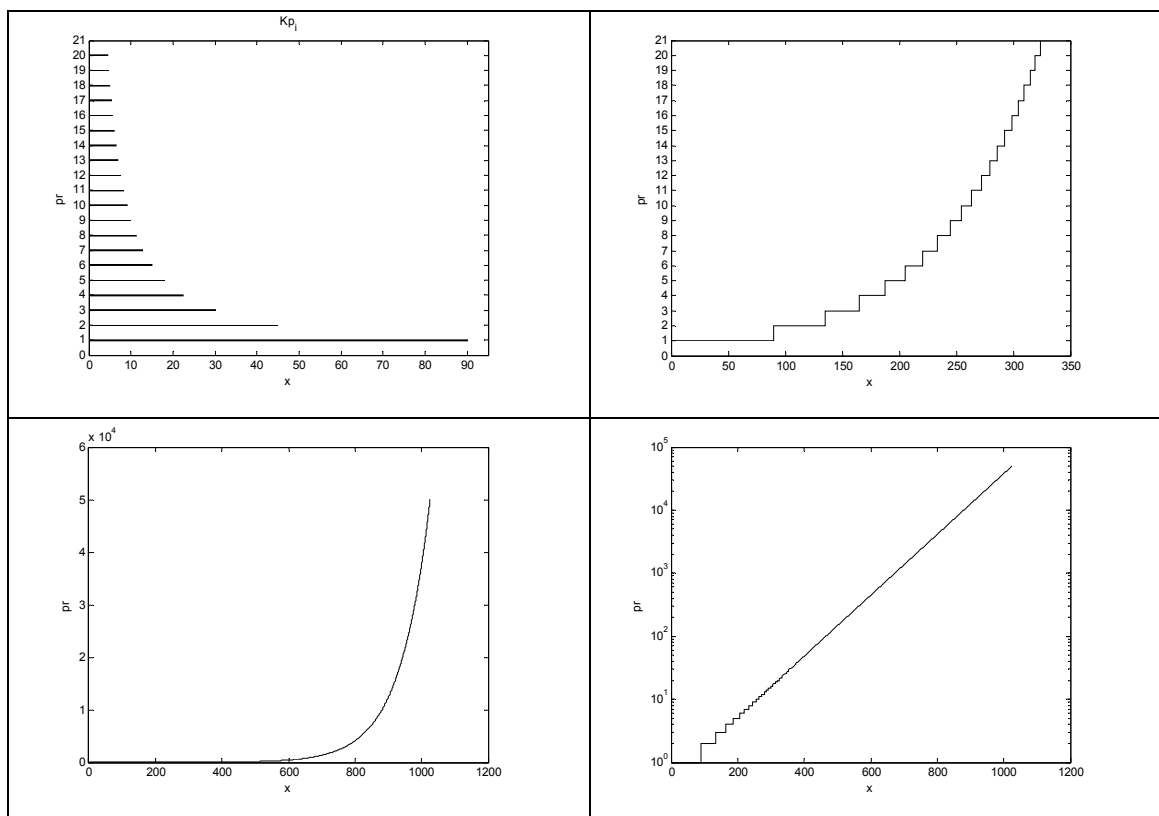


27. ábra: A várható aggregált kínálati görbe konstans valószínűségek esetén
Baloldali ábra: várható kínálatok, $K=100$, $p=0,6$. Jobboldali ábra: várható aggregált kínálati görbe.

Mivel a kínálat valószínűségi változó, ezért az aggregált piaci kínálati görbe is az. A várható értékét azonban könnyen meg tudjuk határozni: K nagyságú kereslet esetén az i erőmű várhatóan $x_i = Kp_i$ kínálatot tesz. A várható kínálat tehát a bővítési valószínűségek konstansszorososa. A várható aggregált kínálati görbe ezen mennyiségek kumulált összege. Ezt illusztrálja konstans $p=p_i$ valószínűségek esetén a 27. ábra. Mivel az egyes erőművek várhatóan ugyanakkora ajánlatot tesznek (baloldali ábra), a várható aggregált kínálati görbe egyenes (jobboldali ábra).

Ezzel szemben jelentősen csökkenő valószínűségek esetén a piaci kínálati görbe növekvő, konvex és közel van az exponenciálishoz. Ezt szemlélteti a 28. ábra hatványszerűen eső bővítési valószínűségek, $konst = 0,9$ és $\alpha = 1$ esetben. A kínálatok az ár növekedésével hatványszerűen csökkennek (bal felső ábra), ezért a várható aggregált kínálati görbe konvex (jobb felső ábra). Ugyanezt jelzi a bal alsó ábra is, de 20 erőmű helyett az első 50 ezer erőmű esetén, míg ennek szemi-log skálán ábrázolt változatát a jobb alsó ábra tartalmazza. Látható, hogy log skálán a várható aggregált kínálat egyenes, azaz a vizsgált hatványszerű eloszlás azzal ekvivalens, hogy a várható aggregált kínálati görbe (a mennyiség függvényében az ár) exponenciális. Ez megfelel a villamosenergia-tőzsdéken tapasztalt piaci kínálati görbék alakjának.

Természetesen a villamosenergia-tőzsdéken a kínálati függvény nem pontosan az exponenciális függvény szerint alakul. A korábbi érvelésből⁵⁹ azonban látható, hogy az exponenciálishoz közeli alakú kínálati görbék a modellben olyan kapacitásbővítési valószínűségeket implikálnak, amelyekből már következik a piaci ár Fréchet eloszlása.



28. ábra: A várható aggregált kínálati görbe hatványszerű eloszlás esetén
Bal felső ábra: várható kínálatok, $K=100$, $\text{konst}=0,9$, $\alpha=1$. *Jobb felső ábra:* várható aggregált kínálati görbe.
Bal alsó ábra: várható aggregált kínálat 50000 vállalatra. *Jobb alsó ábra:* a várható aggregált kínálat log skálán

A fent leírt állítás tehát átfogalmazható: ha a piaci kínálati görbe exponenciális, akkor a piaci ár magas kereslet esetén jól közelíthető Fréchet eloszlással. A tények alátámasztják, hogy ez a feltétel a villamosenergia-tőzsdéken teljesül.

A fenti eredmény egyik kulcsa, hogy a modellben a keresletet rögzítettnek tekintettük, amely nem függ a kínálatot meghatározó tényezőktől. Valójában a villamosenergia-tőzsdéken a piaci keresleti görbe meglehetősen rugalmatlan (l. Weron [2006]), és számos villamosenergia-piaci modell dolgozik rögzített kereslettel.

⁵⁹ A „jelentősen csökkenő” bővítési valószínűségek határa nagyon távol esik az exponenciális függvényt visszaadó $\alpha = 1$ esettől. Tehát csak akkor kaphatnánk nem Fréchet eloszlást, ha a valószínűségek csökkenési üteme túl kicsi lenne, de ebben az esetben a piaci kínálati görbe nagyon távol lenne az exponenciálistól.

A másik implicit feltételezésünk az volt, hogy az erőművek mindig rögzített p_i valószínűséggel tudnak eleget tenni az érkező keresletnek. Ekkor annak valószínűsége, hogy K nagyságú keresletből az adott erőmű k_i mennyiségre ajánlatot tegyen, binomiális eloszlású K és p_i paraméterrel. Ez az eloszlás egymódusú⁶⁰, és folyamatos abban a tekintetben, hogy a számolt valószínűségek egyenletesen növekszenek a módusz felé haladva, ahol az egyenletességet úgy értem, hogy nincsenek irányváltások. Annak valószínűsége tehát, hogy az i . erőmű k_i -t ajánljon, egyenletes a fenti értelemben.

Ez nem engedi meg az erőművek kiesésének, teljes leállásának (*outages*) beillesztését a modellbe, hiszen a leállások esetén valószínűleg nem folyamatosan csökken a kapacitás, hanem adott valószínűséggel le kell állítani egy nagyobb mennyiséget. Ez ellentmond a binomiális eloszlás feltételezésének. Sokak számára megbotránkoztató lehet, hogy olyan modellt adunk a villamos energia árára, amely nem veszi figyelembe a kieső erőműveket, hiszen (részben) a kínálati sokkokat szokták okolni a kiugró árak jelenléteért. Az irodalom bemutatásánál láttuk azonban, hogy van olyan nézet, miszerint a kiugró értékeknek nem külső okuk van, mivel belső faktorok segítségével előre jelezhetőek. Az 4.2. alfejezetben én is azt a következtetést vontam le, hogy a magas árak nem tekinthetők outliernek, a viselkedésük pedig beilleszthető az ár átlagos szintjeinek modelljébe. Ha elfogadjuk az itt vizsgált modell feltételeit és következtetéseit, akkor az ár eloszlása Fréchet eloszlás akkor is, ha a binomiális eloszlás mellett döntünk, és nem modellezzük az erőművek nem folytonos kapacitás-alakulását, azaz a termelés hirtelen leesését. Az ár akkor is hatványyszerűen viselkedik a széleknél a Fréchet eloszlásnak megfelelően, ha nincs a modellben az erőmű hirtelen kieséséről szó. Nem feltétlenül a leállási sokkok okozzák tehát a nagy kockázatot az árban, hanem azt a kereskedési rendszer önmaga is magyarázhatja a kínálati szerkezettel együtt.

A modell harmadik feltétele az volt a keresleti egységek függetlenül érkeznek. Ez erős feltételezés, és nyilvánvalóan nem teljesül a valóságban. Ha nem tennénk a függetlenségi feltételt, akkor a $\hat{p}_i$ ajánlatelfogadási valószínűségek függenének attól, hogy hányadik keresleti egységről van szó ($\hat{p}_i(k)$), és ezek közül kellene maximumot választanunk a k függvényében. Mivel az eloszlás nem lenne azonos, ezért nem teljesülnének a Fisher-Tippett tétel feltételei. A függetlenségi feltétel tehát a modell kulcsa,

⁶⁰ Előfordulhat, hogy két helyen is legnagyobb lesz a binomiális eloszlásból számolt valószínűség (például páratlan K és $p_i=0,5$ esetén $\text{int}(K/2)$ és $\text{int}(K/2)+1$ ugyanakkora valószínűséget kap), de ekkor a „móduszok” egymás mellett helyezkednek el.

ennek elfogadásától függ a következmények értékelése. Úgy gondolom, hogy mivel a modell a valóságot (mind a feltételek, mind a következtetések esetén) jól leírja, ezért nem veszítünk azzal, hogy a feltételt igaznak fogadjuk el. Végeredményben tehát úgy is tekinthetünk a villamosenergia-piacra, mintha a keresleteket egyesével hirdetnék meg, a következtetések szempontjából ez megfelel a valóságnak.

A függetlenségi feltétel egy ponton okoz kezelendő problémát. A modellben az ajánlott ár a $\hat{p}_i$ eloszlásból származó mintaelem minden egyes meghirdetett kereslet esetén. Mivel a függetlenség feltétele a valóságban nem igaz, ezért a vállalatok más valószínűséggel fognak eladni kis K kereslet és nagy K kereslet esetén, hiszen nagyobb K esetén a magasabb árú erőművek ajánlatait gyakrabban fogadják el. Az életszerűség kedvéért változtathatunk a modellen úgy, hogy megengedjük a $\hat{p}_i$ valószínűségek K kereslettől való függését, azaz a piaci ár eloszlása (egyik napról a másikra) változhat a keresleti mennyiség függvényében, de továbbra is Fréchet eloszlásúnak tekinthetjük az empirikusan tapasztalt eloszlásnak megfelelően. Ezt a megközelítést a későbbi alfejezetekben alkalmazni fogom. Ez az eljárás ugyan nem oldja meg a függetlenség problémáját, de kiküszöböli azt a hibát, amit a függetlenség feltételezése miatt nyilvánvalóan elkövetünk.

A modellben implicit feltételezésünk az volt, hogy az erőművek által tett ajánlat nagysága rögzített. Ez a modellen belül nem jelent problémát, hiszen a modell egy adott időszak feltételes eloszlását kívánja leírni. A modell következtetése, hogy a feltételes eloszlás GEV eloszlás. Ha az időszakok között változik az erőművek által ajánlott ár, akkor a modell szerint a különböző időszakok árai más-más paraméterű GEV eloszlással írhatók le⁶¹. Erre a problémára a későbbiekben visszatérek.

A modell hátránya, hogy nem építi be a modellbe az ajánlattétel során a taktikázást. A vállalatoknak a profitmaximalizálás miatt érdekük ajánlatot tenni és eladni, ha a szükséges kapacitás rendelkezésükre áll, nem tudnak és nem áll érdekükben hazudni. A vállalatok az ajánlott árról sem hazudnak. A modellben nem is tudnak, hiszen az ajánlott ár rögzített, az nem része az erőművek ajánlattételi stratégiájának. A valóságban az erőművek bármekkora ajánlatot tehetnek, nincs rögzítve az ár.

A felépített modell matematikailag nem újdonság. Ha a p_i valószínűségeket az i . életévhez tartozó halálozási valószínűségnek tekintjük, akkor a $\hat{p}_i$ annak a valószínűsége,

⁶¹ Vegyük észre, hogy a 4.3.1. szakaszban a feltétel nélküli empirikus eloszlásról igazoltuk, hogy GEV típusú, míg a 4.3.3. szakaszban a feltételes eloszlással kapcsolatban vontunk le elméleti következtetéseket.

hogyan valaki az i . életévében hal meg. Ha egy populáció több egyedét vizsgáljuk, akkor a piaci ár eloszlása annak eloszlása, hogy mekkora az a maximum idő, amit az egyedek a születésük és haláluk között megérnek (*maximum life span*). Ennek modellezésével kapcsolatban már felhasználták az extrémérték-elméletet (l. pl. Sanders [2005]). Az én állításom arra fogalmazható át, hogy „jelentősen” csökkenő halálozási valószínűségek esetén a *maximum life span* eloszlása Fréchet eloszlással közelíthető. Bár meglehetősen ritka az életkor függvényében jelentősen csökkenő halálozási ráta, az alfejezetben ismertetett modell mégis egy speciális halandósági modell.

A szakasz állításai tételszerűen megfogalmazva:

1. tétel:

K nagyságú keresletet függetlenül hirdetnek meg végtelen számú erőmű között, ahol az i . erőmű $pr_i = i$ árat ajánl egy adott keresleti egységért, ha ki tudja bővíteni a kapacitását egy egységgel. Az erőművek a kapacitásukat p_i valószínűséggel tudják kibővíteni. A megtett ajánlatok közül a legalacsonyabb árú erőmű fog „nyerni”, és ennek az erőműnek az ajánlatát fogják elfogadni. Az elfogadott árak közül a legnagyobb lesz a piaci ár.

Amennyiben a centrált és normált piaci ár határeloszlása létezik végtelen nagyságú kereslet esetén, úgy véges, de magas K érték esetén a piaci ár jól közelíthető GEV eloszlással.

2. tétel:

Ha az 1. tételben szereplő p_i valószínűségek „jelentősen csökkenőek”, akkor a piaci ár Fréchet eloszlású.

3. tétel:

Ha a piaci kínálati görbe exponenciális alakú, akkor az 1. tétel feltételei mellett a piaci ár Fréchet eloszlású.

Összefoglalva:

5a. tézis: A khi-négyzet illeszkedési teszt nem utasítja el, hogy a spot villamosenergia-árak Fréchet eloszlást követnek. A Fréchet eloszlás az adatok eloszlását az eloszlás szélénél jobban közelíti, mint a Lévy eloszlás.

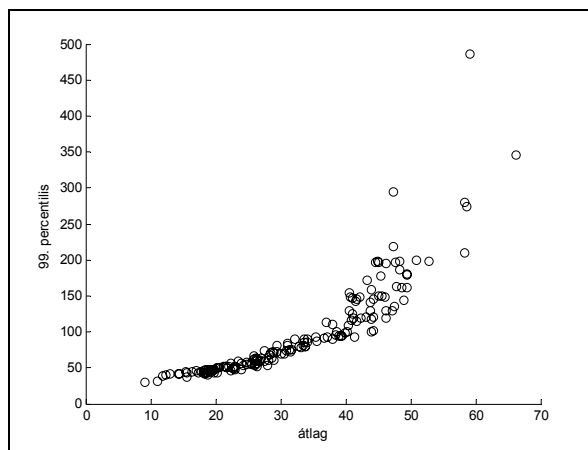
5b. tézis: Egy kapacitás-bővítési modellben megmutattam, hogy a Fréchet eloszlás illeszkedésének oka, hogy a villamosenergia-piacon a piaci kínálati görbe exponenciális. A levezetés az extrémérték-elméletből, speciálisan a Fisher-Tippett tételből adódik. A modell kulcsfeltétele, hogy a villamosenergia-kereslet rögzített, és a keresleti egységeket egyesével hirdetik meg az erőművek számára.

4.4. Determinisztikus rezsimváltás

6. hipotézis: A villamos energia ára rezsimváltó modellt követ, és a rezsimok determinisztikusan követik egymást.

Ebben az alfejezetben az óránkénti adatok empirikus tulajdonságait vizsgálom meg. Az idősort 168 darab részidősorra bontom, és a szétbontott adatok eloszlását elemzem.

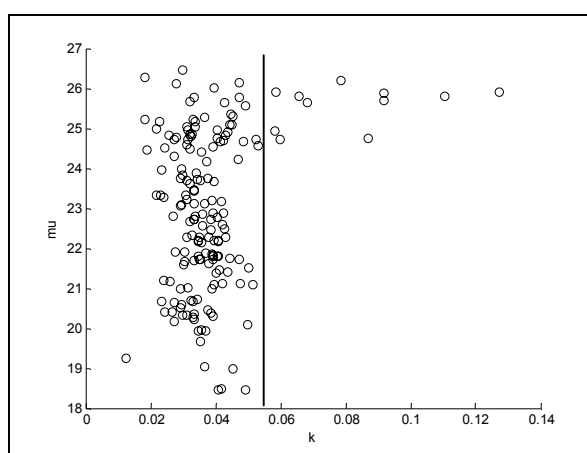
A 29. ábrán egy pontdiagram látható, amely az óránkénti eloszlások átlaga és egy magas kvantilise (99%-os percentilis) közötti kapcsolatot mutatja be. Az átlag és a magas kvantilise között pozitív kapcsolat van. Ez nem meglepő a villamosenergia-ár esetén, hiszen általában azt tapasztalhatjuk ezeknél az eloszlásoknál, hogy magasabb átlagos értékekhez magasabb kiugró értékek tartoznak. A 29. ábra által adott plusz információ, hogy ez a kapcsolat nem lineáris. Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy az eloszlások nemcsak az átlagukban különböznek. Ha csak az átlagban lenne eltérés, akkor két tetszőleges órát leíró eloszlás eloszlásfüggvényéhez található lenne egy-egy olyan valószínűségi változó, ahol az egyik valószínűségi változó a másik lineáris függvénye. Ebben az esetben viszont a 99. percentilis az átlag lineáris függvénye lenne, ami ellentmond az ábrán látottaknak. Az eloszlások eszerint nemcsak a várható értékben különböznek, hanem változtatják az alakjukat is.



29. ábra: Az óránkénti EEX eloszlások átlaga és magas kvantilise

168 GEV eloszlást becsültem a Nord Pool adatokra, tehát minden egyes órára egyet. A 29. ábra bemutatja a GEV eloszlások becsült alak- és lokációs paramétereit. Látható, hogy

az összes becsült alakparaméter pozitív, azaz a becsült eloszlások mind Fréchet típusúak. Az eloszlások többsége esetén 0,3 és 0,55 között van az alakparaméter értéke, néhány (11 darab) eloszlásnak azonban ennél magasabb. Mivel a becslés során a Fréchet eloszlásnak az 4.3. alfejezetben bemutatott GEV formájú felírását használtam, ezért a magasabb k alakparaméter vastagabb eloszlásszélet jelent. A 30. ábrán található függőleges vonal a magas és alacsony alakparaméterű eloszlásokat választja szét. A baloldalon szereplő eloszlások esetén az alakparaméter értéke alacsony, a jobboldalon lévőknél magas. A jobboldali eloszlások kockázatosabbak, mint a baloldali eloszlások.

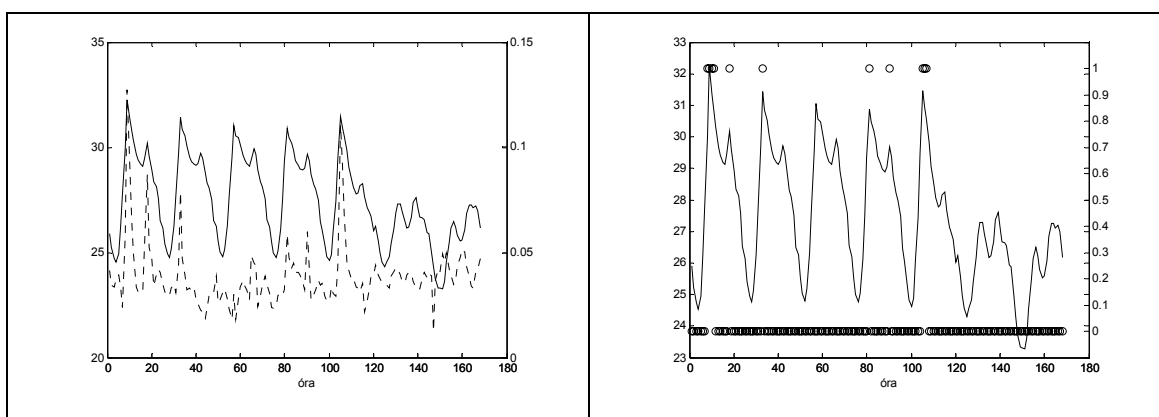


30. ábra: A becsült GEV eloszlások μ lokációs és k alakparamétere a Nord Pool esetén

A 30. ábrán látható, hogy a vastag szél jelensége a magas várható értékhez kapcsolódik, hiszen a magas alakparaméterek magas μ lokációs paraméterek esetén jelennek meg. Ez ésszerű a villamosenergia-árak esetén. A kiugróan magas villamos energia árak és vastag szélek általában magas villamos energia kereslet (vagy alacsony kínálat) esetén jelennek meg, azoknál az óráknál, ahol a kereslet relatíve magas a kínálathoz képest, és ekkor az ár általában magasabb. A 30. ábra függőleges vonalának jobb oldalán található eloszlások tehát kockázatos, vastag szélű, magas keresletű órákhoz tartoznak.

A fentiek alapján két „állapotot” azonosíthatunk a 30. ábrán: a magas és az alacsony kockázatú órákat. A villamos energia ára ezek között az állapotok között ugrál, ahogy az idő telik. Ezt az összefüggést mutatja be a 30. ábra, ahol az órák alakulása függvényében mutatom be a k alakparaméter változását (baloldali ábra). Ha a 30. ábra alapján szétválasztott két rezsimet 0 (alacsony k) és 1 (magas k) indexszel jelöljük, akkor a 31. ábra jobboldali részén láthatjuk a rezsimek alakulását is. Mindkét ábrán feltüntettem az

értelmezés megkönnyítése végett az adott óra átlagárát is. A 31. ábráról leolvashatjuk a villamosenergia-árak rezsimváltó jellegét. Az egyik órában lehetünk az alacsony kockázatú részben, míg a másik órában átlépünk a magas kockázatú részbe, de az alacsonyban is maradhatunk. Másképpen fogalmazva: felismerhetünk egy kétállapotú rezsimváltó modellt. A rezsimváltó modellek használata nem ismeretlen a villamosenergia-árak modellezésében, de itt a rezsimok közötti mozgás nem valószínűségi változó, hanem attól függ, hogyan követik egymást a hét órái. Mivel ez determinisztikus, ezért a modellt determinisztikus rezsimváltó modellnek is nevezhetjük.

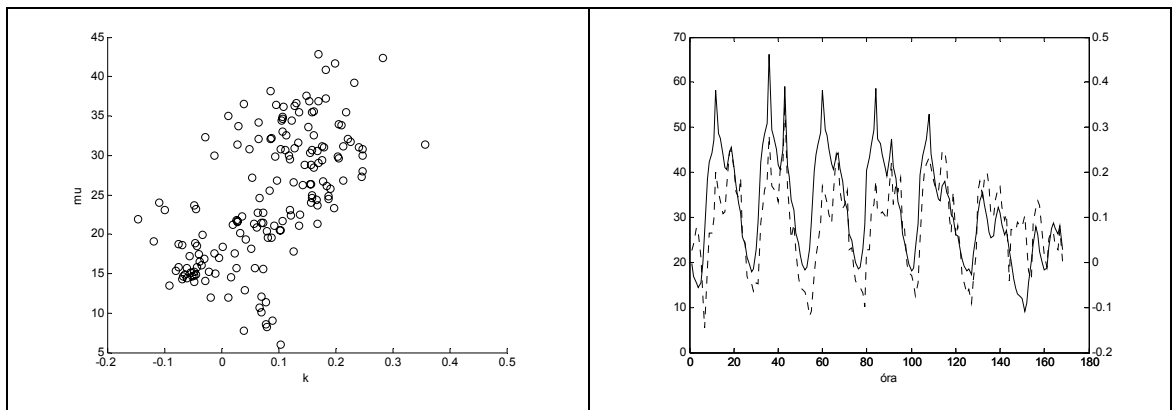


31. ábra: Rezsímváltás a Nord Pool esetén

Baloldali ábra függőleges tengelyek: *bal*: az óra átlagára; *jobb*: k alakparaméter (pontosított adatsor)

Jobboldali ábra függőleges tengelyek: *bal*: az óra átlagára; *jobb*: rezsim (jelölővel jelzett adatsor)

Nem feltétlenül kell az eloszlásokat két rezsimbe besorolnunk. Ha ábrázoljuk az óránkénti becült GEV paramétereket az EEX esetén (32. ábra, baloldali részára), akkor láthatjuk, hogy nem feltétlenül csak „alacsony” és „magas” kockázatú eloszlások vannak, hanem az átmenet lehet folytonos is. Az alacsony kockázatú eloszlások között vannak 0 körüli és alatti alakparaméterű GEV eloszlások is, ami azt jelenti, hogy a hatványszerűnél gyorsabban esik az eloszlás a magas áraknál. A jobboldali részára az óra függvényében ábrázolja az alakparaméter alakulását, feltüntetve tájékoztatásul az adott óra átlagárát is. Itt nincs értelme feltétlenül csak két rezsimet definiálni. A változó rezsimet az eloszlás jellegének (legfőképpen k alakparaméterének) változása jelenti.



32. ábra: Rezsinváltás az EEX esetén

Baloldali ábra: A becsült GEV eloszlások μ lokációs és k alakparamétere.

Jobboldali ábra: Függőleges tengelyek: *bal:* az óra átlagára; *jobb:* k alakparaméter (pontozott adatsor).

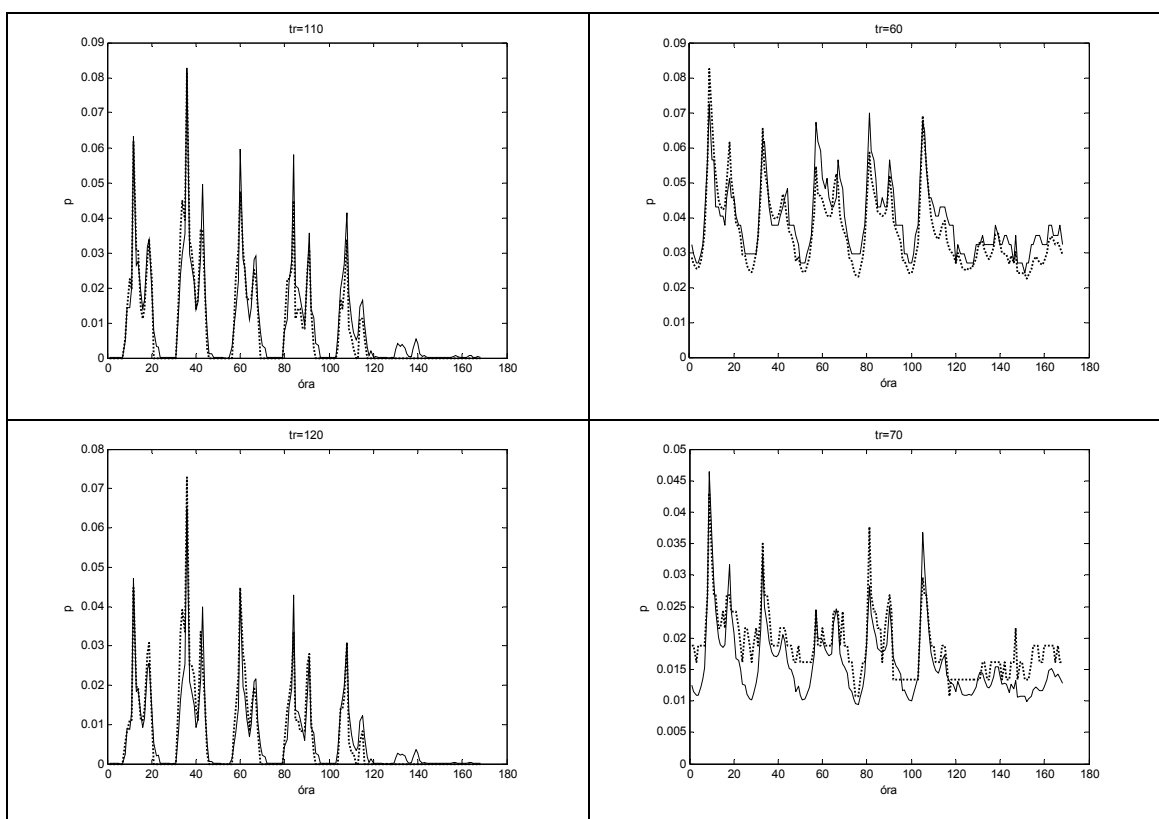
Mindkét tőzsde esetén látható, hogy a magas várható árak lassú lecsengéssel és magas kockázattal párosulnak. Ez megfelel annak a stilizált ténynek, miszerint a magasabb ár magasabb szóródással jár együtt. Szintén egybevág a megfigyelésünk azzal a ténnyel, hogy ha ugrásos modellel írjuk le a villamosenergia-árak viselkedését, akkor az ugrás intenzitása időben változik (nem homogén Poisson folyamatok, 1. 3.3.4.2. pont). Ez azt jelenti ugyanis, hogy annak valószínűsége, hogy egy adott küszöb felett lesz a villamos energia ára, változik az időben. Ugyanezt jelzi az én modellem is: ahogy mozgunk időben (változik az óra indexe), úgy változik az eloszlás széle is, ami a magasabb árak valószínűségének változását is jelenti.

A sztochasztikus rezsinváltó modellek és a nem homogén Poisson folyamatok mellett a periodikus autoregresszív (PAR) modellek (3.3.4.3. pont) is az itt bemutatott modell szakirodalmi kapcsolatát jelentik, hiszen ebben az esetben is az idősor óráknak megfelelő felbontásáról van szó. A determinisztikus rezsinváltó modell annyiban különbözik a PAR modellektől, hogy míg a PAR modellek a szétbontás után idősoros (autoregresszív) modellt illesztenek bizonyos feltételek mellett, addig én az adatok eloszlását vizsgálom.

Az általam kidolgozott GEV rezsinváltó modellben újdonság, hogy a rezsinváltás determinisztikusan történik, ahol a magas árak valószínűsége az adott órának megfelelő eloszlás lecsengésétől függ.

A modell a kiugró árak valószínűségének meghatározására is használható. Ha húzunk egy előre megadott tr küszöböt, akkor kiszámítható, mekkora annak a valószínűsége, hogy az ár a küszöb felett lesz. Ez a valószínűség nem más, mint $1 -$ az elméleti/empirikus eloszlásfüggvény értéke az adott tr pontban. Az adott küszöb feletti árak

valószínűségeit adja meg a 33. ábra az EEX és a Nord Pool esetén a hét órájának függvényében. (Mivel a két tőzsdén más az átlagos árszint, ezért különböző küszöbökkel dolgoztam.) Látható, hogy a kiugróan magas árak valószínűségét a GEV modell jól határozza meg mindkét tőzsde esetén: a küszöb fölé esés tényleges valószínűségét (pontosított vonal) jól követi a modellből előrejelzett valószínűség (folytonos vonal). A 33. ábra alapján tehát arra a következtetésre juthatunk, hogy a modell jól használható az eloszlás szélénél.



33. ábra: A kiugró értékek valószínűsége az EEX (bal) és a Nord Pool (jobb) esetén adott tr küszöbök mellett
Folytonos vonal: elméleti valószínűségek. Pontozott vonal: empirikus valószínűségek.

Mint láttuk, a determinisztikus rezsimváltás megfelel a villamos energia árának viselkedéséről alkotott ismereteknek, és a GEV rezsimváltó modell jól illeszkedik az empirikus adatokra. A következő kérdés az, hogyan használhatjuk fel ezt a megfigyelést a modellezés során. A következőkben bemutatok egy szűrési eljárást, amivel elérhető az, hogy az egyes órák különböző eloszlásait ugyanarra az eloszlásra transzformáljuk, ezzel kiszűrjük az idősből (1) a rezsimváltó jelleget, (2) a héten belüli szezonalitást, és (3) a kiugró árakat.

Összefoglalva:

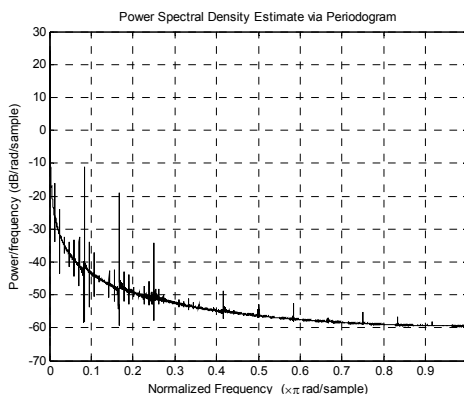
6. tétel: A hét különböző óráiban más-más paraméterű GEV eloszlás a villamosenergia-árak eloszlása. Néhány, magasabb várható értékű óra esetén a hatványszerű lecsengés lassabb, így nagyobb a magas árak kockázata. Mivel az eloszlások determinisztikusan váltják egymást, ezért a jelenséget determinisztikus rezsimváltásnak neveztem el.

4.5. A héten belüli szezonális szűrése

7. hipotézis: A héten belüli szezonális kiszűrhető az eloszlások jellegének megváltoztatásával.

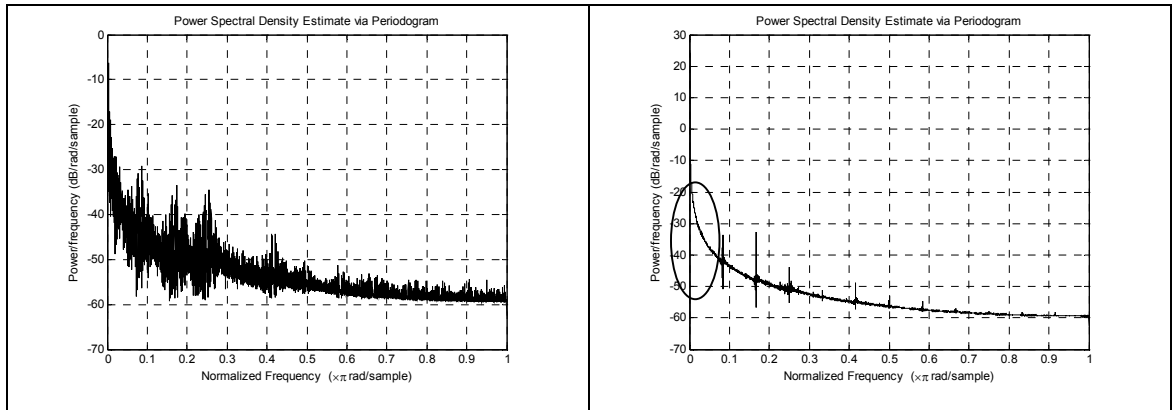
Az 3.2.2. szakaszban láttuk, hogy a villamos energia ára háromféle szezonális jelleget tükröz: éves, heti és napi szezonalitást. Most a 2. és 3. típusú szezonális kombinációjával foglalkozom, azaz modellezni szeretném az összes olyan szezonális jellegű hatást, ami az óránkénti árak autokorrelációjának megjelenéséért felelős, egészen 168-as késleltetésig. A 168-as késleltetéssel már nem foglalkozom, tehát mondhatjuk, hogy a héten belüli szezonális modellezése a cél.

A villamosenergia-árak szezonálisát mutatja a 34. ábra, amely az árak periodogramját (a folyamat spektrumának mintabeli becslését) jeleníti meg a Nord Pool esetén. Az egész periodogram lassú lefutása a folyamat hosszú távú memóriáját tükrözi (Weron [2006]), míg a kiugró tüskék azt jelzik, hogy fennáll az adott frekvenciához tartozó periodikus jelleg. A kisebb tüskék a napi szezonalitást, a (minden hetedik) nagyobb tüske a heti szezonalitást jelenti. A sikeres szűrés jelzője tehát a kis tüskék eltávolítása az ábrából.



34. ábra: A Nord Pool árak periodogramja

A 35. ábra mutatja be a szűrt árak periodogramját az 3.3.3.2. pontban ismertetett két szűrési módszer, a differenciálás és az átlagos hét esetén. A baloldali ábrán látszik a differenciálás hátránya, miszerint elrontja az idősorban megtalálható korrelációs szerkezetet. Az átlagos hét módszer a 35. ábra tanulsága szerint eltünteti a periodogramból a szezonalitást. A medián hét módszerrel hasonló eredményeket kapunk.



35. ábra: A Nord Pool szűrt árak periodogramja: differenciálás (*bal*) és átlagos hét (*jobb*)

Bár az átlagos és medián hét módszer eltünteti a periodogramból a szezonalitást, hátrányuk, hogy nem veszik figyelembe azt a tényt, hogy az árak eloszlása (nemcsak a várható érték, hanem az eloszlás teljes alakja) óráról órára változik, mint ahogy azt az előző fejezetben láttuk. Az átlagos és medián hét módszer ugyanis az adott óra eloszlását egy konstanssal mozgatja a vízszintes tengelyen. Ez mindenképpen szükséges, de nem elégséges: az így kapott eloszlások alakja, lecsengése továbbra is különbözni fog egymástól, mivel azt a vízszintes irányú mozgatás nem változtatja meg.

4.5.1. A GEV-szűrő

Az általam javasolt új módszer előnye (és egyben működési elve), hogy az eredő eloszlások ugyanazok legyenek. A szűrés során feltételezzük, hogy az óránkénti árak az előző alfejezetben bemutatott módon viselkednek, azaz GEV eloszlást követnek, különböző paraméterekkel. Emiatt a módszert „GEV szűrésnek” neveztem el.

A GEV szűrés lényege az alábbi változó-transzformáció:

$$y = F_{\ln}^{-1} F_i(x)$$

ahol $F_{\ln}^{-1}$ a lognormális eloszlás eloszlásfüggvényének inverze, míg F_i a GEV eloszlás eloszlásfüggvénye, ahol az i alsó index arra az órára utal, amelynek az áráról éppen szó van. Az x jelöli az eredeti, az y a transzformált adatokat. Megmutatható, hogy ha az eloszlásfüggvények értelmezési tartományát az eloszlások tartójára korlátozzuk, akkor a

fenti összefüggés mindig értelmezhető (létezik a lognormális eloszlás eloszlásfüggvényének inverze).

Ha a kiinduló feltételezésünk helyes, és az eredeti adatok GEV eloszlást követnek, akkor az $F_i(x)$ 0 és 1 közötti egyenletes eloszlású. Ha X jelöli az eredeti változót, amelynek eloszlásfüggvénye F_i , akkor az eloszlásfüggvény értéke az $F_i(x)$ helyen, ha $F_i(x)$ 0 és 1 között van:

$$P(F_i(X) < x) = P(F_i^{-1}(F_i(X)) < F_i^{-1}(x)) = P(X < F_i^{-1}(x)) = F_i(F_i^{-1}(x)) = x$$

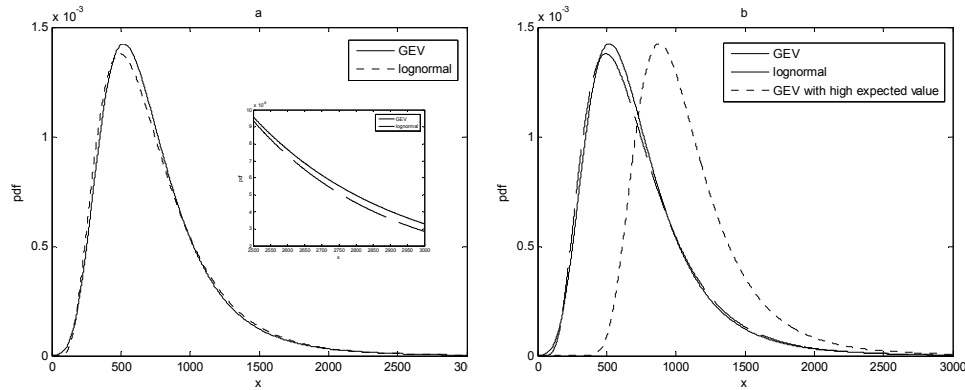
A fenti összefüggés során kihasználtuk, hogy az eloszlásfüggvény értelmezési tartományát korlátoztuk, így értelmes az inverz. Az y ezután lognormális eloszlást fog követni, hiszen ismert, hogy 0 és 1 közötti egyenletes eloszlású változót egy monoton eloszlásfüggvény inverzével transzformálva adott eloszlású valószínűségi változót kapunk (Denkinger [2001]).

A szűrés során a lognormális eloszlás választását az indokolja, hogy az alakja nagyon hasonlít a GEV eloszlásokhoz (így viszonylag kevés torzítást visz az adatokba a szűrés), valamint közgazdaságilag értelmes a tartója, tehát az eredő, szűrt adatokat is értelmezhetjük árakként. Előny továbbá, hogy számos idősormodell épül lognormális eloszlású adatokra, így a szűrt árak további modellezése is könnyen megoldható.

A transzformáció működését a 36. ábra illusztrálja. A baloldali ábrán a folytonos vonal mutatja az eredeti, a szaggatott vonal a transzformált adatok elméleti eloszlását. Ebben az esetben az eloszlások paramétereit úgy választottam meg, hogy a két eloszlás várható értéke és szórása ugyanakkora legyen, a GEV eloszlás alakparamétere pedig az előző részben bemutatott „magas” állapotú áraknak megfelelő. Látható, hogy a transzformált adatok eloszlása gyorsabban cseng le a széleken, így a szezonális szűrés egyben a kiugró villamosenergia-árak szűrését is magában foglalja. Ez nem jelenti azt, hogy a szűrés után a magas árak eltűnnek az idősorból, hanem a nagyságrendjük kisebb lesz. Vegyük észre, hogy a GEV szűrő alkalmazása esetén a kiugró értékek és a szezonális szűrése egyszerre történik, ezáltal megoldódik a 3.3.3.3. pontban ismertetett probléma, miszerint a kiugró értékek és a szezonális szűrése egymást feltételezi.

A jobboldali ábra ugyanezt a transzformációt mutatja, de itt már az eredeti eloszlás (pontosított vonal) várható értéke is magasabb. Ezt az eredeti eloszlást toljuk el először a vízszintes tengelyen (folytonos vonal), majd módosítjuk az eloszlást lognormálisra

(szaggatott vonal). Bár az ábra csak a várható érték módosítását illusztrálja, a transzformáció természetesen módosítja az eloszlás szórását is.



36. ábra: A GEV szűrő működésének illusztrálása

A GEV szűrés tehát egy kétlépéses transzformációt jelent: módosítjuk az eredeti eloszlás momentumait (várható értékét, szórását), majd megváltoztatjuk az eloszlás alakját. Ez utóbbi lépés a hagyományos szűrési eljárásokból hiányzik.

A **GEV szűrés lépései** tehát a következők:

1. Válasszuk szét az eredeti idősorunkat 168 részdőssorra az egyes óráknak megfelelően, és becsljük GEV eloszlást külön-külön mindegyikre.
2. Transzformáljuk az adatokat a $y = F_{\ln}^{-1} F_i(x)$ képletnek megfelelő módon.
3. Illesszünk a transzformált adatokra megfelelő modellt (pl. ARMA, ARIMA, stb.)

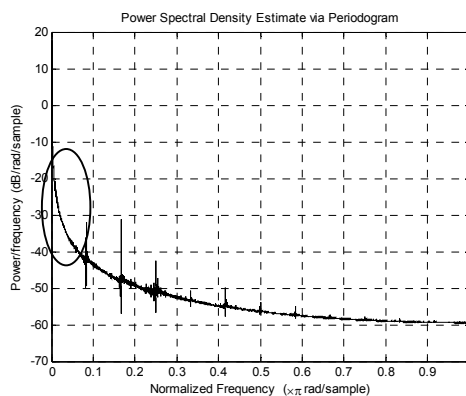
A szűrési eljárás előnye, hogy ha már dolgoztunk a szezonálisan szűrt adatokkal, és előrejelzést tudunk adni, akkor könnyű az inverz transzformációt definiálni:

$$x = F_i^{-1} F_{\ln}(y)$$

ahol az y a szezonálisan szűrt adatokat, az x a visszatranszformált adatokat jelöli. Az eloszlásfüggvények jelentése ugyanaz, mint korábban. Az inverz transzformáció értelmes, ha az eloszlásfüggvények értelmezési tartományát leszűkítjük a tartóra.

Az inverz transzformációval módosított adatok ugyancsak GEV eloszlást fognak követni, mint ahogy az eredeti adataink (a levezetés analóg az eredeti transzformációnál látottakkal). Ez egyben azt is jelenti, hogy visszacsempésszük a vastag széleket az eloszlásba.

A GEV szűrés hatékonyságát megvizsgáltam a rendelkezésre álló adatok segítségével. A 37. ábrán látható a Nord Pool GEV szűrt adatok periodogramja. Az a szándékunk, hogy eltüntessük a héten belüli szezonalitást jellemző kis tüskéket, sikeresnek mondható az ábra alapján (a körrel jelölt területen megszűntek a napi szezonalitást jelző tüskék). A heti szezonalitást leíró nagyobb tüskék természetesen megmaradtak, az nem volt célja a szűrésnek. Az is leolvasható az ábráról, hogy a periodogram egyebekben nem változott, például a hosszú távú lecsengése ugyanolyan maradt a szűrt adatoknak⁶². Ez azt jelenti, hogy a szűrt adatok nem igényelnek más jellegű modellezési módszereket, mint az eredeti villamosenergia-áraink.



37. ábra: A NordPool szűrt árak periodogramja

Az adataink tehát alátámasztják a GEV-szűrés alkalmazhatóságát a szezonális eltávolításában.

4.5.2. A GEV-szűrt árak Hurst exponense

A GEV-szűrés komplex transzformációval változtatja meg az idősort. Emiatt jogosan merül fel az a kérdés, hogy miként változnak meg az adatsor tulajdonságai a szűrés eljárás következtében.

Megvizsgáltam a különböző módszerekkel (l. 3.2.6. szakasz) becsült Hurst mutatók értékét, az eredményeket a 9. táblázat foglalja össze. Látható, hogy bár az eredeti árak és a szűrt árak esetén a H mutató becslései eltérhetnek az egyes módszerek esetén, a

⁶² A 4.5.2. szakaszban megmutatom, hogy a GEV-szűrés nem változtatja meg az idősor Hurst exponensét.

különbséget a legtöbb esetben betudhatjuk a mintavételi szóródásnak. Kivételt képez a periodogram regressziós módszer, amikor a becslés sztenderd hibái nem indokolják a H mutatók eltérését az ár és szűrt ár esetén. A többi módszer esetén megállapíthatjuk, hogy az árak és szűrt árak Hurst exponensei nem térnek el egymástól jelentősen, így a GEV-szűrés nem változtatja meg szignifikánsan az idősor Hurst exponensét.

	EEX		Nord Pool	
	Ár	Szűrt ár	Ár	Szűrt ár
R/S	0,88 (0,0929)	0,78 (0,0350)	0,87 (0,0399)	0,93 (0,0465)
Aggregated Variance	0,86 (0,0167)	0,86 (0,0258)	0,99 (0,0244)	0,99 (0,0365)
Differenced Variance	0,79 (0,0505)	0,85 (0,1341)	0,98 (0,2064)	1,02 (0,1902)
Periodogram regresszió	0,83 (0,0037)	0,89 (0,0079)	1,21 (0,0037)	1,08 (0,0062)
AWC	0,85 (0,0874)	0,93 (0,0587)	0,93 (0,0480)	0,98 (0,0601)
h(2)	0,84	0,90	1,15	1,18
h _{mod} (2)	0,83	0,90	1,14	1,19

9. táblázat: Az eredeti és GEV-szűrt árak H mutatói
Zárójelben a becslések sztenderd hibái.

A 9. táblázatban érdemes azt is észrevenni, hogy a szűrt árak esetén a h(2) és h_{mod}(2) értéke lényegében azonos. Mivel a különbséget a két érték között az eloszlás vastag széle okozza, és a GEV-szűréssel ezeket eltávolítottuk, ezért ez az eredmény nem meglepő.

4.5.3. Még egyszer a determinisztikus rezsinváltó modellről

Vegyük észre, hogy egyedül azzal a feltevessel kellett élnünk a GEV-szűrés során, hogy az óránkénti villamosenergia-árak GEV eloszlást követnek, és a szezonális okozója egyedül az, hogy a GEV eloszlások paraméterei eltérnek. Az a tény, hogy a GEV szűrő empirikusan is működik, nem mond ellent a modell feltevéseinek, és közvetve igazolja a 4.4. alfejezetben bemutatott modellt.

A GEV szűrő kiszűri a determinisztikus rezsinváltás hatását. A 4.4. alfejezetben láttuk, hogy a determinisztikus rezsinváltás abban jelenik meg, hogy az eloszlások paraméterei változnak a hét órájának megfelelően. Ha a GEV szűrővel az eloszlásokat

ugyanabba az eloszlásba transzformáljuk, akkor ez a hatás megszűnik, tehát kezeltük a rezsimeváltó jellegét.

A 4.4. alfejezetben bemutatott rezsimeváltó modell azt állította, hogy a hét különböző órái esetén az árak más-más paraméterű GEV eloszlást követnek. A különböző időszaki árak azonban nem függetlenek (l. 3.2.3. szakasz, 3.2.6. szakasz és 4.1. alfejezet). Nem az történik tehát, hogy a természet független, különböző eloszlásból választ az árak realizációihoz. A determinisztikus rezsimeváltó modellkeretben nem beszéltünk az intertemporális összefüggésekről, az autokorrelációkról és például a hosszú távú memóriáról. A GEV-szűrés eltávolítja ugyan a determinisztikus rezsimeváltás hatását, de az időszakok közötti összefüggéseket nem kezeli. A GEV-szűrés eredményeként kapott idősort tehát tovább lehet/kell modellezni különböző idősor-elemzési eszközökkel.

Nem triviális, hogy milyen eszközökkel lehet leírni a GEV-szűrt árak viselkedését. A GEV-szűrő ugyanis komplex transzformáció, amely a lineáris korrelációt nem tartja. Én nem látok ebben problémát a modellezés szempontjából. Nincs ugyanis tudomásunk arról, hogy az eredeti árak között lineáris kapcsolat lett volna. Ebben az esetben a GEV-szűréssel elrontanánk a fennálló összefüggéseket. Mivel azonban az eredeti árak esetén is egyszerűsítés a lineáris kapcsolat, ezt az egyszerűsítést a szűrt árak esetében is megtehetjük, ha az jól leírja az adatokat. Figyelnünk kell azonban arra, hogy a szűrt árak esetén felépített modellbeli lineáris korrelációkat nem vihetjük át egy az egyben az eredeti árakra. A két rendszer közötti átjárás vizsgálata további elemzéseket igényel, és meghaladja a disszertáció kereteit.

Bár a két rendszer közötti átjárás nem triviális, mégis lehet összefüggéseket találni az eredeti és a szűrt árak között. A 4.5.2. szakaszban láttuk, hogy az autokorrelációs struktúra hosszú távú lefutása nem változik a GEV-szűréssel, ezért a szűrt árak nem igényelnek lényegében más tulajdonságú idősoros modelleket, mint az eredeti árak. Szerencsére az idősor komplexitását (pl. kiugró értékek hatása, szezonális) sikerült csökkentenünk a GEV-szűrés alkalmazásával.

Az autokorrelációk mellett más kérdés is fellép a determinisztikus rezsimeváltó modellel kapcsolatban. A modell feltételezi, hogy az eloszlása más-más az egyes órák esetén, de az eloszlás ugyanaz egy, két, stb. hét múlva a hét azonos órájában. Ez a feltevés nyilvánvalóan nem tartható, hiszen az árakban trend figyelhető meg. A GEV-szűrés előtt ezért célszerű a trend eltávolítása az adatokból. A 37. ábrán bemutatott empirikus elemzés során én az árakban található exponenciális trendet szűrtem ki az eloszlás-transzformáció

előtt. A modellezőnek kell mérlegelnie, milyen trendet szűr ki az idősből (pl. a villamosenergia-termelés input árának szisztematikus változásának hatását). A GEV-szűrés a trend kiszűrése után alkalmazható.

A komplex villamosenergia-ár idősor modellezése során ezért célszerű először eltávolítani a trendet (és a ciklikus komponenseket) az adatokból, ezután GEV-szűréssel transzformálni az adatokat, majd a kapott idősorra megfelelő modellt keresni. A modellezés folyamata hasonlít a statisztika ún. dekompozíciós modelljére, ahol feltételezik, hogy az adatsor (Y) a trend (T), ciklikus komponens (C), a szezonális (S) és a véletlen hatások (E) összegeként (vagy szorzataként) áll elő (Hunyadi, Mundruczó és Vita [1997]):

$$Y = T + C + S + E$$

Az általam ajánlott modellezési keret abban különbözik ettől, hogy az egyes komponensek nem összeadódnak, hanem bonyolultabb a transzformáció:

$$Y = T + C + f_s(E)$$

Összefoglalva:

7a. tézis: A héten belüli szezonális kiszűrhető az eloszlások jellegének megváltoztatásával: a hét minden órájához definiálunk egy transzformációt, amely a Fréchet és a lognormális eloszlás eloszlásfüggvényén alapszik. (GEV-szűrő)

7b. tézis: A GEV-szűrő segítségével a kiugró értékek és a determinisztikus rezsimváltás szűrése is megtörténik.

7c. tézis: A GEV-szűrési eljárás nem változtatja meg szignifikánsan a becsült Hurst mutató értékét.

4.6. Alkalmazás

Az alfejezet célja, hogy ismertesse a bemutatott saját eredmények alkalmazását egy empirikus feladat esetén. Az alkalmazást azonban nem én készítettem, hanem konzulensként működtem közre Ujfalusi Dóra szakdolgozatának (Ujfalusi [2008]) elkészítése során. Dóra az EEX esetén egy ARFIMA-GARCH-modellt illesztett. Az eredményeim annyiban jelennek meg a munkájában, hogy az árakat a (hosszú távú memóriával rendelkező) frakcionális modellel illesztette $d = 0,3489^{63}$ -es frakcionális késleltetési paraméterrel. A hosszú távú memória szűrését a d ismeretében felírt $AR(\infty)$ reprezentáció segítségével szűrte ki, majd ezután ARMA-GARCH-modellt illesztett az általam előállított GEV-szűrt ár logaritmusára.

Ujfalusi Dóra modelljének célja az ár előrejelzése és az alapján egy hipotetikus portfólió VaR-bebecslése volt. Ezen kívül megvizsgálta a peaks-over-threshold (POT) EVT-módszer működését az adott feladat esetén.

A szakdolgozat azt a következtetést vonta le, hogy a POT módszernél egy ARFIMA-Student-GARCH jobban teljesít a VaR kiszámításában. A disszertáció szempontjából a szakdolgozat legfontosabb eredménye, hogy Dóra az EEX árakra szignifikáns modellt tudott illeszteni ARFIMA-GARCH modellel, ahol a modellben becsült együtthatóit a 10. táblázat tartalmazza.

Változó	Együttható	Sztenderd hiba	z-statisztika	p-érték
Konstans	0,38	0,018	20,0	0,0000
AR(1)	0,41	0,003	117,4	0,0000
AR(5)	0,03	0,003	9,0	0,0000
AR(23)	0,09	0,003	29,0	0,0000
AR(24)	0,15	0,003	44,8	0,0000
AR(48)	0,10	0,003	33,7	0,0000
AR(72)	0,09	0,003	30,0	0,0000
AR(96)	0,09	0,003	29,0	0,0000
Konstans	0,02	0,0006	26,1	0,0000
RESID(-1) ²	0,28	0,010	28,1	0,0000
GARCH(-1)	0,53	0,012	44,4	0,0000
t szabadságfok	4,15	0,083	50,3	0,0000

10. táblázat: Az ARFIMAt-GARCH becsült együtthatói⁶⁴

⁶³ A Hurst exponenst R/S becslés alapján számította ki.

⁶⁴ Forrás: Ujfalusi [2008].

A táblázat első blokkja a várható érték egyenlet együtthatóit tartalmazza. Látható, hogy az 1-es késleltetésű autoregresszív tag együtthatója 0,41. Ez azt jelenti, hogy az előző időszaki ár logaritmusának jelentős mértékben hozzájárul az adott órai ár logaritmusának meghatározásához, de látható, hogy az együttható szignifikánsan 1-nél kisebb. A szignifikáns autoregresszív késleltetések között szerepelnek a 24-es késleltetés többszörösei, ami azt mutatja, hogy a szezonális teljes mértékű megszüntetése a GEV-szűréssel nem sikerült. Ennek ellenére a szűrés biztosította, hogy egyáltalán kezelhető darabszámú késleltetéssel dolgozhassunk (pl. nem lett szignifikáns az összes késleltetés 24-ig bezárólag, mint ahogy az a szűrés nélkül könnyen előállhatott volna). A táblázat második blokkjában a variancia-egyenlet becsült együtthatóit. A variancia-modell perzisztenciája $0,81 < 1$, tehát a varianciát ért sokkok véges idő alatt lecsengenek. A táblázat harmadik blokkja a t-eloszlás becsült szabadságfokát mutatja meg: 4,15, ami azt jelenti, hogy az eloszlás szélei 4,15-ös hatványkitevővel esnek (l. McNeil, Frey, Embrechts [2005]). Ennél az értéknél nagyobbakat vártam, hiszen a GEV-szűrés azzal a feltételezéssel élt, hogy az árakat lognormális eloszlásba transzformálja, azaz a log áraknak normális eloszlásúnak kellene lennie. Ha azonban az eredményt az eredeti eloszlás 3.2.5. szakaszban becsült farokkitevőjével összehasonlítjuk, akkor látható, hogy a 2-3,5 közötti lecsengés jelentősen növekedett. Ennek oka a GEV-szűrés és a GARCH becslés együttes hatása.

Összességében azt mondhatjuk, hogy a hosszú távú memória szűrése és a GEV-szűrés együttesen hatékonynak bizonyult, hiszen azok a hatások, amelyeket ezekkel nem sikerült kiszűrni, könnyen modellezhetők autoregresszív tagok és GARCH modell segítségével. A két szűrő alkalmazása nélkül a felírandó modell sokkal összetettebb és átláthatatlanabb lett volna.

4.7. Az eredmények áttekintése avagy a stilizált tények újrágondolása

Hipotéziseimet és az eredményül kapott téziseket a 11. táblázatban foglaltam össze. Ezek fényében érdemes újra átgondolni a spot villamosenergia-árak stilizált tényeit. Az alábbiakban egyesével áttekintem a 3.2. alfejezetben részletezett stilizált tényeket a saját véleményem bemutatásával. A zárójelekben szereplő számok a tézisek sorszáma utalnak (l. 11. táblázat).

1. Az adatsorban kiugró értékek (*price spikes*) találhatóak.

Az időnként magas villamosenergia-árak szerves részei az idősornak. Ezek azonban nem hirtelen megjelenő kilógó értékek, hanem a villamos energia árának vastag szélű eloszlásából adódó magas realizációk (4). Egyes időszakokban a magas értékek valószínűsége növekszik, de a magas értékek nagyobb valószínűségét az okozza, hogy a hétnek egy kockázatosabb órájában vagyunk, ennél fogva determinisztikus jellegű a magasabb kockázat (6). Természetesen nem állíthatjuk, hogy adott órában kiugró értékkel lesz dolgunk, de azt igen, hogy a bekövetkezés valószínűsége nagyobb. A kiugró értékeket keresleti-kínálati sokkokkal magyarázó elméletek természetesen nem dőltek meg, hiszen a GEV eloszlás változó paramétereinek oka a kereslet változásában és a kínálat struktúrájában keresendő.

2. Magas az autokorreláció az idősorban.

A dolgozat eredményei alapján a lassan lecsengő autokorrelációs struktúra egyik oka az árfolyamat hosszú távú memóriája (1a). Az autokorreláció periodikus jellegének okozója a szezonális, amelynek nagy részét GEV szűrővel el lehet távolítani (7).

3. A volatilitás időben változik, az idősor heteroszkedasztikus (*heteroskedasticity*).

A heteroszkedasztikus jelleg részbeni oka, hogy a különböző órák árak eloszlásainak szórása nem azonos, hiszen más-más paraméterű GEV eloszlásból származnak a hét különböző óráinak árai (6). A különböző paraméterű GEV eloszlás nem magyarázza meg teljes mértékben a heteroszkedaszticitást, hiszen láttuk, hogy az említett hatást eltávolító GEV szűrő alkalmazása után is szignifikáns GARCH modellt lehet az adatsorra illeszteni.

4. Az adatsor szezonális vonásokat mutat (*seasonality*).

A szezonális okozója a GEV eloszlások determinisztikus változása, váltakozása (6). A GEV eloszlások leírják a volatilitás megfigyelt szezonális jellegét is. A szezonalitást a

különböző eloszlások létének figyelembe vételével ki lehet szűrni, ha az eloszlásokat ugyanabba az eloszlásba transzformáljuk (7). Az általam kidolgozott GEV szűrő a lognormális eloszlásba transzformálja az adatokat.

5. Az árak, hozamok eloszlása vastag szélű (*fat tails*).

Az árak eloszlása szignifikánsan GEV, azon belül Fréchet eloszlás (5a). A vastag széleket a Fréchet eloszlás hatványszerű lecsengése testesíti meg. Egy kapacitás-bővítési modell keretein belül azt találtam, hogy a Fréchet eloszlás, ezen belül a vastag szélek oka az, hogy a másnapi villamosenergia-tőzsdén a piaci kínálati görbén az ár a mennyiség exponenciális függvénye (5b). Másképpen fogalmazva: a vastag szélek oka, hogy az alacsony határkölségű erőművek átlagosan magasabb valószínűséggel tudják kibővíteni a kapacitásukat.

6. Egyes szerzők szerint a villamos energia ár antiperzisztens, egy-egy kiugró értéket követően visszatér az átlaghoz (átlaghoz való visszahúzás, *mean reversion*), míg mások szerint az ár idősor hosszú távú memóriával rendelkezik (*long memory*). A vizsgálatok szerint a villamos energia ára multifraktál folyamatot követ (*multifractality*).

A vizsgálataim azt mutatják, hogy a villamos energia ára perzisztens folyamatot követ 0,8 és 1 közötti Hurst exponenssel (1a). A más-más vizsgált változó és a Hurst exponens különböző definícióinak használata az oka, hogy a szakirodalom nem egységes a perzisztencia tekintetében (1a). Ha nem az árat, hanem a loghozamot vizsgáljuk, akkor reprodukálhatóak a szakirodalom egyes eredményei, de véleményem szerint nem érdemes a loghozam Hurst exponensét vizsgálni, mert a loghozam folyamata nem mutat stabil önaffin jelleget (1b). Éppen ezért (egyéb ok hiányában) nem célszerű a loghozam használata az ár ellenében (2).

7. Nincs konszenzus a szakirodalomban azzal kapcsolatban, vajon található-e egységgyök az ár idősorában, azaz integrált-e a folyamat.

Formális egységgyök vizsgálattal a dolgozatban nem foglalkoztam. A Hurst exponenssel foglalkozó eredményeim (1) azonban meggyőztek arról, hogy célszerű a loghozam helyett az árat vizsgálni a modellezés során, hiszen az ár jobban kezelhető matematikai tulajdonságokkal rendelkezik, a hozamnak nincs közvetlenül értelmezhető tartalma, illetve nincs ökonometria jellegű kényszerünk sem: nincs arra egyértelmű bizonyíték, hogy az ár egységgyök folyamatot követne (2).

	Hipotézis	Tézis
1.	A villamos energia ára perzisztens folyamatot követ, tehát hosszú távú memóriája van.	a. A villamos energia ára perzisztens folyamatot követ, tehát hosszú távú memóriája van. A Hurst mutató értékének nagyságrendje az ár esetén 0,8 és 1 között található. A logaritmizált ár Hurst exponensének nagyságrendje szintén 0,8 és 1 közé tehető. A NordPool ár folyamata rózsaszín zaj lehet. b. A loghozam és az árnövekmény 0,8 – 0,9 körüli H értékkel rendelkezik rövidtávon, azaz kb. 35 órán belül. Hosszabb időhorizonton a loghozam nem mutat tiszta önaffin jelleget. c. Ha az idősort feldaraboljuk, akkor a nap különböző órájához tartozó részhidősorok H mutatói eltérnek. Az éjszakai (csúcsidőszakon kívüli) órákban a Hurst exponens magasabb.
2.	Célszerű a modellezés során nem a hozamot, hanem az árat vagy az ár logaritmusát használni.	A loghozam és az árnövekmény nem mutat önaffin jelleget, nincs közvetlenül értelmezhető tartalma, nincs egyértelmű bizonyíték az áralakulás folyamatának integrált voltára, ezért a modellezés során célszerű nem a hozamot vagy az árnövekményt, hanem az árat vagy az ár logaritmusát használni.
3.	A villamos energia árának multifraktál jellegét az eloszlás vastag széle okozza. A vastag eloszlásszél okozta hatás kiszűrése után a folyamat monofraktál.	a. A villamos energia árának multifraktál jellegét döntően az eloszlás vastag széle okozza. A vastag eloszlásszél okozta hatás kiszűrése után a folyamat monofraktálnak tekinthető. b. A multifraktál elemzésben a vastag szélek hatása nem minden esetben szűrhető ki a teljes adatsor vizsgálatával. A Nord Pool esetén a monofraktál jelleg csak a hét órájának megfelelően felbontott részhidősorokban mutatható ki.
4.	A kiugró villamosenergia-árak az idősor szerves részét képezik, ugyanúgy viselkednek, mint az átlagos szintű árak, ezért kiugró árakról sem beszélhetünk.	a. A kiugró villamosenergia-árak a korrelációk tekintetében ugyanúgy viselkednek, mint az átlagos szintű árak. b. A kiugró ár (ártüske) egy magas realizáció egy vastag szélű eloszlásból, nem pedig outlier vagy másik rezsim. Külön névvel illetni csak zavart okoz.

		c. A változó intenzitású kiugró értékek és a héten belüli szezonális okozta nemstacionáris jelleg hatása kiszűrhető a Hurst exponens becsléséből a módosított általánosított Hurst exponens használatával és az idősor óránkénti részidősorokra bontásával.
5.	A villamosenergia-ár eloszlása általánosított extrémérték eloszlás.	a. A khi-négyzet illeszkedési teszt nem utasítja el, hogy a spot villamosenergia-árak Fréchet eloszlást követnek. A Fréchet eloszlás az adatok eloszlását az eloszlás szélénél jobban közelíti, mint a Lévy eloszlás. b. Egy kapacitás-bővítési modellben megmutattam, hogy a Fréchet eloszlás illeszkedésének oka, hogy a villamosenergia-piacon a piaci kínálati görbe exponenciális. A levezetés az extrémérték-elméletből, speciálisan a Fisher-Tippett tételből adódik. A modell kulcsfeltétele, hogy a villamosenergia-kereslet rögzített, és a keresleti egységeket egyesével hirdetik meg az erőművek számára.
6.	A villamos energia ára rezsimek determinisztikusan követik egymást.	A hét különböző óráiban más-más paraméterű GEV eloszlás a villamosenergia-árak eloszlása. Néhány, magasabb várható értékű óra esetén a hatványszerű lecsengés lassabb, így nagyobb a magas árak kockázata. Mivel az eloszlások determinisztikusan váltják egymást, ezért a jelenséget determinisztikus rezsimeknek neveztem el.
7.	A héten belüli szezonális kiszűrhető az eloszlások jellegének megváltoztatásával.	a. A héten belüli szezonális kiszűrhető az eloszlások jellegének megváltoztatásával: a hét minden órájához definiálunk egy transzformációt, amely a Fréchet és a lognormális eloszlás eloszlásfüggvényén alapszik. (GEV-szűrő) b. A GEV-szűrő segítségével a kiugró értékek és a determinisztikus rezsimek szűrése is megtörténik.

11. táblázat: Hipotézisek és tézisek

Összegzés

A dolgozat legfontosabb eredménye annak bemutatása, hogy a kereskedés mechanizmusa minden egyes órában ugyanazt az áreloszlást (az általánosított extrémérték-eloszlást) hozza létre, melyben a kiugróan magas árak az eloszlás vastag széleként jelennek meg. A villamosenergia-kereslet (és -kínálat) jellegzetes ciklikussága azt eredményezi, hogy az eloszlások periodikusan váltogatják egymást. Ennek a megfigyelésnek a segítségével a szezonális kiszűrhető az adatsorból. A kiugró értékek (vastag eloszlásszélek) és a heteroszkedaszticitás egy része a szezonális szűréssel (az óránként különböző eloszlások megváltoztatásával) szintén eltávolítható.

Az általam felépített villamosenergiaár-modellben a (hosszú távú memóriával rendelkező) véletlen hatásokra rátevődik egy szezonális, amely megváltoztatja a hét óráinak eloszlását, végül ezekhez hozzáadódik egy trend, illetve ciklikus komponens. A modellezési eljárás nem bonyolultabb, mint additív szezonális esetén. Az általam felépített modellel azt nyertük, hogy a szezonális hatások után fennmaradó véletlen komponens könnyebben modellezhető.

A 1.2. alfejezetben láttuk, hogy a különböző (pl. határidős, másnapi, kiegyenlítő) villamosenergia-piacok között van kapcsolat, hiszen ugyanazt a terméket más-más piacon is be lehet szerezni, illetve el lehet adni. Az itt levezetett modell a spot óránkénti árak független modellje, nem támaszkodik más piaccal vagy termékkel való kapcsolódásokra. A 3.3.4. szakaszban ismertetett statisztikai modellek közül sok él ezzel a megoldással. Ezt azzal indokolhatjuk, hogy a különböző piacok időben szeparálódnak, nem járhatók át oda-vissza, és egyszerre nem lehet a különböző piacokon kereskedni.

A disszertáció-tervezet eredményeinek gyakorlati alkalmazását az alábbi területeken tartom elképzelhetőnek:

- A Hurst exponenssel kapcsolatos félreértések tisztázása megkönnyíti a modellválasztást (hosszú távú memória, monofraktál jelleg).
- A loghozam hátrányos tulajdonságaira felhívtam a figyelmet, így a jövőben a modellezők körültekintőbben tudnak eljárni.
- A kutatás rávilágított, hogy a kiugró árakat az eloszlás széleként, nem pedig különálló rezsimként vagy ugrásként kell beépíteni a modellekbe.

- A villamosenergia-ár (az adott órának megfelelő) feltételes eloszlásának ismeretében egyszerűen lehetővé válik a közép és hosszú távú árelőrejelzés.
- A szűrési eljárás megkönnyíti a rövid távú árelőrejelzést.
- A piaci kínálati görbe elemzésével képet kaphatunk a villamosenergia-ár adott időszaki feltételes eloszlásáról.
- A determinisztikusan változó paraméterű GEV eloszlások modellje alkalmas a kiugró árak, a szezonális és a változó volatilitás leírására a modellezés során.

További lehetséges kutatási kérdések, melyek a dolgozat készítése során felmerültek bennem, de megválaszolásuk már nem fért a dolgozat keretei közé:

- A determinisztikus rezsinváltó modellben a becsült GEV eloszlások szórásának és az alakparaméterének kapcsolata.
- Mitől függ a determinisztikus rezsinváltó modellben a becsült GEV paraméterek kapcsolata? Hogyan változik ez az egyes tőzsdék esetén?
- A Nord Pool esetén azt találtuk, hogy a hét órájának megfelelő 168 részüidősorból 4-14 multifraktál. Miért pont ezekre az órákra adódott ez az eredmény?
- A GEV szűrés hatékonyságának összehasonlítása a többi szezonális szűrési eljárással a gyakorlatban.
- A 4.6. alfejezetben bemutatott modell alapján ARFIMA-GARCH modell illesztése, és annak megvizsgálása, hogy az illesztett modell mekkora hibát ad az ár előrejelzése során.
- Formális elméleti keretek felépítése a kiugró árak kockázatának előrejelzésére (*early warning system*).

A felépített vizsgálati keretek között ezek a kérdések egyszerűen vizsgálhatók.

Függelék

A. A frakcionális Wiener-folyamat szimulációja és H mutatója

A fejezet célja, hogy bemutassa a frakcionális Wiener-folyamat egy lehetséges szimulációját, és illusztrálja a Hurst exponens és általánosított Hurst exponens kiszámítását egy szimulált adatsorral, melynek ismerjük a fenti mutatóit. Ezzel teszteljük a kiszámítási módszereket.

A frakcionális Wiener-folyamat (fWf) szimulációja⁶⁵:

1. $z_1, z_2, \dots, z_n$ előállítása. $z_i: N(0,1)$
2. R_H kovariancia mátrix előállítása: a mátrix t,s eleme: $R_H(t,s)$ a stilizált tényekről szóló fejezetben is leírt

$$R_H(t,s) = \frac{1}{2} \left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H} \right), \quad 0 < H \leq 1$$

3. R_C : R_H Cholesky-faktorizációja
4. $w_H = R_C z$

A Cholesky-faktorizáció biztosítja, hogy w_H kovariancia mátrixa pont az R_H legyen.

Az itt bemutatott módszer hosszú idősor esetén lassú, hiszen ekkor időigényes a nagy R_H mátrix Cholesky-faktorizáltjának kiszámítása. Léteznek hatékonyabb módszerek is (l. Dieker [2004]), de ez az egyszerű és egzakt szimulációra lehetőséget adó módszer illusztrációs célra számunkra most megfelelő.

A stilizált tényeket bemutató részben a 15. ábrán látható a fWf realizációja különböző H esetén. Ezekből az idősorokból (a 15. ábrán szereplő 200 érték helyett 2000 darab szimulált értékkel számolva), a hivatkozott fejezetben bemutatott módszerekkel Hurst exponenst számolva az eredményeket a 12. táblázat foglalja össze⁶⁶. A különböző eljárások megbízhatóan teljesítenek, kivéve az ARFIMA alapú módszert kis H mutató esetén. Az „Aggregated Variance” módszer kiegyensúlyozottan jó becsléseket ad. A DFA alapú módszerek (a táblázat utolsó két sora) szintén elfogadható teljesítményt nyújtanak.

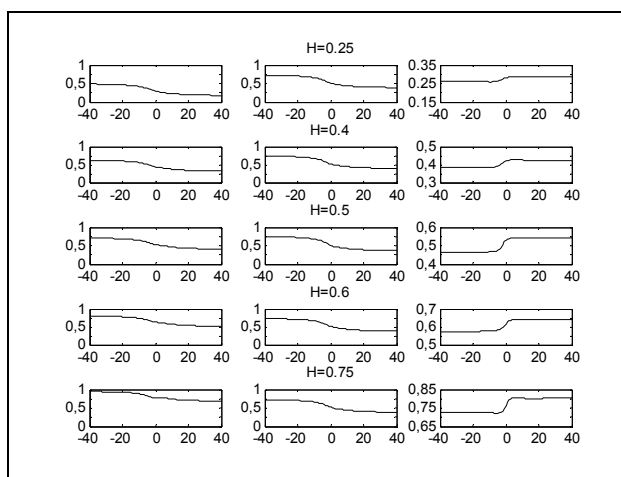
⁶⁵ Dieker [2004].

⁶⁶ Az adatsorunk integrált, tehát a növekmények szerepelnek inputként a különböző módszerek esetén.

H	0,25	0,4	0,5	0,6	0,75
R/S ⁶⁷	0,38	0,48	0,56	0,65	0,74
Aggregated Variance ⁶⁸	0,26	0,41	0,51	0,62	0,77
Differenced Variance ⁶⁹	0,29	0,51	0,56	0,71	0,76
Periodogram regresszió ⁷⁰	0,23	0,42	0,54	0,66	0,82
AWC ⁷¹	0,21	0,38	0,42	0,51	0,71
ARFIMA ⁷²	0,50	0,50	0,53	0,65	0,83
DFA ⁷³	0,28	0,42	0,52	0,62	0,79
$h_{\text{mod}}(2)$ ⁷⁴	0,26	0,42	0,54	0,63	0,79

12. táblázat: A frakcionális Wiener-folyamat szimulációinak H becslései

A 38. ábra szemlélteti a szimulált idősorok általánosított Hurst exponensét, illetve annak az 3.2.6. alfejezetben leírt felbontását. Az általánosított Hurst exponensek nem vízszintesek a mintavételi szóródás és a véges mintaelemszám miatt, de a korrigált görbe már közel van az egyeneshez, és kis hibával nagyjából vízszintes az elméleti H érték körül.



38. ábra: A frakcionális Wiener-folyamat szimulációinak általánosított Hurst exponensei és felbontásuk
Baloldal: általánosított Hurst exponens, $h(q)$. *Középső oszlop:* a kevert idősor általánosított Hurst exponense, $h_{\text{shuffled}}(q)$. *Jobboldal:* a korrelációkból adódó általánosított Hurst exponens, $h_{\text{mod}}(q)$.

⁶⁷ R programcsomag fArma könyvtár.

⁶⁸ R programcsomag fArma könyvtár.

⁶⁹ R programcsomag fArma könyvtár.

⁷⁰ R programcsomag fArma könyvtár.

⁷¹ R programcsomag fArma könyvtár.

⁷² R programcsomag fracdiff könyvtár. ARFIMA becslése, utána $H = d + 0,5$.

⁷³ MATLAB saját program.

⁷⁴ MATLAB saját program.

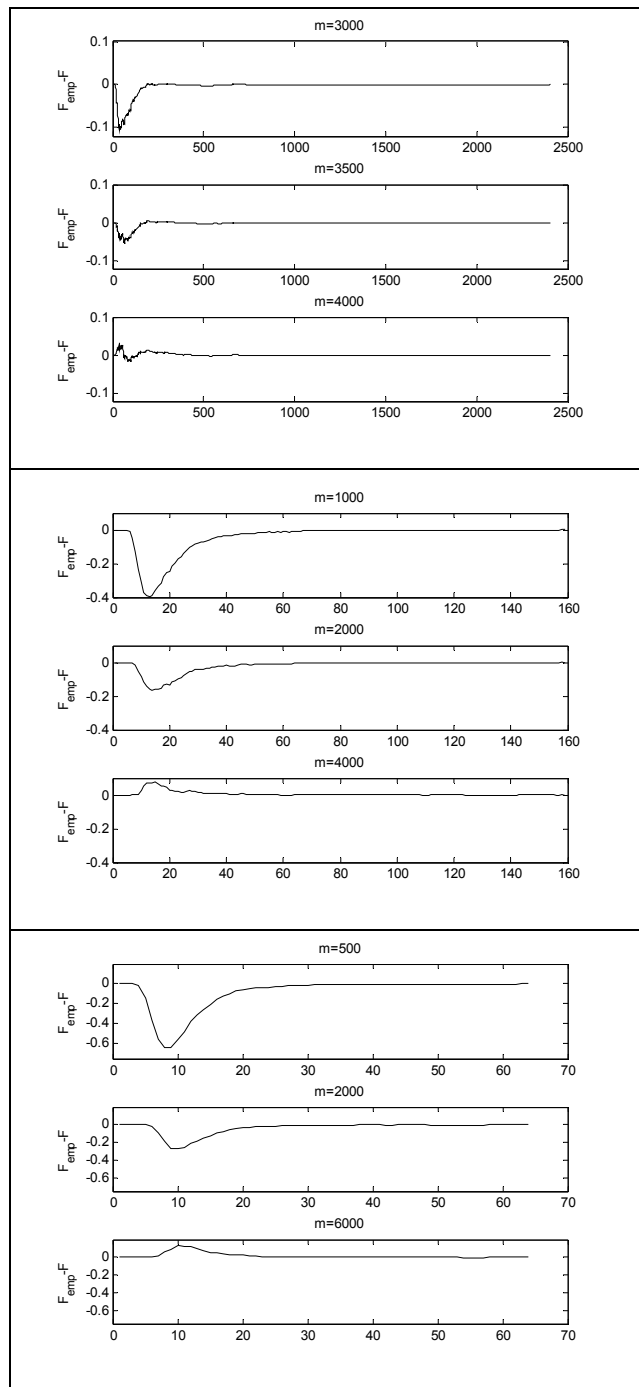
B. A blokkmaximumok konvergenciája

Mint arról a 4.3. alfejezetben szó volt, IID változók centrált és normált maximumainak határeloszlása GEV eloszlás. Ebben az alfejezetben a határeloszláshoz történő konvergenciát vizsgálom a Fréchet eloszlás esetében.

Mint ismeretes (l. Embrechts, Klüppelberg, Mikosch [2003]), a Fréchet eloszlás vonzási medencéjébe a széleknél hatványszerűen eső eloszlások tartoznak. Tehát ha az eloszlásfüggvény $- \alpha$ hatvánnyal közelíti meg az 1-et, akkor a centrált és normált blokkmaximumok határeloszlása α alakparaméterű Fréchet eloszlás. A vizsgálat eszközéül ezért a Student-féle t-eloszlást választottam, amelynél az eloszlásfüggvény a szabadságfoknak megfelelő kitevővel közelíti meg az 1-et.

Generáltam $m \cdot n$ elemű IID véletlen mintát a t-eloszlásból, ahol m a blokkok hosszát, n pedig a blokkok számát jelenti. A Fisher-Tippett tétel értelmében a centrált és normált maximumok a sztenderd felírású Fréchet eloszlással közelíthetők, így a maximumok az általános alakú Fréchet eloszláshoz fognak hasonlítani. A hasonlóság mértéke attól függ, milyen gyorsan konvergál a centrált és normált maximum a Fréchet eloszláshoz. A Fisher-Tippett tétel állítása arra az esetre vonatkozik, ha az m végtelenbe tart. Hogy néz ki az eloszlás, ha az m nagy, de véges? Az eloszlás mely része konvergál gyorsabban?

Kiszámítottam az n darab blokk esetén a blokkmaximumokat, illesztettem GEV (Fréchet) eloszlást, majd összevettem, hogy a maximumok eloszlása mennyire hasonlít az illesztett eloszlásra. Az 4.3. alfejezetben használt módszert követve kiszámítottam a D távolságot az empirikus és az elméleti eloszlásfüggvény között. Az eredményeket a 39. ábra mutatja be. Az ábrán látható, hogy kisebb m blokkméret esetén is kicsi a hiba az illesztett eloszlásfüggvényben az eloszlás felső szélénél. Az eloszlás közepén kis blokkméret esetén nagyobb a hiba, míg a blokkméret növelésével ez a hiba csökken. A blokkmaximumok eloszlása tehát az eloszlás széleinél konvergál gyorsabban, míg a konvergencia az eloszlás közepén lassabb.



39. ábra: A t-eloszlás blokkmaximumainak konvergenciája az m blokkméret függvényében
Felső ábra: szabadságfok = 2. *Középső ábra:* szabadságfok = 3. *Alsó ábra:* szabadságfok = 4.

(Az itt bemutatott összefüggés nem a saját eredményem. A jelenséget Jánosi Imrétől hallottam, akitől sajnos nem kaptam pontos forrást, illetve én sem találtam szakirodalmat. Az eredményeket sikerült reprodukálni, tehát megbízhatóak. A jelenség leírójától elnézést kérek, és pótolom a hivatkozást, amint tudomást szerzek a forrásról.)

Hivatkozások jegyzéke

- Atkins, Frank J. – Chen, Jin [2002]: Fractional difference modeling on electricity prices in Alberta. *Kézirat*. University of Calgary.
- Barney, Lee A. [2002]: AURORA Electric Market Model. Overview. *Konferencia-előadás*. Midwest Power Marketers Conference.
- Bashan, A. – Bartsch, R. – Kantelhardt, J.W. – Havlin, S. [2008]: Comparison of detrending methods for fluctuation analysis. *Physica A*. Vol 387, 5080-5090. o.
- Bassler, Kevin E. – Gunaratne, Gemunu H. – McCauley, Joseph L. [2005]: Hurst exponents, Markov processes, and nonlinear diffusion equations. *Physica A*. Vol 369, pp. 343-353.
- Bompard, Ettore – Carpaneto, Enrico – Ciwei, Gao – Napoli, Roberto – Benini, Michele – Gallanti, Massimo – Migliavacca, Gianluigi [2008]: A game theory simulator for assessing the performances of competitive electricity markets. *Electric Power Systems Research*. Vol 78, pp. 217-227.
- Borovkova, S. – Permana, F.J. [2006]: Modelling electricity prices by the potential jump-diffusion. *Stochastic Finance*. 239-263. o.
- Borzen [2003]: Rules for the Operation of the Electricity Market. *Kézirat*. Borzen.
- Bosco, Bruno – Parisio, Lucia – Pelagatti, Matteo – Baldi, Fabio [2007]: A robust multivariate long run analysis of European electricity prices. *Műhelytanulmány*. Fondazione Eni Enrico Mattei, Working Paper 2007.103.
- Bouchaud, Jean-Philippe – Potters, Marc [2003]: Theory of Financial Risk and Derivative Pricing. From Statistical Physics to Risk Management. Second Edition. Cambridge University Press, Cambridge.
- Byström, Hand NE [2001]: Extreme Value Theory and Extremely Large Electricity Price Changes. *Műhelytanulmány*. Lund University, Department of Economics, 2001:19.
- Buchanan, Mark [2004]: Itt és mindenütt. Előre jelezhetetlen avagy miért egyszerűbb a világ, mint gondolnánk. Akkord. Talentum Tudományos Könyvtár. Budapest.
- Bunn, Derek W. [2004]: Structural and Behavioural Foundations of Competitive Electricity Prices. In: Bunn, Derew W. (ed.): Modelling prices in competitive electricity markets. John Wiley & Sons. Wiley Finance Series. Chichester, England.

- Carnero, M. Angeles – Koopman, Siem Jan – Ooms, Marius [2003]: Periodic Heteroskedastic RegARFIMA Models for Daily Electricity Spot Prices. *Műhelytanulmány*. Tinbergen Institute Discussion Paper TI 2003-071/4.
- Clauset, A. – Shalizi, C. R. – Newman, M. E. J. [2009]: Power-law distributions in empirical data. *Kézirat*.
- Darvas Zsolt [2005]: Idősorelemzés. *Kézirat*. Egyetemi tananyag, Budapesti Corvinus Egyetem.
- De Jong, Cyriel [2006]: The Nature of Power Spikes: A Regime-Switch Approach. *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*. Vol 10 (3).
- Denkinger Géza [2001]: Valószínűségszámítás. Nemzeti Tankönyvkiadó. Budapest.
- De Sanctis, Angela – Mari, Carlo [2007]: Modelling spikes in electricity markets using excitable dynamics. *Physica A*. Vol 384, pp. 457-467.
- Diebold, Francis X. – Inoue, Atsushi [2000]: Long memory and regime switching. *Műhelytanulmány*. NBER Technical Working Paper 264.
- Dieker, Ton [2004]: Simulation of a fractional Brownian motion. *Kézirat*.
- EEX [2008]: EEX Product Information. Power. *Kézirat*.
- Embrechts, Paul – Klüppelberg, Claudia – Mikosch, Thomas [2003]: Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Corrected Fourth Printing. Springer. Heidelberg, Germany.
- Erzgräber, Hartmut – Strozzi, Fernanda – Zaldívar, José-Manuel – Touchette, Hugo – Gutiérrez, Eugénio – Arrowsmith, David K. [2008]: Time series analysis and long range correlations of Nordic spot electricity market data. *Physica A*. Vol 387 (26), pp. 6567-6574.
- Escribano, Álvaro – Peña, Juan Ignacio – Villaplana, Pablo [2002]: Modeling electricity prices: international evidence. *Műhelytanulmány*. Universidad Carlos III de Madrid, Departamento de Economía, Economics Series 08, Working Paper 02-27.
- Eydeland, A. – Geman, H. [1999]: Fundamentals of electricity derivatives. *In: Energy Modelling and Management of Uncertainty*. Risk Books, London.
- Eydeland, Alexander – Wolyniec, Krzysztof [2003]: Energy and Power Risk Management. New Developments in Modeling, Pricing, and Hedging. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, U.S.A.
- Geman, Hélyette [2005]: Commodities and Commodity Derivatives. Modeling and Pricing for Agriculturals, Metals and Energy. John Wiley & Sons. Chichester, England.

- Geman, Hélyette – Roncoroni, Andrea [2006]: Understanding the Fine Structure of Electricity Prices. *Journal of Business*. Vol 79 (3), pp. 1225-1261.
- Haldrup, Niels – Nielsen, Morten Ørregaard [2006]: A regime switching long memory model for electricity prices. *Journal of Econometrics*. Vol 135, pp. 349-376.
- Hess, Christian [2008]: Adequation Tests. *Kézirat*.
- Hochreiter, R. – Pflug, G. Ch. – Wozabal, D. [2005]: Multi-stage stochastic electricity portfolio optimization in liberalized energy markets. *Konferencia-kiadvány*. 22nd International Federation for Information Processing TC7 Conference on System Modeling and Optimization.
- Huisman, Ronald – Mahieu, Ronald [2001]: Regime Jumps in Electricity Prices. *Műhelytanulmány*. Erasmus Research Institute of Management Report Series, Research in Management, ERS-2001-48-F&A.
- Hull, John C. [2005]: Options, Futures, and Other Derivatives (6th edition). Pearson, Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A.
- Hunyadi László – Mundruczó György – Vita László [1997]: Statisztika. Aula, Budapest.
- HUPX [2008]: Szervezett magyar villamosenergia-piac. *Sajtóközlemény*. HUPX Magyar Szervezett Villamosenergia-piac Zrt.
- Hurst, H.E. [1951]: Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*. Vol 116, pp. 770-808.
- Jiang, Zhi-Qiang – Zhou, Wei-Xing [2007]: Multifractality in stock indexes: Fact or fiction? *Physica A*. Vol 387, pp. 3605-3614.
- Jorion, Philippe [1999]: A kockázatosított érték. Panem. Budapest.
- Kahle, Thomas [2006]: The Glivenko-Cantelli Theorem and its Generalizations. *Kézirat*.
- Kantelhardt, Jan W. – Zschneider, Stephan A. – Koscielny-Bunde, Eva – Havlin, Shlomo – Bunde, Armin – Stanley, H. Eugene [2002]: Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A*. Vol 316, pp. 87-114.
- Koekebakker, Steen – Ollmar, Fridthjof [2001]: Forward curve dynamics in the Nordic electricity market. *Kézirat*.
- Kovács Erzsébet [2003]: Kárstatisztika. *Kézirat*. Budapesti Corvinus Egyetem.
- Kovács Erzsébet [2004]: Pénzügyi adatok statisztikai elemzése. Tanszék Pénzügyi Tanácsadó és Szolgáltató Kft. Budapest.
- Leite, A – Rocha, AP – Silva, ME – Gouveia, S – Carvalho, J – Costa, O [2007]: Long-Range Dependence in Heart Rate Variability Data: ARFIMA Modelling vs

- Detrended Fluctuation Analysis. *Computers in Cardiology*. Sept. 30 2007 – Oct. 3 2007, pp. 21-24.
- Mandal, Paras – Senjyu, Tomonobu – Uezato, Katsumi – Funabashi, Toshihisa [2005]: Several-Hours-Ahead Electricity Price and Load Forecasting Using Neural Networks. *Konferencia-kiadvány*. IEEE Power Engineering Society General Meeting, pp. 2146-2153.
- Marossy Zita – Szenes Márk [2008]: Analysis of day-ahead electricity data. *Konferencia-előadás*. 3rd MANMADE Management Committee Meeting, Collegium Budapest.
- McNeil, Alexander J. – Frey, Rüdiger – Embrechts, Paul [2005]: Quantitative Risk Management. Concepts, Techniques and Tools. Princeton University Press. Princeton Series in Finance. Princeton, U.S.A.
- Medvegyev Péter [2008]: Zűrzavaros bevezetés a sztochasztikus analízisbe közgazdászok számára. *Kézirat*. Budapesti Corvinus Egyetem.
- Misiorek, A. – Trück, S. – Weron, R. [2006]: Point and Interval Forecasting of Spot Electricity Prices: Linear vs Non-Linear Time Series Models. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*. Vol 10 (3), Article 2.
- Molnár Sándor – Dang, Trang Dinh [2000]: Pitfalls in Long Range Dependence Testing and Estimation. *Konferencia-kiadvány*. IEEE Global Telecommunications Conference. Vol 1, pp. 662-666.
- Montanari, Alberto – Rosso, Renzo – Taqqu, Murad S. [1997]: Fractionally differenced ARIMA models applied to hydrologic time series: Identification, estimation, and simulation. *Water Resources Research*. Vol 33 (5), pp. 1035-1044.
- NordPool [2008]: Elspot market at the transitions to/from summertime (daylight-saving time) and standard time. *Kézirat*.
- Norouzzadeh, P. – Dullaert, W. – Rahmani, B. [2007]: Anti-correlation and multifractal features of Spain electricity spot market. *Physica A*. Vol 380, pp. 333-342.
- Petrimán Zita [2005]: A villamosenergia-árak modellezése: itt az idősor, hol az idősor. *Konferencia-kiadvány*. Tavaszi Szél Konferencia, Doktoranduszok Országos Szövetsége. 324-327. o.
- Pilipovic, Dragana [1997]: Energy Risk. Valuing and Managing Energy Derivatives. McGraw-Hill, New York.
- Putz, Tatjana [2003]: Energy Price Modelling and Risk Management. *Doktori disszertáció*. Wirtschaftsuniversität Wien.

- REKK [2008]: A 2008. évi árampiaci modellváltás rövid értékelése. *Műhelytanulmány*. Regionális Energiagazdasági Kutatóközpont, 2008-1.
- Resta, Mariana [2004]: Multifractal analysis of Power Markets. Some empirical evidence. *Kézirat*.
- Sanders, D. E. A. [2005]: The modelling of extreme events. *Kézirat*.
- Sapio, Sandro [2004]: Market Design, Bidding Rules, and Long Memory in Electricity Prices. *Műhelytanulmány*. Laboratory of Economics and Management Working Paper Series 2004/07.
- Sarker, M. M. A [2007]: Estimation of the self-similarity parameter in long memory processes. *Journal of Mechanical Engineering*. Vol 38, pp. 32-37.
- Seifert, Jan – Uhrig-Homburg, Marliese [2007]: Modelling jumps in electricity prices: theory and empirical evidence. *Review of Derivatives Research*. Vol 10 (1), pp. 59-85.
- Serati, Massimiliano – Manera, Matteo – Plotegher, Michele [2008]: Modelling Electricity Prices: from the State of the Art to a Draft of a New Proposal. *Konferencia-előadás*. 3rd MANMADE Management Committee Meeting, Collegium Budapest.
- Serletis, Apostolos – Andreadis, Ioannis [2004]: Nonlinear Time Series Analysis of Alberta's Deregulated Electricity Market. In: Bunn, Derew W. (ed.): Modelling prices in competitive electricity markets. John Wiley & Sons. Wiley Finance Series. Chichester, England.
- Simonsen, Ingve [2003]: Measuring Anti-Correlations in the Nordic Electricity Spot Market by Wavelets. *Physica A*. Vol 322, pp. 597-606.
- Simonsen, Ingve – Hansen, Alex – Nes, Olav Magnar [1998]: Determination of the Hurst Exponent by use of Wavelet Transforms. *Physical Review E*. Vol 58 (3), pp. 2779-2787.
- Simonsen, Ingve – Weron, Rafal – Mo, Birger [2004]: Structure and stylized facts of a deregulated power market. *Műhelytanulmány*. 1st Bonzenfreies Colloquium on Market Dynamics and Quantitative Economics.
- Soofi, Adbol S. – Payesteh, Sayeed [2002]: ARFIMA Modelling and Persistence of Shocks to the Exchange Rates: Does the Optimal Periodogram Ordinate Matter? *Advanced Modeling and Optimization*. Vol 4 (1).
- Stevenson, Max [2001]: Filtering and Forecasting Spot Electricity Prices In The Increasingly Deregulated Australian Electricity Market. *Műhelytanulmány*.

- Quantitative Finance Research Centre, University of Technology, Sydney, Research Paper Series 63.
- Sun, Wei – Zhang, Jie [2008]: Forecasting Day ahead Spot Electricity Prices Based on GASVM. *Konferencia-kiadvány*. International Conference on Internet Computing in Science and Engineering.
- Száz János [2003]: Kötvények és opciók árazása. Az opciók szerepe a modern pénzügyekben. PTE KTK, Pécs.
- Trück, Stefan – Weron, Rafal – Wolff, Rodney [2007]: Outlier Treatment and Robust Approaches for Modeling Electricity Spot Prices. *Műhelytanulmány*. Munich Personal RePEc Archive 4711.
- Tulassay Zsolt [2006]: ARCH/GARCH modellek. *Kézirat*. Budapesti Corvinus Egyetem, Áringadozások a pénzügyi piacokon tárgy, szemináriumi anyag.
- Tulassay Zsolt [2007]: A pénzügyi piacok stilizált tényei és az ARCH/GARCH-modellek. *Kézirat*. Budapesti Corvinus Egyetem, Áringadozások a pénzügyi piacokon tárgy, előadás.
- Ujfalusi Dóra [2008]: Kockázatosított érték és extrémérték-elmélet a villamosenergia-piacon. *Szakdolgozat*. Budapesti Corvinus Egyetem.
- Varga Balázs [2005]: Azonnali árfolyamok a villamosenergia-piacon: egy ökonometriai vizsgálat. *Szakdolgozat*. Budapesti Corvinus Egyetem.
- Verschuere, Michel [2003]: Modeling Electricity Markets. *Konferencia-előadás*. 1st Flemish Actuarial and Financial Mathematics Day.
- Wang, QingQing – Dong, Zhao Yang – Li, Xue – Zhao, Jun Hua – Wong, Kit Po [2007]: An Effective Approach to Predicting Electricity Market Price Spikes. *Konferencia-kiadvány*. IEEE Power Engineering Society General Meeting. Pp. 1-7.
- Weron, Rafal [2000]: Energy price risk management. *Physica A*. Vol 285, pp. 127-134.
- Weron, Rafal [2006]: Modeling and forecasting electricity loads and prices. A Statistical Approach. John Wiley & Sons. Wiley Finance Series. Chichester, England.
- Weron, Rafal [2008a]: Heavy-tails and regime-switching in electricity prices. *Mathematical Methods of Operations Research*. Megjelenés alatt.
- Weron, Rafal [2008b]: Market price of risk implied by Asian-style electricity options. *Energy Economics*. Vol 30 (3), pp. 1098-1115.
- Weron, R. – Bierbrauer, M. – Trück, S. [2004]: Modeling electricity prices: jump diffusion and regime switching. *Physica A*. Vol 336, pp. 39-48.

- Weron, Rafal – Misiorek, Adam [2005]: Forecasting spot electricity prices with time series models. *Konferencia-kiadvány*. The European Electricity Market EEM-05, pp. 133-141.
- Weron, Rafal – Misiorek, Adam [2006]: Point and interval forecasting of wholesale electricity prices: Evidence from the Nord Pool market. *Konferencia-kiadvány*. Modern Electric Power Systems.
- Weron, Rafal – Przybyłowitz, Beata [2000]: Hurst analysis of electricity price dynamics. *Physica A*. Vol 283, pp. 462-468.
- Weron, Rafal – Simonsen, Ingve – Wilman, Piotr [2004]: Modeling highly volatile and seasonal markets: evidence from the Nord Pool electricity market. *Konferencia-kiadvány*. In: Takayasu, H. (ed.): The Application of Econophysics. Proceedings of the Second Nikkei Econophysics Symposium. Springer. Tokyo, 2004, pp. 182-191.
- Woo, Chi-Keung – Lloyd, Debra – Tishler, Asher [2003]: Electricity market reform failures: UK, Norway, Alberta, and California. *Energy Policy*. Vol 31, pp. 1103-1115.
- Zhang, Peng – Barad, Herb – Martinez, Andrew [1990]: Fractal Dimension Estimation Of Fractional Brownian Motion. *Konferencia-kiadvány*. IEEE Southeastcon '90, pp. 934-939.
- Zhao, Jun Hua – Dong Zhao Yang – Li, Xue [2007]: Electricity market price forecasting and decision making. *Generation, Transmission & Distribution*. Institution of Engineering and Technology. Vol 1 (4), pp. 647-654.
- Zhao, Jun Hua – Dong, Zhao Yang – Li, Xue – Wong, Kit Po [2007]: A Framework for Electricity Price Spike Analysis With Advanced Data Mining Methods. *IEEE Transactions on Power Systems*. Vol 22 (1), pp. 376-385.