

Budapesti CORVINUS Egyetem

A HOZAMGÖRBE DINAMIKUS BECSLÉSE

PH.D. ÉRTEKEZÉS

Kopányi Szabolcs András

Budapest, 2009

Kopányi Szabolcs András

A HOZAMGÖRBE DINAMIKUS BECSLÉSE

**BEFEKTETÉSEK ÉS VÁLLALATI
PÉNZÜGYEK TANSZÉK**

TÉMAVEZETŐ: DR. KÖRÖSI GÁBOR

© Kopányi Szabolcs András

BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM
GAZDÁLKODÁSTANI PH.D. PROGRAM

A HOZAMGÖRBE DINAMIKUS BECSLÉSE

Ph.D. értekezés

Kopányi Szabolcs András

Budapest, 2009

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Kőrösi Gábornak, továbbá Száz Jánosnak és tanszéke Kutatási Fórumának résztvevőinek az értékes észrevételekért. Barátom, Harangozó Gábor valamint kollégáim, Changyin Huang és Sandrine Ungari a becslési és a szimulációs backtesting eljárás leprogramozásában nyújtottak pótolhatatlan segítséget. Köszönettel tartozom a számtalan Linux fejlesztőnek a kiemelkedő minőségű ingyenes szoftverekért, az online segédleteiket publikáló egyetemi kutatóknak pedig azok terméktámogatásáért. Végül hálás vagyok családomnak, akik hitet adtak és elviselték a kutatás időrabló jellegét.

Tartalomjegyzék

1	Bevezetés: a hozamgörbebecslés problémakörének ismertetése	1
2	Lehetőségek a statikus becslés gondolatmenetére	7
2.1	A bootstrap módszer	8
2.2	Becslés lineáris regresszióval	8
2.3	A hozamgörbe illesztése	10
3	Hozamgörbebecslés dinamikus strukturált modellekkel	13
3.1	A kötvényárazás logikai menete	17
3.2	A kockázat piaci ára	18
3.3	Várakozási elméletek	20
3.4	Affin modellek	21
3.5	Kvadratikus modellek	24
3.6	További lehetőségek a modellezésben	26
3.6.1	Jiang és Yan [2006] affin-kvadratikus modellje	26
3.6.2	Cheng és Scaillet [2007] lineáris-kvadratikus modellje	28
3.6.3	Ahn, Dittmar, Gallant és Gao [2003] invertált négyzetgyökös modellje	28
3.7	Az affin modellválasztás magyarázata	29
4	Affin modellek közelebbről	31
4.1	Affin diffúziók	31
4.2	Nevezetes építőkockák: Vasicek és CIR	34

4.3	Dai és Singleton [2000] rendszerezése	36
4.3.1	Az analitikus számolhatóság közelebbről és a kanoni- kus reprezentáció	40
4.3.2	Modellek csoportosítása a SR momentumai szerint . . .	50
4.4	Kritikai válaszok Dai és Singleton [2000] eredményeire	53
5	A becslés módszertani szempontjai	57
5.1	Bevezető a becslési problematikába	57
5.1.1	Az adatok felhasználási módja	57
5.1.2	Nemparaméteres vizsgálat	60
5.1.3	Módszertani kihívások	60
5.1.4	Becslési hibák, sztochasztikus szingularitás	61
5.1.5	Állapottér-reprezentáció	62
5.2	Becslési koncepciók	63
5.2.1	Likelihood módszerek	63
5.2.2	Momentum módszerek	68
6	Empirikus eredményeim	71
6.1	A kutatás célja	71
6.2	A vizsgálandó hipotézisek	73
6.3	Elemzési módszerek	74
6.4	A felhasznált adatok	76
6.5	A hozamgörbe főkomponenselemzése	77
6.6	A minta SNP elemzése	78
6.7	Tapasztalataim az EMM-mel	83
6.8	Modellkalibrálás a Kálmán-filterrel	84
6.9	Mintán kívüli előrejelzés és backtesting	88
6.10	Modellértékelés	93
6.10.1	Tapasztalataim a CIR modellel	96
7	Összefoglalás, következtetések	97
	Irodalomjegyzék	101

Függelék	113
A Kvadratikus modellek részletezése Ahn, Dittmar és Gallant [2002] nyomán	113
A.1 Ahn et al. [2002] rendszerezése	114
A.1.1 Az árazó mag	114
A.1.2 A beágyazott modellek	120
A.1.3 A kanonikus QTSM	123
A.1.4 Ahn et al. [2002] empirikusan vizsgált modelljei	123
A.2 Még egyszer az affin és a kvadratikus modellek közötti különbségekről	125
B A hozamgörbe leíró statisztikai elemzése	129
B.1 Hozamszintek leíró jellemzése	130
B.2 Napi hozamváltozások leíró jellemzése	132
B.3 A hozamgörbe meredekségének és görbületének leíró jellemzése	134
C A hozamgörbe főkomponenselemzésének eredményei	137
D Az 1- és 2-faktoros modellek becsült paraméterei	141

Ábrák jegyzéke

1.1	ÁKK zérókupon hozamgörbe 2008. január 2-án	2
1.2	ÁKK zérókupon hozamgörbe alakulása 2008. január 2-a és március 3-a között	4
4.1	A 3-változós affín modell trade-off: a hozam-volatilitás szerkezete vs faktorok közötti korreláció	39
6.1	Az empirikus kutatás folyamatábrája	75
6.2	A mintaadatok ($N=2007$)	76
6.3	A meredekség és a 2. főkomponens, forrás: saját számítások	80
6.4	A görbület és a 3. főkomponens, forrás: saját számítások	81
6.5	Az SNP segédmodell illeszkedése a napi hozamváltozásokra, forrás: saját számítások	82
6.6	Az SNP segédmodell illeszkedése a hozamokra, forrás: saját számítások	82
6.7	Szimulált és Kálmán-filterrel becsült SR trajektóriák, forrás: saját számítások	84
6.8	A 3-faktoros Vasicek modell illeszkedése a napi hozamokra, forrás: saját számítások	86
6.9	A 3-faktoros Vasicek modell illeszkedése a napi hozamváltozásokra, forrás: saját számítások	87
6.10	Szimulált trajektóriák a 3-faktoros Vasicek modellel, forrás: saját számítások	90
6.11	Az egyes lejáratok szimulált trajektóriái, forrás: saját számítások . .	91
6.12	A 10 éves lejárat előrejelzési hibája (3-faktoros modell), forrás: saját számítások	93
6.13	A 8 éves lejárat hibatagjának idősora és hisztogramja (3-faktoros modell), forrás: saját számítások	96

B.1	<i>A 6 hónapos lejárat időszora és hisztogramja, forrás: saját számítások</i>	130
B.2	<i>A 2 éves lejárat időszora és hisztogramja, forrás: saját számítások</i>	130
B.3	<i>Az 5 éves lejárat időszora és hisztogramja, forrás: saját számítások</i>	131
B.4	<i>A 10 éves lejárat időszora és hisztogramja, forrás: saját számítások</i>	131
B.5	<i>A 6 hónapos hozam változásainak időszora és hisztogramja, forrás: saját számítások</i>	132
B.6	<i>A 2 éves hozam változásainak időszora és hisztogramja, forrás: saját számítások</i>	132
B.7	<i>Az 5 éves hozam változásainak időszora és hisztogramja, forrás: saját számítások</i>	133
B.8	<i>A 10 éves hozam változásainak időszora és hisztogramja, forrás: saját számítások</i>	133
B.9	<i>A hozamgörbe meredekségének időszora és hisztogramja, forrás: saját számítások</i>	134
B.10	<i>A hozamgörbe görbületének időszora és hisztogramja, forrás: saját számítások</i>	134
B.11	<i>A meredekség napi változásainak időszora és hisztogramja, forrás: saját számítások</i>	135
B.12	<i>A görbület napi változásainak időszora és hisztogramja, forrás: saját számítások</i>	135
C.1	<i>A hozamszintek 1. főkomponensének időszora és hisztogramja, forrás: saját számítások</i>	138
C.2	<i>A hozamszintek 2. főkomponensének időszora és hisztogramja, forrás: saját számítások</i>	138
C.3	<i>A hozamszintek 3. főkomponensének időszora és hisztogramja, forrás: saját számítások</i>	138
C.4	<i>A hozamváltozások és a hozamszintek főkomponenseinek együtthatói, forrás: saját számítások</i>	139

Táblázatok jegyzéke

6.1	<i>Napi hozamváltozások főkomponenselemzése, forrás: saját számítások</i>	78
6.2	<i>A hozamszintek főkomponenselemzése, forrás: saját számítások . . .</i>	79
6.3	<i>A 3-faktoros modellek becsült paraméterei, forrás: saját számítások .</i>	85
6.4	<i>Backtesting illeszkedési hiba lejáratonként, forrás: saját számítások .</i>	92
6.5	<i>A 10 éves lejárát előrejelzési hibája (3-faktoros modell), forrás: saját számítások</i>	94
6.6	<i>A 8 éves lejárát hibatajának leíró statisztikája (3-faktoros modell), forrás: saját számítások</i>	95
B.1	<i>Hozamszintek leíró statisztikája, forrás: saját számítások</i>	130
B.2	<i>Napi hozamváltozások leíró statisztikája, forrás: saját számítások . .</i>	132
B.3	<i>A hozamgörbe meredekségének és görbületének leíró statisztikája, forrás: saját számítások</i>	134
B.4	<i>A meredekség és a görbület napi változásainak leíró statisztikája, forrás: saját számítások</i>	135
C.1	<i>A hozamszintek főkomponenseinek leíró statisztikája, forrás: saját számítások</i>	137
D.1	<i>Az 1-faktoros Vasicek modell becsült paraméterei, forrás: saját számítások</i>	141
D.2	<i>A 2-faktoros Vasicek modell becsült paraméterei, forrás: saját számítások</i>	141

Édesanyám emlékére

1. fejezet

Bevezetés: a hozamgörbebecslés problémakörének ismertetése

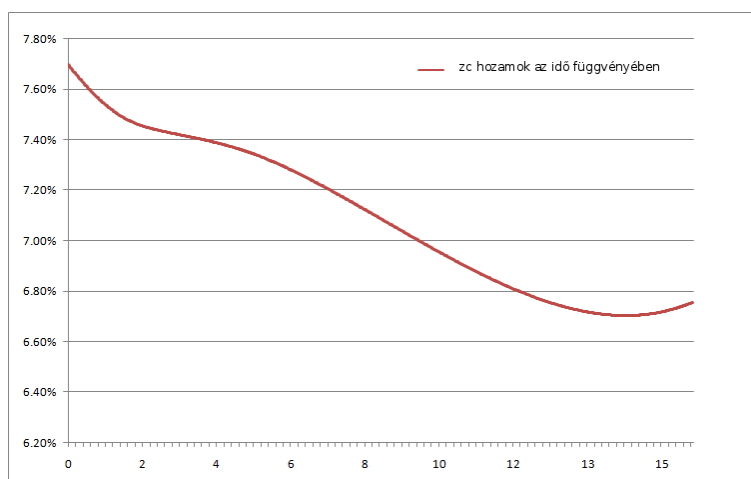
A kötvények jövőbeli pénzáramlásra vonatkozó követelések megtestesítői, a *pénz időértékét* mutatják. A különböző időpontbeli pénzáramlások között a hozamgörbe biztosítja az átjárhatóságot. Hiába kiemelt fontossága¹, a hozamgörbe közvetlenül nem megfigyelhető. Azon túl, hogy nem megfigyelhető, felmerül a kérdés, hogy egyáltalán mi is az a hozamgörbe? A hozamgörbe nem

¹Kit foglalkoztat a téma, miért jó ismerni a hozamgörbét? A hozamgörbe vizsgálata fokozott igényként merül fel az alábbi területeken:

1. A jövőbeli hozamok előrejelzése, döntéstámogatás a gazdasági szereplők részére (cégek beruházási döntései, magánszemélyek megtakarítási döntései),
2. monetáris politika, valamint annak hatásmechanizmusa,
3. államkincstári adósságmenedzsment (pl. lejárat szerkezet kérdése),
4. kamatlábderivatívok árazása és hedgelése (pl. a legbonyolultabb kamatlábderivatívok és a vanília kötvények (lásd: Arrow-Debreu árak) értéke egyaránt a hozamoktól függ).

más, mint különböző lejáráthoz tartozó hozamok futamidő szerint folytonos függvényeként történő ábrázolása. Devizánként, termékenként (pl. kötvény, kamatlábswap), módszertanilag (pl. zérókupon, par, forward) egyaránt különböző görbék léteznek, illetve becsülhetők.

A hozamgörbe becslése a pénzügytan két különböző, ám egymáshoz mégis kapcsolódó problémájává fejlődött. Az első megpróbál egy, a lejáratidő függvényében folyamatos függvényt előállítani valamely piacon megfigyelt, kereskedhető árak felhasználásával. Ez a *statikus becslés*: a görbe egyfajta pillanatképnek tekinthető egy adott piacról, mint ahogy azt a 1.1. ábra mutatja a magyar kötvénypiacra vonatkozóan.



1.1. ábra. ÁKK zérókupon hozamgörbe 2008. január 2-án

Tegyük fel, hogy zérókupon hozamgörbe számítását tűztem ki célul. Egy folytonos görbét szeretnék kapni a lejárat függvényében, de akadályokba ütközöm. Egyrészt a piacon kamatfizető kötvényekkel kereskednek YTM² vagy árfolyam jegyzéssel, másrészt a lejáratok még a leglikvidebb piacok esetén is

²lejáratig számított hozam

ritkák, azaz folytonosságról szó sincs. A piac egészét tekintve a CF³-dátumok száma meghaladja a kötvények (árfolyamok) számát, ráadásul az egyes árfolyamok illetve hozamok megfigyelési hibát tartalmazhatnak a piaci szokványok következményeként (pl. bid-ask spread, kerekítés, on-the-run⁴ és off-the-run⁵ sorozatok közötti különbségek, adózási szabályok eltérítő hatása, stb.).

A *görbe számítása* történhet bootstrap módszerrel, egyszerű⁶ és általánosított⁷ legkisebb négyzetek módszerével történő lineáris regresszióval, a hozamgörbe alakját modellezni próbáló eljárással⁸ (pl. harmadfokú spline függvény).

A *dinamikus szemléletű becslés* során a strukturált kamatláb modell kiválasztása az első lépés. A megfelelő kamatláb modell kiválasztása önmagában felettébb bonyolult feladat, hiszen csupán a jegyzett pénzügyi irodalomban több tucatnyival találkozhatunk. „Jolly Joker” kamatláb modell nem létezik, ezért előfordul, hogy a kutatók, illetve piaci szereplők a becslés részeként határozzák meg magát a modellt is (*nemparaméteres vizsgálat*). Az *idősorok felhasználása* a becslés során szintén különböző lehet. Végezhetünk egyszerű idősorelemzést és panelvizsgálatot is. A modell kiválasztásakor fontos szempont, hogy a kiválasztott idősor lépésköze és a kamatláb modell mögötti sztochasztikus folyamat összhangban legyen egymással.

Ez a dinamikus szemléletű probléma a jelen értekezés tárgya. A becslés során a következő a kérdés: hogyan írhatjuk le a hozamok időbeli alakulását?

³cash-flow

⁴A jövőbeli kibocsátási tervben szereplő, éppen aukcionált kötvény.

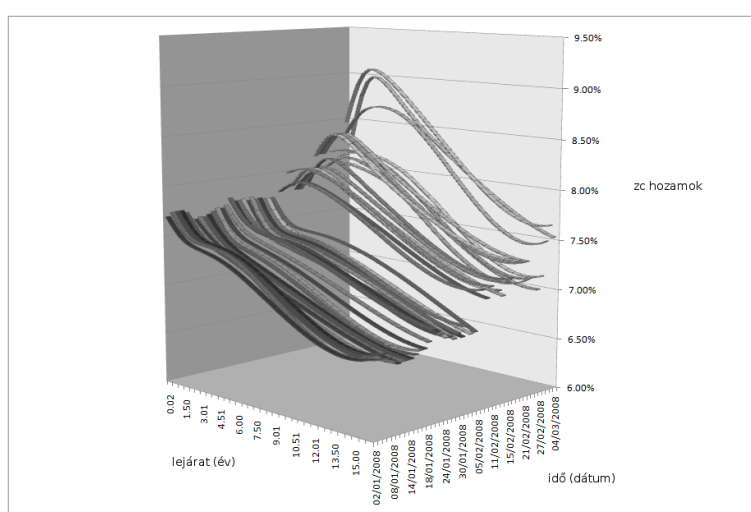
⁵Korábban aukcionált kötvény, aminek esetében rábocsátás már nem lesz.

⁶Ordinary Least Squares (OLS)

⁷Generalized Least Squares (GLS)

⁸Ezek a különféle *yield curve fitting*, azaz hozamgörbe illesztési módszerek.

Hasonló koncepció ez, mint amikor egy részvény vagy éppen deviza árfolyamának időbeli alakulását akarjuk megérteni. Azért csak hasonló, mert a hozamgörbe – a részvény- és devizaárfolyammal ellentétben – természetét tekintve nem skalár mennyiség. A hozamgörbe egyes pontjai között nem állhat fent akármilyen kapcsolat, ügyelni kell arra, hogy az arbitrázsmentesség elve érvényesüljön. Ez utóbbi nézőpontot szemléltetendő, az 1.1. ábra hozamgörbéje az 1.2. ábrán jelzett módon alakult 2008. január 2-a és március 3-a között.



1.2. ábra. ÁKK zérókupon hozamgörbe alakulása 2008. január 2-a és március 3-a között

A – dolgozatban is alkalmazott – strukturált modellalapú becslés célja a kamatláb modellben szereplő sztochasztikus változó(k) eloszlásának meghatározása, amennyiben ez nem megvalósítható (a legtöbb esetben az árazó differenciálegyenlet megoldhatatlan), az eloszlás egyes momentumait szokás megbecsülni. A sztochasztikus változó maga gyakran nem figyelhető meg (pl. volatilitás a többfaktoros modellekben), ekkor először azt is becsülni kell valamilyen módszerrel. A vizsgálati modellek felállításának csak a szűk fantázia

vagy a csillagos ég szab határt.

A becslési eljárás lefolytatását követően még nem pukkan a pezsgő, hiszen a becslő modellt statisztikai és közgazdasági szempontból egyaránt értékelni kell. Statisztikailag meg kell vizsgálni, hogy a becslési hibák tulajdonságai megegyeznek-e az előre feltételezettel (pl. várható érték zérus). Közgazdaságilag azt kell ellenőrizni, hogy a modell jól magyarázza-e a kötvény hozamokat illetve árfolyamokat a vizsgált piacon. Ha eltérés mutatkozik, annak okai kettős lehet. Egyrészt kiderülhet, hogy rossz modellel számoltunk, másrészt kétely merülhet fel a piac hatékonyságát illetően.

A dolgozat felépítése röviden a következő. Elsőként egy ismertető következik a hozamgörbe statikus becslésére szolgáló eljárásokból. Ezután a dinamikus strukturált modellalapú becslés kiindulópontjait és feltételezéseit ismertetem (feltételezések a *sztochasztikus folyamatokra* vonatkozóan, a *kötvényárazás* menete, a *kockázat piaci ára*, stb.).

A gondolatmenet folytatásaként a megfelelő hozamgörbe modell kiválasztása körüli dilemmát mutatom be. A több tucat irodalomban használatos modell közül vizsgálatom a *folytonos idejű* modellekre koncentrálódik. A dolgozat ezen részében bemutatom a figyelmem középpontjában szereplő modellcsaládot, az *affin* modelleket. Választásomat az *affin* modellek viszonylagosan kezelhetőbb (azaz alacsonyabb számításigényű) becslési problematikája motiválta. Az ismertetés logikája Dai és Singleton [2000] cikkét követi, elsősorban azért, mert példaértékű pontossággal mutatja be az *affin* modellcsaládon belüli lehetőségeket és korlátokat. Ezek után röviden ismertetem, milyen további modellezési lehetőségek állnak a kutatók rendelkezésére.

A modellválasztási kérdéskör tárgyalását egy rövid betekintés követi a becslési eljárások világába, illetve kérdéseibe. A dolgozat ezen része kevésbé hang-

súlyos, mint a modelleket taglaló, hiszen a dolgozat pénzügyi szempontból íródott. Ennek megfelelően az ökonometriai módszerek kizárólag alkalmazásilag, illetve alkalmazhatóságilag szerepelnek a górcső alatt⁹.

A modellekre vonatkozó irodalomáttekintés és módszertani betekintő után saját empirikus vizsgálatom motivációját, módszertanát, hipotéziseit és az azok tesztelésére kidolgozott módszereket ismertetem. Empirikus vizsgálataim során, zérókupon mintám leíró jellemzését és faktorelemzését követően, először egy félparaméteres (Semi Non-Parametric, SNP) tesztnek vetem alá a hozamgörbe dinamikáját, majd affin, azon belül is Vasicek típusú modelleket¹⁰ kalibrálok Kálmán-filter segítségével, végül értékelem a kalibrált modellek előrejelző képességét.

Az értekezés empirikus téren túllép a kutatási előzményeken, hiszen a magyar kötvénypiacra vonatkozóan még nem született átfogó dinamikus hozamgörbebecslő tanulmány. A kutatás önálló eredménye, hogy az egyik gyakori hozamgörbemodellt (Vasicek modell) rá szabja a magyar mintára majd kvantitatív módon megméri annak előrejelző erejét.

Empirikus kutatási tapasztalataim kapcsán gyakorlati javaslatokkal is szolgálhatok a témában elmélyülni kívánó kutatóknak. *A magyar hozamgörbe dinamikus vizsgálatára a 3-faktoros Vasicek modell, a modell kalibrálására pedig a Kálmán-filter használatát javaslom.*

⁹Kétségtelen tény, hogy remek *ökonometriai* dolgozatot lehetne írni a hozamgörbe becsléséről.

¹⁰hivatkozásokért és részletekért lásd a 34. oldalt

2. fejezet

Lehetőségek a statikus becslés gondolatmenetére

A statikus hozamgörbe becslésének célja egy olyan diszkontfüggvény előállítása a kötvénypiac adott állapotára vonatkozóan¹, amely *Ad 1)* a visszaszámított kötvényárfolyamokat közel helyezi el a valós piaci kötvényárfolyamokhoz, *Ad 2)* biztosítja a becslés pontosságát mérő mutatók (pl. eltérés négyzetösszeg) számíthatóságát, *Ad 3)* a becsült diszkontfüggvény esetében biztosítja az arbitrázsmentes árazás alapelveit, azaz $\hat{d}_t$ pozitív, monoton csökkenő és $\hat{d}(0)$ értéke 1, *Ad 4)* a diszkontfüggvényből számítható forward hozamgörbét és annak deriváltját kellően stabil és sima formában állítja elő valamint *Ad 5)* a becslési eljárás nem túlzottan számításigényes.

A hozamgörbe statikus becslése alapvetően háromféleképpen történhet: bootstrap módszerrel, lineáris regresszióval és illesztési eljárással. A következőkben ezeket mutatom be a teljesség igénye nélkül.

¹Makara [2000]

2.1. A bootstrap módszer

A bootstrap eljárás², amelyet csak a közös név köt össze a statisztikai módszerrel, diszkontfaktorok rekurzív számítási eljárása. Általában a par görbére alkalmazzák³. Alkalmazásának fontos feltétele, hogy a számítási feladat jól definiált legyen. Ehhez az kell, hogy az árfolyamok száma megegyezzen a CF-időpontok számával. Ha $d(n)$ -nel jelöljük az n év múlva lejáró par kötvény árfolyamát, a kötvény lejáratig számított hozamát, ami definíció szerint megegyezik a kupon mértékével, pedig $c(n)$ -nel, akkor az alábbiakat írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} 100 &= c(n) \sum_{i=1}^{n-1} d(i) + [100 + c(n)]d(n), \\ d(n) &= \frac{100 - c(n) \sum_{i=1}^{n-1} d(i)}{100 + c(n)}. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

A fenti számítást valamennyi lejáratra elvégezve megkapjuk a par hozamgörbét, ami tökéletesen illeszkedik a mintaadatokra.

2.2. Becslés lineáris regresszióval

A lineáris regresszióval történő becslés a minta szintjén dinamikus, azonban szemléletében statikus, hiszen egy adott napi hozamgörbét becsül.

A kötvényhozamokra, vagy azok változásaira felírhatunk egyszerű VAR⁴-modelleket, amiben a magyarázó változók lehetnek maguk is a hozamgörbe

²Efron [1982]

³gyakran, de nem egyedülállóan a kamatswap piacon

⁴vektor autoregressziós

pontjai vagy éppen makroökonómiai változók. A hozamok azonban számos tulajdonsággal bírnak, amivel az átlagos VAR-tanulmányokban szereplő változók nem. Az egyik ilyen, hogy a kötvények kereskedett eszközök, a piacon pedig valamennyi lejáratra szimultán születnek üzletek. A hosszabb futamidejű kötvények rövid befektetési időhorizonton kockázatosabbak, mint a rövid futamidejű kötvények, ezért alapesetben a kockázatkerülő befektetők a rövid papírok felett többlethozamot várnak el a hosszabb lejáratú papírok tartásáért, kompenzálandó ezt a többlet kockázatot. A spot hosszú hozamok a jövőbeli rövid hozamok kockázattal súlyozott várható értékei, ellenkező esetben a piacon arbitrázsra nyílik lehetőség. Emiatt a hozamgörbe egyes pontjainak relatív elmozdulásai szorosan összefüggenek egymással. Ezek az összefüggések egy VAR-modellben megszorítások formájában jelentkeznek a becslő egyenletek egymás közötti viszonyára vonatkozóan. A VAR-modellek alkalmazhatóságát tovább nehezíti, hogy a hozamok eloszlása nem tekinthető normálisnak, ami megnehezíti a kockázattal súlyozott várható érték számíthatóságát.

A hozamokra, illetve diszkontfaktorokra felírt modellek tekinthetők időben az elsőnek az irodalomban. A kötvények árát a bennük foglalt CF-k jelenértékeinek összege adja ki. Lineáris regressziós becsléshez felírhatunk egy egyenletet, amiben a kötvények árfolyama ezen CF-k jelenértékeinek és egy normális eloszlást követő hibatag összege:

$$\mathbf{p} = \mathbf{bd} + \epsilon, \quad (2.2.1)$$

ahol $\mathbf{p}$ a kötvények árfolyamait tartalmazó vektor, $\mathbf{b}$ a CF-mátrix, $\mathbf{d}$ a diszkontfaktorok sorozata lejáratonként, ϵ pedig a hibatagok vektora. Ezt az egyszerű megközelítést alkalmazta Carleton és Cooper [1976], a hozamgörbe

vektort pedig GLS-sel becsülte meg. McCulloch [1975] egyszerű négyzetek módszerével (OLS) becsli a lineáris regressziót.

A SR⁵ változásaira futtat regressziót Fama és Bliss [1987] anélkül, hogy bármiféle megszorítást alkalmazna a hozamgörbe egyes pontjainak viszonyára vonatkozóan. Evans és Marshall [1998] monetáris politikai sokkok hatását vizsgálja hosszú futamidejű kötvényekre hozamgörbe modell felállítása nélkül.

2.3. A hozamgörbe illesztése

Az illesztés mint eljárás valamilyen görbe (ez lehet a spot hozamgörbe, a diszkontgörbe vagy éppen a forward hozamgörbe) előállítását tűzi ki célul. Feltételezi, hogy az előállítandó függvényre tetszőleges pontossággal⁶ illeszthető egy, bizonyos bázisfüggvények kombinációjából adódó függvény. A becslés során általában előre rögzítik a bázisfüggvények feltételezett alakját, majd ezek koefficienseit számítják valamilyen távolságminimalizáló kritérium mellett.

Tegyük fel, hogy n darab kötvényt vizsgálunk egy adott piacon, melyek b_{ij} CF-kal rendelkeznek, ahol i a kötvények szerinti, j pedig a CF-dátumok szerinti számláló. Ekkor $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m_i$, az egyes CF-dátumokat jelölje t_{ij} , p a kötvény nettó árfolyama, a_i pedig a felhalmozott kamat. Feltételezzük továbbá, hogy a megfigyelt árak ϵ_i mérési hibát tartalmazhatnak, ekkor az árazó egyenlet alakja a következő:

$$p_i + a_i = \sum_{j=1}^{m_i} b_{ij}d(t_{ij}) + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.3.1)$$

⁵short rate: pillanati kamatláb

⁶lásd: Weierstrass-tétel

Amennyiben a fenti d_t -re illesztett függvénynek k paramétere van és $k < n$, nemlineáris regresszióval könnyen becsülhetők a paraméterek. Az egyes ide tartozó modellek abban különböznek, hogy melyik hozamgörbét veszik célkeresztbe (spot, forward, diszkont), illetve, hogy milyen parametrizációt alkalmaznak az illesztés során. A leggyakoribb az egyszerű polinomiális valamint a spline alapú becslés. A spline-ok előnye, hogy a különböző bázisfüggvények alkalmazása révén elkerüli a túlzottan magasfokú polinomok alkalmazásának szükségességét. A magasfokú polinomok ugyanis, bár jól illeszkedhetnek a mintaadatokra, az interpolált részekben indokolatlan hullámozást mutathatnak. A bázisfüggvények illesztésénél, az ún. csomópontoknál elsődleges fontosságú, hogy a függvény maga, annak első és második deriváltja egyaránt létezzen és folytonosak legyenek⁷. Egy egy csomóponttal rendelkező harmadfokú spline a $[0, \tau_2]$ intervallumon az alábbi formát ölti:

$$\begin{aligned} r_1(t) &= a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3, & t \in [0, \tau_1] \\ r_2(t) &= a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3. & t \in [\tau_1, \tau_2] \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

McCulloch [1971] és McCulloch [1975] a diszkontgörbére illeszt harmadfokú spline-t, Vasicek és Fong [1982] exponenciális spline-t illeszt a diszkontgörbére, Chambers, Carleton és Waldman [1984] a spot hozamgörbére illeszt egyszerű polinomiális módszerrel, Fama és Bliss [1987] a forward hozamgörbét illeszti lineáris iterációs eljárással.

A fentiekkel ellentétben Nelson és Siegel [1987] közvetlenül a forward hozamgörbére feltételez egy konkrét függvényformát. Az általuk javasolt modellben a forward hozamok pályáját egy másodfokú differenciálegyenlet írja le:

⁷Mindezt úgy nevezzük, hogy a függvény megfelelően *sima*.

$$f_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t} \exp(-\lambda_t \tau) + \beta_{3t} \lambda_t \tau \exp(-\lambda_t \tau), \quad (2.3.3)$$

ahol $f_t(\tau)$ a t időpontból τ időszakra előre ugró forward kamatláb, β_{1t} , β_{2t} , β_{3t} és τ pedig a forward hozamgörbe alakját befolyásoló paraméterek.

3. fejezet

Hozamgörbebecslés dinamikus strukturált modellekkel

A következőkben a modellválasztási dilemmába talál bevezetést az olvasó. Előszörként a modellezés trade-off kapcsolatait és feltételezéseit ismertetem, majd érintő jelleggel bemutatom a leggyakrabban alkalmazott modelleszadokot. Végül kifejtem, hogy miért az affin modelleket választottam empirikus vizsgálataimban.

A szemléletében dinamikus strukturált *modellalapú*¹ becslés egy hozamgörbe modellt vesz alapul², majd ennek paramétereit számítja ki, illetve becsli.

¹A témában az első lépéseket Sargent [1979] tette meg, amikor VAR-modellel becsülte a várakozási elmélet teljesülését. Pearson és Sun [1994] a SR mellett az inflációt azonosítja mint látens faktort; Litterman és Scheinkman [1991] széles körben ismertté vált cikkében három látens faktorról, nevezetesen hozamszinttel, meredekséggel és púpossággal magyarázza a mintabeli hozamváltozások 97 százalékát; Dai és Singleton [2000] hozamszintet, meredekséget és egy ún. pillangó faktort különböztet meg, ami gyakorlatilag egyenértékű a hozamgörbe púposságával. A témában lásd a 50. oldalon írottakat.

²A nemparaméteres eljárásnál nincs *a priori modellválasztás*, hanem a becslés eredménye maga a modell is.

A hozamgörbe modellek *megszorításokat* vezetnek be a hozamgörbe egyes pontjainak relatív változásai vonatkozásában, így biztosítva az arbitrázs mentességet, továbbá *normálistól eltérő eloszlásokat* is megengednek a hozamok vonatkozásában. Az említett megszorítások a magyarázó változók állapot dinamikájából és a kockázat piaci árának modellben szereplő alakjából vezethetők le. Szerepük rendkívül fontos: egyrészt biztosítják a konzisztenciát a hozamok dinamikájában, másrészt lehetővé teszik a *kockázati prémiumok* leválasztását a *jövőbeli kamatlábak várható értékétől*³. Sargent [1979] korai cikke a várakozási hipotézis következtetését vonja le, ahol a befektető hosszú kötvények tartásával várhatóan nem realizálhat extraprofitot. Az újabb vizsgálatok (pl. Bekaert és Hodrick [2001]) ezzel szemben úgy látják, hogy a befektetők hosszú futamidejű kötvények tartásával szisztematikusan nagyobb extraprofitot érhetnek el, mint rövid futamidejű kötvényekkel, azonban ez a szisztematikus különbség időben nem állandó. A hozamgörbe konzisztenciájából fakadó megszorítások ezt a kockázati prémiumot is modellezik.

A hozamgörbe modellek számos trade-off szempont szerint csoportosíthatók, ezek:

1. **A modell időbeli felfogása alapján:** folytonos idejű, illetve diszkrét idejű modellek,
2. **A modellezés elsődleges célja szerint:** egyensúlyi, illetve no-

³A hozamgörbe pontjainak relatív dinamikájára vonatkozó megszorítások egyben meg is nehezítik a becslési folyamatot. Már a meglehetősen egyszerű affin modelleknél is – ahol a modell az állapotvektorra nézve affin – megjelennek a lineáristól eltérő függvényformák a modell paramétereinek vonatkozásában. A nemlineáris függvénykapcsolat miatt az OLS becslés nem alkalmazható. A maximum likelihood (ML) módszer szintén nem alkalmazható, mert a hozamok sűrűségfüggvénye nem ismert zárt képlet formájában. A becslés témakörét az 5. fejezet részletezi.

arbitrage modellek,

3. **A modellben szereplő változók száma szerint:** $1, 2, \dots, N$ változós modellek,

4. **A modellváltozók közötti függvénykapcsolat szerint**⁴: affin, kvadratikus, rezsimváltó és ugró-diffúziós modellek.

Folytonos idejű modell választása mellett szól, hogy: *Ad 1)* Nincs ideális időintervalluma a vizsgálódásnak, a folytonos idejű modellben egyszerűen megkerüljük a választás problematikáját. *Ad 2)* A folytonos idejű modellek módszertana rendkívül bőven dokumentált az irodalomban. Kevés, de fontos esetben zárt képlettel számítható a kötvények, illetve kamatláb derivatívok ára. *Ad 3)* Ha mégsem számolhatók az árak zárt képlettel, számos becslési eljárás és numerikus módszer közül választhat a modellező. Ezzel szemben a *diszkrét idejű* modellek előnye, hogy: *Ad 1)* A valóság nem folytonos időben zajlik, az árak egyik időpontról a másikra változnak (az időbeli tranzakciós költségeknek van elméleti alsó határa). *Ad 2)* A diszkrét modelleket sokszor könnyebb megérteni (pl. binomiális modellek). *Ad 3)* Mire megyünk a folytonos modellekkel, ha azokat úgyis diszkrét modellekkel kell becsülnünk (numerikus eljárások)?

Az *egyensúlyi modellek*⁵ elsődleges célja a hozamgörbe előrejelzése, illetve kötvénykereskedési stratégiák kidolgozása⁶. Az úttörő hozamgörbemodellek ebbe a csoportba tartoznak, ezért az egyensúlyi modelleket gyakran klasszikus modellek néven illetik. Főbb alkotóelemei a SR sztochasztikus dinamikájára, valamint a befektetők preferenciáira (pl. kockázati prémiumok kérdése,

⁴A teljesség igénye nélkül.

⁵pl. Vasicek [1977], Cox, Ingersoll és Ross [1985] és Brennan és Schwartz [1979]

⁶Tuckman [1995]

kockázat piaci ára) vonatkozó feltevések. A modell endogén módon határozza meg a hozamgörbét, az így kapott eredmény és a piaci mintaadatok között gyakran eltérés van. Mindemellett az egyensúlyi modellek kétségtelen előnye a belső konzisztencia, azaz a modellparaméterek viszonylag állandók az időben.

A *no-arbitrage modellek*⁷ definíció szerint tökéletesen illeszkednek a piaci mintaadatokra. Az arbitrázsmentes érvelés legfőbb előnye, hogy a kamatláb derivatívok árára nem hatnak a befektetői preferenciák. A pontos illeszkedés hátránya viszont, hogy a modellekre nem jellemző a belső konzisztencia: a modell paramétereket minden egyes becslésnél újra kell becsülni, azok hevesen ingadozhatnak az idő múlásával.

Kevés modellváltozó és viszonylag egyszerű függvénykapcsolat mellett szól, hogy így a modellezés egyszerűbb, valamint nagyobb az esélye annak, hogy az árfolyamok zárt képlettel számíthatók. *Több modellváltozó és bonyolultabb függvénykapcsolat* bevezetése akkor szokott előtérbe kerülni, ha máshogy nem lenne biztosítható a modell megfelelő komplexitása és rugalmassága, azaz csak némi bonyolítás árán növelhető a modell valóságot leíró képessége.

Az affin modellekben (lásd: Duffie és Kan [1996], Dai és Singleton [2000]) lineáris kapcsolat van a modellváltozók között, a kvadratikus modellek (lásd: Ahn et al. [2002], Ahn et al. [2003], valamint Leippold és Wu [2002]) ezzel szemben túllépnek a linearitás határain és – legalábbis utóbbi szerzők szerint – jobb a valóságot leíró képességük. A rezsimváltó modellek (lásd: Bansal és Zhou [2002] és Bansal, Tauchen és Zhou [2004]) és az ugró-diffúziós modellek (lásd: Duffie, Pan és Singleton [2000]) a hagyományos diffúziós dinamikát kiegészítik sokkhatásokkal, ezzel is növelve a modellek valószerűségét.

⁷pl. Heath, Jarrow és Morton [1992], Ho és Lee [1986]

3.1. A kötvényárazás logikai menete

Általánosítva egy többváltozós hozamgörbe modellben az r_t kockázatmentes pillanati kamatláb egy N -dimenziós $\mathbf{X}_t$ állapotvektor *determinisztikus* függvénye. Jelölésben:

$$r_t = r(\mathbf{X}_t; \boldsymbol{\theta}); \quad (3.1.1)$$

a Q ekvivalens martingál mérték szerint az állapotvektor dinamikáját az alábbi egyenlet írja le

$$d\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu}^Q(\mathbf{X}_t; \boldsymbol{\theta})dt + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t; \boldsymbol{\theta})d\mathbf{W}_t^Q, \quad (3.1.2)$$

ahol $\mathbf{X}_t$ és $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}_t; \boldsymbol{\theta})$ $N \times 1$ vektorok, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t; \boldsymbol{\theta})$ egy $N \times N$ dimenziójú mátrix, $\boldsymbol{\theta}$ a modell függvényében változó p -dimenziós paraméter, $\mathbf{W}_t$ pedig független Wiener-folyamatok $N \times 1$ -dimenziós vektora.

Arbitrázs mentességet feltételezve a T időpontban lejáró, τ hátralévő idejű⁸ zérókupon kötvény $P_{t,T}$ árfolyama t időpontban a Feynman-Kac formulával írható fel:

$$P_{t,T}(x, \theta) = E_t^Q \left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \mid \mathbf{X}_t = x \right], \quad (3.1.3)$$

a fenti egyenletben E_t^Q a t időpontban vett várható értéket jelenti a kockázatmentes Q mérték szerint.

A következő logikai lépés az opcióárazásból ismert Black-Scholes (BS) szerzőpároshoz kapcsolódik. BS úttörő felismerése⁹ az volt, hogy ha az alap-

⁸azaz $T = t + \tau$

⁹Black és Scholes [1973]

termékből és egy hozzá kapcsolt feltételes követelésből előállítunk egy ún. *önfinanszírozó portfóliót*, akkor a portfólió súlyok megfelelő megválasztásával „kiüthetjük a rendszerből” a kockázatot. Az így kapott portfólió hozama az arbitrázsmentes érvelést felhasználva nem más mint a kockázatmentes hozam. Emiatt írhatjuk fel a Black-Scholes parciális differenciálegyenletet a kötvények árára vonatkozóan.

A kötvényárfolyam tehát kielégíti a Black-Scholes parciális differenciálegyenletet¹⁰:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mu(x; \theta)' \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2} \text{tr} \left[v(x; \theta) \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial x'} \right] - r_t(x; \theta) P = 0, \quad (3.1.4)$$

ahol $\text{tr}[\cdot]$ a mátrix nyomát, azaz sajátértékeinek összegét jelenti. Tekintettel arra, hogy a kötvények lejáratkor névértéküket érik, a végső érték feltétel $P_{T,T}(x; \theta) = 1$ valamennyi x -re és θ -ra. Amennyiben a fenti feltételek teljesülnek, a Black-Scholes parciális differenciálegyenletnek jól definiált megoldása van.

3.2. A kockázat piaci ára

A Black-Scholes parciális differenciálegyenlet rendkívül fontos pontja a modellalapú kötvényárazásnak, hiszen a no-arbitrage feltétel mellett ez teszi lehetővé, hogy a SR mozgása egymaga leírja a teljes hozamgörbe viselkedését. Erős állítás ez, ezért kitérek a magyarázatra. A 3.1.4. egyenlet a teljes hozamgörbe mentén fennáll, megoldása pedig nem más mint a zérókupon kötvényár. Azaz a Black-Scholes parciális differenciálegyenletet alkalmazva a teljes lejáratú spektrumra megkaphatók az azt kielégítő kötvényárfolyamok,

¹⁰a részletekért lásd: Duffie [2001] 5. és 6. fejezetét

azok pedig egyértelműen definiálják a lejáratig számított hozamokat, azaz a hozamgörbét.

A háttérben azonban megbújik egy újabb fontos fogalom: a *kockázat piaci ára*, ami a valós mérték szerint értelmezett problémákban jelentkezik. Az önfinanszírozó portfólió hozamát jelölő kockázatmentes kamatláb, a SR ugyanis egy elméleti kategória, nem pedig egy piacon kereskedett termék. Ennek következtében más módot kell találnunk a kockázati forrás megszüntetésére: két zérókupon kötvényt kiválasztva önfinanszírozó portfóliót (jelöljük ezt V -vel) hozunk létre, majd ezen két kötvény súlyát választjuk meg úgy, hogy megszabaduljunk a kockázattól. Az eredményül kapott portfólió hozama szintén az elméleti SR, azaz $dV/V = r_t dt$. Ebből Bolder [2001] levezetését felhasználva megkapjuk a kockázat piaci árának (jelöljük ezt λ -val) összefüggését:

$$\lambda_t = \frac{\mu_1 - r_t}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r_t}{\sigma_2}, \quad (3.2.1)$$

ahol a számozott indexek V portfólió első és második elemét jelölik. A kockázat piaci ára tehát nem más mint a kockázatmentes hozam feletti standardizált többlethozam (az irodalom a *Sharpe mutató* elnevezést is alkalmazza), amit az adott zérókupon kötvény tartásáért várnak el a befektetők. Bevezetésére a piac nem teljes volta miatt van szükség, hiszen a SR nem kereskedett. A gyakorlatban a kockázat piaci ára a *Radon-Nikodym deriváltként* jelentkezik, ami lehetővé teszi az ekvivalens martingál mérték meghatározását, és technikailag átszámítja a kockázatot jelentő Brown-mozgás driftjét a kockázatmentes mértékből a valós mértékbe.

3.3. Várakozási elméletek

Érdemes egy pillantást vetni a várakozási elméletre, a tiszta várakozási elméletre, valamint ezek hozamgörbemodelleket befolyásoló tulajdonságaira, illetve következményeire. Aït-Sahalia és Hansen [2004] jól mutat rá a két elmélet különbözőségére. A *tiszta várakozási elmélet*¹¹ szerint:

- $Q = Q^*$, azaz a Feynman-Kac egyenlet a kockázatos mérték szerint is fennáll (*az adatgeneráló mérték és a kockázatmentes mérték megegyezik*), azaz a LEH alkalmazása kockázatmentes árazáshoz vezet,
- $r_{t,\tau} = -\log E_t[\exp(-\int_t^T r_s ds)]/\tau$,
- a hosszú futamidejű kötvények várható többlethozama zérus, azaz a *hozamgörbe vízszintes*.

A *várakozási elmélet*¹² szerint:

- $r_{t,\tau} = E_t[\int_t^T r_s ds]/\tau$,
- a hosszú futamidejű hozamok a jövőbeli rövid hozamok várható értékei, azaz a *mindenkori forward hozamgörbe szerint alakulnak a jövőbeli spot hozamok*.

A LEH és az EH közötti különbség a Jensen-egyenlőtlenségre vezethető vissza. Ha ugyanis a SR $Q = Q^*$ mérték szerint egyaránt normális eloszlású, $\int_t^T r_s ds$ szintén normális eloszlású (hiszen normális eloszlású elemek összege). A normalitás ezen feltételezésével a LEH egyenlete $r_{t,\tau} =$

¹¹Local Expectations Hypothesis, LEH

¹²Expectations Hypothesis, EH

$E_t[\int_t^T r_s ds]/\tau - \frac{1}{2} \text{var}_t[\tau_t r_s ds]/\tau$, amely a variancia tagban különbözik az EH egyenletétől.

A LEH teljesülését feltételező modellek alkalmazása egyszerűbb a gyakorlatban, hiszen nem jelentkezik a mértékváltási probléma. A folytonos idejű modellek előnye, hogy az állapotvektor volatilitása azonos a valós és a kockázatmentes mérték szerint még abban az esetben is, ha a LEH nem áll fent¹³.

3.4. Affin modellek

Általánosságban egy N -faktoros affin hozamgörbemodel két feltételezésre épít. Az egyik, hogy a SR valamely $\mathbf{X}_t$ ¹⁴ állapotvektor affin¹⁵ függvénye:

$$r_t = \delta_0 + \sum_{i=1}^N \delta_i X_{i,t} = \delta_0 + \boldsymbol{\delta}'_x \mathbf{X}_t, \quad (3.4.1)$$

a másik, hogy az $\mathbf{X}$ állapotvektor dinamikája az alábbi módon írható le:

$$d\mathbf{X}_t = \tilde{\mathbf{K}}(\tilde{\boldsymbol{\Theta}} - \mathbf{X}_t)dt + \boldsymbol{\Sigma}\sqrt{\mathbf{S}_t}d\tilde{\mathbf{W}}_t, \quad (3.4.2)$$

¹³Ez az ún. *diffúziós invariancia elve*.

¹⁴Az irodalomban ismert modellek egy része közvetlenül meg nem figyelhető állapotváltozókra van felírva, másik részében az állapotváltozók között szerepel a kockázatmentes kamatláb. Az invariáns transzformációk segítségével megmutatható, hogy csupán formális különbség, hogy egy adott modell r -re vagy X -re van felírva (a kamatlábra felírt modelleket Ar módon, azaz r -ben affinként jelöljük, a közvetlenül megfigyelhető X -re felírt modelleket pedig AX -ként), az egyik a másiktól némi számolgatás után levezethető (lásd: Dai [1998] A.5 függelékét). A dolgozat 4.3. pontjában részletezett Dai és Singleton [2000] cikk Y -nal jelöli az állapotváltozót, én a dolgozaton belüli egységes jelölésrendszert szem előtt tartva $\mathbf{X}$ -szel.

¹⁵konstans plusz lineáris

ahol $\mathbf{S}_t$ egy $N \times N$ diagonális mátrix, aminek i -edik átlóbeli eleme

$$[\mathbf{S}_t]_{ii} = \alpha_i + \beta_i' \mathbf{X}_t \quad (3.4.3)$$

alakú. Az N darab Q mérték szerinti Brown-mozgás ($\widetilde{\mathbf{W}}_t$) független, az $\mathbf{X}_t$ innovációinak együttmozgását az $N \times N$ dimenziójú Σ mátrix írja le, $\widetilde{\mathbf{K}}$ szintén $N \times N$ mátrix.

Fontos megjegyezni az állapotváltozók dinamikájára vonatkozóan, hogy a 3.4.2-os egyenletben szereplő driftek és a 3.4.3-es egyenletben szereplő felteteles varianciák egyaránt affinok $\mathbf{X}_t$ -re nézve, azaz leírhatók annak affin függvényeként.

A τ hátralévő futamidejű $P_{t,T}$ zérókupon kötvény árfolyamát a t időpontban az

$$P_{t,T} = \exp[A_\tau + \mathbf{B}_\tau' \mathbf{X}_t] \quad (3.4.4)$$

egyenlet¹⁶ írja le. Itt A_τ egy skalár, $\mathbf{B}_\tau$ pedig egy $m \times 1$ vektor. Továbbmenve A_τ és $\mathbf{B}_\tau$ vonatkozásában az alábbi differenciálegyenletek írhatók fel:

$$\frac{dA_\tau}{d\tau} = -\widetilde{\boldsymbol{\theta}}' \widetilde{\mathbf{K}}' \mathbf{B}_\tau + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\Sigma' \mathbf{B}_\tau]_i^2 \alpha_i - \delta_0, \quad (3.4.5)$$

és

$$\frac{d\mathbf{B}_\tau}{d\tau} = -\widetilde{\mathbf{K}}' \mathbf{B}_\tau - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\Sigma' \mathbf{B}_\tau]_i^2 \beta_i + \boldsymbol{\delta}_x. \quad (3.4.6)$$

A fenti differenciálegyenletek numerikus integrálással oldhatók meg, a kezdeti értékekre vonatkozóan $A_0 = 0$ és $\mathbf{B}_0 = \mathbf{0}_{N \times 1}$ adhatók meg. Lényeges

¹⁶Duffie és Kan [1996]

látni, hogy a differenciálegyenleteket az r_t kockázatmentes dinamikájára vonatkozó feltételek határozzák meg, az 3.4.1 - 3.4.3 egyenletek szerint.

Ha valós adatokon akarjuk próbára tenni a 3.4.4. egyenletben szereplő árazó képletet, a valós P mérték szerint is ismernünk kell $\mathbf{X}_t$ és $P_{t,T}$ eloszlását. Ehhez a kockázat piaci árára, Λ_t -re, vonatkozóan kell nyilatkoznunk. Feltéve, hogy

$$\Lambda_t = \sqrt{\mathbf{S}_t} \boldsymbol{\lambda}, \quad (3.4.7)$$

ahol $\boldsymbol{\lambda}$ egy konstansokból álló $N \times 1$ vektor, $\mathbf{X}_t$ valós P mérték szerinti dinamikájára vonatkozóan szintén affin¹⁷ egyenletet kapunk:

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{K}(\boldsymbol{\Theta} - \mathbf{X}_t)dt + \boldsymbol{\Sigma}\sqrt{\mathbf{S}_t}d\mathbf{W}_t. \quad (3.4.8)$$

A fenti egyenletben $\mathbf{W}_t$ P mérték szerint független Brown-mozgásokból álló N -dimenziós vektor, $\mathbf{K} = \tilde{\mathbf{K}} - \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{K}^{-1}(\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\psi})$, $\boldsymbol{\Phi}$ mátrix i -edik sora $\lambda_i\boldsymbol{\beta}'_i$ formában írható, $\boldsymbol{\psi}$ N -elemű vektor i -edik eleme $\lambda_i\alpha_i$ alakú.

Az affin modellek alkalmazásának gyakori *előnye* a kötvényárfolyamok analitikus számolhatósága¹⁸, továbbá a viszonylag egyszerű felépítés és becslési folyamat. A könnyű számíthatóság ára azonban az állapotvektor kockázatmentes dinamikájára vonatkozó megszorítások formájában jelentkezik. Az állapotvektor kockázatmentes mérték szerinti dinamikája affin diffúzió kell, hogy legyen. Ez azt jelenti, hogy esetében mind a pillanati várható érték, mind pedig a variancia felírható affin függvény formájában. Az állapotvektor

¹⁷Előfordulhat az is, hogy $\mathbf{X}_t$ Q mérték szerint affin, a valós P mérték szerint viszont nem affin dinamikával bír, ehhez a kockázat Λ_t piaci árának eltérő specifikációjára van szükség, lásd Duffee [2002].

¹⁸erre *admissibility*, illetve *tractability* néven hivatkozik az irodalom

adatgeneráló folyamatának függvényalakjára vonatkozóan nincsenek megszorítások. Ez azonban egyben azt is jelenti, hogy konfliktus merülhet fel az állapotvektor dinamikája és az adatgeneráló folyamat között. Előfordulhat ugyanis, hogy az állapotvektorra vonatkozó megszorítások eredményeképp olyan adatgeneráló folyamathoz jutunk, ami képtelen a mintában szereplő hozamokat produkálni¹⁹. Aït-Sahalia és Hansen [2004] szerint akkor áll fent az említett szerencsétlen eset, ha a kockázati prémiumok szigorúan pozitív többlethozamot eredményeznek a várható kockázatmentes hozam felett. Az affin modellek *hátránya*, hogy lineáris voltukból adódóan gyakran képtelenek kezelni a hozamgörbe jól ismert²⁰ stilizált tényeit: *nemlineáris drift és diffúziós együtthatók*²¹, *heteroszkedaszticitás*²², *stb.*

3.5. Kvadratikus modellek

Egy N -faktoros kvadratikus modellben a SR az állapotvektor négyzetes függvénye.

$$\begin{aligned} r_t &= \delta_0 + \sum_{i=1}^N \delta_i X_{i,t} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \phi_{ij} X_{i,t} X_{j,t} = \\ &= \delta_0 + \boldsymbol{\delta}'_{\mathbf{x}} \mathbf{X}_t + \mathbf{X}'_t \boldsymbol{\Phi} \mathbf{X}_t, \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

ahol $\boldsymbol{\Phi}$ az alábbi $N \times N$ dimenziójú konstansokból álló pozitív szemidefinit mátrix.

¹⁹Azaz a vizsgálat eredménye az, hogy a mintában szereplő adatok elő sem fordulhattak volna.

²⁰legalábbis az amerikai adatokra vonatkozóan

²¹lásd: Aït-Sahalia [1996a], Aït-Sahalia [1996b]

²²pl. különféle GARCH-modellek

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1N} \\ \phi_{12} & 1 & \cdots & \phi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{1N} & \phi_{2N} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5.2)$$

Amennyiben feltesszük, hogy $\delta_0 - \frac{1}{4}\boldsymbol{\delta}'_{\mathbf{x}}\mathbf{\Phi}^{-1}\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}} \geq 0$, akkor biztosított a SR nemnegativitása.

Az állapotvektor dinamikáját leíró sztochasztikus differenciálegyenlet átlaghoz visszahúzó többváltozós normális eloszlású folyamat:

$$d\mathbf{X}_t = \tilde{\mathbf{K}}(\tilde{\boldsymbol{\Theta}} - \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{X}_t)dt + \boldsymbol{\Sigma}d\tilde{\mathbf{W}}_t, \quad (3.5.3)$$

ahol $\tilde{\mathbf{K}}$ és $\boldsymbol{\Sigma}$ $N \times N$ dimenziójú mátrixok, $\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\boldsymbol{\Theta}}$ pedig egy N -elemű vektor.

A kockázat piaci ára az állapotvektor lineáris függvénye:

$$\boldsymbol{\Lambda}_t = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}_1\mathbf{X}_t. \quad (3.5.4)$$

A τ hátralévő futamidejű $P_{t,\tau}$ zérókupon kötvény árfolyamát a t időpontban az

$$P_{t,\tau} = \exp[A_\tau + \mathbf{B}'_\tau\mathbf{X}_t + \mathbf{X}'_t\mathbf{C}_\tau\mathbf{X}_t] \quad (3.5.5)$$

egyenlet írja le. A fenti egyenletben A egy skalár, $\mathbf{B}$ egy $N \times 1$ vektor, $\mathbf{C}$ pedig egy $N \times N$ elemű mátrix.

A kvadratikus modellek akkor jelentek meg az irodalomban, amikor a kutatók egyre több és több illeszkedési alkalmatlanságot véltek felfedezni az affin modelleknél. A négyzetes modellek alkalmazásának a legnagyobb *előnye*,

hogy ezek a modellek – legalábbis a témában aktív szerzők szerint – gyógyírt jelentenek az affin változatok valós adatok reprodukálásakor mutatott gyengeségeire, tudják kezelni a hozamgörbe *stilizált tényeit* (nemlineáris drift és diffúziós együtthatók, heteroszkedaszticitás); valamint változatos korrelációs struktúrát engednek meg az állapotváltozók között. A négyzetes formából fakadóan az állapotváltozók korrelációs struktúrájára vonatkozó megszorítások nélkül biztosítható a hozamok pozitivitása. A kvadratikus modellekről Ahn et al. [2002] nyomán részletesen írok az értekezés függelékében.

3.6. További lehetőségek a modellezésben

A kvadratikus modelleknél nem állt meg a fejlődés a hozamgörbe modellezésében. A kutatók növelik a változók számát a modellekben, egyre bonyolultabb függvényformák felé fordulnak. Az alábbiakban három cikket mutatok be érintő jelleggel, mindhárom a legfrissebb kortárs irodalom terméke, továbbá mindhárom az affin és a kvadratikus folyamatokat tekinti kiinduló pontnak.

3.6.1. Jiang és Yan [2006] affin-kvadratikus modellje

Jiang és Yan [2006] cikke az affin, a kvadratikus, valamint az ugró folyamatok egyesítésével próbálkozik a hozamgörbe modellezésében. Modelljük több, benchmarknak tekinthető modellt foglal magába speciális beágyazott esetként²³. Az így egyesített modellt AQTSM-nek²⁴ nevezik: ez, állításuk szerint, ugró folyamatok nélkül tekintve Ahn et al. [2003] hibrid (affin és

²³A minél átfogóbb modell iránti igény mint modellezési filozófia megfigyelhető mind Dai és Singleton [2000] esetében, mind pedig Ahn et al. [2002]-nél.

²⁴affin-kvadratikus hozamgörbemodel

kvadratikus elemeket egyaránt tartalmazó) modelljével ekvivalens. Ez a rokonsági szál segít abban, hogy az AQTSM-et egy általánosabb modell ugró folyamatokkal történő kibővítésének tekintsük, és így megkíséreljük felmérni az ugró folyamatok hasznosságát a hozamgörbe modellezésében.

A cikk három hozamgörbemodelt vizsgál empirikusan. A kiindulópont egy kétfaktoros affin, sztochasztikus volatilitású modell, ami Dai és Singleton [2000] általános, háromfaktoros affin modelljéből származtatható. A második modell az első állandó intenzitású ugró folyamattal bővített változata. Utóbbi Das [2002] állandó volatilitású, ugró folyamatokat tartalmazó modelljét foglalja magába speciális esetként. A harmadik modellben az ugrásokat is egy sztochasztikus folyamat vezérli, ami ráadásul korrelál a pillanati kamatláb és a sztochasztikus volatilitás folyamataival. Ebben a hozamok lineárisan függenek a SR-től, azonban egyúttal az állapotváltozók kvadratikus függvényei (a sztochasztikus volatilitáson és ugró folyamaton keresztül).

A szerzők empirikus vizsgálatait azt mutatják, hogy az önálló folyamattal leírt ugrások hozzáadása a modellhez határozottan javítja a hozamgörbe illeszkedését a valós adatokra. Ezzel szemben a sztochasztikus volatilitás, illetve az állandó intenzitású ugró folyamatok önmagukban történő megjelenése a modellben nem javítja látványosan annak illeszkedését az amerikai adatokra. Jiang és Yan [2006] további megfigyelése, hogy az általuk vizsgált időszakban az ugrásokat leíró folyamat negatívan korrelál a kamatláb változásaival, évente 9-10 ugrás következik be. Az időben változónak modellezett kockázati felár pozitívan korrelál a kockázati faktorok volatilitásával.

3.6.2. Cheng és Scaillet [2007] lineáris-kvadratikus modellje

Cheng és Scaillet cikke az ugró folyamatokkal bővített affin²⁵ és az általános kvadratikus modelleket²⁶ tekinti kiinduló pontnak.

A Cheng és Scaillet [2007] által javasolt modellben (LQJD: linear-quadratic jump-diffusion) az állapotvektor egy lineáris ugrófolyamatból, és egy lineáris és kvadratikus elemeket egyaránt tartalmazó diffúziós tagból áll, valamint a kockázat piaci ára sem feltétlenül lineáris alakú. A cikkben a szerzők azt állítják, hogy az LQJD-modellek pszeudo-állapotváltozók bevezetésével kölcsönösen megfeleltethetők az affin modellcsaláddal, igaz nem pontosan Dai és Singleton [2000] értelmében.

3.6.3. Ahn et al. [2003] invertált négyzetgyökös modellje

Ez a cikk lényegében a kvadratikus modellspecifikáció részletes ismertetését végzi el. Újítása az, hogy az affin és a kvadratikus építőelemeken túl felhasználja Ahn és Gao [1999] invertált-négyzetgyökös (ISRM) modelljét is. A szerzők központi kérdése a hozam adatokban megfigyelhető változó volatilitás különböző modellekben való reprodukálhatósága. A volatilitás vizsgálatkor előrelépést jelent az invertált gyökfolyamat alkalmazása, hiszen ez a tag lényegében megoldja az affin modelleknél jelentkező volatilitás vs faktorok közötti kovariancia trade-off-ot. Az illeszkedési képességben mért javulás ugyanakkor a becslhetőség kárára megy: jelentősen emelkedik a numerikus becslés munkaigénye. Nem lesz továbbá teljesen szabad a változók közötti kovarianciamátrix szerkezete sem, bár a megkötések száma jóval kevesebb mint

²⁵lásd: Duffie és Kan [1996], Duffie et al. [2000]

²⁶lásd: Ahn et al. [2002] és Leippold és Wu [2002]

az affin családban. A cikk ilyen módon affintól különböző modellek esetén igazolja Dai és Singleton [2000] állításait a sztochasztikus volatilitásra és a változók korrelációs szerkezetére vonatkozóan.

3.7. Az affin modellválasztás magyarázata

A bevezetőben már említettem, hogy „Jolly Joker” kamatlábmodell nem létezik, emellett jelen fejezetben bemutattam, hogy a paletta rendkívül széles. Felmerül a kérdés: melyiket célszerű választani? A modellválasztás e fejezet első részében bemutatott trade-off kapcsolatait felhasználva olyan modellt keresek, ami *Ad 1)* elfogadhatóan illeszkedik a mintaadatokra (ennek értékelése az empirikus vizsgálat feladata); *Ad 2)* analitikusan számolható, jól becsülhető és könnyen értelmezhető; végül *Ad 3)* a becslés lefolytatása nem különösebben számításigényes.

A fent jelzett célfüggvények metszetében az affin modellekre, azon belül a részletes empirikus vizsgálatok terén a Vasicek típusú modellekre esett a választásom²⁷. Elfogadva az affin modellekkel szemben felhozott kritikai állításokat (lásd a fejezet korábbi alfejezeteit), fontos hangsúlyozni, hogy az affin modellek sem „buták”, sőt, Cheng és Scaillet [2007] tanúsága szerint meglehetősen átfogóak.

²⁷A választáshoz közel két évnyi aktív empirikus kutatás után jutottam el, különböző bonyolultságú modellek és becselő eljárások kósterolgatása után. Ezalatt kb. kétezer órányi processzoridőt használtam fel becslések futtatására egy manapság átlagosnak mondható számítógépen. A legjobban illeszkedő modelljeim esetében a modellbeli és a minta adatok eltérése nagyságrendileg a piaci bid-ask spreaddel egyenértékű. Elképzelhető, hogy bonyolultabb modellekkel még jobb illeszkedést kaptam volna, a javulás határhaszna azonban elenyésző az addicionálisan jelentkező alkalmazhatósági problémák fényében.

4. fejezet

Affin modellek közelebbről

A következő oldalakon a korábban már bevezetett affin modelleket mutatom be részletesen. Először az affin diffúziókról ejtek néhány szót, ezt követi néhány kiválasztott nevezetes affin modell ismertetése. A fejezet további részei Dai és Singleton [2000] munkájával kapcsolatosak: a szerzők főbb állításainak bemutatása után következtetéseket vonok le a SR momentumaira vonatkozóan, végül ismertetem az irodalomban felmerült kritikai válaszokat.

4.1. Affin diffúziók

A 3.4.2-os egyenletben definiált affin diffúzió az alábbi megfeleltetéssel adja vissza az egyszerűsítve parametrizált formát:

$$d\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu}_x(\mathbf{X}_t)dt + \boldsymbol{\sigma}_x(\mathbf{X}_t)d\widetilde{\mathbf{W}}_t, \quad (4.1.1)$$

ahol $\boldsymbol{\mu}_x(\mathbf{X}_t) = \widetilde{\mathbf{K}}(\widetilde{\boldsymbol{\Theta}} - \mathbf{X}_t)$ és $\boldsymbol{\sigma}_x(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\Sigma}\sqrt{\mathbf{S}_t}$.

Az egyváltozós esetben viszonylag könnyedén elképzelhető az átlaghoz vissza-

húzó folyamat. Az átlaghoz visszahúzás erősségét $\tilde{\mathbf{K}}$ mutatja, amennyiben $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{0}$, a folyamat nemstacionárius. A $d\widetilde{\mathbf{W}}_t$ sokkok zavarják meg $\mathbf{X}_t$ -t abban, hogy egyszerűen visszatérjen a hosszú távú átlaghoz. Ezen sokkok hatását $\mathbf{X}_t$ -re a volatilitás, $\sigma_x(\mathbf{X}_t)$ erősíti fel, vagy éppen tompítja. Ha ez a volatilitás *konstans*, a normális eloszlású $d\widetilde{\mathbf{W}}_t$ innovációk feltételesen normális eloszlást biztosítanak $d\mathbf{X}_t$ esetében. Ha azonban a volatilitás *nem állandó*, elképzelhető, hogy a $d\widetilde{\mathbf{W}}_t$ innovációk a magasabb volatilitású időszakokban átgyűrűznek $d\mathbf{X}_t$ -re, az alacsonyabb volatilitású időszakokban viszont nem. A felerősítés, illetve tompítás ezen állapotfüggősége *feltételes heteroszkedaszticitáshoz* vezet.

A normális eloszlású és a négyzetgyök folyamatok tekinthetők a leginkább elterjedt affin diffúzióknak. A közöttük lévő különbségtétel a $\sigma_x(\mathbf{X}_t)\sigma_x(\mathbf{X}_t)'$ varianciamátrixra vonatkozó feltételezésekben nyilvánul meg. A *normális eloszlású* folyamatok varianciamátrixa konstans, ami mátrix elemei vonatkozásában¹ azt jelenti, hogy $[\mathbf{S}_t]_{1i} = 0$ valamennyi $i = 1, \dots, N$ -re. Ha Σ megfelelő parametrizálásával biztosítjuk, hogy a varianciamátrix identitásmátrix formát öltön, úgy a következő lineáris sztochasztikus differenciálegyenletet kapjuk:

$$d\mathbf{X}_t = \tilde{\mathbf{K}}(\tilde{\boldsymbol{\Theta}} - \mathbf{X}_t)dt + \Sigma d\widetilde{\mathbf{W}}_t. \quad (4.1.2)$$

A fenti egyenletben $\mathbf{X}$ megoldásának létezése² és unicitása biztosított, ez a megoldás azonban normális eloszlású, így pozitív valószínűséggel vehet fel negatív értéket.

A *négyzetgyök* folyamatok esetében a varianciamátrix nem konstans, ezért

¹lásd: 3.4.3. egyenlet

²egzisztenciája

tér nyílik a feltételes heteroszkedaszticitás³ megjelenésére. Ahhoz, hogy a $\sigma_x(\mathbf{X}_t)\sigma_x(\mathbf{X}_t)'$ varianciamátrix pozitív definit legyen, megszorításokat kell bevezetni a modell paramétereinek vonatkozásában. Az egyváltozós példánál maradva a sztochasztikus differenciálegyenletünk a következő:

$$dX_t = \tilde{K}(\tilde{\Theta} - X_t)dt + \Sigma\sqrt{X_t}d\tilde{W}_t, \quad (4.1.3)$$

ahol $\tilde{K}$, $\tilde{\Theta}$ és Σ egyaránt skalárok. Ekkor tetszőlegesen választott paraméterekkel előfordulhat, hogy a $\Sigma^2 X_t$ formában kifejezett feltételes variancia pozitívtól eltérő értéket vesz fel. Segítségül kell tehát hívnunk a Feller-kritériumot, hogy a szigorúan pozitív számok tartományában maradjunk. A kritérium szerint $\tilde{K}\tilde{\Theta} > \frac{1}{2}\Sigma^2$; hétköznapiasan fogalmazva a drift tag elég erős ahhoz, hogy a „veszélyzónában kihúzza X_t -t a bajból”.

Általánosságban elmondható, hogy az egzisztencia- és unicitástételek biztosítják, hogy a sztochasztikus differenciálegyenlet nem robban fel (növekedési feltétel), valamint a megoldás unikális (Lipschitz-feltétel). Mindezzel azért fontos tisztában lenni, mert az említett feltételeknek való megfelelés nagyban korlátozza az állapotváltozók korrelációját az affin diffúziókban. Ráadásul, már az egyszerűségi versenyben élenjáró négyzetgyök folyamatok is akadályokba ütköznek a feltételek teljesítésekor. A $\Sigma\sqrt{X_t}$ -alakú volatilitás ugyanis nem teljesíti a Lipschitz-feltételt, éppen ezért kell segítségül hívnunk a Feller-kritériumot.

³ $\sigma_x(\mathbf{X}_t)$ ebben az esetben függ az állapotvektortól

4.2. Nevezetes építőkövek: Vasicek és CIR

Az első affin hozamgörbemodellek az affin diffúziók két alapesetének egyikeből álltak össze. A *Vasicek-típusú modellek*nél $\mathbf{X}_t$ egy- vagy többváltozós normális eloszlású affin diffúzió (*Ornstein-Uhlenbeck folyamat*⁴), a *CIR-típusú modellek* esetében $\mathbf{X}_t$ egy- vagy többváltozós négyzetgyökös affin diffúzió volt, ahol az állapotváltozók teljesen függetlenek voltak egymástól. Az első modellekben egyetlen faktor szerepelt, a SR.

A Vasicek modell egyfaktoros alakja a kockázatmentes mérték szerint tehát

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t \quad (4.2.1)$$

alakú, ahol $\kappa > 0$ a konstans hosszú távú átlaghoz való visszahúzás erejét mutatja, $\theta > 0$ a hosszú távú átlagos kamatszint, $\sigma > 0$ a folyamat volatilitása. A modellbeli kamatláb feltételes és feltétel nélküli eloszlása egyaránt normális, ebből fakadóan pedig a kamatláb felvehet negatív értéket is. A kockázat λ piaci ára konstans, aminek következtében a SR normális eloszlású a valós mérték szerint is. Annak ellenére, hogy egyetlenegy kockázati faktor határozza meg valamennyi lejárat ingadozását (azaz a különböző lejáratú hozamok tökéletesen korreláltak), a modell a hozamgörbe alakjainak széles palettáját képes leírni.

Ezzel szemben az egyfaktoros CIR modell alakja a kockázatmentes mérték szerint

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \quad (4.2.2)$$

⁴Ornstein és Uhlenbeck [1930]

alakot ölt, ahol a paraméterek értelmezése hasonló a Vasicek esethez. A paraméterek viszonylatában alkalmazni kell a $2\kappa\theta \geq \sigma^2$ megszorítást, hogy elkerüljük⁵ a SR folyamat 0 közeli „csapdába kerülését”. Az SR eloszlása itt már nem normális: a feltételes eloszlás ferde khi-négyzet eloszlás, a feltétel nélküli eloszlás pedig Gamma eloszlás. A modellbeli feltételes variancia függ a kamatszinttől (ebben a tekintetben valószínűbb a Vasicek modellnél), csak úgy mint a kockázat piaci ára. A CIR modell szintén feltételezi a különböző lejáratok közötti tökéletes korrelációt, és Cox et al. [1985] szerint a Vasicek modellhez hasonlóan számos alakú hozamgörbét képes modellezni. Cox és szerzőtársainak állításával ellentétben Brigo és Mercurio [2006] azt találta, hogy a CIR modell nem képes megfelelően kezelni az inverz (azaz negatív lejtésű) hozamgörbét; ezzel egybevágna saját empirikus tapasztalataim is, hiszen a teljes mintában inverz magyar hozamgörbére nem tudtam korrekt CIR modellt illeszteni.

A Vasicek és CIR modellek tehát azért is rendkívül fontosak az irodalomban, mert belőlük épülnek fel a bonyolultabb kamatláb modellek is. Létjogosultságuk azonban önállóan is megáll: már maguk is elfogadható illeszkedést produkálnak, főleg a többfaktoros esetben.

Vasicek első vonatkozó cikke (lásd: Vasicek [1977]) csupán az egyfaktoros esetet tárgyalja, azt később Langetieg [1980] terjesztette ki több faktorra. A később íródott Cox et al. [1985] már önmagában tartalmazta a többfaktoros esetet.

Később megjelentek az irodalomban *keverék modellek* is, ahol $\mathbf{X}_t$ dinamikáját korrelált többváltozós affin diffúzió írta le. Ezen a téren az első jelentős munka Duffie és Kan [1996], ahol a szerzőpáros bemutatta, hogy a keverék modellek hogyan épülnek fel az alapvető építőkockákat jelentő normális eloszlású és

⁵részletesebben lásd a 33. oldalon írottakat

négyzetgyök folyamatokból. A Duffie és Kan [1996] által bemutatott keverék modellekre Dai és Singleton [2000] ad részletes elemző értékelést, erről szól a következő alfejezet.

4.3. Dai és Singleton [2000] rendszerezése

Az affin modellek tanulmányozásában különlegesen értékes Dai és Singleton [2000] munkássága. A szerzőpáros jelentős úrt töltött be a hozamgörbemodellek irodalmában: átfogó rendszerezést készített a modellcsaládra, feltárva az egyes modellek közötti strukturális, valamint empirikus illeszkedési különbségeket. Ezekre a kérdésekre korábban – az affin modellek mélyreható elméleti elemzése és kiterjedt gyakorlati alkalmazása ellenére – nem fektettek hangsúlyt a kutatók. A rendszerezés alaplogikája az alábbi.

1. Elsődleges lépés annak vizsgálata, hogy az adott modellben analitikus képlettel számíthatók-e a zérókupon kötvények árfolyamai. Dai és Singleton [2000] megengedhetőségi (*admissibility*) kérdésnek nevezi ezt. Ez érthető is, hiszen az affin modellek egyik erőssége éppen a ritka, de annál jelentősebb esetekben jelentkező zárt képlet a zérókupon kötvényárfolyamra⁶. A továbbiakban az *analitikusan számolható* jelzővel fogok hivatkozni az „admissible” modellekre a szó szerinti fordítás esetlensége miatt.
2. A szerzőpáros bemutatja, hogy valamennyi analitikusan számolható N -faktoros affin modell (ezek alkotják az N -faktoros modellek családját)

⁶Meg kell jegyezni, hogy az empirikus alkalmazásokban nagyon sokáig nem merült fel az *admissibility* kérdés, mert a normális eloszlású és CIR modellekben eleve biztosított a zérókupon kötvényárfolyamok zárt képlettel történő számíthatósága. Lásd: Duffie és Kan [1996].

egyértelműen és átfedésmentesen besorolható $N+1$ alcsoportba. Itt a besorolás a 3.4.4-as egyenletben szereplő $\mathbf{B}_\tau$ rangját jelölő m szerint történik, ami nem más mint az $\mathbf{X}_t$ független lineáris kombinációinak száma. Ez a paraméter határozza meg az $\mathbf{X}_t$ feltételes variancia mátrixát. Dai és Singleton [2000] m valamennyi értékére meghatározza az analitikus számolhatóság szükséges és elégséges feltételeit.

3. Az így kapott összes $N+1$ alcsoportról elmondható, hogy - ökonometriai értelemben - helyet ad egy-egy ún. *maximális modellnek*. A maximális modell a modellek közötti orientációt segíti, pontosabban a következő bekezdésben jelölt kérdések megválaszolását.

Dai és Singleton [2000] megvizsgálja az irodalomban leginkább elterjedt affin kamatláb modelleket, elhelyezi őket a feni besorolás szerint. A csoportosítás haszna akkor jelentkezik, amikor világosan összevethetővé válnak az egyes modellek az alábbi dimenziók mentén. *Ad 1)* A vizsgált affin modell hol helyezkedik el az adott alcsoport maximális modelljéhez képest, azaz mekkora szabadságfokkal használja ki az adott alcsoportban rendelkezésre álló lehetőségeket. Ha a modellben vannak tartalékok, úgy melyek a megszorítások a maximális modellhez képest, és ezek mennyiben korlátozzák a modell illeszkedését. *Ad 2)* Az adott modell vagy az adott alcsoport *maximális* modellje megfelelően rugalmas-e ahhoz, hogy egyaránt leírja a hosszú és a rövid hozamok időbeli alakulását a mintaidőszakban.

Elvileg célul lehetne kitűzni egy *supermaximális* affin modell felállítását, aminek az egyes alcsoportok maximális modelljei (és így természetesen áttételesen valamennyi affin modell) specializált leszármazottai lennének. Ez azonban nem megvalósítható, mert az analitikus számolhatóság biztosításához korlátokat kell bevezetni a modellváltozók dinamikájára vonatkozóan.

Ezek a korlátok pedig olyan erős *trade-off* formájában jelentkeznek, hogy gyakorlatilag kizárják egy szupermaximális affin modell létezését.

Dai és Singleton cikkében a 3-faktoros modellek ($N=3$) példáján keresztül ismerhetjük meg az $X_{i,t}$ -k $\mathbf{X}_t$ -re vonatkozó feltételes varianciája és az $\mathbf{X}$ korrelációs mátrixának megengedhető szerkezete közötti trade-off-ot. A két szélső értéket a normális eloszlású modellek ($m=0$) és a korrelált négyzetgyök diffúziós⁷ modellek ($m=3$) jelentik. A normális eloszlású modellek esetében az $\mathbf{X}$ oszlopai között bármilyen irányú és erősségű feltételes illetve feltétel nélküli korreláció előfordulhat, viszont a feltételes varianciák állandók⁸. A CSR modellben ezzel szemben valamennyi állapotváltozó befolyásolja a feltételes varianciákat, az analitikus számolhatóság teljesüléséhez azonban szükséges, hogy az állapot változók feltételesen korrelálatlanok legyenek, sőt, a feltétel nélküli korrelációk sem lehetnek negatívak. **Nota bene az affin hozamgörbemodellek legfontosabb korlátja, hogy képtelenek egyszerre biztosítani az állapotváltozók közötti negatív korrelációt és a SR szigorú pozitivitását.** A két szélső érték között további két alcsoportja van az affin modelleknek, melyek egyikében sem állandó az állapotváltozók feltételes varianciája, továbbá az $\mathbf{X}$ oszlopai közötti korrelációs struktúra is (részben) szabadon változtatható.

Az irodalomban elterjedt modellekben rejlő tartalékokra hívja fel Dai és Singleton [2000] a figyelmet, amikor négy ismert modelltől vezeti le, hogy alulmaradnak saját alcsoportjuk maximális modelljével szemben. A 3-faktoros affin modellek $3+1=4$ alcsoportba rendezhetők, azaz m négy értéket (0,1,2 és 3) vehet fel. A szerzők bemutatják, hogy az m szerinti sorrendben a normális

⁷Correlated square-root diffusion (CSR).

⁸Azaz a modellekben konstans a volatilitás.

- $m=0$ (normális eloszlású modellek) : kockázati faktorok *konstans volatilitása*,
- $m=1, 2$: 1 vagy 2 állapotváltozó által befolyásolt *sztochasztikus volatilitású* kockázati faktorok, rugalmasabb korrelációs struktúra a faktorok között,
- $m=3$ (CSR) : mindhárom állapotváltozó befolyásolja a sztochasztikus volatilitást, viszont kizárólag *pozitív korreláció* engedhető meg a kockázati faktorok között.

4.1. ábra. A 3-változós affin modell trade-off: a hozam-volatilitás szerkezete vs faktorok közötti korreláció

eloszlású Vasicek⁹, a BDFS¹⁰, a Chen¹¹ és a CIR¹² modellek az egyes alcsoportok specializált modelljei, és egyikük sem maximális. Az irodalomból ismert megnevesített modellek a normális eloszlású model családot leszámítva valamennyien túlszabályozottak alcsoportjaik maximális modelljéhez képest az állapotváltozók egymástól való függőségének terén. Számos CSR-modell esetén (többek között Cox et al. [1985], Chen és Scott [1993], Pearson és Sun [1994] és Duffie és Singleton [1997]) például a modellek feltételezései között szerepel az állapotváltozók függetlensége, holott az analitikus számolhatóság feltételei nélkül is biztosítottak lennének.

⁹lásd: Vasicek [1977]

¹⁰lásd: Balduzzi, Das, Foresi és Sundaram [1996]

¹¹lásd: Chen [1996]

¹²lásd: Cox et al. [1985]

4.3.1. Az analitikus számolhatóság közelebbről és a kanonikus reprezentáció

A 3.4.8. egyenletben ismertetett általános alakra vonatkozóan megszorításokat kell alkalmazni, hogy az $\mathbf{X}$ mátrix feltételes varianciái, $[\mathbf{S}_t]_{ii}$ elemei pozitívak legyenek, ez a korábban már említett *admissibility problem*, azaz az analitikusan számolhatóság problematikája. A $\psi \equiv (\mathbf{K}, \mathbf{\Theta}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\alpha})$ paramétervektornak ($\mathbf{B} \equiv (\beta_1, \dots, \beta_N)$ az $\mathbf{X}$ -re vonatkozó $[\mathbf{S}_t]_{ii}$ együtthatómátrixa) ugyanis könnyen található olyan realizációja, amelyre mindez nem teljesül. Definíció szerint egy ψ paramétervektor akkor vezet analitikusan számolható modellhez, ha valamennyi $[\mathbf{S}_t]_{ii}$ pozitív.

Az analitikusan számolhatóság problematikája nem merül fel, ha $\beta_i = 0$. Ezt az esetet leszámítva a megengedhetőség feltétele, hogy bizonyos megszorításokat alkalmazzunk a modell dinamikáját leíró egyenlet drift ($\mathbf{K}$ és $\mathbf{\Theta}$) valamint diffúziós paramétereire ($\mathbf{\Sigma}$ és $\mathbf{B}$). Az analitikus számolhatóság feltételei tovább szigorodnak, ha emelkedik az $[\mathbf{S}_t]_{ii}$ -t meghatározó állapotváltozók száma.

Dai és Singleton [2000] a 3.4.4-as egyenletben szereplő $\mathbf{B}_\tau$ rangját jelölő m szerint¹³ mutatja be az analitikus számolhatóság feltételeit. A cikk bevezetésekor már jeleztem, hogy a szerzőpáros az analitikusan számolható N -faktoros modelleket m szerint besorolja $N+1$ alcsoportba. Az analitikusan nem számolható m -indexű N -faktoros modellektől való megkülönböztetés céljából a szerzők $\mathbb{A}_m(N)$ formában jelölik az analitikusan számolható modelleket.

A *kanonikus reprezentáció* bevezetéséhez Dai és Singleton [2000] particionálja $\mathbf{X}_{t-t}$, $\mathbf{X}' = (\mathbf{X}^{\mathbf{B}'}, \mathbf{X}^{\mathbf{D}'})$ alakban, ahol $\mathbf{X}^{\mathbf{B}}$ $m \times 1$, $\mathbf{X}^{\mathbf{D}}$ pedig $(N - m) \times 1$

¹³Ami ugye nem más mint az $\mathbf{X}_t$ független lineáris kombinációinak száma.

vektorok. A kanonikus reprezentáció a 3.4.8. egyenlet speciális esete, ahol

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{m} \times \mathbf{m}}^{\mathbf{BB}} & \mathbf{0}_{\mathbf{m} \times (\mathbf{N}-\mathbf{m})} \\ \mathbf{K}_{(\mathbf{N}-\mathbf{m}) \times \mathbf{m}}^{\mathbf{DB}} & \mathbf{K}_{(\mathbf{N}-\mathbf{m}) \times (\mathbf{N}-\mathbf{m})}^{\mathbf{DD}} \end{bmatrix}, \quad (4.3.1)$$

amennyiben $m > 0$, azonban $m = 0$ esetén $\mathbf{K}$ vagy felső vagy alsó háromszög, továbbá

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{m} \times 1}^{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0}_{(\mathbf{N}-\mathbf{m}) \times 1} \end{pmatrix}, \quad (4.3.2)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}, \quad (4.3.3)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{\mathbf{m} \times 1} \\ \mathbf{1}_{(\mathbf{N}-\mathbf{m}) \times 1} \end{pmatrix}, \quad (4.3.4)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\mathbf{m} \times \mathbf{m}} & \mathbf{B}_{\mathbf{m} \times (\mathbf{N}-\mathbf{m})}^{\mathbf{BD}} \\ \mathbf{0}_{(\mathbf{N}-\mathbf{m}) \times \mathbf{m}} & \mathbf{0}_{(\mathbf{N}-\mathbf{m}) \times (\mathbf{N}-\mathbf{m})} \end{bmatrix}. \quad (4.3.5)$$

A paraméterekre az alábbi megszorítások érvényesek¹⁴:

$$\delta_i \geq 0, \quad m+1 \leq i \leq N, \quad (4.3.6)$$

$$\mathbf{K}_i \boldsymbol{\Theta} \equiv \sum_{j=1}^m K_{ij} \Theta_j > 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (4.3.7)$$

$$K_{ij} \leq 0, \quad 1 \leq j \leq m, \quad j \neq i, \quad (4.3.8)$$

¹⁴A megszorítások eredményeképpen teljesül a $\text{rang}(\mathbf{B}) = m$ feltétel.

$$\Theta_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (4.3.9)$$

$$B_{ij} \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad m+1 \leq j \leq N. \quad (4.3.10)$$

A fenti jelölésrendszert alkalmazva $\mathbb{A}_m(N)$ jelöli azon affin modellek halmazát, amelyek az imént bemutatott kanonikus modell speciális esetei, illetve *invariáns* transzformációkkal a kanonikus modellből származtathatók. Az invariáns transzformációk változatlan kamatlábak és kötvényárfolyamok mellett őrzik meg az analitikus számolhatóság tulajdonságát.

Maga a kanonikus modell nemcsak analitikusan számolható, de *maximális* is. Meghatározásában az analitikus számolhatóságnak csupán minimálisan szükséges feltételei kerülnek alkalmazásra, a túlszabályozottság elkerülése végett. A kanonikus reprezentáció azonban nem az egyetlen maximális modell az $\mathbb{A}_m(N)$ modelleszaládban. A kanonikus modellből invariáns transzformációkkal származtatható modellek hasonlóképpen maximális modellnek tekinthetők. A kanonikus modell és a vele ekvivalens maximális modellek alkotják az $\mathbb{AM}_m(N)$ osztályt.

Az egyes modellek a kanonikus reprezentáció alapján felírt, m szerint szétválasztott alcsoportok segítségével elemezhetők; ez következik az alábbiakban.

$\mathbb{A}_0(3)$

Amennyiben $m = 0$, az $\mathbf{X}$ elemei nem hatnak $\mathbf{X}_t$ volatilitására, az állapotváltozók homoszkedasztikusak, $\mathbf{X}_t$ dinamikája pedig egy 3-dimenziós normális eloszlású diffúzió. Az $\mathbb{AM}_0(3)$ kanonikus reprezentációjának ψ paramétervektora az alábbi elemekből áll:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & 0 \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33} \end{bmatrix}, & \mathbf{\Sigma} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{\Theta} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{\alpha} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

ahol $\mathbf{K}$ átlójában szereplő elemek mindegyike pozitív.

A normális eloszlású affin modellek közül a legismertebbek Vasicek [1977], Langetieg [1980], továbbá Jegadeesh és Pennacchi [1996] munkái.

$\mathbb{A}_1(3)$

Az $m = 1$ modelleknél az $\mathbf{X}$ elemeinek egyike határozza meg a teljes $\mathbf{X}$ feltételes volatilitását. A legismertebb ide tartozó modell az irodalomban jól ismert BDFS modell:

$$\begin{aligned}
 du_t &= \mu(\bar{u} - u_t)dt + \hat{\eta}\sqrt{u_t}dB_{v,t}, \\
 d\theta_t &= \nu(\bar{\theta} - \theta_t)dt + \xi dB_{\theta,t}, \\
 dr_t &= \kappa(\theta_t - r_t)dt + \sqrt{u_t}d\hat{B}_{r,t}.
 \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

A korrelált folyamatok $B_{v,t}$ és $\hat{B}_{r,t}$, az ebből következő egyetlen, nem zérus korreláció $\text{cov}(dB_{v,t}, d\hat{B}_{r,t}) = \rho_{rv}dt$. A 4.3.12 kamatlábra vonatkozó egyenletét átírva, a korrelációs együtthatót felhasználva az alábbi adódik:

$$dr_t = \kappa(\theta_t - r_t)dt + \sqrt{1 - \rho_{rv}^2}\sqrt{u_t}dB_{r,t} + \rho_{rv}\sqrt{u_t}dB_{v,t}, \tag{4.3.13}$$

ahol $B_{r,t}$ és $B_{v,t}$ már függetlenek. Nincs más hátra, mint u_t -t helyettesíteni a $v_t = (1 - \rho_{rv}^2)u_t$, $\bar{u}$ -t helyettesíteni a $\bar{v} = (1 - \rho_{rv}^2)\bar{u}$ kifejezéssel, valamint $\hat{\eta}$ helyére $\eta = \sqrt{1 - \rho_{rv}^2}\hat{\eta}$ -t írni, és megkapjuk a BDFS modell kanonikus reprezentációhoz hasonló alakját. Ez nem más, mint:

$$\begin{aligned} dv_t &= \mu(\bar{v} - v_t)dt + \eta\sqrt{v_t}dB_{v,t}, \\ d\theta_t &= \nu(\bar{\theta} - \theta_t)dt + \xi dB_{\theta,t}, \\ dr_t &= \kappa(\theta_t - r_t)dt + \sqrt{v_t}dB_{r,t} + \sigma_{rv}\eta\sqrt{v_t}dB_{v,t}, \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

ahol $\sigma_{rv} = \rho_{rv}/\eta\sqrt{1 - \rho_{rv}^2}$. Az első egyenlet v_t -re van felírva, ami nem más mint a volatilitás változó. A második egyenletben szereplő θ_t a kamatláb hosszú távú átlaga¹⁵. A modellben a kamatláb κ intenzitással küzd vissza magát a θ_t -vel jelölt hosszú távú átlaghoz.

A BDFS modellt az $\mathbb{AM}_1(3)$ maximális Ar modellhez hasonlítva világosan látszik, hogy mely pontokon túlzottan szigorú a BDFS modell, illetve mülja felül a maximális modell a BDFS modellt .

$$\begin{aligned} dv_t &= \mu(\bar{v} - v_t)dt + \eta\sqrt{v_t}dB_{v,t}, \\ d\theta_t &= \nu(\bar{\theta} - \theta_t)dt + \sqrt{\xi^2 + \boxed{\beta_\theta}}v_tdB_{\theta,t} + \\ &\quad + \boxed{\sigma_{\theta v}}\eta\sqrt{v_t}dB_{v,t} + \boxed{\sigma_{\theta r}}\sqrt{\alpha_r + v_t}dB_{r,t}, \\ dr_t &= \boxed{\kappa_{rv}}(\bar{v} - v_t)dt + \kappa(\theta_t - r_t)dt + \sqrt{\boxed{\alpha_r} + v_t}dB_{r,t} + \\ &\quad + \sigma_{rv}\eta\sqrt{v_t}dB_{v,t} + \boxed{\sigma_{\theta r}}\sqrt{\xi^2 + \beta_\theta}v_tdB_{\theta,t}. \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

A BDFS modell olyan speciális esete a fenti 4.3.15-as egyenletben szereplő maximális modellnek, ahol a bekeretezett paraméterek 0-val egyenlők. Ez azt

¹⁵central tendency

jelenti, hogy a maximális modellhez képest a BDFS modell *Ad 1)* korlátozza a kamatláb és annak hosszútávú átlaga közötti korrelációt ($\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = 0$), *Ad 2)* nem engedi meg, hogy a volatilitásban jelentkező sokkok (v) hassanak a hosszú távú átlagos kamat volatilitására ($\sigma_{\theta v} = 0$), valamint *Ad 3)* a volatilitás sokkok nem befolyásolhatják a kamatláb driftjét ($\kappa_{rv} = 0$). Az említett megszorítások feloldásával rugalmasabb affin modellt kapunk¹⁶, amit empirikus vizsgálatokkal is igazol Dai és Singleton [2000].

Érdemes felírni a 4.3.15-as egyenletet AX formában:

$$r_t = \delta_0 + \boxed{\delta_1} X_{1t} + X_{2t} + X_{3t}, \quad (4.3.16)$$

$$\begin{aligned} d \begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \\ X_{3t} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix} \left[\begin{pmatrix} \theta_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \\ X_{3t} \end{pmatrix} \right] dt + \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{\sigma_{21}} & 1 & \boxed{\sigma_{23}} \\ \sigma_{31} & \boxed{\sigma_{32}} & 1 \end{bmatrix} \sqrt{\begin{bmatrix} S_{11t} & 0 & 0 \\ 0 & S_{22t} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33t} \end{bmatrix}} dB_t, \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

ahol

$$\begin{aligned} S_{11t} &= X_{1t}, \\ S_{22t} &= \alpha_2 + \boxed{[\beta_2]_1} X_{1t}, \\ S_{33t} &= \boxed{\alpha_3} + [\beta_3]_1 X_{1t}. \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

¹⁶Az így kapott rugalmasabb modellben v továbbra is értelmezhető volatilitás sokként, azonban a θ paraméter némileg túlmutat a kamatláb hosszú távú átlagán.

A fenti AX -re felírt modell esetében már jól látszik, hogy a BDFS modell az $\mathbb{AM}_1(3)$ csoportban foglal helyet, hiszen a fent bemutatott modell ekvivalens az $\mathbb{AM}_1(3)$ kanonikus reprezentációjával¹⁷. A három változó diffúziós mozgása feltételesen korrelált lehet, továbbá X_1 mindhárom változó feltételes varianciáját befolyásolhatja. Az analitikus számolhatóság feltétele azonban, hogy X_1 által követett Wiener-folyamat szigorúan pozitív, azaz $\sigma_{12} = 0$ és $\sigma_{13} = 0$.

A BDFS modell AX -reprezentációjában a 4.3.16-4.3.18 egyenletekhez képest annyi módosulás van, hogy valamennyi bekeretezett paraméter 0-val egyenlő, kivéve σ_{32} -t, ami éppenséggel -1. Mindez hogyan értelmezhető? Úgy, hogy a BDFS modell a lehetséges háromból csupán két változó affin függvényeként írja le a short rate mozgását ($\delta_1 = 0$). Ez annak a feltételezésnek az eredménye, miszerint a v_t volatilitás változó csupán saját volatilitásán keresztül hat a kamatlábra, X_{2t} és X_{3t} eloszlásán keresztül. Az irodalomban nem a BDFS az egyetlen modell, amely δ_x -et feleslegesen túlszabályozza: hasonlóan jár el Andersen és Lund [1996] is.

$\mathbb{A}_2(3)$

Az $\mathbb{A}_2(3)$ családban az köti össze a modelleket, hogy az $\mathbf{X}_t$ volatilitását $\mathbf{X}$ három eleme közül kettő befolyásolja, azaz a mátrix feltételes varianciáját két változó affin függvénye határozza meg. Ide tartozik a Chen modell:

¹⁷A kanonikus reprezentációból úgy jutunk el a fenti formához, hogy a Σ mátrixot diagonalizáljuk, S_{22} -t és S_{33} -at normalizáljuk, valamint elhagyjuk δ_2 -t és δ_3 -at az $r_t = \delta_0 + \delta_1 X_{1t} + \delta_2 X_{2t} + \delta_3 X_{3t}$ egyenletből.

$$\begin{aligned}
 dv_t &= \mu(\bar{v} - v_t)dt + \eta\sqrt{v_t}dW_{1t}, \\
 d\theta_t &= \nu(\bar{\theta} - \theta_t)dt + \zeta\sqrt{\theta_t}dW_{2t}, \\
 dr_t &= \kappa(\theta_t - r_t)dt + \sqrt{v_t}dW_{3t},
 \end{aligned} \tag{4.3.19}$$

ahol a három Wiener-folyamat kölcsönösen független egymástól. A BDFS modellhez hasonlóan v a sztochasztikus volatilitást jelöli, θ pedig a kamatláb hosszú távú átlagos értékét. A fő különbség a Chen és a BDFS modellek között az, hogy a θ a Chen modellben négyzetgyök folyamatot követ, ellenben a BDFS-ben normális eloszlásút.

Az ide tartozó maximális modell, ami segít kiemelni a Chen modell túlzott szigorúságát, az alábbi:

$$\begin{aligned}
 dv_t &= \mu(\bar{v} - v_t)dt + [\kappa_{v\theta}](\bar{\theta} - \theta_t)dt + \eta\sqrt{v_t}dW_{1t}, \\
 d\theta_t &= \nu(\bar{\theta} - \theta_t)dt + [\kappa_{\theta v}](\bar{v} - v_t)dt + \zeta\sqrt{\theta_t}dW_{2t}, \\
 dr_t &= [\kappa_{rv}](\bar{v} - v_t)dt + \\
 &\quad + [\kappa_{r\theta}](\bar{\theta} - \theta_t)dt - \kappa(\bar{\theta} - \theta_t)dt + \kappa([\bar{r}] - r_t)dt + \\
 &\quad + [\sigma_{rv}]\eta\sqrt{v_t}dW_{1t} + [\sigma_{r\theta}]\zeta\sqrt{\theta_t}dW_{2t} + \\
 &\quad + \sqrt{[\alpha_r] + [\beta_\theta]\theta_t + v_t}dW_{3t}.
 \end{aligned} \tag{4.3.20}$$

A Chen modell a fent leírtak speciális esete, ahol a bekeretezett paraméterek nullával egyenlők, kivéve $\bar{r}$ -t, amire $\bar{r} = \bar{\theta}$ áll fenn.

A maximális modell rávilágít, hogy θ -t és v -t miért nem szerencsés a kamatláb hosszú távú átlagaként, illetve volatilitásaként értelmezni. A fentiek szerint ugyanis θ és v driftjei befolyásolhatják egymást, sőt, a két változó hatást gyakorolhat a kamatláb driftjére, valamint volatilitására is. A Chen modell

feleslegesen tiltja a kapcsolatot¹⁸ θ_t és r_t , továbbá v_t és r_t között. Dai és Singleton [2000] empirikusan vizsgálja a túlzott szigor következményeit.

A kanonikus reprezentációval történő összevetés céljából itt is érdemes felírni a modellt AX szellemenben:

$$r_t = \boxed{\delta_0} + \boxed{\delta_1} X_{1t} + X_{2t} + X_{3t}, \quad (4.3.21)$$

$$\begin{aligned} d \begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \\ X_{3t} \end{pmatrix} &= \left[\begin{array}{cc|c} \kappa_{11} & \boxed{\kappa_{12}} & 0 \\ \boxed{\kappa_{21}} & \kappa_{22} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \kappa_{33} \end{array} \right] \left[\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \\ X_{3t} \end{pmatrix} \right] dt + \\ &+ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline \boxed{\sigma_{31}} & \boxed{\sigma_{32}} & 1 \end{array} \right] \sqrt{\left[\begin{array}{cc|c} S_{11}(t) & 0 & 0 \\ 0 & S_{22}(t) & 0 \\ \hline 0 & 0 & S_{33}(t) \end{array} \right]} dB(t), \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

ahol

$$\begin{aligned} S_{11t} &= [\beta_1]_1 X_{1t}, \\ S_{22t} &= [\beta_2]_2 X_{2t}, \\ S_{33t} &= \boxed{\alpha_3} + X_{1t} + \boxed{[\beta_3]_2} X_{2t}. \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

A fentiek szerint X_1 és X_2 határozza meg a modellben a volatilitást; a két változó szigorú pozitivitását $\kappa_{12} \leq 0$, valamint $\kappa_{21} \leq 0$ biztosítja. Ebből következően (X_{1t}, X_{2t}) kétváltozós, korrelált Wiener-folyamat. A modell analitikus számolhatósága megkívánja, hogy X_1 és X_2 feltételesen korrelálatlanok

¹⁸A modellbeli korrelációk nullával egyenlők.

legyenek, továbbá, hogy X_3 ne hasson az első két változó driftjére. A harmadik változó feltételesen korrelált lehet (X_1, X_2) -vel, és varianciája (X_1, X_2) affin függvényeként alakulhat.

A 4.3.21-4.3.23 között felírt AX reprezentációból úgy tudunk egyszerűsítés útján eljutni a Chen modellhez, hogy a bekeretezett paramétereket nullával tesszük egyenlővé, illetve behelyettesítjük a $\sigma_{32} = -1$, valamint $\delta_0 = -\delta_1\theta_1 - \theta_2 + q\theta_2 = -\theta_2\kappa_{22}/\kappa_{33}$ kifejezéseket. A Chen modellben a kamatláb – a lehetséges hárommal szemben – két állapotváltozó affin függvénye, csakúgy mint a BDFS-esetben.

$\mathbb{A}_3(3)$

A háromváltozós affin modellek között ez az utolsó modelles család: $m = 3$, azaz mindhárom X „beleszól” a varianciák alakulásába. Az $\mathbb{AM}_3(3)$ kanonikus reprezentációja így írható fel:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.3.24)$$

$$\mathbf{\Theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\alpha} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{I}_3,$$

ahol az alábbi megszorítások érvényesek: $\kappa_{ii} > 0$ valamennyi $1 \leq i \leq 3$ -re, $\kappa_{ij} \leq 0$, ha $1 \leq i \neq j \leq 3$ fennáll, továbbá $\theta_i > 0$ valamennyi $1 \leq i \leq 3$ -ra.

A fentiek szerint, mivel mind $\mathbf{\Sigma}$, mind pedig $\mathbf{B}$ identitásmátrix, az $m = 3$ modellek formailag megegyeznek a három dimenziós CIR modellel, ahol a

volatilitásról három független Wiener-folyamat gondoskodik. Az analitikus számolhatóságnak - a CIR modellel ellentétben - nem feltétele, hogy a $\mathbf{K}$ mátrix identitásmátrix legyen, elegendő, ha az átlón kívül eső elemek kisebbek nullánál vagy éppen nullák. A kanonikus reprezentáció tehát egy *korrelált* négyzetgyök-modell, ellentétben az irodalomban felettébb elterjedt CIR-mintára építő *független* véletlen tagos modellekkel, mint például a Chen és Scott [1993], a Pearson és Sun [1994], vagy éppen a Duffie és Singleton [1997]. Az imént említett modellek kevésbé rugalmasak, mint a maximális modell, hiszen túlzott szigorral független véletlenfolyamatokat követelnek meg, azaz megkövetelik, hogy a $\mathbf{K}$ mátrix átlón kívüli elemei nullák legyenek. Jelen esetben, tekintettel arra, hogy 3-faktoros modellekről van szó, a $\mathbf{K}$ identitásmátrixszá kényszerítése hat paramétert korlátoz. Mindez természetesen árt a modellek rugalmasságának, illetve illeszkedési képességének.

4.3.2. Modellek csoportosítása a SR momentumai szerint

A Dai és Singleton [2000] által javasolt besorolási séma segít az irodalomban korábban felmerült, hozamok dinamikáját *látens faktorokkal* magyarázni kívánó faktormodellek elhelyezésében. A látens faktorok közvetlenül nem megfigyelhetők, becslésük a hozamokból visszszámolva lehetséges. A faktormodellek szerzői általában intuitíve nevet adnak az általuk bemutatott faktoroknak, melyek tartalma vagy *a hozamok momentumaiban*, vagy *valamilyen makrogazdasági változóban* keresendő.

Sztocasztikus átlagú modellek

A sztocasztikus átlagú modellekben $\mathbf{X} = (r, \theta)$, az r pillanati kamatláb a sokkokból gyorsan visszatér a θ sztocasztikus rövid távú átlaghoz, ami lassú

mozgással ingadozik a $\bar{\theta}$ hosszú távú átlag körül. Az ide tartozó sztochasztikus differenciálegyenletek a következők.

$$\begin{aligned} dr_t &= \kappa_r(\theta_t - r_t)dt + \sigma_r dW_{r,t}, \\ d\theta_t &= \kappa_\theta(\bar{\theta} - \theta_t)dt + \sigma_\theta(\theta_t)dW_{\theta,t}. \end{aligned} \tag{4.3.25}$$

Fent $\kappa_r, \kappa_\theta, \sigma_r$ és $\bar{\theta}$ skalárok, továbbá $\kappa_r > \kappa_\theta$, hogy θ betölthesse a sztochasztikus átlag szerepét. Az egyenletekben a véletlenváltozók függetlenek egymástól. Balduzzi, Das és Foresi [1998] feltételezi, hogy $\sigma_\theta(\theta_t)$ valójában σ_θ azaz nem függ θ_t -től: így a sztochasztikus átlag normális eloszlású lesz. Ez a sztochasztikus átlagú modell az $\mathbb{A}_0(2)$ halmazba esik, a kockázat Λ piaci ára itt állandó.

A Chen modell (lásd: Chen [1996]) kétváltozós alakjában θ egy négyzetgyök-folyamat, $\sigma_\theta(\theta_t) = v\sqrt{\theta_t}$ valamely konstans v -re. A vonatkozó egyenletek:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= (W_r, W_\theta)', \\ \sigma_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) = \mathbf{s}(\mathbf{X}) &= \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 \\ 0 & v\sqrt{\theta} \end{bmatrix}, \\ \Lambda(\mathbf{X}) &= \mathbf{q}'\mathbf{s}(\mathbf{X}). \end{aligned} \tag{4.3.26}$$

Ebben az $\mathbb{A}_1(2)$ modellben $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$, Σ pedig egy 2×2 -es identitás mátrix.

Sztochasztikus volatilitású modellek

Legyen $\mathbf{X} = (r, v)'$, ahol v a SR volatilitása. A negatív értékek lehetőségét elkerülendő, a volatilitás dinamikáját négyzetgyök-folyamat írja le:

$$\begin{aligned} dr_t &= \kappa_r(\bar{r} - r_t)dt + \sqrt{v_t}dW_{r,t}, \\ dv_t &= \kappa_v(\bar{v} - v_t)dt + \sigma_v\sqrt{v_t}dW_{v,t}, \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

ahol $\kappa_r, \bar{r}, \kappa_v, \bar{v}$ és σ_v konstansok, a Wiener-folyamatok pedig függetlenek egymástól. A további egyenletek:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= (W_r, W_v)', \\ \sigma_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) &= \mathbf{s}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \sqrt{v} & 0 \\ 0 & \sigma_v\sqrt{v} \end{bmatrix}, \\ \Lambda(\mathbf{X}) &= \mathbf{q}'\mathbf{s}(\mathbf{X}). \end{aligned} \quad (4.3.28)$$

Ismét, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$, továbbá $\Sigma = \mathbf{I}$. Ez az $\mathbb{A}_1(2)$ modell Longstaff és Schwartz [1992] elképzeléseinek szülöttje.

Sztochasztikus drift és volatilitás egy modellben

Számos, az irodalomban előforduló 3-faktoros modellben az átlag és a volatilitás is sztochasztikusan ingadozik. Ezekben a modellekben az állapotvektor a $\mathbf{X} = (r, \theta, v)$ formát ölti. Ide tartozik Balduzzi et al. [1996] $\mathbb{A}_1(3)$ modellje¹⁹, valamint Chen [1996] $\mathbb{A}_2(3)$ változata.

A Dai és Singleton [2000] által bevezetett kanonikus reprezentációkban az állapotvektor dinamikáját mind a kockázatmentes, mind pedig a valós mérték szerint affin diffúzió írja le, hiszen:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) &= \Sigma \mathbf{s}(\mathbf{X}), \\ \Lambda(\mathbf{X}) &= \mathbf{q}'\mathbf{s}(\mathbf{X}), \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

¹⁹ez ugyebár a 43. oldalon ismertetett BDFS

ahol $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^N$ állandó. A drift paraméterek átszámíthatósága az alábbi képletekkel lehetséges:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\kappa} &= \boldsymbol{\kappa}^* - \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Phi}, \\ \bar{\mathbf{X}} &= \boldsymbol{\kappa}^{-1}(\boldsymbol{\kappa}^*\bar{\mathbf{X}}^* + \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\psi}).\end{aligned}\tag{4.3.30}$$

A fenti egyenletben szereplő $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ mátrix i -edik sorát $q_i(s_{1i})'$, a $\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^N$ vektor i -edik tagját pedig $q_i s_{0i}$ adja vissza. Az átlaghoz történő visszahúzás intenzitása valamint a hosszú távú átlag más és más lehet a kockázatsemleges mérték és az adatgeneráló mérték szerint. A kockázatsemleges mérték szerinti értékek azért tekinthetők fontosabbnak, mert azok határozzák meg az állapotvektor driftjét.

4.4. Kritikai válaszok Dai és Singleton [2000] eredményeire

Jelen alfejezetben azokra az irodalomban megjelent kritikai megjegyzésekre kívánok kitérni, melyek Dai és Singleton [2000] állításaira illetve eredményeire fókuszálnak, figyelmen kívül hagyva az affin modellcsaládot ab ovo elutasító szerzőket, akik gyökeresen más modellek alkalmazásában sejtik a gyógyírt.

Duffee [2002] egy egyszerű teszten buktatta meg Dai és Singleton [2000] eredményeit. Duffee a DS²⁰ adatait és paramétereit felhasználva visszaszámította az állapotvektor értékét és a kötvények várható többleshozamát²¹. A megfigyelések több mint negyedében azt tapasztalta, hogy a visszaszámított

²⁰Dai-Singleton

²¹ezekre vonatkozóan nem közöl eredményeket Dai és Singleton [2000]

állapotvektor negatív értéket vett fel, megsértve ezáltal a kanonikus reprezentáció feltevéseit. Ezek szerint a DS által javasolt modellekben a mintabeli adatok valójában meg sem történhettek volna. Az esetekben közös volt, hogy az adott napi hozamgörbe szerint a hosszú lejáratú kötvények hozama jóval az átlagos alatt volt.

Duffee [2002] további következtetése, hogy a Dai és Singleton [2000] által javasolt affin modellek előrejelző képessége meglehetősen gyér. Sőt, Duffee szerint egy egyszerű bolyongási elmélet²² pontosabban jelzi előre a jövőt, mint a DS modellek. A DS előrejelzésekben ugyanis a hibatagok (azaz a többlethozamok²³) és a hozamgörbe meredeksége között *erős negatív korreláció* áll fenn. A hosszú futamidejű kötvények többlethozamát különösen akkor becsli alul Dai és Singleton [2000], amikor a hozamgörbe meredek.

Duffee [2002] szerint a DS modellek gyér előrejelző képessége részben az amerikai hozamgörbéről gyűjtött empirikus tapasztalatokkal, részben pedig az affin modellek megszorításaival kapcsolatosak. Az empirikus tapasztalatok szerint *Ad 1)* a hozamok eloszlásának ferdesége nem jelentős, azaz a mintabeli hozamok az átlag mindkét oldalán hasonló mértékben szóródnak; továbbá *Ad 2)* bár az átlagos többlethozamok alig nagyobbak nullánál, a hozamgörbe meredekségéből számolva varianciájuk meglehetősen tetemes. Fama és French [1993] szerint mindez úgy lehetséges, hogy a várható többlethozamok gyakran előjelt váltanak az idő múlásával. A Dai és Singleton [2000] által javasolt affin modellek az imént említett két tulajdonságot képtelenek egyszerre modellezni. A kockázat piaci ára ugyanis a kockázati faktor va-

²²ahol a hozamok dinamikája véletlen bolyongás (random walk)

²³Ha a pillanati kötvényárfolyam dinamikáját $\frac{dP(\mathbf{X}_t, \tau)}{P(\mathbf{X}_t, \tau)} = (r_t + e_{t,r})dt + v_{t,r}dW_t$ egyenlettel írjuk fel, $e_{t,r}$ jelöli a kötvény tartásából származó pillanati többlethozamot. Ekkor a többlethozamok és a volatilitástag vonatkozásában az alábbi tényre hívja fel a figyelmet Duffie és Kan [1996]: $e_{t,r} = -\mathbf{B}'_\tau \Sigma \mathbf{S}_t \mathbf{A}_t$, illetve $v_{t,r} = -\mathbf{B}'_\tau \Sigma \mathbf{S}_t$.

rianciájának fix többszöröse²⁴. Ez az arbitrázsmentesség teljesüléséhez kell: ha eltűnik a rendszerből a kockázat, nincs kompenzáció érte. A varianciák azonban mindig nemnegatívak, ezért a futott kockázatért elvárt kompenzáció is alulról korlátos 0-nál. A DS felállásban tehát nem megoldható a kötvény többlethozamok előjelváltása az idő múlásával. A vizsgált affin modellek csak akkor jelzik előre a többlethozamokat alacsony átlaggal és magas varianciával, ha a hozamok eloszlása aszimmetrikus, mégpedig erősen balra ferde. A Dai és Singleton [2000] modellek *Ad 1* és *Ad 2* közül *valamelyiket* helyesen kezelhetik, a kettőt egyszerre azonban nem.

Duffee [2002] megoldást is kínál az általa feltárt problémára. A DS modelleket *teljesen affinnak* titulálva bevezeti a *kvázi affin* modell fogalmát. A kvázi affin modellek szakítanak a teljesen affin modellek kockázat piaci árára vonatkozó specifikációjával, különválasztva a SR volatilitását és a kockázatvállalásért elvárt kompenzációt. A kvázi affin modellek esetében a kockázat piaci ára a következő:

$$\Lambda_t = S_t \lambda_1 + S_t^- \lambda_2 X_t, \quad (4.4.1)$$

ahol a diagonális S_t^- mátrix elemeire

$$[S_t^-]_{ii} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_i + \beta_i' X_t} & , \text{ ha } \inf(\alpha_i + \beta_i' X_t) > 0, \\ 0 & , \text{ egyébként,} \end{cases} \quad (4.4.2)$$

áll fenn. Ha az S_t mátrix átlóban szereplő i -edik eleme határozottan nagyobb nullánál, akkor ennek a reciproka lesz az S_t^- mátrix i -edik eleme, S_t többi eleme pedig „lenullázódik” az S_t^- mátrixban. Ezáltal biztosított, hogy S_t^- elemei „nem szállnak el”, ahogy S_t mátrix elemei nullához közelítenek.

²⁴lásd: 3.4.7. egyenlet

Fentiek következménye, hogy *Ad 1)* kockázat piaci ára nullába tartó $[\mathbf{S}_t^-]_{ii}$ mellett sem tart a végtelenbe; *Ad 2)* $\mathbf{\Lambda}_t \mathbf{S}_t \mathbf{X}_t$ affin függvénye, ergo $\mathbf{X}_t$ valószínű mérték szerinti dinamikája szintén affin. A fenti $\mathbf{\Lambda}_t$ definíció mellett lazább kapcsolat jellemzi a kockázat piaci ára és a volatilitás mátrix viszonyát. Ugyanakkor fontos megjegyezni, hogy trade-off kapcsolat áll fenn a kvázi affin modellek előrejelző képessége (ehhez kell az imént említett rugalmasság) és a SR volatilitásmátrixra történő illeszkedése között. Duffee [2002] szerint a kvázi affin modellek mindamellett, hogy megőrzik a teljesen affin modellek kedvező tulajdonságait, utóbbiaknál pontosabban jelzik előre a jövőt mind a DS által vizsgált, mind a Duffee által használt egyéb, szintén amerikai adatokra támaszkodó mintában.

5. fejezet

A becslés módszertani szempontjai

A következőkben a becslés módszertani szempontjait ismertetem. A dolgozat ezen része szándékosan kevésbé hangsúlyos, mint a modelleket ismertető.

5.1. Bevezető a becslési problematikába

Akárcsak a modellezési, a módszertani kérdéseknél is először alapvető, mondhatni filozófiai kérdésekkel találkozunk a kutató. Itt ezekbe kísérek meg betekintést adni.

5.1.1. Az adatok felhasználási módja

Az adatok felhasználási módja vonatkozásában megkülönböztetünk *Ad 1)* tiszta időszorelemzést; *Ad 2)* keresztmetszeti vizsgálatot; valamint *Ad 3)* panelvizsgálatot. A következőkben ezekről ejtek néhány szót.

Tiszta idősoelemzés

A tiszta idősoelemzés úgy tekint a SR-folyamatra, mint bármely más sztochasztikus folyamatra. Ez egyszerű kezelhetőséget eredményez, azonban a hozamgörbében rejlő információtartalom negligálását is jelenti.

A tiszta idősoelemzés során 1-faktoros modellre építve végezzük a becslést. Az egyfaktoros modelleknél komoly korlátot jelent a valós adatokra mért illeszkedés: ez ugyanis tökéletes korrelációt feltételez a hozamgörbe különböző lejáratú pontjai között¹.

A tiszta idősoelemzésnél nem szükséges, hogy a becsült modellben zárt képlettel legyenek számolhatók a zérókupon kötvényárfolyamok.

Keresztmetszeti vizsgálat

A keresztmetszeti vizsgálat során egy adott napi hozamgörbéből becsüljük a modell paramétereit. A modell itt nem más, mint a hozamgörbe illesztésére használt függvény (mint például más esetben a harmadfokú spline).

Egy affin modell becslésekor a becsülőfüggvény az alábbi alakot ölti:

$$(\hat{\psi}, \hat{\mathbf{X}}_t) = \arg \min_{\psi, \mathbf{X}_t} \sum_{i=1}^n \left(P_{i,t} - \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} \exp[\mathcal{A}(\tau_{ij}, \psi) + \mathcal{B}(\tau_{ij}, \psi)' \mathbf{X}_t] \right)^2 \quad (5.1.1)$$

ahol ψ a modellparaméterek vektora, ami napról napra² változhat, hogy a mintaadatakra folyamatosan jól illeszkedő modellt kapjunk.

¹azaz az egyes lejáratok autokorrelációs függvénye azonos

²itt természetesen a megfigyelések közöttiségéről van szó, ami a napi felbontástól tet-szőlegesen eltérhet

Előfordulhat, hogy a becsült állapotváltozók időbeli alakulása nem felel meg az állapotvektor dinamikáját leíró sztochasztikus folyamat feltételezéseinek.

A keresztmetszet vizsgálatoknál a becslés lefuttatásához szükségszerű a zérókupon kötvényárfolyamok analitikus számolhatósága. Megjegyzendő továbbá, hogy a többfaktoros modellek becslése különösen bonyolult. A keresztmetszeti vizsgálat irányadó referenciáinak tekinthetők Brown és Dybvig [1986], illetve Brown és Schaefer [1994].

Panelvizsgálat

A panelvizsgálat során az alapötlet az, hogy a rendelkezésre álló teljes adathalmaz lehetőségeit, illetve információtartalmát³ kihasználjuk a becslés során.

A panelvizsgálat során gyakorlatilag elkerülhetetlen probléma, hogy a mért adatok nem felelnek meg a becsült modell feltételezéseinek (azaz az alkalmazott modell szigorú értelmezése szerint a mért adatok elő sem fordulhattak volna). Ezt a problémát úgy kerüljük meg a gyakorlatban a szakemberek, hogy feltételezzük, hogy néhány lejáratot (akár valamennyit) mérési hibával vettek a mintába. Ez a mérési hiba kapcsolja össze a mért adatokat a modell szerinti árakkal. Két eset lehetséges: *Ad 1*) egyes benchmark pontokat hiba nélkülinek feltételezünk, a többi lejárati adatai azonban mérési hibát is tartalmaznak⁴; *Ad 2*) nem teszünk különbséget a lejáratok között (a legtöbbször azért, mert nem tudunk) és feltételezzük, hogy valamennyi ár mérési hibával együtt került a mintába⁵. Több erős érv is felvonultatható a mérési hibák megléte mellett, például a bid-offer spreadek, vagy éppen a kereskedés nem folytonos

³idősor és keresztmetszet dimenziót egyaránt

⁴ez a helyzet a ML-becslésnél

⁵pl. Kálmán-szűrős becslés

jellege.

Az idősor és keresztmetszet dimenziók egyidejű használata hatékony paraméterbecslést eredményes, hiszen a teljes adathalmazt felhasználják a kutatók. A látásmód hátránya azonban, hogy gyakorlati alkalmazása meglehetősen bonyolult ökonometriai modellekhez vezet. Ráadásul a normális eloszlásútól eltérő modellek becslése még gyerekcipőben jár.

5.1.2. Nemparaméteres vizsgálat

A nemparaméteres vizsgálat alapötlete, hogy a sztochasztikus folyamat drift és diffúziós paramétereit azok függvényformájára vonatkozó feltételezések nélkül becsüljük. A nemparaméteres vizsgálatok csoportjában két eljárás foglal helyet: az *ún. lényegi becslés* és a *neurális hálózati módszertan*. Előbbi ún. magfüggvénnyel⁶ becsli a dinamikára vonatkozó egyenletet, utóbbi a keresett függvényalakot logit függvények összegeként állítja elő.

A témában részletesebben lásd Aït-Sahalia [1996b], Stanton [1997], valamint Jiang és Knight [1997] munkáit.

5.1.3. Módszertani kihívások

Könnyebb róla beszélni, mint csinálni - ez maximálisan igaz a hozamgörbe-modellek becslésére. Ökonometriai szempontból a maximum likelihood (ML) becslés preferált, ennek alkalmazásához azonban szükség van a folyamat átmenetvalószínűsége valószínűségi eloszlásának ismeretére. Ez azonban csak a modellek töredékénél áll fenn, ezáltal növelve a kiemelt esetek (pl. Vasicek [1977], Cox et al. [1985]) fontosságát. Ha az átmenetvalószínűség eloszlása

⁶kernel function

nem ismert, az árazó parciális differenciálegyenlet numerikus megoldására van szükség (lásd: Lo [1988]). A numerikus módszerek azonban szigorúan értelmezve ellentétesek a modellek folytonos időben történő felírásával.

A folytonos idejű modelleknél további problémát jelent *Ad 1)* hogy a mért adatok csak diszkrét időpontokra vonatkozóan hozzáférhetők, azaz a valószínűségben – szintén szigorúan értelmezett – folytonosságról szó sincs; *Ad 2)* a közvetlenül meg nem figyelhető állapotváltozók megléte (pl. sztochasztikus volatilitás); *Ad 3)* az ideális SR-folyamat kiválasztásának problematikája (ez a tényező jelentősen motiválta a nemparaméteres vizsgálati módszerek fejlődését). Többfaktoros modelleknél természetesen fokozottan jelentkeznek a jelzett problémák.

5.1.4. Becslési hibák, sztochasztikus szingularitás

A becslési hibák témakörének tárgyalásához fontos, hogy megismerjük a sztochasztikus szingularitás fogalmát. Ezalatt azt kell érteni, hogy az $N+1$ megfigyelt hozamot tartalmazó rendszer variancia-kovariancia mátrixa szinguláris: az $N+1$ -edig megfigyelési pontot $R^2 = 1$ pontossággal jelzi előre a rendszer, másként fogalmazva a modellt egyetlen megfigyelés elutasíthatja.

A sztochasztikus szingularitás problémát jelent a becslés során, mivel a hozamgörbe keresztmetszete meglehetősen gazdag⁷, azonban a becslés során arra törekszünk, hogy a modellben az állapotvektor dimenziószáma ne legyen túl magas. A megfigyelési egyenletbe bekerülő hibatag megtöri a sztochasztikus szingularitást, ezért kell a becslés során feltételezésekkel élnünk a hibák természetére vonatkozóan⁸. Két eset lehetséges: *Ad 1)* valamennyi⁹

⁷azaz számos különböző τ létezik

⁸lásd a panelvizsgálat témakörében említetteket

⁹az adatgyűjtéskor fellépő pontatlanságok és a nem aktívan kereskedett lejáratok esetén

hozampont megfigyelési adata tartalmaz hibát (az ε^τ hibatag varianciája valamennyi lejárat esetén nullától különböző); *Ad 2)* a hozamgörbe egyes pontjai tartalmaznak, ellenben a többi pontja¹⁰ nem tartalmaz megfigyelési hibát (a hibatag varianciája a lejáratok egy részénél nullával egyenlő).

Bármelyik feltételezésből is indul ki a modellező, gyakran autokorrelált hibatagokkal találkozunk (lásd: Duffie és Singleton [1997]), ami meglehetősen aggasztó. Az még viszonylag könnyen magyarázható lenne, ha az adott megfigyeléshez tartozó hibatagok lennének korreláltak egymással a keresztmetszeti dimenzió mentén, az időben mutatkozó korreláció azonban azt sejteti, hogy a hibák nem a méréssel, hanem a modellből kifelejtett állapotváltozókkal, vagy a feltételezett függvényforma alkalmatlanságával¹¹ kapcsolatosak.

5.1.5. Állapottér-reprezentáció

A hozamgörbemodellek becslésekor a két legfontosabb mérlegelendő tényező a becslési hibák kérdése, illetve maga a módszertan. Az eligazodást segíti, ha a modelleket *állapottér-reprezentációban* írjuk fel. Az állapotter-reprezentációban két egyenlettel írjuk le a rendszert: a *megfigyelési egyenlet* a megfigyelt hozamokat kapcsolja össze az állapotvektorral, az *állapot egyenlet* pedig az állapotvektor dinamikáját írja le. Az affin modellek példáján:

$$\begin{aligned} Y_t^\tau &= \mathcal{A}^\tau + \mathbf{B}^{\tau'} \mathbf{X}_t + \varepsilon_t^\tau, & \text{megfigyelési egyenlet} \\ d\mathbf{X}_t &= \mu \mathbf{X}_t dt + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{X}_t d\mathbf{W}_t. & \text{állapot egyenlet} \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

alkalmazott interpolációs eljárások egyaránt okolhatók elméletileg

¹⁰ezek lehetnek például benchmark pontok

¹¹pl. nemlineáris kapcsolatok megléte affin modellek becslésekor

5.2. Becslési koncepciók

5.2.1. Likelihood módszerek

A likelihood módszerek a maximum likelihood (ML) becslést, valamint – az ML közvetlen alkalmazhatóságának hiányában – az arra visszavezetett egyéb becslési eljárásokat foglalják magukba. A maximum likelihood módszer alkalmazhatóságának feltétele, hogy az $f(X_{t+1} | X_t)$ átmenetvalószínűség ismert, illetve számolható legyen. A feltételes sűrűségfüggvény egy transzformált változó bevezetésével számolható:

$$f_Y(Y_{t+1} | Y_t) = f(X_{t+1} | X_t) \left| \frac{dX_{t+1}}{dY_{t+1}} \right|, \quad (5.2.1)$$

ahol Y a megfigyelt hozamokat jelenti, $\left| \frac{dX_{t+1}}{dY_{t+1}} \right|$ pedig az állapot egyenlet Jacobi determinánsa. Az Y_t eloszlásfüggvényének logaritmusa a fenti átmenetvalószínűségek integrálásával adódik, később ezt a $\log f_Y(Y_{t+1} | Y_t)$ -t maximalizáljuk X_t függvényében. A módszer zérókupon hozamokkal és vanília kötvényekkel egyaránt működik, a Jacobi determináns ugyanis jól kezeli a nemlinearitás problematikáját.

A $f(X_{t+1} | X_t)$ feltételes átmenetvalószínűség csak néhány speciális esetben ismert. Az f átmenetvalószínűség a normális eloszlású folyamatoknál egy- vagy többváltozós normális eloszlás, független négyzetgyök folyamatoknál pedig nemcentrális khi-négyzet valószínűségek szorzata.

Kvázi-ML becslés (QML)

Abban az esetben, ha f zárt alakban nem ismert, megpróbálhatjuk diszkrétizálni a sztochasztikus differenciálegyenletet és a transzformált problémá-

ra alkalmazni a ML-beclést. A segítségül hívott sztochasztikus differencia-egyenlet a következő¹²:

$$\Delta X_{t+h} = \mu X_t h + \sigma X_t \varepsilon_{t+h} \sqrt{h}, \quad (5.2.2)$$

ahol ε_{t+h} egy N -dimenziós standard normális eloszlás, h pedig a megfigyelési intervallum hossza. A diszkretizált probléma a megfigyelési intervallum nullába tartásával konvergál folytonos társához, a diszkretizált eloszlásfüggvényt maximalizáló beclés azonban nem minden h -ra konzisztens. Az esetleges inkonzisztenciát a feltételes momentumok eltérő alakja adja a folytonos és a diszkrét esetben. Fisher és Gilles [1996] azonban megmutatja, hogy a megfelelő momentumokra és a normális eloszlásra alapuló kvázi-ML beclés konzisztens.

A karakterisztikus függvény (inverz) Fourier-transzformáltja

Tekintettel arra, hogy a ϕ karakterisztikus függvény nem más mint a sűrűségfüggvény Fourier inverze, az f sűrűségfüggvény számítható a karakterisztikus függvény Fourier inverzeként is. A karakterisztikus függvény alakja:

$$\phi_{t,u} = E_t[\exp(iu'X_{t+1})] = \int_{\mathcal{D}} f(X_{t+1} | X_t) \exp(iu'X_{t+1}) dX_{t+1}, \quad (5.2.3)$$

ahol $i = \sqrt{-1}$. Mindez azért fontos, mert Duffie et al. [2000] a Feynman-Kac formula segítségével rámutatott, hogy valamennyi affin diffúzió karakterisztikus függvénye felírható zárt alakban. Ha pedig ismert a karakterisztikus függvény, az f feltételes sűrűségfüggvény az alábbi képlettel számolható:

¹²ez az ún. Euler-séma

$$f(X_{t+1} | X_t) = \frac{1}{\pi^N} \int_{\mathbb{R}^N} \text{Re} \{ \exp(-iu' X_{t+1}) \phi_{t,u} \} du, \quad (5.2.4)$$

feltéve, hogy Re a komplex számok valós részét jelöli.

Általánosított diffúzió esetében, tehát az affin specializációtól eltávolodva, a sűrűségfüggvény számítására három módszer adódik a likelihood koncepcióban: a parciális differenciálegyenlet numerikus megoldása, a szimuláció valamint a Hermite-sorfejtés.

Az átmenetvalószínűség PDE-jének numerikus megoldása

Az f feltételes átmenetvalószínűség parciális differenciálegyenlete az előre haladó Kolmogorov-egyenlet. Utóbbi numerikus megoldását mutatja be többek között Lo [1988] és Jensen és Poulsen [1999].

Szimulált ML-becslés (SML)

Pedersen [1995] és Santa-Clara [1995] az eloszlásfüggvény szimulálásában ért el áttörést. Egy általános diffúzió esetén nem lehet a valós f átmenetvalószínűségből kiindulni, hiszen az nem ismert. Helyette a 5.2.2. egyenletben bemutatott Euler-séma jelenti a kiutat: t időpontban a megfigyelt X_t értéket vesszük, ezek után az s -edik szimulált esetben az $\hat{X}^{X_t}[s]$ állapotvektor értékét független N -dimenziós normális eloszlásból vett véletlen minta alapján számítják az Euler-egyenlet segítségével. A keresett átmenetvalószínűséget a Bayes-szabály és X_t Markov-tulajdonsága segítségével írhatjuk fel:

$$f(X_{t+1} | X_t) = \int_D f(X_{t+1} | X_{t+1-h}) f(X_{t+1-h} | X_t) dX_{t+1-h} \quad (5.2.5)$$

valamennyi h intervallumra. Az $f(X_{t+1}|X_{t+1-h})$ átmenetvalószínűséget a 5.2.2. egyenletből számított $\hat{f}$ diszkrét becslés helyettesíti. A kapott átmenetvalószínűség normális eloszlású, $X_{t+1-h} + \mu(X_{t+1-h})h$ átlaggal és $\sigma(X_{t+1-h})\sqrt{h}$ szórással. A közelítő értéket Monte Carlo becslés adja:

$$f(X_{t+1}|X_t) \approx \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \hat{f}\left(X_{t+1}|\hat{X}_{t+1-h}^{X_t}[s]\right), \quad (5.2.6)$$

ahol az összegzés valamennyi S darab szimulációra vonatkozik, ami t időpontban indul ki X_t -ből.

A szimuláció hatékonysága javítható hagyományos szóráscsökkentő eljárások alkalmazásával¹³. Brandt és Santa-Clara [2002] többváltozós diffúziós modellt becsül SML-lel. Durham és Gallant [2002] fontosság szerinti mintavételezéssel javítja a becslés hatékonyságát.

Kálmán-filter

Az állapotter-reprezentációhoz kapcsolódik a strukturált modellbecslésben népszerű¹⁴ Kálmán Rudolfról elnevezett Kálmán-filter. A módszer különösen alkalmas olyan problémák becslésére, ahol az állapotváltozók (vagy azok egy része) közvetlenül nem megfigyelhető. Az állapotter-reprezentációt felhasználva a Kálmán-filter rekurzív módon frissíti becslését a 5.1.2. egyenletben bemutatott látens változót tartalmazó állapotvektorra (állapot egyenlet), úgy hogy minél közelebb kerüljünk a megfigyelt piaci árfolyamokhoz (megfigyelési egyenlet). A módszer az iterációk sorozatából állítja elő a valószínűségfüggvény logaritmusát, amit aztán ML módszerrel maximál, hogy eljussunk a

¹³a részletekért lásd: Geweke [1996]

¹⁴pl. Lund [1997], Bolder [2001]

modellparaméterek optimális értékéhez. Ez csupán a módszer leírása dióhéjban, részletekért lásd a bekezdés elején jelölt két hivatkozást.

A módszer rekurzív jellege miatt (*a priori* előrejelzés a rendszer dinamikája alapján, majd *a posteriori* kondicionálás a megfigyelt árfolyamoknak megfelelően) szorosan kapcsolódik a bayesi becslés témaköréhez.

Hermite-sorfejtés

Ait-Sahalia [2001] egy egyváltozós diffúzió $f(X_{t+1}|X_t)$ átmenetvalószínűségét Hermite-polinomok segítségével számolja. A szerző először standardizálja X -et, majd az így kapott $\tilde{X}$ átmenetvalószínűségét becsli Hermite-sorfejtéssel. A standardizálásra azért van szükség, mert a Hermite-féle eljárás eredménye csak *közel normális eloszlású* változók esetén konvergál a tényleges átmenetvalószínűséghez. A standardizált $\tilde{X} = \int^X \frac{1}{\sigma}(w)dw$ diffúzió volatilitása egységnyi. A Hermite-polinom valamennyi $X \in \mathbb{R}^N$ esetén:

$$H_j(X) = \exp\left(\frac{1}{2}X^2\right) \frac{\partial^j}{\partial X^j} \exp\left(-\frac{1}{2}X^2\right) \quad (5.2.7)$$

$j = 0, 1, \dots, J$ -re.

Elegendően nagy J esetén az X állapotvektor f átmenetvalószínűségét felírhatjuk a standardizált $\tilde{X}$ változó Hermite-sorfejtéssel becsült $f_{\tilde{X}}$ átmenetvalószínűségével:

$$\begin{aligned}
f(X_{t+1}|X_t) &\approx \frac{1}{\sigma(\tilde{X}_{t+1})} f_{\tilde{X}}(\tilde{X}_{t+1}|\tilde{X}(t)) \approx \\
&\approx \frac{1}{\sigma(\tilde{X}_{t+1})} \exp\left(-\frac{1}{2}(\tilde{X}_{t+1} - \tilde{X}_t)^2\right) \times \sum_{j=0}^J \eta^{(j)}(\tilde{X}_t) H_j(\tilde{X}_{t+1} - \tilde{X}_t),
\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

ahol

$$\eta^{(j)}(\tilde{X}_t) = \frac{1}{j!} E\left[H_j(\tilde{X}_{t+1} - \tilde{X}_t) | \tilde{X}_t\right] \tag{5.2.9}$$

$\tilde{X}$ függvényeinek feltételes momentumai.

Aït-Sahalia [2002] a 5.2.9. egyenletben szereplő együttthatókra ad becslést zárt képlet formájában, Taylor-sorfejtést alkalmazva. Jensen és Poulsen [1999] a Hermite-sorfejtés pontosságát veti össze más eljárásokkal egyváltozós négyzetgyök-folyamatok becslésében. Aït-Sahalia [2002] és Aït-Sahalia és Kimmel [2002] kiterjesztést ad többváltozós diffúziók esetére.

5.2.2. Momentum módszerek

Amennyiben az állapotváltozók eloszlása nem ismert, célravezető módszer az eloszlás momentumainak becslése. A momentumok módszere számos becslési eljárás gyűjtőneve, az alábbiakban csupán betekintést kívánok nyújtani a témába, a teljesség igénye nélkül. Valamennyi módszer közös előnye, hogy alkalmazásához elegendő a modellváltozó(k) csupán néhány momentumának becslése, szemben az ML-becsléssel, ahol a sűrűségfüggvény pontos meghatározására van szükség. Az előny ára azonban, hogy az egyes momentum mód-

szerek gyakran nem teljesen, illetve nem hatékonyan használják ki a minta információtartalmát.

Általánosított Momentumok Módszere, GMM

Az úttörő módszer a momentumok illesztésében Hansen [1982] GMM-je (Generalized Method of Moments, általánosított momentumok módszere) volt. Alkalmazásának feltétele, hogy a hozamok az állapotvektor affin függvényei, illetve az állapotvektor adatgeneráló folyamata affin diffúzió. Az affin diffúziók momentumai a karakterisztikus függvény segítségével számíthatók zárt képlettel. A módszer kizárólag zérókupon hozamok esetén alkalmazható, vannak kötvények és kamatláb swapok esetén (amikor a hozamok nem fejezhetők ki az állapotváltozók lineáris függvényeként) nem. A probléma áthidalásának eszköze lehet, ha a becslés részeként interpolációval mesterséges zérókupon hozamokat állítunk elő.

Általánosságban a GMM-becslés menete az alábbi:

- momentum feltételek segítségével leírjuk a hozamgörbemodell struktúrális paramétereit,
- meghatározzuk a fenti momentum feltételek mintabeli megfelelőit,
- megkeressük a paraméterek azon értékeit, ahol a mintára és a modellre felírt momentum feltételek közötti eltérés minimális.

Hatékony Momentumok Módszere, EMM

Affintól eltérő adatgeneráló folyamatok, valamint nemlineáris hozamok esetén Gallant és Tauchen [2002] szimulációs módszertanra építő EMM-je (Effi-

cient Method of Moments, hatékony momentumok módszere), továbbá Aït-Sahalia, Hansen és Scheinkman [2002] operátor módszere jelenthet megoldást. Ezek közül az alábbiakban az EMM koncepcióját ismertetem. Választásomat a módszer elterjedtsége és kedvező tulajdonságai indokolták. Az EMM ugyanis ötvözi a hatékonyságot és a rugalmasságot, hiszen rutinszerűen kezeli a hozamgörbemodellek széles körét.

Konstrukcióját tekintve az EMM egyfajta GMM-módszer, speciális¹⁵ momentum feltételekkel és optimalizált súlymátrixszal. Az EMM-becslés menete az alábbi:

1. projekció: keresünk egy segédmodellt (auxiliary model), amely adott mércével mérve megfeleltethető a hozamgörbemodell struktúrájának, azonban sűrűségfüggvénye zárt alakban ismert,
2. ML-módszerrel megbecsüljük a segédmodell¹⁶ paramétereit az eredeti mintán,
3. becslés: a segédmodell fent becsült paramétereinek felhasználásával trajektóriákat szimulálunk az eredeti hozamgörbemodellben,
4. megkeressük az eredeti hozamgörbemodell azon paramétereit, amelyek mellett a normált szimulált momentumok a lehető legközelebb kerülnek 0-hoz.

¹⁵itt a GMM-mel ellentétben nem ad-hoc jellegű a választás

¹⁶Az eredeti hozamgörbemodellre csak „addig volt szükségünk”, amíg megtaláltuk a megfelelő segédmodellt. Ha itt hibázunk, lenullázzuk munkánk értékét. Emiatt a segédmodell kiválasztása nagyon fontos lépés, a hozamgörbemodell teljes információtartalmát „bele kell égetnünk” a segédmodellbe.

6. fejezet

Empirikus eredményeim

Az alábbi fejezetben saját empirikus vizsgálataim eredményeit ismertetem. Itt a már ismertetett szakirodalom alapján bemutatom, hogy empirikus elemzésem mit tűz ki célul, illetve kérdéseimet milyen konkrét hipotézisek formájában fogalmaztam meg. Ismertetem az elemzési adatmintát és az elemzés módszereit, végül bemutatom eredményeimet, kitérve azok felhasználhatóságának korlátaira.

6.1. A kutatás célja

Elsősorban deduktív jellegű kutatásom célja a *magyarországi kamattermékből származtatott hozamgörbék ökonometriai módszerekkel történő modellalapú becslése, illetve előrejelzése*. Mint ahogy az a dolgozat korábbi fejezeteiből kiderült, az Egyesült Államok piacaira tengernyi vizsgálatot végeztek el, és sokszor hasonló, ám néhány esetben egymásnak ellentmondó következtetéseket vontak le a témában aktív szerzők. A magyar hozamgörbére vonatkozóan a legmélyrehatóbb vizsgálatokat a Magyar Nemzeti Bank (MNB) szakembe-

rei végezték el¹; azonban ezen vizsgálatok a statikus (egy adott nap adataiból számított) hozamgörbére vonatkoztak, a görbe dinamikájáról kevés szó esett. Éppen ezért kiemelt fontosságú lenne a korábban ismertetett modellek magyarországi adatokra történő alkalmazása. Egy, a hazai piacra adaptált modellel kvantitatív módon lehetne vizsgálni a hozamgörbét, illetve annak dinamikáját. Az MNB számára, valamint adósságkezelési szempontból is hasznos lehetne egy ökonometriai modell, amivel a hozamgörbe jövőbeli alakulását tudják modellezni. Végül, de nem utolsó sorban a szimuláción alapuló ökonometriai modell kockázatkezelési, illetve felügyeleti célokhoz is kínálhatna felhasználási lehetőséget. A modellbeli jövő többszörös egymás utáni lefutásának segítségével a VaR-hoz hasonló mutatót is kreálhatnánk.

Céлом a magyar hozamgörbe sztochasztikus dinamikájának leírása, illetve megértése. Vizsgálatom az affin modellekre (a modellválasztással kapcsolatban lásd a 3.7 alfejezetet), azon belül is Vasicek modellekre korlátozódik 1, 2, illetve 3 magyarázó faktorral. A modellek illeszkedését összevetem az amerikai piacon mért eredményekkel, kiemelve a hasonlóságokat és a különbségeket. A kutatás önálló eredménye, hogy a több tucat, szakirodalomban aktívan használt modell közül néhányat rá szab a magyar adatokra, ezeket rangsorolja, harmadrészt pedig kvantitatív módon megméri a 3-faktoros modell előrejelző képességét a magyar mintára vonatkozóan. Ez utóbbi különleges előremutató jelentőséggel bír, hiszen még az amerikai adatokra felállított modellek esetében is csupán a szerzők töredéke vizsgálja a modellek előrejelző erejét.

¹lásd: Csajbók [1999], Gyomai és Varsányi [2002], Reppa [2008].

6.2. A vizsgálandó hipotézisek

A vizsgálandó hipotézisek első csoportja csupán az adatokra koncentrál, bármiféle modell felállítása nélkül. Félparaméteres (semi non-parametric, SNP) szemléletben megvizsgálom a mintát, és az eredményeket összevetem az amerikai piacon tapasztaltakkal. A számításokat négy lejáratra (6 hónap, 2 év, 5 év és 10 év) végzem el 1-dimenziós esetben, illetve a teljes mintára panelvizsgálat keretében.

- H1: A magyar mintában idősor szemléletben nemlineárisak az innovációk.
- H2: A magyar mintában idősor szemléletben heteroszkedasztikus a volatilitás.
- H3: A magyar mintában idősor szemléletben aszimmetrikus a volatilitás.
- H4: A magyar mintára végzett panelvizsgálat eredményei nem mondanak ellent az idősor szemléletben kapott eredményekkel.

A következő hipotézisek a különböző modellek (1-, 2- és 3-faktoros Vasicek modellek) magyarázó erejére vonatkoznak. A számítások a teljes 15 lejáratot tartalmazó mintán készülnek.

- H5: A modellek magyarázó ereje a magyarázó változók számának (1-ről 2-re, illetve 2-ről 3-ra történő) növelésével nő.
- H6: A 3-faktoros Vasicek modell megfelelő kalibrálásával biztosítható, hogy a modellek relatív (azaz átlagos hozamszinttel korrigált²) illeszke-

²Természetesen ettől eltérő módon is „közös nevezőre” hozhatnánk az eltéréseket, például piaci bid-ask spreadek figyelembe vételével.

dése az amerikai példában tapasztalttól ne térjen el jelentősen (25 százaléknál nagyobb mértékben) a magyar minta rovására. Másként fogalmazva a modell relatív becslési pontatlansága legfeljebb 25 százalékkal nagyobb a magyar mintában, mint az amerikai adatokra vonatkozóan.

Utolsó vizsgálandó hipotézisem a 3-faktoros modell előrejelző képességére vonatkozik.

- H7: A 3-faktoros Vasicek modell előrejelző képessége fél éves időtávon elfogadható. Mindezt úgy értelmezem, hogy az előrejelzések átlagos pontatlansága nem több mint ötszöröse a mintabeli illeszkedési pontatlanságnak.

6.3. Elemzési módszerek

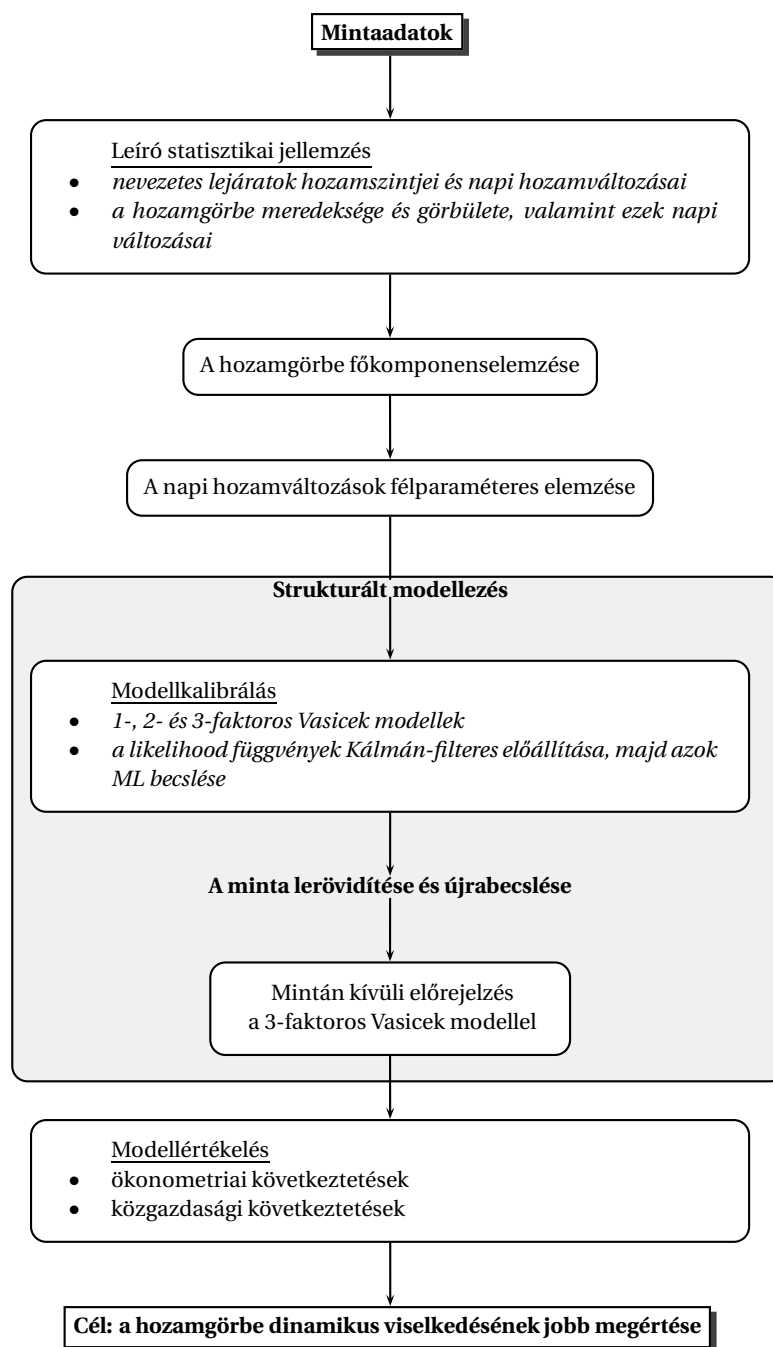
Az alkalmazott elemzési módszereket valamint az empirikus kutatás folyamatábráját a 6.1. ábra mutatja be.

A mintaadatok leíró statisztikai elemzését és a hozamgörbére futtatott főkomponenselemzést (PCA, Principal Factor Analysis) a *gretl*³ nevű szoftverrel végzem el, az SNP vizsgálatot a Gallant és Tauchen által írt *C++* forráskód⁴ segítségével futtatom le, a Vasicek modelleket az *R* nevű programban⁵ Kálmán-filterrel kalibrálom (a becslés során a Kálmán-filterrel előállított likelihood függvényt maximalizálom maximum likelihood módszerrel), követve Bolder [2001] útmutatását.

³forrás: <http://gretl.sourceforge.net/>

⁴forrás: <http://www.econ.duke.edu/>

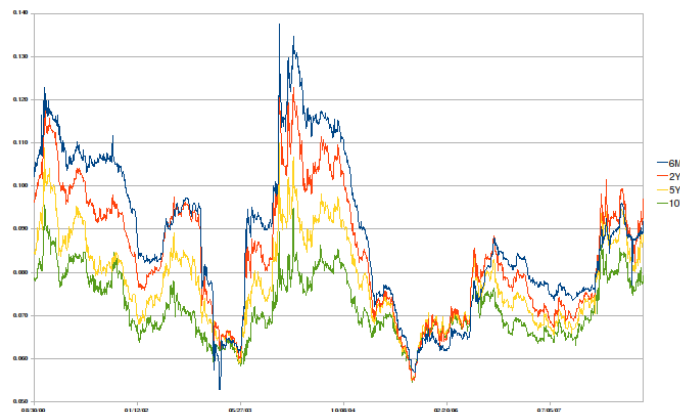
⁵forrás: <http://www.r-project.org/>



6.1. ábra. Az empirikus kutatás folyamatábrája

6.4. A felhasznált adatok

Az elemzéshez felhasznált minta az Államadósság Kezelő Központ (ÁKK) zérókupon hozamgörbe adatsora, mely napi rendszerességgel 1998-tól áll rendelkezésemre. A vizsgált lejáratok: 2 hét, 1 hónap, 3 hónap, 6 hónap, 9 hónap, 1 év, 2 év, 3 év, 4 év, 5 év, 6 év, 7 év, 8 év, 9 év és 10 év. A mintából kiválasztott idősorokat mutat a 6.2. ábra.



6.2. ábra. A mintaadatok ($N=2007$)

Elvégeztem a mintaadatok részletes leíró statisztikai elemzését, ennek eredményeit az értekezés jobb olvashatósága céljából a B. függelék mutatja be. Kitérek a nevezetes lejáratok hozamszintjeinek, napi hozamváltozásainak elemzésére, valamint a hozamgörbe meredekségének és görbületének bemutatására is. Érdeemes megjegyezni, hogy a hozamszintek hisztogramjából (főleg a 10 éves lejárat esetében) jól kiolvasható a kétmódusú eloszlás képe. Ez statisztikailag támasztja alá azt, amit a piaci szereplők tapasztalatból ismernek: a magyar kötvénypiacon vagy „nagyon jó”, vagy „nagyon rossz” a helyzet⁶.

⁶Azaz az „inga sokszor erősen túlleng és csak nehézkes lassúsággal indul vissza a holtponthoz”. Az persze egy másik kérdés, hogy az a bizonyos *holtpont* tekinthető-e fair value-

6.5. A hozamgörbe főkomponenselemzése

A 13. oldalon már említettem Litterman és Scheinkman [1991] főkomponenselemzésre épülő cikkét. A strukturált modellezés előtt érdemesnek tartottam megvizsgálni, hogy valójában hány faktor szükséges a magyar hozamgörbe *napi hozamváltozásainak* magyarázatához. A 6.1. táblázatból jól kiolvasható, hogy az első 3 főkomponens a napi hozamváltozások csaknem 96 százalékát magyarázza. Háromnál több faktor csak marginálisan javítja a modell magyarázó erejét, ellenben fokozottan nehezíti a becslés menetét, illetve növeli annak számításigényét. Erre való hivatkozással a strukturált modellezésnél is legfeljebb 3-faktoros modellekkel dolgozom, mivel azok megfelelő specifikációt feltételezve képesek a hozamgörbe változásainak leírására.

A Litterman és Scheinkman [1991] cikkel való összevethetőség céljából elvégeztem a hozamszintek főkomponenselemzését is, ennek eredményei a 79. oldalon láthatók. Itt az első 3 faktor a hozamgörbe több mint 99 százalékát magyarázza.

A hozamszintek és a hozamváltozások főkomponenseinek együtthatótáblázatát, valamint a hozamszintek első három főkomponensének leíró statisztikai elemzését a C. függelék tartalmazza. A C.2. és a C.3. ábrán jól látható a 2. és a 3. főkomponens eloszlásának vastag farkú jellege.

Az érdeklődő kutató nem kerülheti el, hogy összemérje a hozamgörbe meredekségét a második, a görbületet pedig a harmadik főkomponenssel, ezáltal vizsgálva meg Litterman és Scheinkman állításait a magyar hozamgörbére,

nak, azaz reális értéknek, és túlzott piaci reakciókkal állunk szemben; vagy pedig a hazai gazdasági folyamatok bipoláris jellege okozza a kétmódusú hozamszintet. A kérdés megválaszolása nem tartozik bele a tézis témakörébe, ellenben egy makrogazdasági szemléletű kutatás érdekes témája lehetne.

	Kontribúció	Kumulált magyarázott kovariancia
1. faktor	0,6692	0,6692
2. faktor	0,2302	0,8994
3. faktor	0,0577	0,9571
4. faktor	0,0277	0,9848
5. faktor	0,0122	0,9970
6. faktor	0,0024	0,9994
7. faktor	0,0005	0,9999
8. faktor	0,0001	1,0000
9. faktor	0,0000	1,0000
10. faktor	0,0000	1,0000
11. faktor	0,0000	1,0000
12. faktor	0,0000	1,0000
13. faktor	0,0000	1,0000
14. faktor	0,0000	1,0000
15. faktor	0,0000	1,0000

6.1. táblázat. *Napi hozamváltozások főkomponenselemzése, forrás: saját számítások*

egyben bizonyítva a meredekség és a görbület leíró statisztikai részben⁷ meghatározott és egyben alkalmazott definícióját. Ez az összevetés látható a 6.3. és a 6.4. ábrán; az együttmozgás világosan kivehető.

6.6. A minta SNP elemzése

A minta félpaméteres (SNP) elemzése során egyszerű VAR modellekből indultam ki (1, 2, 3 illetve 4-es késleltetéssel), először ezeket kalibráltam a mintaadatakra. Továbbmenve folyamatosan bővítettem a segédmodell (auxi-

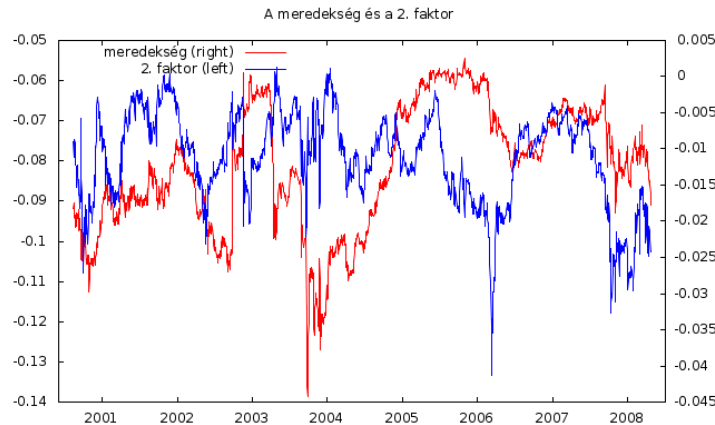
⁷lásd: B. függelék

	Kontribúció	Kumulált magyarázott kovariancia
1. faktor	0,9470	0,9470
2. faktor	0,0463	0,9933
3. faktor	0,0048	0,9981
4. faktor	0,0013	0,9994
5. faktor	0,0004	0,9998
6. faktor	0,0002	1,0000
7. faktor	0,0000	1,0000
8. faktor	0,0000	1,0000
9. faktor	0,0000	1,0000
10. faktor	0,0000	1,0000
11. faktor	0,0000	1,0000
12. faktor	0,0000	1,0000
13. faktor	0,0000	1,0000
14. faktor	0,0000	1,0000
15. faktor	0,0000	1,0000

6.2. táblázat. A hozamszintek főkomponenselemzése, forrás: saját számítások

liary model) tárházát (pl. ARCH, GARCH folyamatokkal), és két információs kritérium (AIC, BIC) együttes használatával értékeltem azok szignifikanciáját. Az optimalizációt Gallant és Tauchen módszerével végeztem el, kontroll számításokkal biztosítva, hogy az eredmények ne függjenek az optimalizáció kezdő értékeitől (azaz elkerüljük a lokális minimum esetét).

A vizsgálat eredménye szerint a hozamgörbe dinamikáját egy félparaméteres GARCH folyamat írja le. A segédmodell feltételes varianciája VAR(1), GARCH(1,1) folyamat, az innovációt egy 6-od rendű polinom adja 1-es késleltetéssel. Megvizsgáltam, hogy javul-e a segédmodell illeszkedése, amennyiben a polinomok együtthatói maguk is polinomok, illetve ha bevezetjük a modellbe az aszimmetrikus volatilitást (leverage effect), azonban egyik eset-

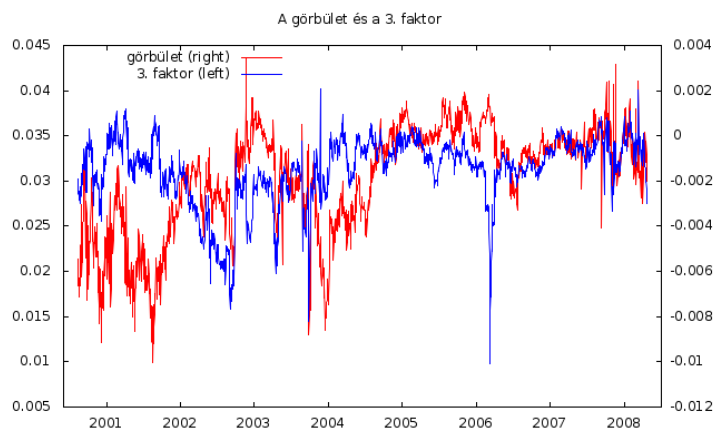


6.3. ábra. *A meredekség és a 2. főkomponens, forrás: saját számítások*

ben sem kaptam megerősítést. Az SNP segédmodell illesztését a 6 hó, 2 év, 5 év és 10 év lejáratokra végeztem el idősor szemléletben, valamint ezek összességére egy panelvizsgálat keretében. Az egyes esetekben kapott eredmények egymást megerősítették.

A fentiek alapján értékelni tudjuk az első négy hipotézist.

- H1: A magyar mintában idősor szemléletben nemlineárisak az innovációk: a nullhipotézis fennáll, hiszen az innovációért egy 6-od rendű polinom felel.
- H2: A magyar mintában idősor szemléletben heteroszkedasztikus a volatilitás: a nullhipotézis fennáll, hiszen a segédmodell egy GARCH folyamat.
- H3: A magyar mintában idősor szemléletben aszimmetrikus a volatilitás: a nullhipotézist elvetem, mert az aszimmetrikus volatilitás bevezetésével romlott a segédmodell illeszkedése.
- H4: A magyar mintára végzett panelvizsgálat eredményei nem monda-



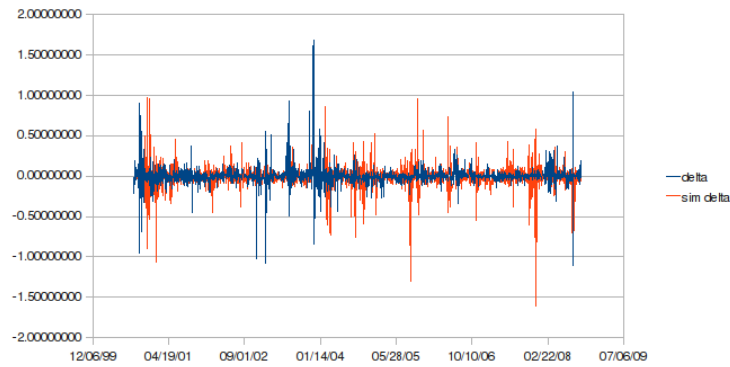
6.4. ábra. *A görbület és a 3. főkomponens, forrás: saját számítások*

nak ellent az idősor szemléletben kapott eredményekkel: a nullhipotézist elfogadom, hiszen az idősorszemléletben végzett egydimenziós számítások és az együttthatásokkal futtatott panelvizsgálat eredményei egymást alátámasztották.

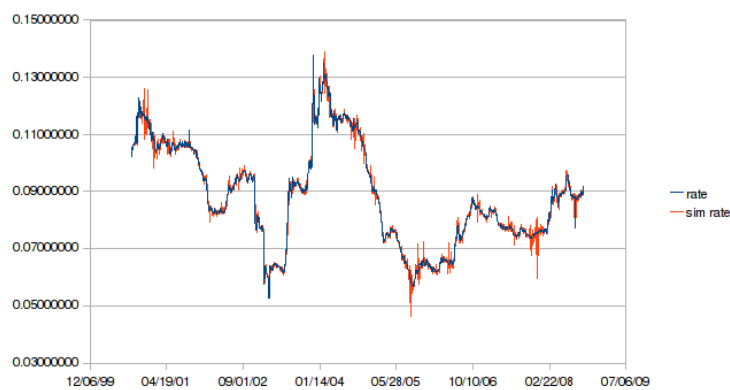
A hazai mintára kapott eredményeimet Dai és Singleton [2000] azonos módszertannal készült számításaival tudom összevetni, melyek az amerikai piacra vonatkoznak. Ebben a szerzők a VAR(1), GARCH(1,2) segédmodell illeszkedését találták a leginkább megfelelőnek, ahol az innovációt egy 4-ed rendű polinom adja 1-es késleltetéssel.

Mindezek alapján elmondható, hogy az amerikai és a magyar hozamgörbe dinamikája szerkezetileg meglehetősen hasonló, annak ellenére, hogy a magyar hozamgörbe a teljes megfigyelési időszakban inverz volt. A hasonlóságra részben magyarázat lehet, hogy a fejlődő piaci befektetők árgus szemekkel figyelik a fejlett piaci eseményeket, illetve a fejlett piaci események általában fontos hatásláncot indítanak el a fejlődő piacokon.

Az SNP segédmodell illeszkedését mutatja a 6.5. és a 6.6. ábra (a 6 hónapos lejárat eredményeit ábrázolva).



6.5. ábra. Az SNP segédmodell illeszkedése a napi hozamváltozásokra, forrás: saját számítások



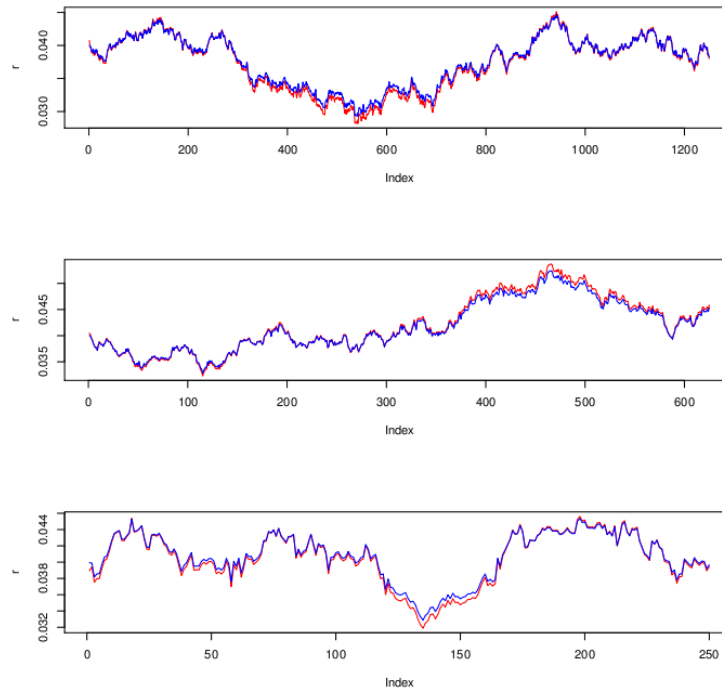
6.6. ábra. Az SNP segédmodell illeszkedése a hozamokra, forrás: saját számítások

6.7. Tapasztalataim az EMM-mel

Az SNP vizsgálat eredményeinek kézenfekvő felhasználási lehetősége az EMM becslés lefuttatása. Gallant és Tauchen iránymutatását követve meg is próbáltam parametrizált modelljeimet EMM-mel kalibrálni. Nehezen értelmezhető, illetve ellentmondásos eredményeket kapva elhatároztam, hogy egyszerű példán teszem próbára az elterjedt becslőmodszert. Egy egyszerű modell alapján szimulált minta paramétereinek visszabecsülésével terveztem megítélni az EMM alkalmazhatóságát.

Egy diszkretizált egyfaktoros Vasicek modellt $(r_{t+1} - r_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma W_t\sqrt{dt})$ szimuláltam $\kappa = 0,8$, $\theta = 0,04$, $\sigma = 0,006$ valamint $dt = 0,004$ paraméterekkel, továbbá W_t helyére egy $N(0,1)$ eloszlást behelyettesítve. Az eredményül kapott realizációt mintának tekintve lefuttattam az EMM becslést, amely kiábrándítóan pontatlanul adta vissza a paramétereket. Az eredményeim a következők voltak: $\kappa_{e1} = 16,6$, $\theta_{e1} = 0,001$ és $\sigma_{e1} = 0,006$ (természetesen dt értéke adott). Különösen meglepő volt számomra, hogy az EMM még abban az esetben is (próbálkozásonként változó mértékben) félrebecsülte a κ és θ paramétereket, ha a becslést a paraméterek valódi értékeiről indítottam.

A fenti rutinfeladatot összehasonlításuképpen elvégeztem a Kálmán-filterrel is, szignifikánsan kedvezőbb eredményekkel: $\kappa_{e2} = 0,89$, $\theta_{e2} = 0,03999$ valamint $\sigma_{e2} = 0,0066$. Sőt, az optimalizációs algoritmus a paraméterek induló értékeire egyáltalán nem volt érzékeny. A szimulált SR útját és a Kálmán-filterrel visszabecsült utat mutatja a 6.7. ábra három különböző szimulációs intervallumon. Ezen eredmények alapján úgy döntöttem, hogy a magyar piacon tesztelni kívánt modelljeimet a Kálmán-filterrel kalibrálom.



6.7. ábra. Szimulált és Kálmán-filterrel becsült SR trajektóriák, forrás: saját számítások

6.8. Modellkalibrálás a Kálmán-filterrel

Az előző alfejezetben említett tapasztalataim nyomán a mintára történő modellillesztést a Kálmán-filterrel végeztem. Egy-, két- illetve háromfaktoros Vasicek modelleket kalibráltam. Az irodalomban az amerikai hozamgörbével kapcsolatban folytatott vizsgálatokat⁸ alátámasztva azt találtam, hogy a modellek illeszkedése látványosan javult, ahogy növeltem a magyarázó faktorok számát. Az 1-faktoros modell átlagos illeszkedési hibája 26 bp volt a mintába foglalt 15 lejáraton, a 2-faktoros modell 11 bp-tal tért el a mintától, végül a 3-faktoros modell átlagosan 8 bp-nyi hibával illeszkedett a megfigyelt ada-

⁸pl. Litterman és Scheinkman [1991]

tokra. A figyelmem a 3-faktoros modellre összpontosult, az 1- és a 2-faktoros modellek becslési eredményeit a D. függelék tartalmazza.

A nemzetközi összehasonlítást támogatandó, a 3-faktoros Vasicek modell kalibrálását elvégeztem az amerikai piacra vonatkozóan is, egy hasonló méretű mintát (2001-2009 közötti napi adatok 15 lejáratra) véve alapul. Az összehasonlítható eredmények a 6.3. táblázatban találhatók.

Paraméter	Vasicek (HUF)	Vasicek (USD)
θ_1	0,000	0,020
θ_2	0,000	0,000
θ_3	0,000	0,039
κ_1	0,170	0,004
κ_2	0,675	0,246
κ_3	1,000	0,581
σ_1	0,022	0,007
σ_2	0,099	0,045
σ_3	0,033	0,012
λ_1	-0,217	-0,054
λ_2	-0,271	-0,383
λ_3	-0,330	-0,007
Átlagos illeszkedés (bp)	8	5

6.3. táblázat. *A 3-faktoros modellek becsült paraméterei, forrás: saját számítások*

Hogyan értelmezhetjük az eredményeket? A 3-faktoros Vasicek modell eredményeit összevetve a magyar és az amerikai mintában azt látjuk, hogy: *Ad 1)* a faktorok hosszú távú átlaga 0 a magyar mintában (a θ_i paramétereket a magyar mintában a modell analitikus számolhatósága érdekében, Dai és Singleton útmutatását követve rögzíteni kellett 0 értéken⁹), szemben az ame-

⁹lásd: 4.3.1. alfejezet. Csúpn az 1-faktoros modellnél kaptam nullától különböző hosszú távú faktorátlagot (lásd: D. függelék).

rikai minta 0-tól különböző értékeivel, ezek a mozgások epicentrumai. *Ad 2)* Az átlaghoz történő visszatérés sebessége (κ_i értékek) a magyar mintában meghaladja az amerikai értékeket. *Ad 3)* A volatilitás paraméterekre kapott becslések kifejezetten intuitívan olvashatók: a fejlődő piacnak számító Magyarország esetében hatványozottan nagyobb valamennyi faktor volatilitása, mint a világ legfőbb és egyben leglikvidebb piacának számító U.S. treasury kereskedésben. *Ad 4)* A modellek átlagos illeszkedése némi eltérést mutat a magyar minta rovására, azonban ha átlagos hozamszinttel történő korrekcióval „közös nevezőre hozzuk” az eredményeket, kiderül, hogy a magyar mintában a modell relatív illeszkedése jobb mint az amerikaiban¹⁰.

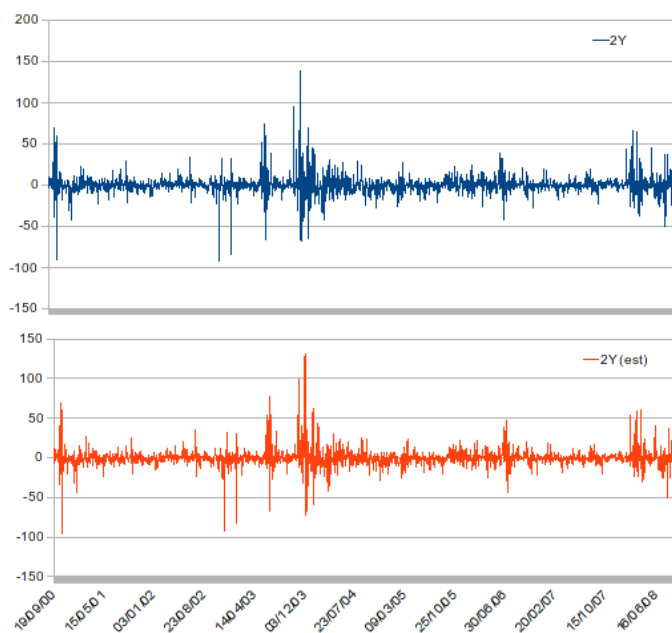
A 3-faktoros Vasicek modell 2 éves lejáratra történő illeszkedését¹¹ mutatja a 6.8. és a 6.9. ábra.



6.8. ábra. A 3-faktoros Vasicek modell illeszkedése a napi hozamokra, forrás: saját számítások

¹⁰lásd: H6 hipotézis megválaszolása a 87. oldalon

¹¹a magyar mintában



6.9. ábra. A 3-faktoros Vasicek modell illeszkedése a napi hozamváltozásokra, forrás: saját számítások

A fenti eredmények alapján értékelhetők a H5 és H6 hipotézisek.

- H5: A modellek magyarázó ereje a magyarázó változók számának (1-ről 2-re, illetve 2-ről 3-ra történő) növelésével nő: a hipotézist elfogadom, hiszen a modellek újabb faktorral való bővítése látványosan javította azok illeszkedését a mintára, azaz azok magyarázó erejét.
- H6: A 3-faktoros Vasicek modell megfelelő kalibrálásával biztosítható, hogy a modellek relatív (azaz átlagos hozamszinttel korrigált) illeszkedése az amerikai példában tapasztalttól ne térjen el jelentősen (25 százaléknál nagyobb mértékben) a magyar minta rovására. Másként fogalmazva a modell relatív becslési pontatlansága legfeljebb 25 százalékkal nagyobb a magyar mintában, mint az amerikai adatokra vonatkozóan: a hipotézis igaz, hiszen a magyar mintában átlagosan 8, az amerikaiban

pedig átlagosan 5 bázispontos átlagos napi eltérést becsült a 3-faktoros Vasicek modell. Ez, az átlagos hozamszintekkel történő korrekció után (a magyar mintában 8,17%, az amerikaiban 4,64% az átlagos hozamszint, így a 100 bázispontnyi hozamszintre jutó becslési pontatlanság a magyar esetben 0,98 bázispont, az amerikaiban pedig 1,08 bp) azt jelenti, hogy a magyar hozamgörbére vonatkozóan mintegy 9 százalékkal kisebb az illeszkedési pontatlanság: ez bőven belül van a hipotézis megfogalmazásakor választott 25 százalékos referenciaszinten, sőt ellentétes irányú relációt jelöl.

6.9. Mintán kívüli előrejelzés és backtesting

A modellek becslésével megvizsgáltam azok *mintán belüli* előrejelzését¹², azaz illeszkedését a mintára. Tekintettel arra, hogy a 3-faktoros modell meglehetősen jól illeszkedett a hazai adatokra, segítségével visszatekintő szemléletben jól megérthetővé vált a hozamgörbe dinamikája. Nagy kérdés azonban az, hogy a vizsgált modell alkalmas-e *mintán kívüli* előrejelzésre¹³. Ezzel egy további lépést teszünk előre, „*ha már annyira értjük a hozamgörbe mozgatórugóit, akkor mondjuk is meg, hogy mit hoz a jövő*”.

Az empirikus kutatás ezen részét tehát kizárólag a modellbecslési részben legjobban teljesítő 3-faktoros Vasicek modellre végeztem el, a következők szerint:

1. Egy 180 nappal lerövidített mintán (azaz $N' = 2007 - 180 = 1827$) újrabecsültem a 3-faktoros Vasicek modellt. Az eredmények, az átlagos illeszkedést is beleértve, csupán marginálisan tértek el az eredeti

¹²in-sample forecast

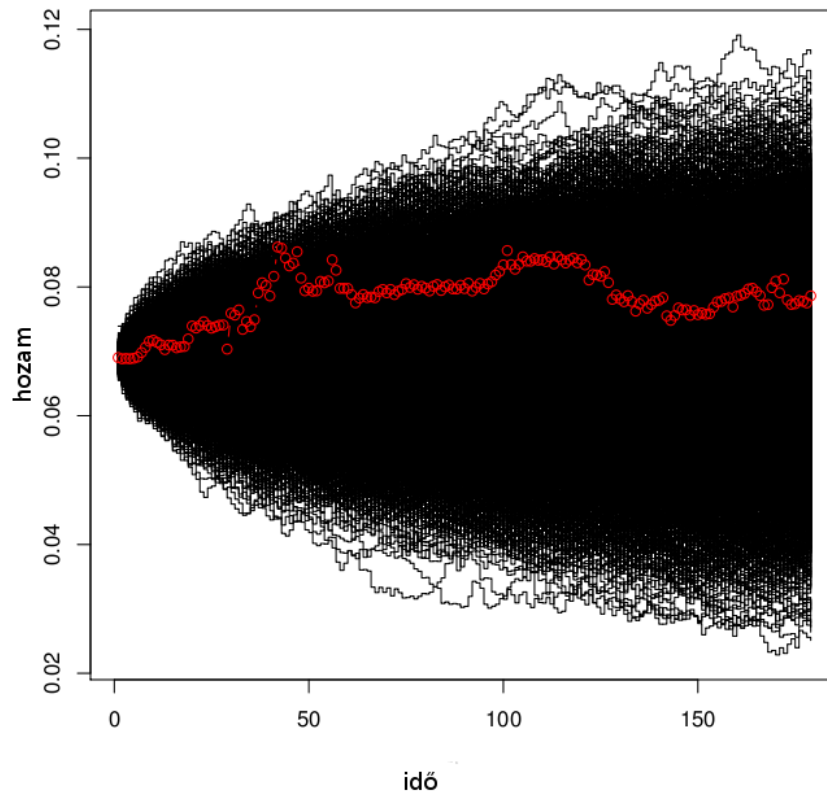
¹³out-of-sample forecast

mintában kapott eredményektől, ezért ezek közlésétől helytakarékossági célból eltekintek. Mindazonáltal a lerövidített minta alkalmazása életszerűvé és korrektté teszi a becslési folyamatot.

2. A kapott paraméterekkel szimulációkat futtattam a teljes 15 lejáratot tartalmazó panelra, $N'' = 180$ elemszámmal. Így „mesterségesen állítottam elő” a hozamgörbe hiányzó adatait.
3. A szimulációkat 10 ezerszer ismételttem meg, hogy ne egy trajektórián értékeljük a modellt, hanem egy legyezőábrához hasonló (azért csak hasonló, mert a legyezőábrát általában valamilyen eloszlás feltételezésével becslik, jelen helyzetben pedig: *Ad 1)* a minta eloszlása meglehetősen összetett¹⁴, ezért a percentilisek paraméteres előállítása nehézkes; másrészt *Ad 2)* a modellek konzisztenciájának ellenőrzése külön vizsgálatot igényelne¹⁵), de tapasztalati úton összeállított grafikon alapján.
4. A szimulált trajektóriákat az eredeti minta utolsó 180 napi adatával összevetve megkapjuk, hogy a modell milyen pontossággal jelezte volna előre a jövőt (*backtesting*). Az átlagos napi hozameltérések értékét minden trajektóriánál elmenttettem, hogy azokból újabb átlagot tudjak számolni a 10 ezer trajektória vonatkozásában. A realizációk valószínűségi jellegét a 6.10. ábra mutatja be. A kizárólag a legpontosabban előrejelezhető 10 éves lejáratot mutató ábrán a szimulált trajektóriákat feketével jelöltem, az eredeti minta utolsó 180 napi adatát pedig piros karikákkal. Ahol az ábra besötétedik, ott több trajektória ment keresztül, ezáltal a hozampályák sötétsége egyenesen arányos azok valószínűségével.

¹⁴lásd az SNP vizsgálat eredményeit a 6.6. alfejezetben

¹⁵A kérdés: a naponta újraszámolt percentilisek egyáltalán előfordulhatnak-e sztochasztikus modelljeinkben?

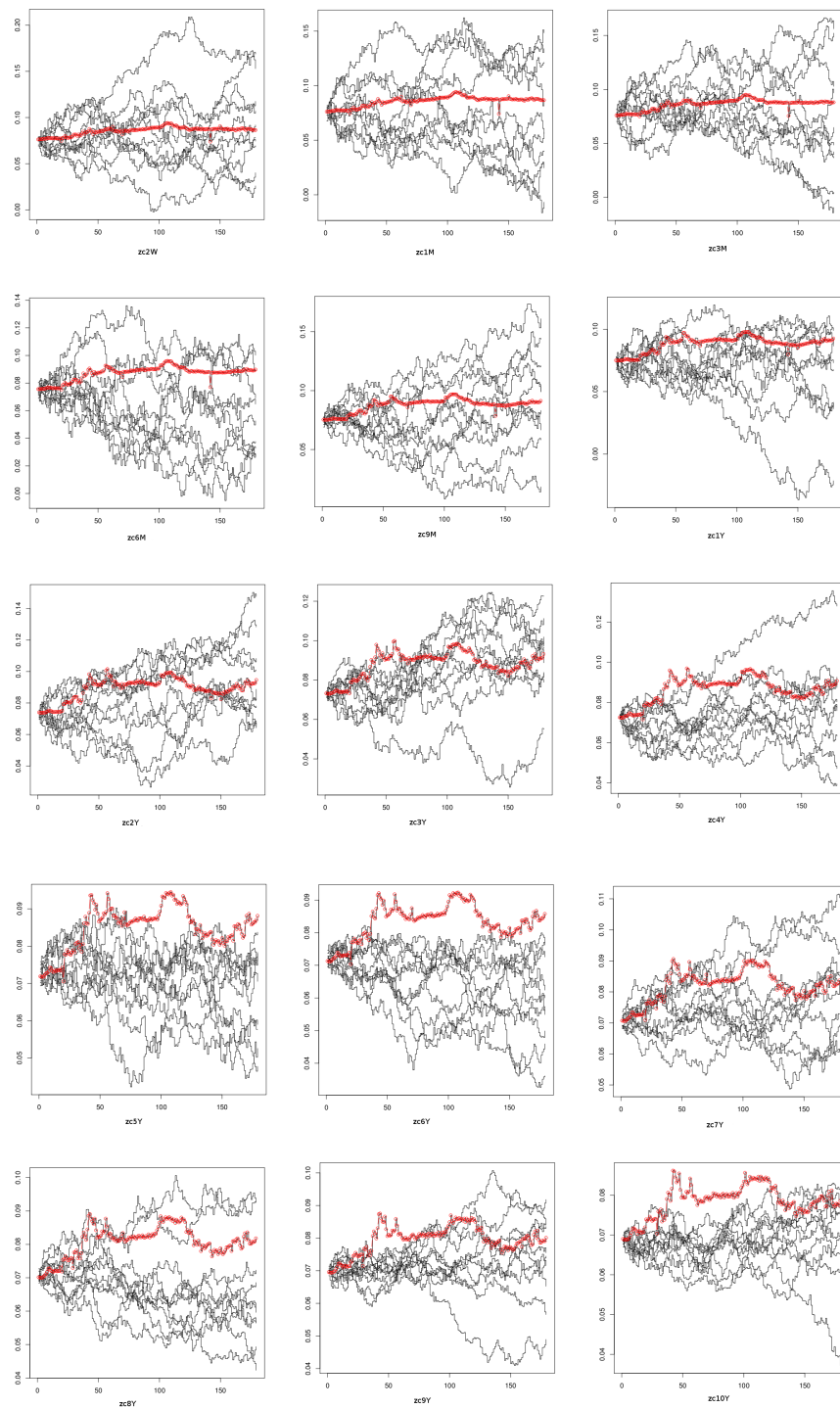


6.10. ábra. Szimulált trajektóriák a 3-faktoros Vasicek modellel, forrás: saját számítások

A backtesting átlagos eredményeit mutatja bázispontban a 6.4. táblázat, 10 ezer szimulált trajektóriára vonatkozóan. A 6.10. ábra kicsinyített mása a 6.11. ábra, amely valamennyi lejáratot ábrázolja, a szimulált utak jobb leolvashatósága érdekében lejáratonként 100 trajektóriát véve alapul¹⁶.

A 10 éves lejárat példáján érdemesnek tartottam ábrázolni az előrejelzési hiba hisztogramját és a trajektóriánkénti hibatagok leíró statisztikai elemzé-

¹⁶Az ábra jól mutatja a Vasicek modell gyengeségét: a kamatláb negatív értéket is felvehet.



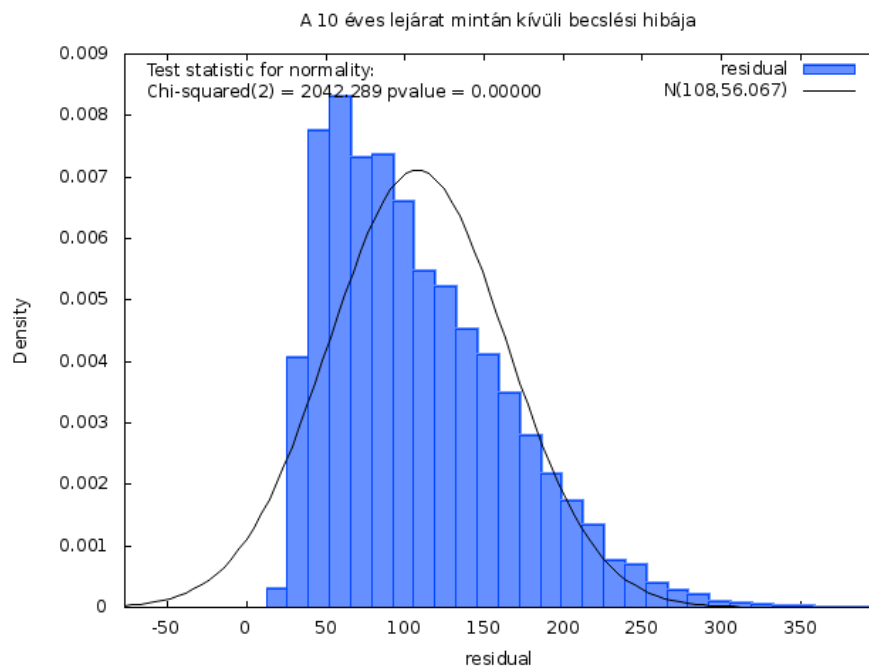
6.11. ábra. Az egyes lejáratok szimulált trajektóriái, forrás: saját számítások

Lejárat	Átlagos előrejelzési hiba 10 ezer trajektórián (bp)
2 hét	282
1 hónap	279
3 hónap	270
6 hónap	258
9 hónap	247
1 év	241
2 év	215
3 év	190
4 év	173
5 év	159
6 év	144
7 év	134
8 év	123
9 év	116
10 év	108
Átlag	196

6.4. táblázat. *Backtesting illeszkedési hiba lejáratonként, forrás: saját számítások*

sét. Ezek láthatók a 6.12. ábrán és a 6.5. táblázatban. A hisztogram képén jól látszik, hogy az előrejelzési hiba módusza 50 bp körül alakul, ami lényegesen alacsonyabb a 108 bázispontos átlagnál. Az eredmények ismeretében értékelhetjük a H7 hipotézist.

- H7: A 3-faktoros Vasicek modell előrejelző képessége fél éves időtávon elfogadható. Mindezt úgy értelmezem, hogy az előrejelzések átlagos pontatlansága nem több mint ötszöröse a mintabeli illeszkedési pontatlanságnak: a hipotézist elvetem, hiszen a backtesting eredményei szerint a mintán kívüli előrejelzések átlagos pontatlansága közel 25-szöröse a mintán belüli előrejelzési pontatlanságnak.



6.12. ábra. A 10 éves lejárat előrejelzési hibája (3-faktoros modell), forrás: saját számítások

6.10. Modellértékelés

Az alkalmazott modellek ökonometriai és közgazdasági értékelésére térek ki a következőkben.

- *Ökonometriai* értelemben a modellek illesztése sikeresnek mondható. Egyrészt, mint azt a H6 hipotézis megerősítése mutatta, a mintán belüli előrejelzés pontossága relatíve meghaladja az amerikai piac esetén kapott szintet; másrészt a modellekben szereplő hibatagok (azaz az illeszkedési hiba) várható értéke is közel zérus az 1- 2- és 3-faktoros Vasicek becslésekben egyaránt. A 8 éves lejárat 3-faktoros Vasicek modellel becsült illeszkedési hibatagjának leíró statisztikai jellemzését tartalmazza a 6.6. táblázat, valamint a 6.13. ábra.

A 10 éves lejárat előrejelzési hibája (bp)	
Átlag	108,00
Medián	97,00
Minimum	19,00
Maximum	392,00
Szórás	56,07
Variációs együttható	0,52
Ferdeség	0,84
Csúcsosság	0,36

6.5. táblázat. A 10 éves lejárat előrejelzési hibája (3-faktoros modell), forrás: saját számítások

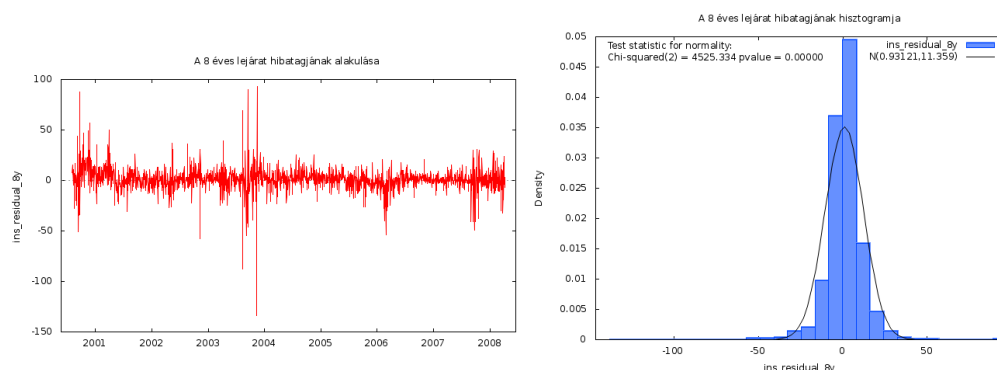
- Szintén ökonometriai következtetés, hogy a legjobb kamatlábmodell is „teljesen értéktelen” modellezési szempontból, ha nincs ütőképes becslési eljárásunk, amivel azt kalibrálni tudjuk. Itt leginkább az EMM-mel kapcsolatos tapasztalataimra célok (lásd: 6.7. alfejezet): a jelzett becslési eljárás a magyar hozamgörbe dinamikájának mérésére csupán korlátozottan alkalmas. Mindez természetesen nem jelenti azt, hogy az EMM rossz becslési eljárás volna, csupán választása az adott illesztési probléma tekintetében nem szerencsés.
- Empirikus eredményeimből *közgazdasági következtetések* is levonhatók. **Az affin modellek minden hátránya ellenére, a magyar hozamgörbe dinamikája meglehetősen jól modellezhető a Vasicek modellel.** Sőt, a legegyszerűbb affin modell körültekintő alkalmazásával az amerikai mintában tapasztaltnál relatíve pontosabb mintabeli illeszkedést is kaphatunk a magyar hozamgörbére vonatkozóan. A Vasicek modell tehát, legfőképp 3-faktoros formában, magyarázó erejére való tekintettel jó választásnak tűnik a magyar piac modellezésére.

A 8 éves lejárat illeszkedése (bp)	
Átlag	0,93
Medián	1,00
Minimum	-134,00
Maximum	93,00
Szórás	11,36
Variációs együttható	12,20
Ferdeség	-0,44
Csúcsosság	20,41

6.6. táblázat. A 8 éves lejárat hibatagjának leíró statisztikája (3-faktoros modell),
forrás: saját számítások

- Az alkalmazott modellek lényegesen jobban teljesítettek a mintán belüli, mint a mintán kívüli előrejelzésben. Mindez azt jelenti, hogy **Vasicek** alapú modellezéssel inkább a hozamgörbe dinamikája érthető meg; illetve még a jól illeszkedő modellek is csak korlátozottan alkalmazhatók tényleges előrejelzésre. A Vasicek modell ezzel együtt javasolható a jövőbeli várható hozamgörbék szimulációjára¹⁷, persze a kapott eredményeket fenntartásokkal kell kezelni. Emiatt az alkalmazás célközönsége inkább az MNB, az állam-adósság menedzsment és a felügyeleti szereplők, mintsem a kereskedelmi bankok saját számlás kereskedői.

¹⁷Fél évnél rövidebb előrejelzési időhorizonton ugyanis látványosan javul a modell „megbízhatósága”. Egy hetes előrejelzési időtávon például a 10 éves lejárat átlagos mintán kívüli előrejelzési hibája csupán 13 bp volt 10 ezer szimulált trajektória vonatkozásában.



6.13. ábra. A 8 éves lejárat hibatajának időszora és histogramja (3-faktoros modell), forrás: saját számítások

6.10.1. Tapasztalataim a CIR modellel

A Vasicek modell mellett részletes kutatásokat folytattam a CIR modellel is, amely a Vasicek esetnél lényegesen nagyobb kihívást jelent a modellezőnek. A paraméterekre vonatkozó megszorítások¹⁸, a gyöktényező kezelése (a CIR modellben biztosítani kell az állapotváltozók pozitív tartományban maradását) jelentősen megnövelik a becslési eljárás fejlesztési idejét.

Az értekezésben alkalmazott becslési eljárás (Kálmán-filter) alpból nem ismeri a fent jelzett akadályokat, azokról az alkalmazott forráskódban értesíteni kell. Ha ez nem történik meg, a modell „elszáll” (egy, a modell szempontjából belső invertálandó mátrix szinguláris lesz). Ha megtörténik, az optimalizáció egy idő után zsákutcába fut (kb. egyórányi útkeresés után).

Empirikus tapasztalataim alátámasztják Brigo és Mercurio [2006] állítását¹⁹, miszerint a CIR modell nem képes kezelni az inverz hozamgörbét. **Emiatt a CIR modell nem ajánlható a magyar hozamgörbe modellezésére.**

¹⁸részletesebben lásd a kifejtést a 33. oldalon

¹⁹lásd: 4.2. alfejezet

7. fejezet

Összefoglalás, következtetések

A dolgozat címe így szól: *A hozamgörbe dinamikus becslése*, az értekezés minden bekezdése ebbe, a címben jelölt irányba próbálja kalauzolni az olvasót. Elhúzódó kutatásomban több mint háromszáz tudományos cikket olvastam végig a témában, így egyáltalán nem volt könnyű a konkrét kutatási kérdéskör behatárolása¹. Sőt, egy ilyen sokat hivatkozott pénzügyi problémában, hogyan lehet újat mondani, illetve valamiféle „hozzáadott értéket” felmutatni? Egészen biztosan sokféleképpen. Én a következő utat választottam.

Először is fontos kiemelni az empirikus kutatás mintáját, ami nem más mint a magyar kötvényekből számított zérókupon hozamgörbe. Az előző bekezdésben említett több száz tudományos cikk egyike sem a magyar piacra vonatkozó dinamikus szemléletű hozamgörbebecslés. A feldolgozott irodalom ugyanis vagy valamely más piacra vonatkozik, vagy statikus szemléletű. A kutatás során hazai forrásokat is feldolgoztam, de a legelmélyültebb nyilvános² magyarországi szakmai műhely, az MNB is csupán a hozamgörbe

¹Ezzel együtt remélem: sikerült.

²Az amerikai Morgan Stanley budapesti matematikai kutatóközpontja kapcsán talán szükséges a jelző használata.

statikus becslésére fókuszál. Ennek megfelelően **a dolgozat előremutató jelentőséggel bír, hiszen a magyar piacra alkalmazza a dinamikus hozamgörbebecslés eszköztárát.**

Az értekezés fontos önálló eredménye, hogy kvantitatív módon értékeli a 3-faktoros Vasicek modell mintán kívüli előrejelzési képességét. Ez nemzetközi viszonylatban is különleges előremutató jelentőséggel bír, hiszen még az amerikai piacra felállított becselő modellek szerzői is csupán az esetek elenyésző töredékében vizsgálták modelljeik előrejelző képességét.

Empirikus vizsgálataim fontosságát kiemelik, hogy a témában aktív szerzők számos esetben egymásnak ellentmondó következtetésekre jutnak, sőt, nézeteltéréseik mentén néha meglehetősen érzelmes nyilvános levelezésbe³ fognak. Brigo és Mercurio [2006] CIR modellre vonatkozó állítása (miszerint az nem alkalmazható inverz hozamgörbék esetén) a példának okáért szöges ellentétben áll Cox et al. [1985] CIR modellt méltató állításaival. *Melyik szerzőnek higgyünk?* Mielőtt rávágjuk: „a Cox, Ingersoll és Ross szerzőtriónak”, mondván róluk többet hallottunk, érdemes megjegyezni, hogy Damiano Brigo a szakma Coxékhoz mérhető alakja, egyben mellesleg John Hull és Fischer Black előtt a Risk Magazine legtöbbet hivatkozott szerzője volt 2006-ban. Empirikus vizsgálataim Brigo és Mercurio [2006] állításait támasztották alá, így kellő megalapozottsággal tudok válaszolni a bekezdésben jelölt kérdésre.

Fontos következtetésem, hogy a 3-faktoros Vasicek modell előnyös választás a magyar hozamgörbe dinamikus vizsgálatához. Ezen állítást a modell mintán belüli előrejelző képességének vizsgálati eredménye támasztja alá. A teljes mintában számított 8 bázispontos átlagos becslési hiba ugyanis egyrészt elenyésző a magyar piac viszonylatában (gyakorlatilag

³pl. George Tauchen 2004-es válasza Gregory R. Duffee kritikájára, *The EMM Reply to the Duffee-Stanton Paper* címmel.

egységnyi bid-ask spreadnek feleltethető meg), másrészt relatív értelemben (átlagos hozamszinttel történő korrekció után) kedvezőbb illeszkedést jelöl az amerikai mintában tapasztaltnál.

A modellbecsléssel kapcsolatos további tapasztalataim felsorolva a következők.

- Olyan kamatlábmodellt célszerű választanunk, amit meg is tudunk becsülni. Mit érünk egy túlzottan bonyolult modellel, ha azt úgyis egy nemlineáris becslési eljárással kell becsülnünk, amely adott esetben egyszerű függvénykapcsolatokat is képtelen pontosan visszaadni. A témában lásd az EMM-mel kapcsolatos tapasztalataimat a 83. oldalon. Az én választásom ennek megfelelően az affin modellcsaládra, azon belül is a Vasicek modellre esett.
- A CIR modellel is aktív kutatómunkát folytattam, Bolder [2001] útmutatását követve, sőt, leveleztem is a szerzővel a becslési probléma kapcsán; azonban Brigo és Mercurio [2006] állításaival azonos eredményt kaptam: **a CIR modell nem alkalmas az inverz magyar hozamgörbe dinamikájának leírására.**
- A kiválasztott kamatlábmodell dimenziószámát főkomponenselemzéssel támasszuk alá. **A magyar hozamgörbével kapcsolatos vizsgálatokhoz 3-faktoros modellek ajánlhatók.**
- A becslési eljárások közül pozitív tapasztalataim születtek a Kálmán-filterrel kapcsolatban, ellenben az EMM-met nem ajánlom a magyar hozamgörbével kapcsolatos számításokhoz.

A **3-faktoros Vasicek modell** mintán kívüli előrejelzési képességének kvantitatív mérése kapcsán kijelenthetem, hogy

- a modell csupán korlátozottan alkalmas tényleges előrejelzésre. Ez nem jelenti azt, hogy nem érdemes alkalmazni, csupán a modell által kapott eredményeket egészséges fenntartásokkal kell kezelni. A modell nem a „lottó ötöst” mondja meg, hanem megjelöli a jövőbeli várható hozamok tartományát.
- Előrejelzési célzattal a hozamgörbe kisebb volatilitású pontjai ajánlhatók, ennek üzenete világosan kivehető a 6.4. táblázatból. Én a legjobb eredményeket a 10 éves lejáráttal kaptam.
- Az előrejelzési időtáv csökkentésével természetes módon javítható a modellek becslési pontossága. Egy hetes előrejelzési horizonton például a 10 éves lejárat átlagos mintán kívüli becslési hibája csupán 13 bázispont volt 10 ezer szimulált trajektória vonatkozásában. Ez nagyságrendileg másfél bid-ask spreadnek feleltethető meg, azaz viszonylag elfogadható eredmény. Ehhez képest a becslési és a szimulációs eljárás kétórás összesített futásideje is kedvezőnek mondható.

Fentiek tükrében a bemutatott módszertan célközönsége leginkább a Magyar Nemzeti Bank, az Államadósság Kezelő Központ és a Pénzügyi Szervezetek Állami Felügyelete. A megnevezett szereplők számára ugyanis kiemelt prioritás a hozamgörbe dinamikájának ismerete. Természetesen a kereskedelmi bankok is hasznosnak találhatják a módszertant, bár a modellek alkalmazásának előnye inkább jelentkezhet kockázatkezelési területen hatékonyabb működés, mintsem a saját számlás kereskedőknél mérhető profit formájában.

*A következtetések levonása után érdemes megfontolni a további kutatás lehetséges irányait. **Kézenfekvő ötlet a modellezési tárház bővítése.*** Ennek megfelelően érdemes lenne megvizsgálni egyrészt Dai és Singleton [2000] további affin, másrészt Ahn et al. [2002] kvadratikus modelljeit, valamint az ugró folyamatok bevezetésének illeszkedésre gyakorolt hatását. A kibővített modellezési spektrumhoz azonban megfelelő becslési eljárást is kell találni, illetve fejleszteni, ami jelentős technikai apparátust és fejlesztésre fordított időt igényel.

Szintén **jövőbeli kutatási irányt jelenthet a modell makroökonómiai változókra történő adaptálása.** Ezáltal ugyanis a piaci mozgások – talán – még jobban megérthetővé válnának, így az eredményül kapott modellt döntéstámogatási eszközként használhatnák a gazdaságpolitikai döntéshozók.

Irodalomjegyzék

- AHN, D.-H.: [1995]: A generalized squared autoregressive intertemporal term structure model. University of North Carolina working paper.
- AHN, D.-H., DITTMAR, R. F., GALLANT, A. R.: [2002]: Quadratic term structure models: Theory and evidence. *The Review of Financial Studies*, 15; 46.
- AHN, D.-H., DITTMAR, R. F., GALLANT, A. R., GAO, B.: [2003]: Purebred or hybrid?: Reproducing the volatility in term structure dynamics. *Journal of Econometrics*, 116; 147–180.
- AHN, D.-H., GAO, B.: [1999]: A parametric nonlinear model of term structure dynamics. *Review of Financial Studies*, 12; 721–62.
- AÏT-SAHALIA, Y.: [1996a]: Nonparametric pricing of interest rate derivative securities. *Econometrica*, 64; 527–560.
- AÏT-SAHALIA, Y.: [1996b]: Testing continuous-time models of the spot interest rate. *Review of Financial Studies*, 9; 385–426.
- AÏT-SAHALIA, Y.: [2001]: Maximum likelihood estimation of discretely sampled diffusions: a closed form approximation approach. *Econometrica*, 70; 223–262.
- AÏT-SAHALIA, Y.: [2002]: Closed-form likelihood expansions for multivariate diffusions. Princeton University working paper.
- AÏT-SAHALIA, Y., HANSEN, L. P. (eds.): [2004]: *Handbook of Financial Econometrics*. North-Holland.
- AÏT-SAHALIA, Y., HANSEN, L. P., SCHEINKMAN, J. A.: [2002]: *Handbook of Financial Econometrics*, chap. Discretely Sampled Diffusions. North-Holland.

- AÏT-SAHALIA, Y., KIMMEL, R.: [2002]: Estimating affine multifactor term structure models using closed-form likelihood expansions. Princeton University working paper.
- ANDERSEN, T. G., LUND, J.: [1996]: Stochastic volatility and mean drift in the short term interest rate diffusion: Sources of steepness, level and curvature in the yield curve. Tech. Rep. 214, Northwestern University.
- BALDUZZI, P., DAS, S. R., FORESI, S.: [1998]: The central tendency: A second factor in bond yields. *The Review of Economics and Statistics*, 80; 62–72.
- BALDUZZI, P., DAS, S. R., FORESI, S., SUNDARAM, R.: [1996]: A simple approach to three factor affine models of the term structure. *Journal of Fixed Income*, 6; 43–53.
- BANSAL, R., TAUCHEN, G., ZHOU, H.: [2004]: Regime shifts, risk premiums in the term structure, and the business cycle. *Journal of Business & Economic Statistics*, 22; 396–409.
- BANSAL, R., ZHOU, H.: [2002]: Term structure of interest rates with regime shifts. *Journal of Finance*, 57; 1997–2043.
- BEAGLEHOLE, D., TENNEY, M.: [1992]: A nonlinear equilibrium model of the term structure of interest rates: Corrections and additions. *Journal of Financial Economics*, 32; 345–454.
- BEAGLEHOLE, D. R., TENNEY, M. S.: [1991]: General solutions of some interest rate-contingent claim pricing equations. *Journal of Fixed Income*, 69–83.
- BEKAERT, G., HODRICK, R.: [2001]: Expectations hypothesis tests. *Journal of Finance*, 56.
- BLACK, F., SCHOLES, M.: [1973]: The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81; 637–654.
- BOLDER, D. J.: [2001]: Affine term-structure models: Theory and implementation. Bank of Canada Working Paper, 15.
- BRANDT, M. W., SANTA-CLARA, P.: [2002]: Simulated likelihood estimation of diffusions with an application to exchange rates dynamics in incomplete markets. *Journal of Financial Economics*, 63; 161–210.

- BRENNAN, M. J., SCHWARTZ, E. S.: [1979]: A continuous time approach to the pricing of bonds. *Journal of Banking and Finance*, 3; 133–155.
- BRIGO, D., MERCURIO, F.: [2006]: *Interest Rate Models - Theory and Practice*. Springer Finance.
- BROWN, R., SCHAEFER, S. M.: [1994]: The term structure of real interest rates and the cox, ingersoll and ross model. *Journal of Financial Economics*, 35; 3–42.
- BROWN, S. J., DYBVIG, P. H.: [1986]: Empirical implications of the cox, ingersoll, ross theory of the term structure of interest rates. *Journal of Finance*, 41; 143–172.
- CARLETON, W. T., COOPER, I. A.: [1976]: Estimation and uses of the term structure of interest rates. *Journal of Finance*, 31; 1067–83.
- CHAMBERS, D. R., CARLETON, W. T., WALDMAN, D. W.: [1984]: A new approach to the estimation of the term structure of interest rates. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 19; 233–251.
- CHEN, L.: [1996]: *Stochastic mean and stochastic volatility – a three-factor model of the term structure of interest rates and its application to the pricing of interest rate derivatives*. Blackwell Publishers.
- CHEN, R.-R., SCOTT, L.: [1993]: Maximum likelihood estimation for a multifactor equilibrium model of the term structure of interest rates. *Journal of Fixed Income*, 3; 14–31.
- CHENG, P., SCAILLET, O.: [2007]: Linear-quadratic jump-diffusion modeling. *Mathematical Finance*, 575–598.
- CONSTANTINIDES, G.: [1992]: A theory of the nominal structure of interest rates. *Review of Financial Studies*, 5; 531–552.
- COX, J. C., INGERSOLL, J. E., ROSS, S. A.: [1985]: A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*.
- CSAJBÓK, A.: [1999]: Zero-coupon yield curve estimation from a central bank perspective. NBH Working Paper.
- DAI, Q.: [1998]: *Specification Analysis of Affine Term Structure Models*. Ph.D. thesis, Stanford University.
- DAI, Q., SINGLETON, K. J.: [2000]: Specification analysis of affine term structure models. *Journal of Finance*, LV; 36.

- DAS, S.: [2002]: The surprise element: Jumps in interest rates. *Journal of Econometrics*, 106; 27–65.
- DUFFEE, G. R.: [2002]: Term premia and interest rate forecasts in affine models. *Journal of Finance*, 57; 405–443.
- DUFFIE, D.: [2001]: *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton University Press, 3. edn..
- DUFFIE, D., KAN, R.: [1996]: A yield-factor model of interest rates. *Mathematical Finance*, 6; 379–406.
- DUFFIE, D., PAN, J., SINGLETON, K.: [2000]: Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions. *Econometrica*, 68; 1343–1376.
- DUFFIE, D., SINGLETON, K.: [1997]: An econometric model of the term structure of interest rate swap yields. *Journal of Finance*, 52; 1287–1323.
- DURHAM, G. B., GALLANT, A. R.: [2002]: Numerical techniques for maximum likelihood estimation of continuous-time diffusion processes. *The Journal of Business and Economic Statistics*, 20; 297–316.
- EFRON, B.: [1982]: The jackknife, the bootstrap, and other resampling plans. Society of Industrial and Applied Mathematics CBMS-NSF Monographs, 38.
- EVANS, C. L., MARSHALL, D. A.: [1998]: Monetary policy and the term structure of nominal interest rates: Evidence and theory. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 49; 53–111.
- FAMA, E. F., BLISS, R. R.: [1987]: The information in long-maturity forward rates. *American Economic Review*, 77; 680–692.
- FAMA, E. F., FRENCH, K. R.: [1993]: Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of Financial Economics*, 33; 3–56.
- FISHER, M., GILLES, C.: [1996]: Estimating exponential-affine models of the term structure. Federal Reserve Bank of Atlanta working paper.
- GALLANT, A. R., TAUCHEN, G.: [1996]: Which moments to match? *Econometric Theory*, 12; 657–681.
- GALLANT, A. R., TAUCHEN, G.: [2002]: *Handbook of Financial Econometrics*, chap. Simulated Score Methods and Indirect Inference for Continuous-Time Models. North-Holland.

- GEWEKE, J.: [1996]: Handbook of Computational Economics, chap. Monte Carlo Simulation and Numerical Integration. North-Holland. Amman, H. M., Kendrick, D. A. and Rust, J. eds.
- GYOMAI, G., VARSÁNYI, Z.: [2002]: Az MNB áltla használt hozamgörbe-becselő eljárás felülvizsgálata. MNB Füzetek.
- HANSEN, L. P.: [1982]: Large sample properties of generalized method of moments estimators. *Econometrica*, 50; 1029–1054.
- HANSEN, L. P., RICHARD, S.: [1987]: The role of conditioning information in deducing testable restrictions implied by dynamic asset pricing models. *Econometrica*, 55; 587–614.
- HARRISON, J. M., KREPS, D. M.: [1979]: Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory*, 20; 381–408.
- HARRISON, J. M., PLISKA, S. R.: [1981]: Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and Their Applications*, 215–260.
- HEATH, D., JARROW, R. A., MORTON, A.: [1992]: Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, 60; 77–105.
- HO, T. S. Y., LEE, S.-B.: [1986]: Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *Journal of Finance*, 41; 1011–29.
- JAMSHIDIAN, F.: [1996]: Bond, futures and option valuation in the quadratic interest rate model. *Applied Mathematical Finance*, 3; 93–115.
- JEGADEESH, N., PENNACCHI, G. G.: [1996]: The behavior of interest rates implied by the term structure of eurodollar future. *Journal of Money, Credit, and Banking*, 28; 426–446.
- JENSEN, B., POULSEN, R.: [1999]: A comparison of approximation techniques for transition densities of diffusion processes. Aarhus University working paper.
- JIANG, G., KNIGHT, J. L.: [1997]: A nonparametric approach to the estimation of diffusion processes, with an application to a short-term interest rate model. *Econometric Theory*, 13; 615–645.
- JIANG, G. G., YAN, S.: [2006]: Affine-quadratic term structure models – toward the understanding of jumps in interest rate. Bank of Canada conference paper.

- KAROUI, N. E., MYNENI, R., VISWANATHAN, R.: [1992]: Arbitrage pricing and hedging of interest rate claims with state variables. Université de Paris VI and Stanford University working paper.
- LANGETIEG, T. C.: [1980]: A multivariate model of the term structure. *Journal of Finance*, 35; 71–97.
- LEIPPOLD, M., WU, L.: [1999]: The potential approach to bond and currency pricing. University of St. Gallen and Fordham University working paper.
- LEIPPOLD, M., WU, L.: [2002]: Asset pricing under the quadratic class. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37.
- LITTERMAN, R., SCHEINKMAN, J. A.: [1991]: Common factors affecting bond returns. *Journal of Fixed Income*.
- LO, A. W.: [1988]: Maximum likelihood estimation of generalized ito processes with discretely-sampled data. *Econometric Theory*, 4; 231–247.
- LONGSTAFF, F. A.: [1989]: A nonlinear general equilibrium model of the term structure of interest rates. *Journal of Finance*, 23; 1259–1282.
- LONGSTAFF, F. A., SCHWARTZ, E. S.: [1992]: Interest rate volatility and the term structure: A two-factor general equilibrium model. *Journal of Finance*, 47; 1259–1282.
- LUND, J.: [1997]: Econometric analysis of continuous-time arbitrage-free models of the term structure of interest rates. Aarhus School of Business Working Paper.
- MAKARA, T.: [2000]: A hozambörbe mérése. Oktatási segédanyag, Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem.
- MCCULLOCH, J. H.: [1971]: Measuring the term structure of interest rates. *Journal of Business*, 44; 19–31.
- MCCULLOCH, J. H.: [1975]: The tax-adjusted yield curve. *Journal of Finance*, 30; 811–829.
- NELSON, C. R., SIEGEL, A. F.: [1987]: Parsimonious modeling of yield curves. *The Journal of Business*, 60; 473–489.
- ORNSTEIN, L. S., UHLENBECK, G. E.: [1930]: On the theory of the brownian motion. *Physical Review*, 36; 823–841.

- PEARSON, N. D., SUN, T.-S.: [1994]: Exploiting the conditional density in estimating the term structure: An application to the cox, ingersoll, and ross model. *Journal of Finance*, 49; 1279–1304.
- PEDERSEN, A. R.: [1995]: A new approach to maximum likelihood estimation for stochastic differential equations based on discrete observations. *Scandinavian Journal of Statistics*, 22; 55–71.
- REPPA, Z.: [2008]: Estimating Yield Curves from Swap, BUBOR and FRA Data. NBH Occasional Paper, 73.
- ROGERS, L. C. G.: [1997]: The potential approach to the term structure of interest rates and foreign exchange rates. *Mathematical Finance*, 7; 157–176.
- SANTA-CLARA, P.: [1995]: Simulated Likelihood Estimation of Diffusions with an Application to the Short Term Interest Rate. Ph.D. thesis, Insead.
- SARGENT, T. J.: [1979]: A note on maximum likelihood estimation of the rational expectations model of the term structure. *Journal of Monetary Economics*, 35.
- STANTON, R.: [1997]: A nonparametric model of term structure dynamics and the market price of interest rate risk. *Journal of Finance*, 52; 1973–2002.
- TUCKMAN, B.: [1995]: Fixed Income Securities: Tools for Today's Markets. Wiley.
- VASICEK, O.: [1977]: An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5; 177–188.
- VASICEK, O. A., FONG, H. G.: [1982]: Term structure modeling using exponential splines. *Journal of Finance*, 37; 339–348.

Függelék

A. függelék

Kvadratikus modellek részletezése Ahn et al. [2002] nyomán

Dai és Singleton [2000] mindent megtett, hogy tökélyre vigye az affin modelleket. Mindent kihozott belőlük, és mégis jelentős illeszkedési, illetve előrejelzési pontatlanságot hagyott, legalábbis az amerikai hozamgörbére vonatkozó mintákban¹. Mindez természetes ösztönzést ad(ott) az affin változatokon túlmutató modellek fejlesztésére. Jelen tézis keretein belül a kvadratikus modelleket² vizsgálom még közelebbről.

A kvadratikus modellekben elfelejtethjük az affin világban béklyót jelentő trade-off-ot a hozamvolatilitás és a faktorok korrelációs struktúrája között. A kvadratikus függvényforma³ jelentősége, hogy a QTSM-ekben „szériafelszerelés” a nominális hozamok pozitivitása, anélkül, hogy bármiféle megkötést kellene alkalmazni a faktorok közötti korreláció vonatkozásában. Mindez a modellek szintjén teret ad a heteroszkedaszticitás megjelenésének, így a kvadratikus modellek sikeresebben képesek reprodukálni az amerikai hozamgörbe stilizált tényeit.

A kvadratikus modellek történelmének főbb megállóhelyei a következők. Az úttörő kísérlet Longstaff [1989] kettős négyzetgyök modellje volt, amit később Beaglehole és Tenney [1991], valamint Beaglehole és Tenney [1992] fejlesztett tovább, illetve általánosított. A Beaglehole és Tenney [1991] cikk képzeletbeli fonalát vitte tovább Karoui, Myneni és Viswanathan [1992]. Jamshidian [1996] a termékárazás terén alkotott újat: prezentálta a kötvényárazáshoz szükséges differenciálegyenleteket a standard QTSM-esetben, valamint utób-

¹lásd: a 53. oldalon megfogalmazott kritikát, többek között Duffee [2002]-t

²quadratic term structure models (QTSMs)

³a SR az állapotváltozók kvadratikus függvénye

biak egyik alcsoportjára (független Markov-folyamatok) vonatkozóan bemutatott egy opcióárazó képletet is. Constantinides [1992] SAINTS modellje⁴ egy alcsoport a standard QTSM osztályon belül, ahol az árazó mag⁵ a modellben exogén módon a Markov-folyamat időben szeparálható kvadratikus függvényeként definiált. Rogers [1997], valamint Leippold és Wu [1999] potenciálként modellezték az árazó magot, az általuk bemutatott esetek egy részében, a SAINTS modellhez hasonlóan az árazó mag a Markov-folyamat időben szeparálható kvadratikus függvénye. A SAINTS modell általánosításának tekinthető Ahn [1995] cikke.

A következőkben a kvadratikus modellek áttekintését Ahn et al. [2002] nyomán kísérem végig. A szerzők ebben a cikkben felvázolnak egy általános kvadratikus hozamgörbemodelt, amely speciálisan paraméterezett esetként magába foglal számos nevezetes kvadratikus modellt. Beágyazottsági szempontból tehát Ahn et al. [2002] hasonló szerepet tölt be a QTSM világban, mint Dai és Singleton [2000] az ATSM univerzumban.

A.1. Ahn et al. [2002] rendszerezése

Ahn et al. [2002] áttekinti azon modellek irodalmát, amelyek a kötvényhozamokat az állapotváltozók kvadratikus függvényeként ábrázolják. A szerzők emellett, hogy kitérnek az analitikus számolhatóság (admissibility) feltételeire, teljes empirikus identifikációt adnak a Gallant és Tauchen [1996] által bevezetett EMM becslőmódszerrel. Ahn, Dittmar és Gallant következtetése szerint a kvadratikus modellek jobban magyarázzák a mintájukban szereplő amerikai kötvényhozamok viselkedését mint az affin modellek, elsősorban azért, mert a QTSM-ek hatékonyabban kezelik az amerikai hozamgörbe stilizált tényeit.

A.1.1. Az árazó mag

Jellemezze a gazdaságot az $(\Omega, F, \mathcal{F}, P)$ kiegészített (augmentált) valószínűségi tér, az alábbi filtrációval: $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$. Az előbbi feltételek teljesülésekor létezik az M_t pozitív állapot-ár sűrűség folyamat, ami definiálja a kanonikus értékelési egyenletet:

⁴squared-autoregressive-independent-variable nominal term structure, azaz négyzetes-autoregresszív-független-változós nominális hozamgörbemodel

⁵lásd: A.1.1. alfejezet

$$X_t = E_t^P \left[\frac{M_T}{M_t} X_T \right], \quad (\text{A.1.1})$$

ahol X_t jelöli az árat, $X_{t,\omega} : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$, $E_t^P[\cdot]$ pedig a t időpontban, $\mathcal{F}$ filtrációban elérhető információk alapján értelmezett várható értéket a P fizikai mérték szerint. Az $M_{t,T} \equiv \frac{M_T}{M_t}$ kifejezést *sztochasztikus diszkontfaktor-nak*⁶ nevezzük: ez a függvény biztosítja a pénz időértékének érvényesülését a modellbeli sztochasztikus gazdaságban.

Teljes piacok feltételezése esetén Harrison és Kreps [1979], valamint Harrison és Pliska [1981] megmutatták, hogy létezik Q egyértelmű ekvivalens martingál mérték, amely szerint valamennyi tőkejóság pénzüpi elszámolóegységben mért ára martingálfolyamatot követ:

$$\frac{X_t}{B_t} = E_t^P \left[\frac{dQ_{t,T}}{dP_{t,T}} \frac{X_T}{B_T} \right] \equiv E_t^P \left[\mathcal{N}_{t,T} \frac{X_T}{B_T} \right] = E^Q \left[\frac{X_T}{B_T} \right], \quad (\text{A.1.2})$$

ahol B_T egy pénzüpi számlát jelöl, melynek adott időpontbeli egyenlegére $B_t = \exp(\int_0^t r_s ds)$ írható fel, az s időpontbeli pillanati kamatlábat r_s -sel jelölve. Az $\mathcal{N}_{t,T} = \frac{dQ_{t,T}}{dP_{t,T}}$ kifejezést *Radon-Nikodym deriválnak* hívja a szakirodalom, és egyenlő az $M_{t,T}$ feltételes sztochasztikus diszkontfaktornal, ha $r_s = 0 \quad \forall \quad s \in [0, T]$.

A sztochasztikus diszkontfaktor egyértelműsége miatt a sztochasztikus diszkontfaktor, valamint a Radon-Nikodym derivált vonatkozásában felírható⁷, hogy:

$$M_{t,T} = \left[\frac{B_t}{B_T} \right] \mathcal{N}_{t,T} = \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \right] \mathcal{N}_{t,T}. \quad (\text{A.1.3})$$

Feltéve, hogy X_T a tőkejóság nominális kifizetését jelöli, $M_{t,T}$ a nominális sztochasztikus diszkontfaktor szerepét tölti be. Constantinides [1992] megmutatja, hogy a nominális sztochasztikus diszkontfaktor a bruttó infláció inverzének és a reál sztochasztikus diszkontfaktornak a szorzata.

Ahn et al. [2002] a hozamgörbe modellezésének irodalmában igen népszerű *pricing kernel, magyarul árazó mag*⁸ megközelítést alkalmazza, azaz a modellben közvetlenül a nominális sztochasztikus diszkontfaktor sztochasztikus

⁶más néven árazó magnak

⁷Ez gyakorlatilag a A.1.1 és a A.1.2 egyenletek információtartalmának ötvözése.

⁸többek között lásd: Hansen és Richard [1987]

folyamatát, $M_{t,T}$ -t határozza meg. A szerzők bemutatják, hogy tetszőleges sztochasztikus diszkontfaktorhoz megtalálható a vele konzisztens általános egyensúlyi állapot⁹.

Az általános QTSM

Ahn, Dittmar és Gallant általános N -faktoros QTSM-je az árazó mag dinamikáját írja le. A modell az alábbi *három feltételezésen* nyugszik, melyek a sztochasztikus diszkontfaktor (SDF), valamint az $\mathbf{X}_t$ állapotvektor mozgását leíró sztochasztikus differenciálegyenletekre (SDE) vonatkoznak.

1. Az $\mathbf{M}_t$ SDF folyamatát az alábbi SDE írja le:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{M}_t}{\mathbf{M}_t} &= -\mathbf{r}_t dt + \mathbf{1}'_N \text{diag} [\boldsymbol{\eta}_{0i} + \boldsymbol{\eta}'_{1i} \mathbf{X}_t]_N d\mathbf{w}_{\mathbf{N}_t} = \\ &= -\mathbf{r}_t dt + \mathbf{1}'_N [(\boldsymbol{\eta}_0 + \boldsymbol{\eta}_1 \mathbf{X}_t) \circ d\mathbf{w}_{\mathbf{N}_t}], \end{aligned} \quad (\text{A.1.4})$$

ahol $\boldsymbol{\eta}_0 = (\eta_{01}, \eta_{02}, \dots, \eta_{0n})'$, $\boldsymbol{\eta}_1 = (\eta_{11}, \eta_{12}, \dots, \eta_{1n})'$, $\circ$ a Hadamard-szorzatot (elemenkénti szorzást) jelöli, $\mathbf{w}_{\mathbf{N}_t}$ pedig standard, egymástól kölcsönösen független Wiener-folyamatok N -dimenziós vektora. A $\text{diag}[x_i]_N$ egy N -dimenziós diagonális mátrix, x_i átlóban szereplő elemekkel.

A fenti diffúziós egyenlet tehát az állapotváltozók affin függvénye. Az egyenletben szereplő drift az $\mathbf{M}_t$ sztochasztikus diszkontfaktor martin-gáltulajdonságából származóan $-\mathbf{r}_t$.

2. A nominális pillanati kamatláb az állapotváltozók kvadratikus függvénye:

$$\mathbf{r}_t = \alpha + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}_t + \mathbf{X}_t' \boldsymbol{\Psi} \mathbf{X}_t. \quad (\text{A.1.5})$$

Itt α konstans, $\boldsymbol{\beta}$ egy N -dimenziós vektor, $\boldsymbol{\Psi}$ pedig egy $N \times N$ -es, konstansokból álló pozitív szemidefinit mátrix. A SR nemnegativitásának teljesüléséhez fel kell tennünk, hogy $\alpha - \frac{1}{4} \boldsymbol{\beta}' \boldsymbol{\Psi}^{-1} \boldsymbol{\beta} \geq 0_N$ teljesül.

A fenti feltételezések mellett a nominális kamatláb egy általánosított pozitív szemidefinit kvadratikus alak lesz: ez ugyebár a nagy nóvum

⁹ebben felhasználják Harrison és Kreps [1979] eredményeit

az affin modellekhez képest, ezért képesek a kvadratikus modellek garantálni a kamatlábak nemnegativitását az állapotváltozók korrelációs struktúrájának korlátozása nélkül¹⁰.

3. Az $\mathbf{X}_t$ állapotváltozók többváltozós normális eloszlású folyamatok, átlaghoz visszatérési tulajdonsággal. Az SDE

$$d\mathbf{X}_t = [\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\xi}\mathbf{X}_t] dt + \boldsymbol{\Sigma}d\mathbf{W}_{\mathbf{N}_t} \quad (\text{A.1.6})$$

alakot ölt, ahol $\boldsymbol{\mu}$ egy N -dimenziós, konstansokból álló vektor, $\boldsymbol{\xi}$ és $\boldsymbol{\Sigma}$ pedig $N \times N$ -dimenziójú mátrixok. Feltételezzük, hogy $\boldsymbol{\xi}$ „diagonalizálható”, és sajátértékeinek a valós része negatív, $\mathbf{W}_{\mathbf{N}_t}$ pedig egy kölcsönösen független Wiener-folyamatokból álló N -dimenziós vektor. A $d\mathbf{W}_{\mathbf{N}_t}$ és a $d\mathbf{W}_{\mathbf{N}_t}$ viszonyát leíró $N \times N$ -es $\boldsymbol{\Upsilon}$ korrelációs mátrix konstans elemekből áll.

Az állapotváltozók idősorát egy normális eloszlású folyamat írja le, melynek hosszú távú egyensúlyi átlagértéke $-\boldsymbol{\xi}^{-1}\boldsymbol{\mu}$, átlagos válaszfüggvénye $-\boldsymbol{\xi}$, konstansokból álló pillanati kovarianciamátrixa pedig $\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}'$. Az állapotváltozók stacionaritásának biztosítása végett feltesszük, hogy $\boldsymbol{\xi}$ diagonalizálható és sajátértékei negatívak. Az állapotváltozók stacionaritásának és $\boldsymbol{\xi}$ sajátértékeinek viszonyát Beaglehole és Tenney [1991] tanulmányozta részletesebben.

Az állapotváltozók sztochasztikus differenciálegyenletei jellemzik $\mathbf{X}_t$ átmenet- és peremsűrűségfüggvényeit. Legyen $\mathbf{U}$ az N darab sajátvektorból álló mátrix, $\boldsymbol{\Lambda}$ pedig a sajátértékek diagonális mátrixa.

$$\mathbf{U} \equiv [u_1, u_2, \dots, u_N], \text{ illetve } \boldsymbol{\Lambda} \equiv \text{diag}[\lambda_i]_N \quad (\text{A.1.7})$$

$\boldsymbol{\xi}$ diagonalizálhatósága biztosítja, hogy a sajátvektorok lineárisan függetlenek, ezért $\mathbf{U}^{-1}\boldsymbol{\xi}\mathbf{U} = \boldsymbol{\Lambda}$. Ekkor az állapotváltozók átmeneti sűrűségfüggvényei normálisak lesznek¹¹.

$$\mathbf{X}_{t+\tau}|\mathbf{X}_t \sim \text{MVN}_N(E[\mathbf{X}_{t+\tau}|\mathbf{X}_t], \text{var}[\mathbf{X}_{t+\tau}|\mathbf{X}_t]), \quad (\text{A.1.8})$$

ahol mélyebbre ásva:

¹⁰mindez az affin modelleknél csak az $\mathbb{A}_N(N)$ modellek (azaz a korrelált, többtényezős CIR modell) esetében teljesül

¹¹a bizonyításhoz lásd Ahn et al. [2002] A-függelékét

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{X}_{t+\tau}|\mathbf{X}_t] &= \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{-1}[\mathbf{\Phi}_\tau - \mathbf{I}_N]\mathbf{U}^{-1}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{U}\mathbf{\Phi}_\tau\mathbf{U}^{-1}\mathbf{X}_t, \\
\text{var}[\mathbf{X}_{t+\tau}|\mathbf{X}_t] &= \mathbf{U} \left[\frac{v_{ij}(\exp((\lambda_i + \lambda_j)\tau) - 1)}{\lambda_i + \lambda_j} \right]_{NN} \mathbf{U}', \\
\mathbf{\Phi}_\tau &\equiv \text{diag}[\exp(\lambda_i\tau)]_N, \\
\boldsymbol{\mathcal{V}} &\equiv [v_{ij}]_N = \mathbf{U}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}'\mathbf{U}^{-1}.
\end{aligned} \tag{A.1.9}$$

A fentiekből kiolvashatóan két tényező befolyásolja az állapotváltozók közötti kölcsönhatásokat: $\boldsymbol{\xi}$ átlón kívüli elemei, a feltételes várható értéken keresztül, továbbá $\boldsymbol{\Sigma}$ mátrix átlón kívüli elemei, amelyek $\boldsymbol{\xi}$ -vel egyetemben az állapotváltozók feltételes kovarianciájára hatnak. Ebből következően, ha mind $\boldsymbol{\xi}$, mind pedig $\boldsymbol{\Sigma}$ diagonális mátrixok, akkor $\mathbf{U} = \mathbf{I}_N$, továbbá a kovarianciamátrix is diagonális, még pedig nem más mint $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. Amennyiben a 3. pontban ismertetett feltételek teljesülnek, $\mathbf{X}_t$ egyensúlyi eloszlása többváltozós normális eloszlás lesz az alábbi várható értékkel és kovarianciamátrixszal:

$$E[\mathbf{X}_t] = -\boldsymbol{\xi}^{-1}\boldsymbol{\mu}, \quad \text{var}[\mathbf{X}_t] = \mathbf{U} \left[-\frac{v_{ij}}{\lambda_i + \lambda_j} \right] \mathbf{U}'. \tag{A.1.10}$$

A modellben a kamatláb eloszlását nemcentrális khi-négyzet eloszlások keveréke¹² adja az alábbi formában:

$$P[r = \alpha + \mathbf{X}_t'\boldsymbol{\Psi}\mathbf{X}_t \leq r_0] = \sum_{j=0}^{\infty} e_j \left[\chi_{N+2j}^2 \left(\sum_{j=1}^N \omega_j^2 \right) \leq \frac{r_0 - \alpha}{\varepsilon} \right]. \tag{A.1.11}$$

Az egyenletben szereplő e_j , ω_j és ε definíciója Ahn et al. [2002] B-függelékében található.

Amennyiben az állapotváltozók merőlegesek egymásra, a fenti eloszlás egy nemcentrális khi-négyzet eloszlássá egyszerűsödik. Így Ahn, Dittmar és Gallant általános QTSM-je esetében a modellbeli függvényforma meghatározza a kamatláb eloszlását is, ami az általános modellt megkülönbözteti mind a SAINTS modelltől, mind pedig a Beaglehole és Tenney [1992] által javasolt kvadratikussá modelltől.

A szerzőtrío a fent ismertetett építőkockákat felhasználva vezeti le a kötvényárak, illetve a hozamok egyenletét. A legfontosabb lépcsőfokok itt a következők:

¹²a részletekért lásd Ahn et al. [2002] B-függelékét

- a nominális zérókupon kötvényárfolyamokat jelölje $V_{t,\tau}$ ¹³, a A.1.1. egyenlet alapján $V_{t,\tau} = E_t^P [M_{t,t+\tau}]$,
- a várható érték kicsomagolásához a szerzők normalizálják a nominális kötvényárfolyamot, a normalizált kötvényárfolyam $Z_{t,\tau} = \frac{V_{t,\tau}}{B_t}$ -ként áll elő¹⁴,
- a normalizált kötvényárfolyam dinamikájára:

$$\frac{dZ_{t,\tau}}{Z_{t,\tau}} = [a_{t,\tau} - r_t] dt + b_{t,\tau} d\mathbf{W}_{\mathbf{N}_t}, \quad (\text{A.1.12})$$

- $a_{t,\tau}$ és $b_{t,\tau}$ továbbfejtéséhez az Ito-lemmát alkalmazzák a szerzők,
- a 116. oldal 1. pontja segítségével felírják az $\mathcal{N}_{t,T}$ Radon-Nikodym derivált és a $Z_{t,\tau}$ normalizált kötvényárfolyam dinamikájára felírt fenti egyenlet szorzatát,
- a A.1.2. egyenlet szerint $\mathcal{N}_{t,t+\tau} Z_{t,\tau}$ martingál, emiatt a kötvény több-
lethozama

$$a_{t,\tau} - r_t = -b_{t,\tau} \Upsilon [\boldsymbol{\eta}_0 + \boldsymbol{\eta}_1 \mathbf{X}_t] \quad (\text{A.1.13})$$

alakban írható,

- a fenti egyenletet $a_{t,\tau}$ -ra rendezve kapjuk a kötvény alapvető árazó PDE-jét. Ebben a bal oldalon szerepel a kötvény Ito-lemmából derivált pillanati várható hozama, a jobb oldalon pedig a pillanati kockázatmentes kamatláb és a kötvény kockázati prémiumának összege található. Az említett kockázati prémium két tényező szorzata, az első az állapotváltozókra mért érzékenységek vektora, a második pedig az állapotváltozók és az SDF közötti kovariancia, azaz a kockázat piaci ára,
- mivel az SDF közvetlenül nem megfigyelhető, nem tudjuk szétválasztani Υ -t, $\boldsymbol{\eta}_0$ -t és $\boldsymbol{\eta}_1$ -et. A modellben ezek a paraméterek állandók. A kockázat piaci árát $\boldsymbol{\delta}_0 + \boldsymbol{\delta}_1 \mathbf{X}_t$ alakban határozza meg Ahn et al. [2002], ahol $\boldsymbol{\delta}_0 \equiv -\Sigma \Upsilon \boldsymbol{\eta}_0$, illetve $\boldsymbol{\delta}_1 = -\Sigma \Upsilon \boldsymbol{\eta}_1$,

¹³ez a $T = t + \tau$ időpontban 1 egységet fizető kötvény árfolyama t időpontban

¹⁴ne felejtjük el, hogy B_t a pénzpiaci számla egyenlege

- a $V_{t,0} = 1$ végső érték feltételt felhasználva a kötvény alapvető árazó PDE-jének megoldása $V_{t,\tau}$, ami az állapotvektor függvényében az alábbi formában írható:

$$V_{t,\tau} = \exp [A_\tau + \mathbf{B}_\tau \mathbf{X}_t + \mathbf{X}_t' \mathbf{C}_\tau \mathbf{X}_t], \quad (\text{A.1.14})$$

ahol A_τ , $\mathbf{B}_\tau$ és $\mathbf{C}_\tau$ kielégíti a szerzők által megadott differenciálegyenleteket,

- a YTM-hozamokra $r_{t,\tau} = -\frac{(\ln V_{t,\tau})}{\tau}$, azaz

$$r_{t,\tau} = \frac{1}{\tau} [-A_\tau - \mathbf{B}_\tau \mathbf{X}_t - \mathbf{X}_t' \mathbf{C}_\tau \mathbf{X}_t]. \quad (\text{A.1.15})$$

Az utolsó egyenlet nem más, mint a kvadratikus modellek legnagyobb előnye matematikailag kifejtve. A hozamok ugyanis az állapotváltozók kvadratikus függvényei, a már sokat említett nóvum az affin modellekhez képest. Ez teszi lehetővé, hogy a QTSM-ek jól kezelik az amerikai hozamgörbe stilizált tényeit. Már egy egyváltozós modellnél $N = 1$ is látszik az előny: egy adott hozam mellett, az állapotvektor előjelváltása különböző hozamgörbét eredményez. Az előny ára, hogy az egyváltozós esetben a hozam-idősor statisztikailag nem elegendő a modell becsléséhez.

A.1.2. A beágyazott modellek

Az imént ismertetett általános QTSM egyszerűsített esetként magába foglal számos nevezetes kvadratikus modellt. Ezek Longstaff [1989] kettős négyzetgyök-modellje, Beaglehole és Tenney [1992] egyváltozós kvadratikus modellje, Constantinides [1992] SAINTS modellje, illetve egy speciális CIR¹⁵-változat. A következőkben ezekről adok rövid áttekintést.

Az egyváltozós kvadratikus modell, Beaglehole és Tenney [1992]

Beaglehole és Tenney [1992] eredeti modellje egyfaktoros volt, azonban az állapotváltozók merőlegességének feltételezése mellett könnyen áttérhetünk többváltozós esetre. Az általános QTSM az alábbi megszorításokkal vihető át az első beágyazott modellbe: $\alpha = 0$, $\beta = \delta_0 = \mathbf{0}_N$, Ψ , ξ , Σ és δ_1 pedig diagonális mátrixok.

¹⁵Cox et al. [1985]

A dupla négyzetgyök-modell, Longstaff [1989]

Az előző speciális esethez hasonlóan ez a modell is egydimenziós állapotváltozóval született, és hasonlóképpen terjeszthető ki többváltozós esetre. Az állapotváltozók $\mathbf{X}_t$ vektora nem korlátolt alulról, továbbá nem mutatja az átlaghoz való visszatérés jeleit. Az általános QTSM megszorításai az alábbiak: $\alpha = 0$, $\beta = \delta_0 = \mathbf{0}_N$, Ψ és Σ diagonális mátrixok, továbbá $\mu \neq \mathbf{0}_N$ és $\xi = \delta_1 = \mathbf{0}_{N \times N}$.

Egy speciális CIR modell

A CIR hagyományosan merőleges állapotváltozókat szerepeltető affin modell, azonban az általános QTSM közös nevezőre hozható egy módosított CIR modellel. Az általános QTSM-et az alábbi módon kell testre szabni: $\alpha = 0$, $\beta = \mathbf{0}_N$, Ψ , ξ , Σ és δ_1 diagonális mátrixok, valamint $\mu = \delta_0 (= \mathbf{0}_N)$.

A CIR alapmodellben annyi változtatásra van szükség, hogy az állapotváltozók egy kvadratikus transzformáción essenek át. A transzformált $\mathbf{X}_t^c$ állapotváltozó SDE-je az alábbi:

$$dX_{i,t}^c = \left[\frac{(\sigma_i^c)^2}{4} + \xi_i^c \mathbf{X}_t^c \right] dt + \sigma_i^c \sqrt{X_{i,t}^c} dW_{i,t}. \quad (\text{A.1.16})$$

A specializált QTSM és a módosított CIR modell azonossága abban az egyedi esetben biztosított, ha $X_{i,t}^c = X_{i,t}^2$. Amennyiben az állapotváltozók páronként merőlegesek egymásra, mind a QTSM, mind pedig a CIR modell feltételes sűrűségfüggvénye nemcentrális khi-négyzet eloszlást követ. Meg kell jegyezni, hogy a A.1.16. egyenlet nem elégíti ki a Feller-feltételt, azaz a kamatláb nulla értéket is felvehet.

A SAINTS modell, Constantinides [1992]

Első ránézésre meglepőnek tűnhet, hogy az általános QTSM modell specializált esetként magába foglalhatja a SAINTS modellt. Constantinides [1992] ugyanis az alábbi formában határozta meg az állapotvektor és az SDF sztochasztikus differenciálegyenletét:

$$d\mathbf{X}_t = -\mathcal{K}\mathbf{X}_t dt + \mathbf{S}d\mathbf{W}_{\mathbf{N}_t},$$

$$M_t = \exp \left[-ht + \sum_{i=1}^N (X_{i,t} - c_i)^2 \right], \quad (\text{A.1.17})$$

ahol $\mathcal{K}$ és $\mathbf{S}$ egyaránt konstansokból álló diagonális mátrixok, ebből fakadóan pedig az állapotváltozók páronként merőlegesek egymásra. Az M_t sztochasztikus diszkontfaktor az állapotváltozók négyzetes exponenciális függvénye. Ez a specifikáció egyszerre határozza meg a nominális kamatlábat, az SDF diffúziós mozgását, valamint a kockázat piaci árát. Az SDF-re alkalmazva az Ito-lemmát azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \frac{dM_t}{M_t} = & \\ = - \left[\sum_{i=1}^N \{ 2 (\mathcal{K}_{ii} - S_{ii}^2) X_{i,t}^2 + 2c_i (2S_{ii}^2 - \mathcal{K}_{ii}) X_{i,t} - S_{ii}^2 - 2c_i^2 S_{ii}^2 \} + h \right] dt + & \\ + 2 \sum_i^N S_{ii} (X_{i,t} - c_i) dW_{i,t}. & \quad (\text{A.1.18}) \end{aligned}$$

A fenti egyenletet összehasonlítva a A.1.4. és A.1.5. egyenletekkel észrevesszük, hogy a szóban forgó két modell hasonlóan határozza meg a kamatlábat és az SDF diffúziós tagját. Az általános QTSM egy invariáns transzformáción átesve¹⁶, a kockázat piaci árának alábbi megszorításával foglalja magába a SAINTS modellt: $\beta = \mathbf{0}_N$, $\Psi = \mathbf{I}_N$, ξ , Σ és δ_1 diagonális mátrixok, valamint

$$\begin{aligned} \delta_{0i} &= \pm \mu_i \left(\frac{\xi_{ii} \pm \sqrt{\xi_{ii}^2 - 2\Sigma_{ii}^2}}{\sqrt{\xi_{ii}^2 - 2\Sigma_{ii}^2}} \right), \\ \delta_{1ii} &= -\xi_{ii} \mp \sqrt{\xi_{ii}^2 - 2\Sigma_{ii}^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.1.19})$$

A SAINTS modellben tehát a hozamok időbeli alakulását befolyásoló paraméterek, ξ és Σ igencsak speciális módon határozzák meg a kockázat piaci árát. A strukturális mátrixok határozzák meg a gazdaság folyamatainak alakulását a valós P mérték szerint, a δ -k pedig ezt konvertálják át a kockázatmentes Q mérték alá. Mivel a két mérték közötti átjárás szintén a strukturális paraméterektől függ, előfordulhat, hogy a SAINTS modell rosszabbul illeszkedik a hozamgörbére mint a rugalmasabb általános QTSM. A SAINTS modell megszorításainak gyökere az SDF A.1.17. egyenlet szerinti exogén meghatározásában rejlik.

¹⁶a részletekhez lásd Ahn et al. [2002] D-függelékét

A.1.3. A kanonikus QTSM

Ahn et al. [2002] az általános QTSM-ből pótlólagos megszorítások bevezetésével jut el a QTSM empirikus vizsgálatra alkalmas kanonikus alakjához¹⁷. A kanonikus alak megszorításai a következők:

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & \Psi_{12} & \dots & \Psi_{1N} \\ \Psi_{12} & 1 & \dots & \Psi_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi_{1N} & \Psi_{2N} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.20})$$

egy szimmetrikus mátrix, egyesekkel az átlójában, továbbá $\alpha > 0$, $\beta = \mathbf{0}_N$, $\mu \geq 0$, ξ és δ_1 alsó háromszög mátrixok, valamint Σ diagonális mátrix.

Ahn et al. [2002] négy kvadratikus modellt vizsgál empirikusan, melyek mindegyike a kanonikus QTSM-ből vezethető le.

A.1.4. Ahn et al. [2002] empirikusan vizsgált modelljei

Ahn, Dittmar és Gallant, akárcsak Dai és Singleton [2000] 3-faktoros modellek becslésével támasztotta alá állításait. Cikkükben négy kvadratikus modellt vizsgáltak részletesen, ezek rugalmassági sorrendben a következők.

QTSM1: a kanonikus QTSM

Ez a modell az imént felvázolt kanonikus alak $N = 3$ esetben. A modell becslésekor 25 paramétert kell meghatározni, ezek: α , Ψ három átlón kívüli eleme, μ három eleme, ξ hat eleme, Σ három paramétere, δ_0 három eleme, valamint δ_1 hat paramétere. Ez a modell a lehető legrugalmasabb QTSM: az állapotváltozók kovarianciamátrixa szabadon meghatározható, továbbá a modellben megengedett, hogy az állapotváltozók egymásra kölcsönösen hatva határozzák meg a nominális pillanati kamatlábat¹⁸.

¹⁷Dai és Singleton [2000] általános ATSM-je sem alkalmas közvetlenül empirikus vizsgálatokhoz. Ha ugyanis az állapotváltozók közvetlenül nem megfigyelhetők, számos paraméter empirikusan azonosíthatatlan. Ez a probléma az általános QTSM esetében is fennáll, azonban az állapotváltozók homoszkedasztikus diffúziós mátrixa miatt könnyebben kezelhető, mint az affin esetben.

¹⁸azaz szabadon módosíthatjuk ξ átlón kívüli elemeit

QTSM2: merőleges állapotváltozók kölcsönhatásokkal

A második modell abban szigorít tovább¹⁹, hogy ξ és δ_1 diagonálisak. Ennek következménye, hogy az állapotváltozók mind a valós P , mind pedig a kockázatmentes Q mérték alatt merőlegesek egymásra. Azonban Ψ nem diagonális, a pillanati kamatláb meghatározásában szerepet kapnak az állapotváltozók közötti kölcsönhatások is.

Mivel ξ és δ_1 diagonális, a QTSM1 hat paramétere nulla értéken rögzített. Így összesen 19 szabad paraméter marad, amit meg kell becsülni.

QTSM3: merőleges változók kölcsönhatások nélkül

A harmadik modellben a QTSM2-hez képest szigorítás, hogy Ψ diagonális mátrix ($\Psi = \mathbf{I}_3$). Ezáltal az állapotváltozók közötti kölcsönhatások nem hatnak a nominális kamatláb értékére, a szabad paraméterek száma pedig 16-ra csökken.

A QTSM3 vitathatatlan előnye, hogy zárt képletet ad a kötvényárak számítására:

$$V_{t,\tau} = \exp(-\alpha\tau) \prod_{i=1}^N \times \left[\sum_{i=1}^N A_{i,\tau} + \sum_{i=1}^N B_{i,\tau} X_{i,t} + \sum_{i=1}^N C_{i,\tau} X_{i,t}^2 \right], \quad (\text{A.1.21})$$

ahol

$$\begin{aligned} A_{i,\tau} &= \left[- \left(\frac{\mu_i - \delta_{0i}}{\varsigma_i} \right)^2 \tau \right] + \\ &+ \left[\frac{(\mu_i - \delta_{0i})^2 (\exp(\varsigma_i \tau) - 1) [(-2(\xi_{ii} - \delta_{1ii}) + \varsigma_i)(\exp(\varsigma_i \tau) - 1) + 2\varsigma_i]}{\varsigma_i^3 [(-\xi_{ii} + \delta_{1ii} + \varsigma_i)(\exp(2\varsigma_i \tau) - 1) + 2\varsigma_i]} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \ln \left[\frac{2\varsigma_i \exp(-(\xi_{ii} + \delta_{1ii}) + \varsigma_i)}{(-\xi_{ii} + \delta_{1ii} + \varsigma_i)(\exp(2\varsigma_i \tau) - 1) + 2\varsigma_i} \right], \\ B_{i,\tau} &= - \frac{2(\mu_i - \delta_{0i})(\exp(\varsigma_i \tau) - 1)^2}{\varsigma_i [(-\xi_{ii} + \delta_{1ii} + \varsigma_i)(\exp(2\varsigma_i \tau) - 1) + 2\varsigma_i]}, \\ C_{i,\tau} &= - \frac{(\exp(2\varsigma_i \tau) - 1)}{(-\xi_{ii} + \delta_{1ii} + \varsigma_i)(\exp(2\varsigma_i \tau) - 1) + 2\varsigma_i}, \end{aligned} \quad (\text{A.1.22})$$

¹⁹és ezzel lép vissza rugalmasság téren

a következő kiegészítéssel: $\varsigma_i = \sqrt{(-\xi_{ii} + \delta_{1ii})^2 + 2\Sigma_{ii}^2}$.

QTSM4: a SAINTS modell

A QTSM3-ból a kockázat piaci árára vonatkozó megszorítások bevezetése útján jutunk el a SAINTS modellhez, ahol a szabad paraméterek száma csupán 10.

Mivel valamennyi faktor kockázatára kétféleképpen vezethetünk be megszorításokat, összesen hat különböző megszorító feltételt sorolhatunk fel, ami konzisztens a SAINTS modellel. Ahn et al. [2002] ebből a hatból egyet választ ki²⁰, mégpedig a következőt:

$$\begin{aligned}\delta_{0i} &= \mu_i \left(\frac{\xi_{ii} - \sqrt{\xi_{ii}^2 - 2\Sigma_{ii}^2}}{\sqrt{\xi_{ii}^2 - 2\Sigma_{ii}^2}} \right), \\ \delta_{1ii} &= -\xi_{ii} \sqrt{\xi_{ii}^2 - 2\Sigma_{ii}^2}\end{aligned}\tag{A.1.23}$$

$\forall \quad i = 1, 2, 3\text{-ra.}$

A.2. Még egyszer az affin és a kvadratikus modellek közötti különbségekről

A kvadratikus modellek részletes áttekintése után érdemes összefoglalni a Dai és Singleton [2000] által javasolt ATSM-ek, valamint az Ahn et al. [2002] cikkben bemutatott QTSM-ek közötti különbségeket. Mindkét esetben a kanonikus alakot tartva szem előtt, ez az áttekintés következik most.

- A kvadratikus esetben a négyzetes függvényalak biztosítja a hozamok nemnegativitását, ezzel ellentétben az $\mathbb{A}_m(N)$ ATSM esetében ez csak akkor áll fenn, ha $m = N$ (CIR modell). Ha ugyanis $m < N$ és egy vagy akár több normális eloszlású állapotváltozó negatív értéket vesz fel, akkor ezekben az állapotokban az affin függvényalak lehetővé teszi, hogy a hozamok negatív értéket vegyenek fel. A kvadratikus esetben a hozamok nemnegativitásának feltétele, hogy $\alpha \geq 0$, továbbá Ψ pozitív szemidefinit mátrix legyen.

²⁰döntésüket a feltétel nélküli hozamgörbe kalibrálása segítette

- QTSM-ek esetén a nominális kamatlábak és a kötvényárfolyamok feltételes volatilitása heteroszkedaszticitás jeleit mutatja. Az állapotváltozók volatilitása még homoszkedasztikus, azonban a hozamok alábbi sztochasztikus differenciálegyenlete bevezeti a heteroszkedaszticitást:

$$d\mathbf{r}_t = [\text{tr}(\Sigma^2 \Psi) + 2(\mu + \xi \mathbf{X}_t)' \Psi \mathbf{X}_t] dt + 2\mathbf{X}_t' \Psi \Sigma d\mathbf{W}_{\mathbf{N}_t}. \quad (\text{A.2.1})$$

A fenti specifikációban a kamatláb feltételes varianciája az állapotváltozók lineáris függvénye, akárcsak a CIR modellben. A kanonikus QTSM esetében nincs megszorítás a faktorok közötti korreláció előjelére vonatkozóan, így a kvadratikus modellek változatosabban modellezik a hozamvolatilitás szerkezetét. Ezzel szemben általános $\mathbb{A}_m(N)$ affin esetben m darab állapotváltozó határozza meg a sztochasztikus volatilitást. Az ATSM-eknél tehát trade-off kapcsolat áll fenn a sztochasztikus hozamvolatilitás szerkezete és a faktorok közötti feltételes korreláció között. $\mathbb{A}_m(N)$ jelölésben m darab állapotváltozó követ négyzetgyök folyamatot, a maradék $N - m$ faktor pedig normális eloszlásút. Az admissibility feltétele a modellben, hogy az m darab négyzetgyök folyamat között nemnegatív legyen a korreláció. Így jutunk vissza az előző ponthoz: az egyedüli ATSM, ami „gyárilag” garantálja a hozamok nemnegativitását, az $\mathbb{A}_N(N)$, ahol valamennyi állapotváltozó négyzetgyök folyamatot követ.

Az affin és a kvadratikus modellek kapcsolata egyszerűsített értelemben triviális: az affin modellek a négyzetes tagtól megtisztított, azaz korlátozott kvadratikus modellek. Mindez nem véletlen: történelmileg az affin modellek illeszkedési hiányosságai terelték a kutatókat a kvadratikus modellek irányába. Ugyanígy az affin modelljeik magyarázó erejével elégedett kutatók közül többen nem nyitottak kvadratikus irányba. A gyakorlati modellbecslés során természetesen tesztelhető is, hogy egy adott mintában megéri-e a ráfordított többletidőt (a kvadratikus modellek bonyolultsága miatt a becslés számítás-igényesebb) a kvadratikus modellek által hozott illeszkedés javulás.

Az affin és a kvadratikus modellek kevésbé triviális kapcsolatára hívja fel a figyelmet Cheng és Scaillet (2007) a 28. oldalon már említett cikke. Ebben a szerzők az ugró folyamatokkal bővített affin és az általános kvadratikus modelleket tekinti kiinduló pontnak, ezt a két osztályt hozzák egy tető alá. A Cheng és Scaillet (2007) által javasolt modellben (LQJD: linear-quadratic jump-diffusion) az állapotvektor egy lineáris ugrófolyamatból, és egy lineáris és kvadratikus elemeket egyaránt tartalmazó diffúziós tagból áll, továbbá

a kockázat piaci árát sem köti a linearitás. A cikk fontos állítása, hogy az LQJD-modellek pszeudo-állapotváltozók bevezetésével kölcsönösen megfeleltethetők az affin model családdal, igaz nem pontosan Dai és Singleton (2000) értelmében. Mindez egyúttal azt is jelenti, hogy már az affin modellspecifikáció is jóval több lehetőséget biztosít a modellezésben, mint azt számos, eltérő függvényalakot erőltető szerző hirdeti.

B. függelék

A hozamgörbe leíró statisztikai elemzése

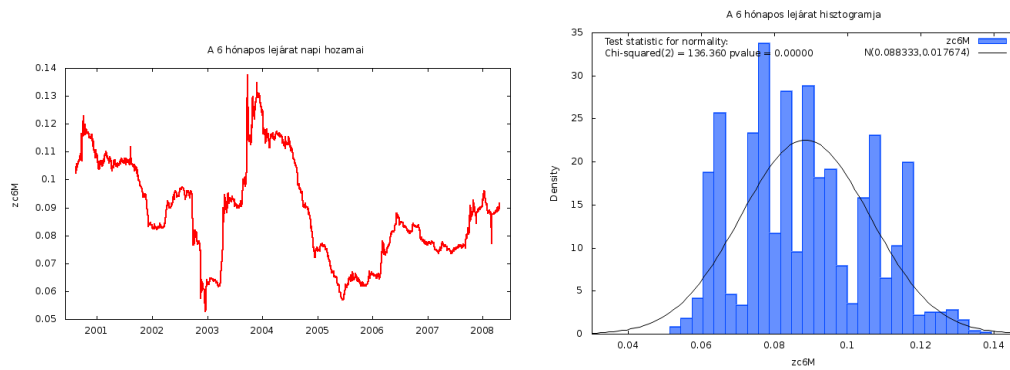
A következőkben a hozamgörbe leíró statisztikai elemzését találja az olvasó, táblázatok és grafikonok formájában. A lejáratok közül a 6 hó, 2 év, 5 év és 10 év pontokat választottam ki, hiszen ezek fontossága kiemelt a piaci szereplők számára. A hozamszintek leíró statisztikája mellett kitérek a napi hozamváltozások leíró jellemzésére is. Végül a görbe alakjának mutatóit, a meredekséget (a piaci szokványokat figyelembe véve önkényesen a 2 éves és a 10 éves lejárat közötti különbséget definiáltam meredekségként) és a görbületet (a C -vel jelölt görbület alkalmazott definíciója: $C = r_{6y} - \frac{r_{2y} + r_{10y}}{2}$ ¹) veszem górcső alá. A bemutatott hisztogramok a jobb értelmezhetőség céljából a normális eloszlás haranggörbáját is ábrázolják.

¹Itt is a piaci szokványokat követtem, azzal a kiegészítéssel, hogy a 6 éves zérókupon hozam és a 2 és 10 éves zérókupon hozamból álló portfólió durationje, mivel a zérókupon kötvény átlagideje nem más mint a lejárat, megegyezik. A C rövidítést az angol *curvature*, azaz görbület szó motiválta.

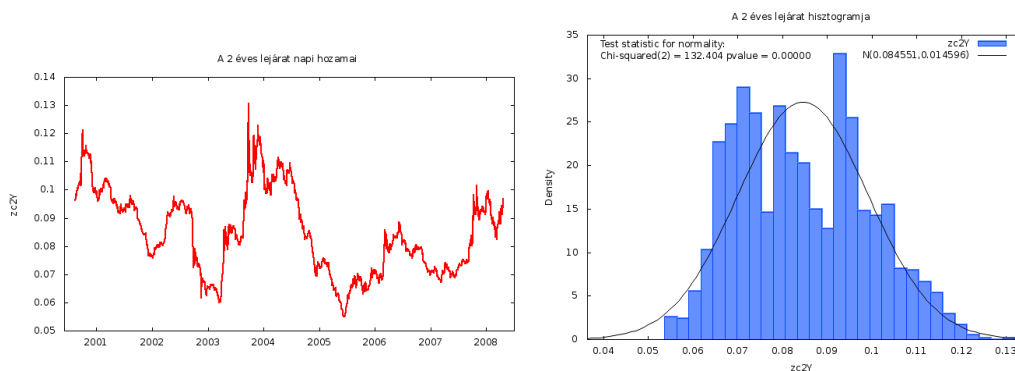
B.1. Hozamszintek leíró jellemzése

	6 hó	2 év	5 év	10 év
Átlag	0,08833	0,08455	0,07806	0,07201
Medián	0,08754	0,08324	0,07674	0,06997
Minimum	0,05278	0,05500	0,05498	0,05445
Maximum	0,13755	0,13052	0,11012	0,09561
Szórás	0,01767	0,01460	0,01033	0,00728
Variációs együttható	0,20008	0,17262	0,13232	0,10104
Ferdeség	0,27522	0,26823	0,32401	0,35442
Csúcsosság	-0,76785	-0,76726	-0,63642	-0,64330

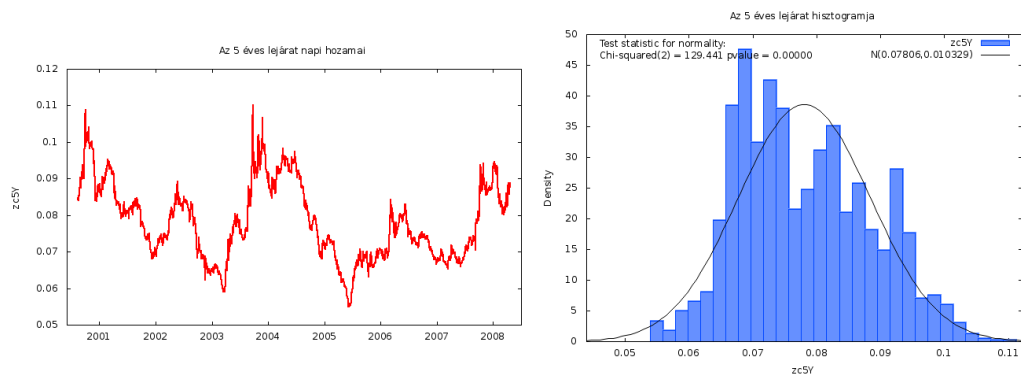
B.1. táblázat. *Hozamszintek leíró statisztikája, forrás: saját számítások*



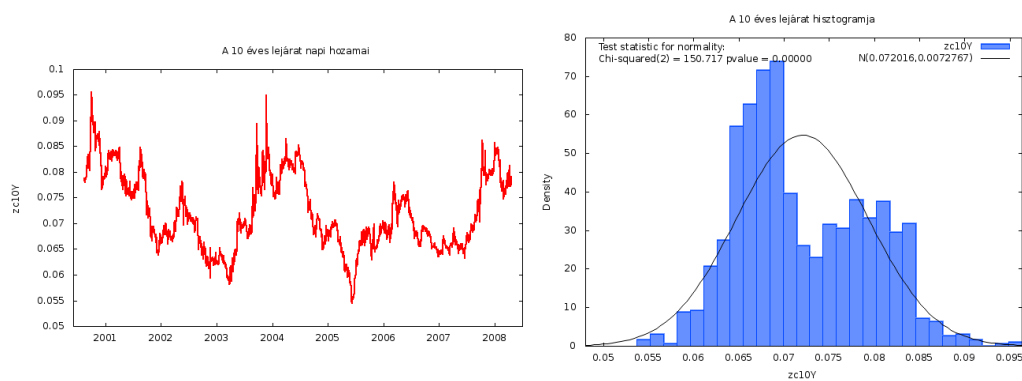
B.1. ábra. *A 6 hónapos lejárat időszora és histogramja, forrás: saját számítások*



B.2. ábra. *A 2 éves lejárat időszora és histogramja, forrás: saját számítások*



B.3. ábra. Az 5 éves lejárat időszora és histogramja, forrás: saját számítások

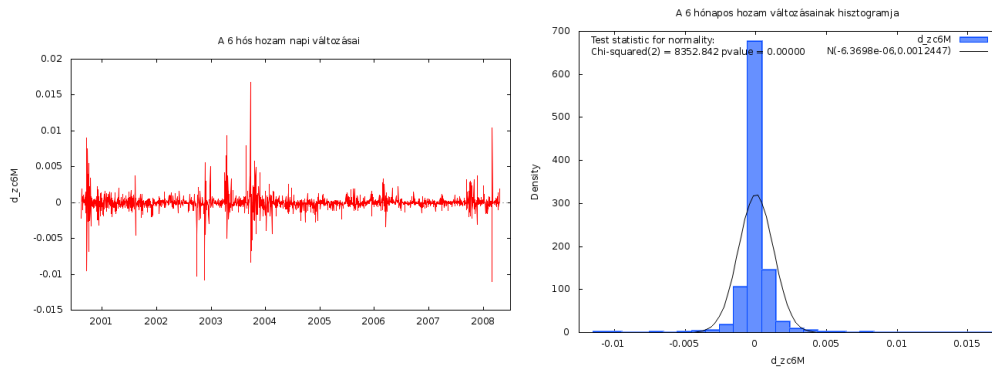


B.4. ábra. A 10 éves lejárat időszora és histogramja, forrás: saját számítások

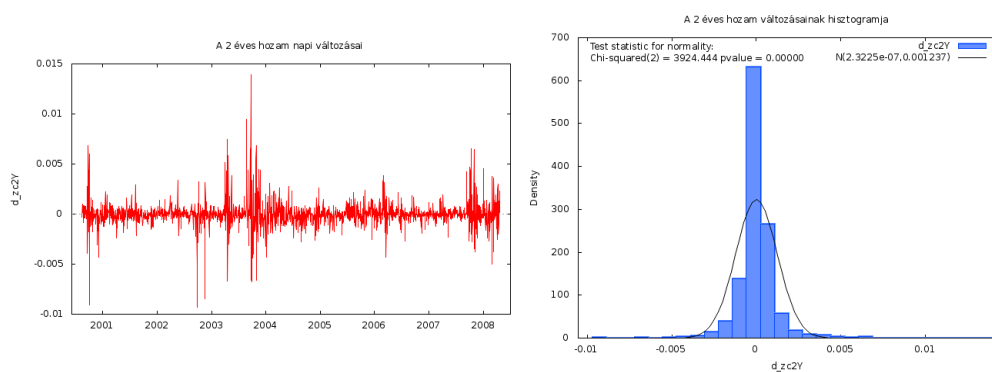
B.2. Napi hozamváltozások leíró jellemzése

	6 hó	2 év	5 év	10 év
Átlag	-6,37E-06	2,32E-07	2,19E-06	4,31E-07
Medián	-3,30E-05	-3,81E-05	-1,46E-05	1,25E-06
Minimum	-0,011030	-0,009298	-0,009844	-0,011084
Maximum	0,016781	0,013907	0,010771	0,014310
Szórás	0,001245	0,001237	0,001137	0,001076
Variációs együttható	195,4	5326,1	519,0	2497,4
Ferdeség	1,8894	1,2957	0,6162	0,8126
Csúcsosság	49,919	24,042	16,154	26,771

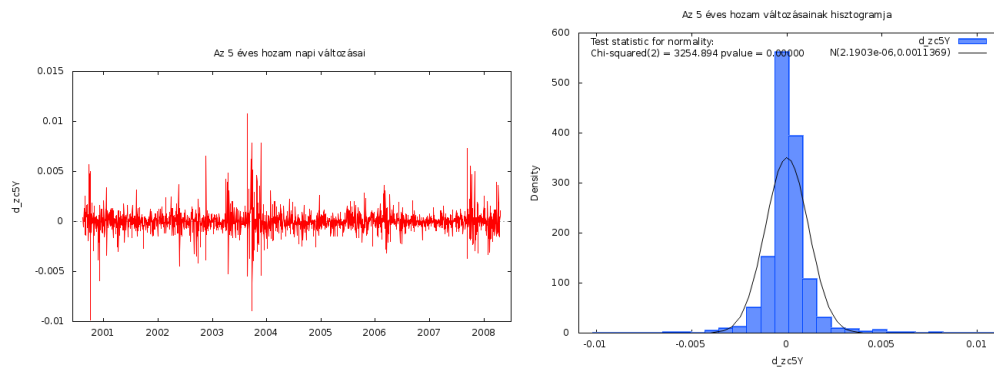
B.2. táblázat. *Napi hozamváltozások leíró statisztikája, forrás: saját számítások*



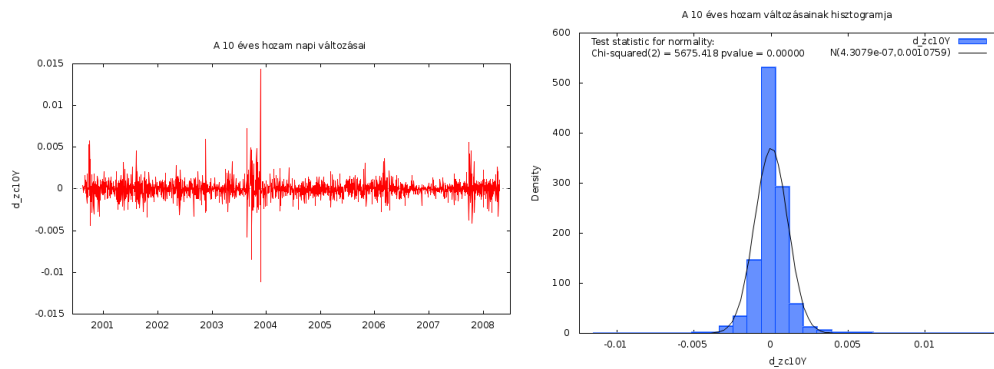
B.5. ábra. *A 6 hónapos hozam változásainak időszora és histogramja, forrás: saját számítások*



B.6. ábra. *A 2 éves hozam változásainak időszora és histogramja, forrás: saját számítások*



B.7. ábra. Az 5 éves hozam változásainak időszora és histogramja, forrás: saját számítások

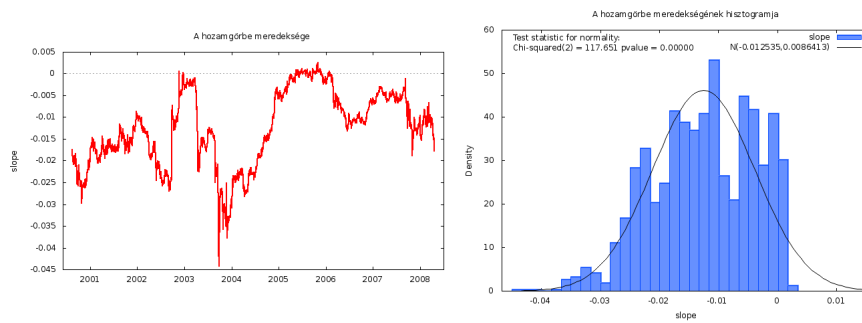


B.8. ábra. A 10 éves hozam változásainak időszora és histogramja, forrás: saját számítások

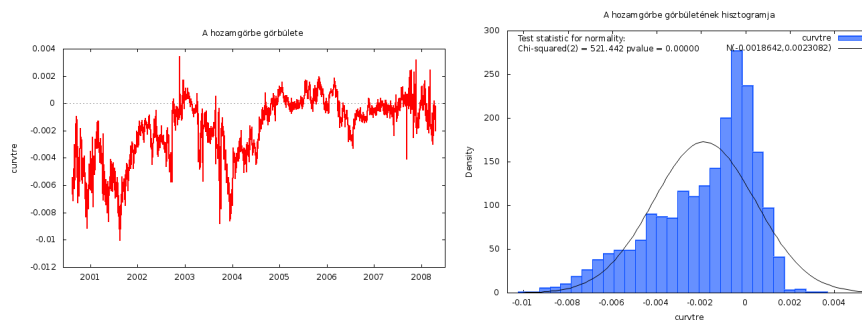
B.3. A hozamgörbe meredekségének és görbületének leíró jellemzése

	Meredekség	Görbület
Átlag	-0,01253	-0,00186
Medián	-0,01205	-0,00119
Minimum	-0,04420	-0,01002
Maximum	0,00261	0,00342
Szórás	0,00864	0,00231
Variációs együttható	0,68939	1,23820
Ferdeség	-0,35611	-0,81782
Csúcsosság	-0,50221	-0,00476

B.3. táblázat. A hozamgörbe meredekségének és görbületének leíró statisztikája, forrás: saját számítások



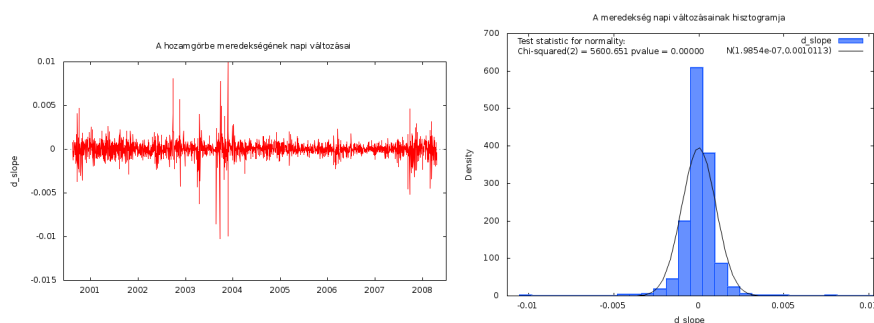
B.9. ábra. A hozamgörbe meredekségének időszora és hisztogramja, forrás: saját számítások



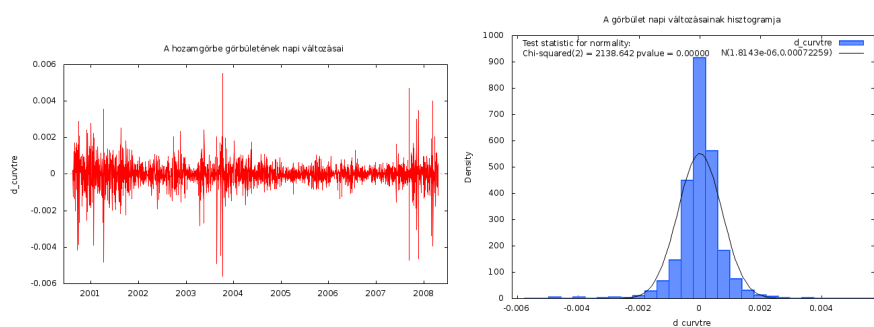
B.10. ábra. A hozamgörbe görbületének időszora és hisztogramja, forrás: saját számítások

	Merekség	Görbület
Átlag	1,985E-07	1,814E-06
Medián	1,194E-05	1,298E-05
Minimum	-0,0102050	-0,0055771
Maximum	0,0099255	0,0055319
Szórás	0,0010113	0,0007226
Variációs együttható	5093,7	398,3
Ferdeség	-0,82566	-0,70831
Csúcsosság	26,565	12,161

B.4. táblázat. *A merekség és a görbület napi változásainak leíró statisztikája, forrás: saját számítások*



B.11. ábra. *A merekség napi változásainak idősora és histogramja, forrás: saját számítások*



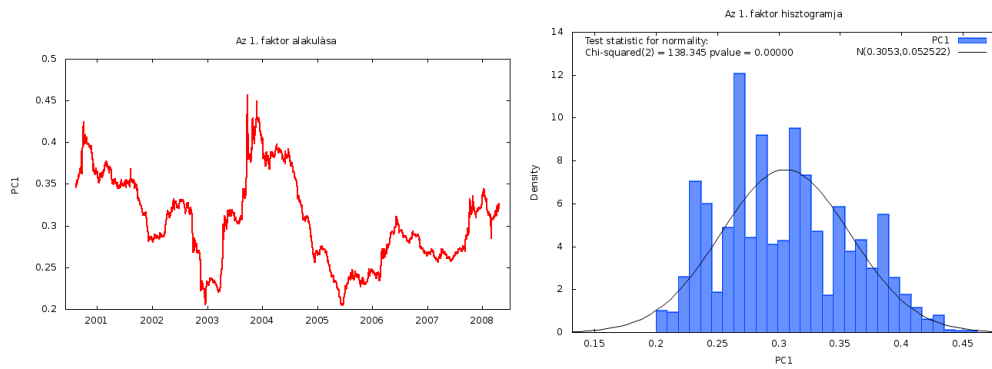
B.12. ábra. *A görbület napi változásainak idősora és histogramja, forrás: saját számítások*

C. függelék

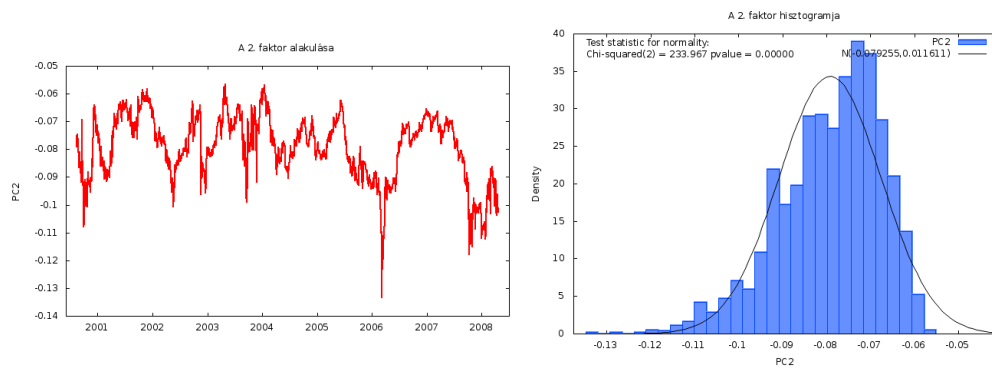
A hozamgörbe főkomponenselemzésének eredményei

	1. faktor	2. faktor	3. faktor
Átlag	0,30530	-0,07925	0,03119
Medián	0,30357	-0,07736	0,03187
Minimum	0,20473	-0,13345	0,00978
Maximum	0,45671	-0,05657	0,04026
Szórás	0,05252	0,01161	0,00376
Variációs együttható	0,14651	0,17262	0,12052
Ferdeség	0,27923	-0,71981	-1,42350
Csúcsosság	-0,76698	0,41926	2,56130

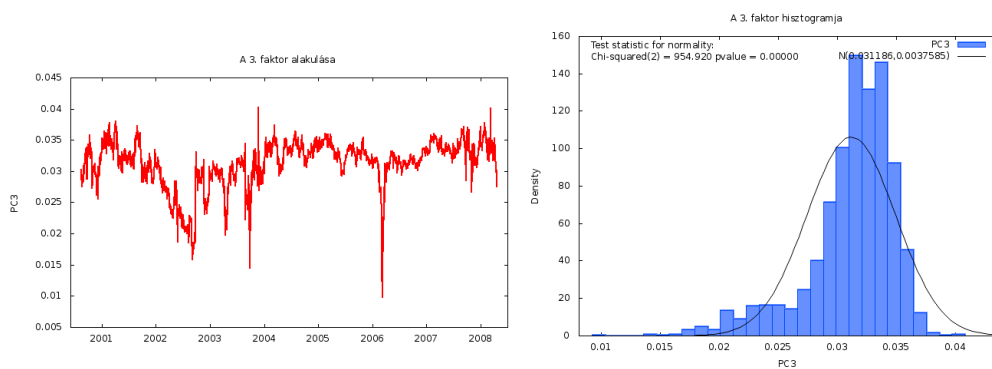
C.1. táblázat. A hozamszintek főkomponenseinek leíró statisztikája, forrás: saját számítások



C.1. ábra. A hozamszintek 1. főkomponensének idősora és histogramja, forrás: saját számítások



C.2. ábra. A hozamszintek 2. főkomponensének idősora és histogramja, forrás: saját számítások



C.3. ábra. A hozamszintek 3. főkomponensének idősora és histogramja, forrás: saját számítások

Lejárat	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7	PC8	PC9	PC10	PC11	PC12	PC13	PC14	PC15
dzc2W	0,309	-0,439	0,351	0,060	0,241	0,343	0,182	0,072	0,152	-0,020	0,000	0,108	0,178	0,551	-0,036
dzc1M	0,307	-0,412	0,292	0,040	0,154	0,127	0,011	-0,015	-0,054	0,003	-0,002	-0,085	-0,144	-0,759	0,048
dzc3M	0,297	-0,305	0,068	-0,036	-0,142	-0,467	-0,405	-0,194	-0,409	0,059	0,006	-0,178	-0,280	0,302	-0,017
dzc6M	0,288	-0,190	-0,151	-0,110	-0,306	-0,374	-0,138	0,051	0,313	-0,007	-0,002	0,364	0,583	-0,146	0,006
dzc9M	0,283	-0,104	-0,304	-0,153	-0,317	-0,004	0,257	0,209	0,508	-0,046	0,006	-0,294	-0,481	0,068	-0,002
dzc1Y	0,282	-0,040	-0,409	-0,168	-0,232	0,289	0,398	0,398	-0,626	-0,075	-0,021	0,085	0,145	-0,016	0,001
dzc2Y	0,276	0,085	-0,457	-0,012	0,311	0,329	-0,348	-0,437	0,181	0,391	0,074	0,009	0,002	-0,002	0,002
dzc3Y	0,266	0,145	-0,263	0,220	0,400	-0,062	-0,233	0,237	-0,014	-0,678	-0,237	-0,024	-0,002	0,004	-0,008
dzc4Y	0,252	0,195	-0,052	0,366	0,215	-0,242	0,143	0,460	-0,114	0,355	0,531	0,057	-0,023	-0,002	0,020
dzc5Y	0,240	0,235	0,104	0,375	-0,025	-0,187	0,297	-0,145	0,019	0,310	-0,648	-0,214	0,131	-0,007	-0,110
dzc6Y	0,228	0,266	0,196	0,264	-0,207	0,001	0,148	-0,433	0,071	-0,242	0,153	0,449	-0,277	0,027	0,389
dzc7Y	0,217	0,285	0,235	0,080	-0,280	0,183	-0,121	-0,148	0,030	-0,208	0,319	-0,224	0,135	-0,044	-0,667
dzc8Y	0,206	0,290	0,236	-0,141	-0,221	0,251	-0,298	0,236	-0,031	0,049	-0,013	-0,386	0,242	0,034	0,574
dzc9Y	0,194	0,278	0,205	-0,379	0,002	0,108	-0,204	0,332	-0,056	0,203	-0,304	0,497	-0,309	-0,011	-0,239
dzc10Y	0,182	0,246	0,147	-0,606	0,420	-0,334	0,329	-0,236	0,036	-0,092	0,138	-0,161	0,100	0,001	0,039

Lejárat	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7	PC8	PC9	PC10	PC11	PC12	PC13	PC14	PC15
zc2W	0,359	0,362	0,349	0,244	0,285	0,269	0,122	0,193	-0,048	-0,058	-0,005	-0,161	-0,101	0,558	0,007
zc1M	0,356	0,339	0,295	0,176	0,153	0,081	0,024	-0,046	0,019	0,015	0,001	0,110	0,094	-0,765	-0,011
zc3M	0,346	0,252	0,088	-0,056	-0,253	-0,420	-0,248	-0,506	0,126	0,158	0,016	0,332	0,115	0,289	0,008
zc6M	0,334	0,156	-0,122	-0,205	-0,347	-0,284	-0,197	0,210	-0,129	-0,064	-0,010	-0,648	-0,260	-0,117	-0,008
zc9M	0,324	0,079	-0,277	-0,267	-0,212	0,077	0,086	0,557	-0,170	-0,173	-0,013	0,513	0,216	0,045	0,005
zc1Y	0,316	0,012	-0,393	-0,297	0,018	0,335	0,510	-0,358	0,360	0,051	0,007	-0,144	-0,063	-0,009	-0,001
zc2Y	0,273	-0,181	-0,374	0,026	0,375	0,233	-0,418	-0,158	-0,477	0,357	0,046	-0,004	-0,008	-0,002	0,002
zc3Y	0,240	-0,253	-0,227	0,235	0,316	-0,173	-0,262	-0,037	0,322	-0,652	-0,206	0,005	0,010	-0,007	-0,007
zc4Y	0,211	-0,281	-0,081	0,304	0,101	-0,324	0,143	0,320	0,334	0,380	0,531	-0,013	0,021	-0,000	0,019
zc5Y	0,185	-0,291	0,031	0,291	-0,114	-0,208	0,350	0,034	-0,169	0,262	-0,678	0,086	-0,202	-0,011	-0,102
zc6Y	0,164	-0,294	0,116	0,219	-0,263	0,038	0,237	-0,221	-0,369	-0,245	0,183	-0,210	0,492	0,025	0,365
zc7Y	0,147	-0,291	0,187	0,100	-0,312	0,255	-0,046	-0,132	-0,100	-0,198	0,308	0,124	-0,286	-0,008	-0,652
zc8Y	0,134	-0,285	0,250	-0,068	-0,235	0,331	-0,267	0,055	0,233	0,067	-0,040	0,158	-0,392	-0,034	0,596
zc9Y	0,125	-0,276	0,308	-0,291	0,001	0,166	-0,235	0,140	0,294	0,221	-0,262	-0,224	0,545	0,040	-0,270
zc10Y	0,121	-0,265	0,364	-0,569	0,425	-0,331	0,213	-0,053	-0,222	-0,125	0,121	0,075	-0,182	-0,013	0,049

C.4. ábra. A hozamváltozások és a hozamszintek főkomponenseinek együtthatói, forrás: saját számítások

D. függelék

Az 1- és 2-faktoros modellek becsült paraméterei

Paraméter	1-faktoros modell
θ_1	0,072
κ_1	0,303
σ_1	0,05
λ_1	-0,016
Átlagos illeszkedés (bp)	26

D.1. táblázat. *Az 1-faktoros Vasicek modell becsült paraméterei, forrás: saját számítások*

Paraméter	2-faktoros modell
θ_1	0,000
θ_2	0,000
κ_1	0,295
κ_2	0,734
σ_1	0,018
σ_2	0,098
λ_1	-0,778
λ_2	-0,195
Átlagos illeszkedés (bp)	11

D.2. táblázat. *A 2-faktoros Vasicek modell becsült paraméterei, forrás: saját számítások*