TÉZISGYŰJTEMÉNY

NÖVEKEDÉS-OPTIMÁLIS PORTFÓLIÓ ELMÉLET

Vajda István

című Ph.D. értekezéséhez

Témavezető:
Prof. Györfi László
MTA rendes tagja

Budapest, 2009

TÉZISGYŰJTEMÉNY

NÖVEKEDÉS-OPTIMÁLIS PORTFÓLIÓ ELMÉLET

Vajda István

című Ph.D. értekezéséhez

Témavezető:
Prof. Györfi László
MTA rendes tagja

Tartalomjegyzék

1. Kutatási előzmények és a téma indoklása

A dolgozat alapproblémája a végtelen időhorizonton való optimális befektetési politika vizsgálata. A kérdésen számos neves közgazdász dolgozott, még Merton és Samuelson figyelmét is felkeltették a kutatások.

A disszertációban szekvenciális befektetési (portfólióválasztási) stratégiákat mutatok be. Szekvenciális stratégia alatt olyan kauzális stratégiát értek, amely a piacról rendelkezésre álló múltbeli adatokat használva, minden kereskedési periódus (nap) elején megváltoztathatja a portfóliót, azaz a tőkét újraoszthatja a rendelkezésre álló értékpapírok között. A végtelen időhorizonton való optimális befektetés problémájának vizsgálata során először azt kell tisztázni, hogy mit is értünk egyáltalán az optimális szón. A dolgozat címében jelzett kutatási irány az optimalitás kritériumán a maximális átlagos növekedési ütemet érti a végtelenben vett határérték értelmében.

Az elemzés megkönnyítése érdekében néhány egyszerűsítő feltételt kell bevezetni:

- felteszem, hogy az eszközök korlátlanul oszthatóak és minden eszköz tetszőleges mennyiségben érhető el az aktuális piaci áron bármely kereskedési periódusban,
- figyelmen kívül hagyom a tranzakciós költségeket a 3.5 fejezetig,
- a befektető viselkedése a vizsgált stratégiák használata során nem befolyásolja a piacot (ez a feltételezés akkor valósághű ha a befektető a teljes kereskedési volumenhez képest kis mennyiségű tőkével kereskedik).

Ezen feltételezések mellett, a kereskedési módszerek múltbeli adatokon történő vizsgálata racionális.

Matematikai modell

A dolgozatban vizsgált részvénypiaci modellt alkalmazta többek között Breiman [8], Algoet és Cover [3]. Tegyük fel, hogy a piacon d darab részvény van, és a tőkénket minden nap elején szabadon újraoszthatjuk a részvények között. A vizsgálatok során nem használom a közgazdasági modellekben gyakran alkalmazott feltevést, hogy az egyik értékpapír kockázatmentes. Jelölje $x = (x^{(1)}, \ldots x^{(d)}) \in \mathbb{R}_+^d$ a hozamvektort, amelynek j-edik komponense, $x^{(j)} \geq 0$, a j-edik részvény nyitó árainak arányát fejezi ki az adott nap és azt követő nap között. Más szóval, $x^{(j)}$, azt mondja meg, hogy az adott nap reggelén a j-edik részvénybe fektetett egységnyi tőke mennyit ér a következő nap reggelén. $x^{(j)}$ tehát egy 1 körüli szám.

A befektető minden egyes kereskedési periódus elején diverzifikálja a tőkéjét egy $b = (b^{(1)}, \ldots b^{(d)})$ portfólióvektor szerint. A b j-edik komponense, $b^{(j)}$ azt mondja meg, hogy a j-edik részvénybe tőkéjének hányad részét fekteti be. A dolgozatban felteszem, hogy b portfólióvektor nem negatív komponensekből áll, amelyeknek az összege 1, azaz, $\sum_{j=1}^{d} b^{(j)} = 1$. Az utóbbi feltétel azt jelenti, hogy a befektetési stratégia önfinanszirozó, az előbbi pedig a rövidre eladási üzleteket zárja ki. Jelölje S_0 a befektető kezdeti tőkéjét, ekkor a tőkéje egy nap múlva

$$S_1 = S_0 \sum_{j=1}^{d} b^{(j)} x^{(j)} = S_0 \left< b \, , \, x \right> ,$$

ahol $\left< \cdot \, , \, \cdot \right>$ a skalárszorzatot jelöli.

Hosszú idejű befektetések esetén a piac változását $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}_+^d$ hozamvektor sorozattal jellemezhetjük. Az x_i hozamvektor j-edik komponense $x_i^{(j)}$, amely azt mondja meg, hogy a j-edik részvénybe fektetett egységnyi tőke mennyit ér az i-edik nap végén. Minden $j \leq i$ esetén az x_j^i rövidítést használom a hozamvektorok $(x_j, \ldots, x_i)$ sorozatára és jelölje Δ_d az összes $b \in \mathbb{R}_+^d$ nemnegatív komponensű vektor szimplexét, amely komponenseinek az összege 1. Egy $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ *befektetési stratégia* függvényeknek egy sorozata

$$b_i : \left(\mathbb{R}_+^d\right)^{i-1} \to \Delta_d \ , \qquad i = 1, 2, \ldots$$

úgy, hogy $b_i(x_1^{i-1})$ jelöli a befektető által az i-edik napra a piac korábbi viselkedése alapján választott portfólióvektort. Az egyszerűség kedvéért a későbbiekben a következő jelölést használom $b(x_1^{i-1}) = b_i(x_1^{i-1})$.

Az S_0 kezdeti tőkéből kiindulva, n-edik nap végén a B befektetési stratégia tőkéje

$$S_n = S_0 \prod_{i=1}^{n} \left\langle b(x_1^{i-1})\,,\,x_i \right\rangle = S_0 e^{\sum_{i=1}^{n} \log\left\langle b(x_1^{i-1})\,,\,x_i\right\rangle} = S_0 e^{nW_n(B)},$$

ahol $W_n(B)$ az átlagos hozamszint (növekedési ráta)

$$W_n(B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log \left\langle b(x_1^{i-1})\,,\,x_i \right\rangle \ .$$

Nyilvánvalóan, $S_n = S_n(B)$ maximalizálása ekvivalens $W_n(B)$ maximalizálásával.

Szemben a klasszikus modellekkel, amelyek a piac működésének a leírására erős statisztikai feltételezéseket tesznek, a dolgozatbeli modellekben a matematikai vizsgálatok során használt egyetlen feltétel csak az hogy a napi hozamok stacionárius és ergodikus folyamatot alkotnak. E feltétel mellett a növekedési ráta határértékének egy jól definiált maximuma van, amely elérhető a teljes folyamat eloszlásának ismeretében az úgynevezett log-optimális portfólió-stratégia segítségével (lásd Algoet és Cover [3]).

Log-optimális portfóliók stacionárius piacok esetén

Tegyük fel, hogy $x_1, x_2, \ldots$ az $X_1, X_2, \ldots$ véletlen valószínűségi változók realizációja, amelyek egy vektor-értékű stacionárius és ergodikus folyamatot $\{X_n\}_{-\infty}^{\infty}$ alkotnak. A fenti feltételek mellett vizsgálta pl. Algoet és Cover [3], Algoet [1, 2] a portfólióválasztási problémát. A [3]-ben és [1, 2]-ben meghatározott fundamentális korlátok megmutatták, hogy az úgynevezett *log-optimális portfólió* a legjobb választás. Formálisan, az n-edik kereskedési periódusban jelölje $b^*(\cdot)$ a log-optimális portfóliót:

$$\mathbb{E}\left\{ \log \left\langle b^*(X_1^{n-1})\,,\,X_n \right\rangle \middle|\, X_1^{n-1} \right\} = \max_{b(\cdot)} \mathbb{E}\left\{ \log \left\langle b(X_1^{n-1})\,,\,X_n \right\rangle \middle|\, X_1^{n-1} \right\}.$$

A log-optimális stratégia az optimális választás, ahogy azt a következő tétel mutatja. Ha $S_n^* = S_n(B^*)$ jelöli a B^* log-optimális portfólió stratégiával elért tőkét n nap után, akkor minden tetszőleges B befektetési stratégia által elért $S_n = S_n(B)$ vagyonra és $\{X_n\}_{-\infty}^{\infty}$ tetszőleges stacionárius és ergodikus folyamat esetén

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{S_n}{S_n^*} \leq 0 \quad \text{1 valószínűséggel} \tag{1}$$

és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log S_n^* = W^* \quad \text{1 valószínűséggel,} \tag{2}$$

ahol

$$W^* = \mathbb{E}\left\{ \max_{b(\cdot)} \mathbb{E}\left\{ \log \left\langle b(X_{-\infty}^{-1}), X_0 \right\rangle \Big| X_{-\infty}^{-1} \right\} \right\} \tag{3}$$

a log-optimális befektetési stratégia növekedési rátája. Ha a valószínűségi változók függetlenek és azonos eloszlásúak, akkor az együttes eloszlásuk ismeretéhez elegendő egyetlen változó eloszlást megadni. Ha azonban csak annyit tudunk, hogy stacionárius a sorozat, akkor az együttes eloszlás ismeretéhez az összes változó együttes eloszlása szükséges. Mivel az optimális növekedési stratégia nyilván az együttes eloszlástól függ, ezért kell az egész problémát áttranszformálni a negatív időtengelyre.

Az első egyenlőtlenség ismét a log-optimális stratégia aszimptotikus optimalítását állítja, ahogy azt f.a.e. esetben is láttuk. Második egyenlet mutatja, hogy a log-optimalítási stratégia az optimális aszimptotikus növekedési ütemet realizálja. Az állítás harmadik része az optimális aszimptotikus növekedési ütem konkrét alakját mutatja.

A log-optimális stratégia optimalitása azt jelenti, hogy egyetlen másik stratégia sem produkál a végtelen időhorizonton nagyobb átlagos növekedési ütemet. Természetesen a végtelen időhorizonton való relatív átlag sok mindent eltüntet. A különböző stratégiák esetén csak a végtelenben való növekedési ütemük érdekes. A helyzet azonos a nagy számok törvényével, amikor egy sorozatról csak az átlagát tudjuk.

A disszertációban javasolni fogok egy olyan stratégiát, ami közel azonos teljesítményt nyújt, mint a log-optimális portfólió, ugyanakkor lehetővé teszi a log-optimális portfólióválasztás összehasonlítását a kockázatot is figyelembe vevő pénzügyi irodalomban klasszikusan elfogadott átlag-variancia optimalizással.

Univerzális konziztencia

Természetesen, a log-optimális portfólió meghatározásához, a folyamat (végtelen dimenziós) eloszlásának teljes ismerete szükséges. És ez utóbbi megállapítás nemcsak a log-optimális stratégiára igaz, hanem az általam javasolt szemi-log-optimális és Markowitz-típusú portfólió-választási stratégiákra. Ez a probléma megoldást igényel. Ezért több kutató törekedett arra, hogy a log-optimális stratégia teljesítményét lemásoló stratégiát konstruáljon az eloszlás ismerete nélkül.

Azokat a befektetési stratégiákat, amelyek aszimptotikusan elérik az optimális W^* hozamszintet az eloszlás ismerete nélkül *univerzálisan konzisztensnek* nevezem. Pontosabban, egy B befektetési stratégiát univerzálisan konzisztensenk nevezünk az $\{X_n\}_{-\infty}^{\infty}$ stacionárius és ergodikus folyamatok egy osztályán, ha minden folyamatra az osztályban

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log S_n(B) = W^* \quad \text{1 valószínűséggel.}$$

Mivel nem ismerjük a tényleges eloszlást, hiszen nem tudjuk az összes változót, csak véges sokat, az optimalizáló eljárásnak függetlennek kell lenni a tényleges eloszlástól. Vagyis olyan eljárást kell megadni, amelyet, ha minden véges időhorizonton alkalmazunk, akkor végülis, vagyis határértékben, megkapjuk az optimális növekedési ütemet.

Univerzális eljárások a log-optimális stratégiával azonos aszimptotikus növekedési rátát tesznek lehetővé az eloszlás ismerete nélkül publikált Algoet [1], Györfi and Schäfer [12], Györfi, Lugosi, Udina [14], and Györfi, Udina, Walk [15]. Az eljárás nagyon leegyszerűsítve a klasszikus, árfolyamgörbe technikai elemzés mintaillesztéses módszerének vektorfolyamra való kiterjesztése. A klasszikus módszernél az emberi szem a pillanatnyi közelmúlthoz hasonló mintázatokat keresett a távolabbi múltban, amit meg tudott jegyezni, csak egy-egy árfolyamot tudott figyelni, s nem azok együttesét. Továbbá különböző periódusokon (időablakokban) figyelünk. A technikai elemzőknek a minták hatásaira vonatkozóan tapasztalatai voltak, mondhatni nagyon durva "becsléseket" tartott a fejeben a "felteteles eloszlassal" kapcsolatban.

Ehhez a kutatási irányhoz kapcsolódóan szerzőtársaimmal én is kidolgoztam olyan eljárásokat, amelyek az általam javasolt szemi-log-optimális és a Markowitz-típusú portfólió-stratégiák teljesítményét másolják aszimptotikusan 1 valószínűséggel.

Optimalítás tranzakciós díj mellett

A disszertációban megvizsgálom a tranzakciós díj melletti optimális portfólióválasztás lehetőségét növekedésoptimális befektetés esetén. Kevés olyan cikk van, amely diszkrét időben vizsgálja a tranzakciós költség kérdését növekedésoptimális politika esetén. Cover és Iyengar[17] fogalmazta meg a lóversenypiac kérdését, ahol minden egyes periódusban csak az egyik eszköznek van pozitív kifizetőfüggvénye az összes többi eszköz nem fizet semmit. Arányos tranzakciós költséget tételeztek fel és aszimptotikus várható átlagos növekedési ütem kritériumot alkalmaztak. Általánosabb piacok esetén is vannak eredmények. Iyengar [16] növekedés-optimális befektetést vizsgált több eszköz, f.a.e. hozamok és arányos tranzakciós költség feltételezése melett. Diszkrét időben a legmesszebbre jutó tanulmány Schäfer [24] dolgozata volt, amely aszimptotikus várható átlagos növekedési ütemet, több eszközt, arányos tranzakciós költséget tételezett fel, az eszközhozamok pedig stacionárius Markov folyamatot követtek. A legtöbb a kérdéskörrel foglalkozó cikk sztochasztikus optimális kontrollt alkalmaz és a aszimptotikus várható átlagos növekedési ütem szempontjából vizsgálja a kérdést. Ezért érdekes megvizsgálni vajon van-e nemcsak várható értékben, de egy valószínűséggel optimális stratégia.

A log-optimális stratégia kritikája

Az átlagos növekedési ütem optimalizálása csak egyike a lehetséges optimalitási kritériumoknak. A modellkör közgazdasági kritikája nyilván ebből az észrevételből indul ki. A lehetséges kritikai észrevételek tudomásul vétele ellenére a megközelítés jogosultsága nem kérdőjelezhető meg. Számos közgazdász nem értett egyet az $\mathbb{E}\log S_n$, mint cél maximalizálásá-

val, és többnyire a hasznosságelmélet oldaláról indítottak támadást a log-optimális portfólió-választás ellen. Az eddigi általános feltételekkel szemben (stacionárius és ergodikus hozamok), ebben az alfejezetben jóval korlátozóbb feltételezéssel élek, mégpedig, hogy a hozamok független azonos eloszlásúak. A kritikák e feltételek mellett születtek. Az ilyen jellegű kritikákkal az a probléma, hogy figyelmen kívül hagyják azt a tényt, hogy a $\mathbb{E}\log S_n$-t nem hasznossági megfontolások miatt kell maximalizálni, hanem a kedvező aszimptotikus tulajdonságai miatt. Vegyük észre, hogy az egyes befektetők hasznosságától függetlenül pénzben kifejezve 1 valószínűséggel a legnagyobb vagyont fogja biztosítani aszimptotikusan. Ugyanakkor, ha már a logaritmus függvényt hasznossági függvénynek akarjuk tekinteni, akkor ne várjuk el, hogy a log-optimális stratégia egy logaritmustól különböző hasznossági függvény szerinti várható
hasznosságot is maximalizáljon.

2. A felhasznált módszerek

A szemi-log-optimális és a Markowitz-típusú stratégia konstruálásánál alkalmazott módszertan

A szemi-log optimális stratégia és a Markowitz típusú stratégia bevezetése során alapvetően a martingálelemélet néhány fogalmára (martingál, szubmartingál, martingál-differencia) támaszkodom. Többször használom a szubmartingál konvergencia tételt illetve az ergodelméletből ismert Breimann ergodtételt.

Módszertan univerzálisan konzisztens empírikus befektetési stratégiák konstruáláshoz

Univerzálisan konzisztens portfólió-stratégia készítéséhez a *nemparaméteres regressziófüggvény-becslés* nyújt segítséget. Mivel ez kevésébbé ismert, mint a fentebb hivatkozott alapvető, martingálokkal kapcsolatos ismeretek, ezért röviden ismertetem a szükséges fogalmakat és a portfólióelmélethez való kapcsolódódásukat. Legyen Y egy valós értékű valószínűségi változó, jelöljön továbbá a X egy véletlen vektort. A $m(x)$ regressziós függvény az Y-nak a X-re vonatkozó feltételes várható értéke

$$m(x) = \mathbb{E}(Y|X = x).$$

Az adatok egy f.a.e. sorozatot alkotnak (X, Y):

$$D_n = \{(X_1, Y_1), \dots, (X_2, Y_2)\}.$$

A regressziós függvény becslés a következő formában adható meg

$$m_n(x) = m_n(x, D_n).$$

Speciális típust alkotnak a lokális átlagoláson alapuló becslők

$$m_n(x) = \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x, X_1, \dots, X_n) Y_i,$$

ahol a W_{ni} súlyok nem negatívak és 1 az összegük (lásd.[13]). Ha ismeretlen eloszlás esetén a log-optimális portfóliót szeretnénk becsülni akkor egy olyan b portfóliót keresünk, amely a

$$\mathbb{E}[\log \left\langle b(X_1^{n-1}) \, , \, X_n \right\rangle |X_1^{n-1}].$$

kifejezést maximalizálja. Így az általános regresszó függvény becslés és a log-optimális portfólió becslés közötti megfeleltetés az alábbi.

$$X \sim X_1^k$$

$$Y \sim \log \langle b \, , \, X_{k+1} \rangle$$

$$m(x) = \mathbb{E}\{Y|X = x\} \sim m_b(x_1^k) = \mathbb{E}[\log \langle b \, , \, X_{k+1} \rangle \, |X_1^k = x_1^k].$$

A *magfüggvény alapú regressziós becslő* egy $K(x) \geq 0$ magfüggvény és egy $h > 0$ ablakméret segítségével van definiálva

$$m_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)}{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)}.$$

Az egyenletes $K(x) = I_{\{\|x\| \le 1\}}$ magfüggvény esetén,

$$m_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i I_{\{\|x - X_i\| \le h\}}}{\sum_{i=1}^n I_{\{\|x - X_i\| \le h\}}}.$$

Györfi, Lugosi, Udina [14] vezette be a *magfüggvény alapú stratégiát*, amelynek egy egyszerűbb, az egyenletes magfüggvényhez tartozó, „mozgó ablakos" verzióját ismertetem.

A stratégiához definiálom a szakértők egy végtelen osztályát $B^{(k,\ell)} = \{b^{(k,\ell)}(\cdot)\}$-t, ahol k és ℓ pozitív egészek.

Minden fix k, ℓ pozitív egészhez válasszunk egy $r_{k,\ell} > 0$ sugarat, úgy, hogy minden fix k-ra

$$\lim_{\ell \to \infty} r_{k,\ell} = 0 \ .$$

Ekkor minden $n > k+1$ esetén definiáljuk a $b^{(k,\ell)}$ szakértőt a következőképpen

$$b^{(k,\ell)}(x_1^{n-1}) = \arg\max_{b \in \Delta_d} \prod_{\left\{k<i<n : \|x_{i-k}^{i-1} - x_{n-k}^{n-1}\| \le r_{k,\ell}\right\}} \langle b\,,\, x_i \rangle \ ,$$

ha a szorzat nem üres, különben pedig válasszuk az egyenletes
$b_0 = (1/d, \ldots, 1/d)$ portfóliót.

Az előbb bemutatott empirikus stratégia alapötlete a **szakértők (portfóliók) kombinálása**, azaz ha B^K-vel jelöljük a kombinálás után kapott stratégiát

$$S_n(B^K) = \sum_{k,\ell} q_{k,\ell} S_n(B^{(k,\ell)}),$$

Az univerzális konzisztenciához azt kell megmutatni, hogy

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log S_n(B^K) \ge W^* \quad \text{m.m.}.$$

Györfi, Lugosi, Udina [14] bebizonyította, hogy B^K portfólióséma univerzálisan konzisztens az ergodikus folyamatok azon osztályára, amelyre igaz $\mathbb{E}\{|\log X^{(j)}|\} < \infty$, $j = 1, 2, \ldots, d$.

Az egy valószínűséggel tanulhatóság érdekes eredmény. Nagyon durván fogalmazva azt állítja az előbb ismertett három módszer, hogy egy nagyon fejlett "technikai elemzés" lehet hatékony. Egy ilyen megjegyzéssel szemben a szokásos ellenérv, hogy nem elég az "árfolyamgörbéket" lesni, sok más információ is szükséges a sikerhez, így a kapcsolatos cégek fundamentális elemezése, a makrogazdasági környezet, az ,hogy a gazdasági ciklus mely pontjan sejtjük magunkat, hogy áll a világgazdaság, szóval sok minden más. Az előbb ismertett módszerek során persze nem néhány tucat típusmintát figyelünk, az árfolyamokon keresztben is, s nemcsak az időtengely menten dolgozunk. Ez mindenkeppen rengeteg plusz információt hordoz, ami csökkenti a fenti szokasos fanyalgás érvényességét, nem beszélve az egy valószínűségű bizonyítás erejéről. A fenti módszerek végtelen időhorizontra vonatkoznak véges időhorizontú befektetés sikerére nem jelentenek feltétlen garanciát.

Módszertan a tranzakciós költség bevezetéséhez

A tranzakciós díj bevezetése kapcsán a módszertani alapvetés két cso- korba gyűjthető. Egyrészt ki kell terjeszteni a elemzési keretként szolgáló matematikai modellt a tranzakciós költséggel. Másrészt ki kell terjeszteni a módszertant a Markov kontroll folyamatokra.

A tranzakciós költség bevezetésénél támaszkodok a [17] cikkre. Az 1. fejezetben bevezettem az S_n, amit az n-edik napi vagyonként definiáltunk. Ebben a fejezetben S_n jelölje a bruttó vagyon nagyságát az n-edik nap végén ($n = 0, 1, 2, \cdots$), ugyanis a tranzakciós költség miatt meg kell különböztetnünk a nettó és a bruttó vagyon nagyságát. N_n jelölje az n-dik kereskedési periódus végén kialakuló nettó vagyon nagyságát. Feltehetjük, hogy a befeketető kezdeti vagyona S_0 1 dollárral egyenlő. Minden további az 1. fejezetben bevezetett jelölés érvényben marad. A fenti jelölés tudatában az n-edik kereskedési periódus kezdetén az N_{n-1} nettó vagyont a b_n portfólióvektor szerint fektessük be. Ekkor a n-edik nap végén kialakuló S_n bruttó vagyon

$$S_n = N_{n-1} \sum_{j=1}^{d} b_n^{(j)} x_n^{(j)} = N_{n-1} \langle b_n \, , \, x_n \rangle \, ,$$

ahol $\langle \cdot \, , \, \cdot \rangle$ a belső szorzatot jelöli.

Az $n+1$-edik nap elején a befektető felállítja az új portfólióját, azaz végrehajtja az új b_{n+1} vektor szerint szükséges vételeket és eladásokat. A vételekért és az eladásokért tranzakciós költséget kell fizetnie, ezért az $n+1$-edik nap kezdetén a b_{n+1} portfólióban levő vagyona kevesebb mint S_n. A fenti jelölések alapján n-dik nap végi bruttó vagyon S_n a következőképpen néz ki:

$$S_n = N_{n-1} \langle b_n , x_n \rangle .$$

A kiszabott tranzakciós költség egy eszköz vásárlása vagy eladása esetén $0 < c_p < 1$ illetve $0 < c_s < 1$, vagyis, 1 dollár értékű részvény eladása csak $1 - c_s$ dollár jövedelmet jelent, és hasonlóan 1 dollár értékű eszköz megvásárlása $1+c_p$ dollárba kerül. Felteszem, hogy ezek a költségek minden eszközre azonosak.

Számoljuk ki a b_{n+1} portfólió összeállításakor fizetendő tranzakciós költséget. Mielőtt a tőkénket átrendeznénk, a j-edik eszközben fekvő tőke $b_n^{(j)} x_n^{(j)} N_{n-1}$ dollár, míg az átrendezés után $b_{n+1}^{(j)} N_n$ mennyiségű dollárt kell képviselnie. Ha $b_n^{(j)} x_n^{(j)} N_{n-1} \geq b_{n+1}^{(j)} N_n$ akkor el kell adnunk és a fizetendő tranzakciós költség a j-edik eszközhöz kapcsolódóan

$$c_s \left(b_n^{(j)} x_n^{(j)} N_{n-1} - b_{n+1}^{(j)} N_n \right) ,$$

máskülönben vennünk kell és így a tranzakciós költség a j-edik eszközhöz kapcsolódóan

$$c_p \left(b_{n+1}^{(j)} N_n - b_n^{(j)} x_n^{(j)} N_{n-1} \right) .$$

Jelölje x^+ az x pozitív részét. Ekkor a bruttó vagyon felbomlik a nettó vagyon és a bruttó vagyon összegére a következő önfinanszírozó módon

$$N_n = S_n - \sum_{j=1}^{d} c_s \left(b_n^{(j)} x_n^{(j)} N_{n-1} - b_{n+1}^{(j)} N_n \right)^+ - \sum_{j=1}^{d} c_p \left(b_{n+1}^{(j)} N_n - b_n^{(j)} x_n^{(j)} N_{n-1} \right)^+ ,$$

vagy hasonlóan

$$S_n = N_n + c_s \sum_{j=1}^{d} \left(b_n^{(j)} x_n^{(j)} N_{n-1} - b_{n+1}^{(j)} N_n \right)^+ + c_p \sum_{j=1}^{d} \left(b_{n+1}^{(j)} N_n - b_n^{(j)} x_n^{(j)} N_{n-1} \right)^+ .$$

Markov kontroll elmélet

A diszkrét idejű portfólió-optimalizálás az általános Markov kontroll folyamatok elmélet egyik speciális esete. Egy diszkrét idejű Markov kontroll folyamat a következő öt mennyiséggel jellemezhető: $(S, A, U(s), Q, r)$. S jelöli az állapotteret, A az akciók tere, míg az egyes állapotokban megengedett akciók terét $U(s)$ jelöli ami egy részhalamaza az A-nak. Legyen a K halmaz a következőképpen definiálva $\{(s, a) : s \in S, a \in U(s)\}$. A $Q(.|s, a)$ egy átmenetvalószinűség magfüggvény S és K feltétel mellett. Továbbá $r(s, a)$ a megtérülési függvény.

A folyamat a következőképpen alakul. Jelölje S_t a t időpontban elfoglalt állapotot. S_t állapotban kiválasztjuk a számunkra optimális akciót: A_t-t. Ha $S_t = s$ és $A_t = a$, akkor a megtérülés $r(s, a)$ és a folyamat S_{t+1} állapotba mozdul a $Q(.|s, a)$ átmenetfüggvény szerint. A kontroll politika egy sorozat az A halmazon, ahol a múltbeli akciók és állapotok vannak a feltételben, azaz $\pi_n(\cdot|s_0, a_0, \dots, s_{n-1}, a_{n-1}, s_n)$ akár egy véletlenített politika is lehet.

Két megtérülési kritériumot szokás figyelembe venni. A aszimptotikus várható hozam a π kontrollpolitika esetén a következőképpen van definiálva

$$J(\pi) = \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \mathbb{E} r(S_t, A_t). \tag{4}$$

A trajektóriánkénti aszimptotikus hozamot a következőképpen kell definiálni

$$J(\pi) := \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} r(S_t, A_t). \tag{5}$$

A Markov kontroll elméletben az eredmények többsége a (4) szerinti várható átlagos hozammal kapcsolatos, csak néhány cikk tud eredményt felmutatni a (5) szerinti trajektóriánkénti hozammal.

A cél megközelíteni a maximális aszimptotikus hozamot:

$$J^* = \sup_{\pi} J(\pi),$$

ami dinamikus programozási feladathoz vezet el.

3. Az értekezés eredményei

3.1. A szemi-log-optimális stratégia

Egy új szekvenciális befektetési stratégiát vezettem be szemi-log-optimális stratégia névvel. A log-optimális stratégiával ellentétben a logaritmus célfüggvény helyett annak Taylor soros közelítését használva. A szemi-log-optimális stratégián keresztül lehetőségünk nyílik a
Markowitz-típusú stratégia (ami a hagyományos átlag-variancia optimalizálás stacionárius és ergodikus hozamfolyamatra történő kiterjesztése) és a log-optimális stratégia összevetésére. Legyen

$$h(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2,$$

amely a $\log x$ másodrendű Taylor sorfejése az $x = 1$ helyen. Az n-dik kereskedési napon a szemi-log-optimális portfólió-stratégiát a következőképpen definiálom

$$\tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{X}_1^{n-1}) = \arg\max_{\mathbf{b}(\cdot)} \mathbb{E}\left\{ h\left(\left\langle \mathbf{b}(\mathbf{X}_1^{n-1})\,,\,\mathbf{X}_n \right\rangle\right) \Big| \,\mathbf{X}_1^{n-1} \right\}.$$

és $\tilde{S}_n = S_n(\tilde{\mathbf{B}})$, ahol $\tilde{B} = \{\tilde{b}(\cdot)\}$.

Összevetettem ezen stratégia teljesítményét az optimális aszimptotikus növekedési rátát produkáló log-optimális stratégiával.
Megmutattam, hogy bármely stacionárius és ergodikus $\{\mathbf{X_n}\}_{-\infty}^{\infty}$ folyamat esetén, ahol $1 - a \le X_n^j \le 1 + c$, $0.4 > a > 0$, $c > 0$ a következő adódik

$$W^* \ge \liminf_n \frac{1}{n} \log \tilde{S}_n \ge W^* - \frac{5}{6}\mathbb{E}[\max_i \mathbb{E}(|X_0^{(i)} - 1|^3 |\mathbf{X}_{-\infty}^{-1})] \qquad \text{m.m..}$$

A részvénypiacokon ahol az eszközökkel napi szinten kereskednek korlátokat állítanak fel a napi maximális árfolyamváltozásra. Ha ezt a maximumot eléri a napi árfolyamváltozás, például az árfolyam nagyot esik napon belül, akkor az adott eszköz kereskedését felfüggesztik arra a napra. Ha feltesszük, hogy $a = c = 0.1$, az eredmény azt állítja, hogy szemi-log-optimális stratégia legfeljebb $5/6 \cdot 0.1^3 \simeq 0.083\%$-al teljesít rosszabbul mint a log-optimális stratégia.

Eljárást adtam a szemi-log-optimális portfólió megkeresése

A szemi-log-optimális portfólió megkeresése ekvivalens azzal, hogy megtaláljuk a következő kvadratikus programozási feladat megoldását: maximalizáljuk a

$$g(b, \mathbf{X}_1^{n-1}) = 2\left\langle b\,,\, \mathbf{m}(\mathbf{X}_1^{n-1})\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle b\,,\, \mathbf{C}(\mathbf{X}_1^{n-1})b\right\rangle >$$

célfüggvényt a b vektor szerint a $\sum_{i=1}^{d} b_i = 1$ megszorítás mellett, ahol $b_i \geq 0$ minden i-re, ahol

$$\mathbf{m}(\mathbf{X}_1^{n-1}) = \mathbb{E}(\mathbf{X}_n|\mathbf{X}_1^{n-1})$$

és

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}_1^{n-1}) = \{C_{i,j}\}$$
$$C_{i,j} = \mathbb{E}(X_n^{(i)}X_n^{(j)}|\mathbf{X}_1^{n-1}).$$

3.2. Dinamikus átlag-variancia optimalizálás

Markowitz portfólió-stratégiájának a célja olyan eszközallokálás végrehajtása a pénzügyi piacon, ami optimális átváltást biztosít a várható hozam és a kockázat között. A *statikus* (egyperiódusos modell) klasszikus megoldását Markowitz [20] és Merton [21] adták meg. Ez a modell a *várható hasznosság modellekhez* képest a diverzifikáció intuitív magyarázatát adta. A standard Markowitz modelltől való megkülönböztetés érdekében a bevezetett hasznossági függvényemet *Markowitz-típusú hasznossági függvénynek* neveztem.

Megadtam a Markowitz-típusú hasznossági függvény feltételes várható értékét:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left\{U_M(\left\langle b(X_1^{n-1})\,,\, X_n\right\rangle, \lambda)|X_1^{n-1}\right\} && (6)\\
&\doteq \mathbb{E}\{\left\langle b(X_1^{n-1})\,,\, X_n\right\rangle|X_1^{n-1}\} - \lambda\mathbf{Var}\left\{\left\langle b(X_1^{n-1})\,,\, X_n\right\rangle|X_1^{n-1}\right\} && (7)\\
&= \mathbb{E}\{\left\langle b(X_1^{n-1})\,,\, X_n\right\rangle|X_1^{n-1}\} - \lambda\mathbb{E}\left\{\left(\left\langle b(X_1^{n-1})\,,\, X_n\right\rangle\right)^2|X_1^{n-1}\right\} && (8)\\
&\quad +\lambda\mathbb{E}^2\left\{\left\langle b(X_1^{n-1})\,,\, X_n\right\rangle|X_1^{n-1}\right\}\,, && (9)
\end{aligned}$$

ahol X_n az n-edik nap piaci hozamvektora, $b(X_1^{n-1}) \in \Delta_d$, $\lambda \in [0, \infty)$ a befektető konstans kockázatelutasításának mértéke, továbbá

$$\begin{aligned} U_M(\left\langle b(X_1^{n-1})\,,\,X_n\right\rangle, \lambda) \ &\doteq\ \left\langle b(X_1^{n-1})\,,\,X_n\right\rangle - \lambda\left\langle b(X_1^{n-1})\,,\,X_n\right\rangle^2 \\ &\quad +\lambda\mathbb{E}^2\{\left\langle b(X_1^{n-1})\,,\,X_n\right\rangle |X_1^{n-1}\}. \end{aligned}$$

Definiáltam a Markowitz-típusú portfólió-stratégiát: $\bar{B}_\lambda^* = \{\bar{\mathbf{b}}_\lambda^*(\cdot)\}$, ahol

$$\bar{\mathbf{b}}_\lambda^*(X_1^{n-1}) = \arg\max_{b\in\Delta_d} \mathbb{E}\left\{U_M(\left\langle b(X_1^{n-1})\,,\,X_n\right\rangle, \lambda)|X_1^{n-1}\right\}.$$

Jelölje $\bar{S}_{n,\lambda}^* = S_n(\bar{B}_\lambda^*)$ a Markowitz-típusú portfólió-stratégia elért vagyonát, az n-edik kereskedési periódus után.

Megmutattam, hogy a Markowitz-típusú stratégia visszaadja a szemi-log-optimális stratégiát, ha a befektető kockázatelutasítási mutatója a λ_n paraméter dinamikusan változik időben, vagyis a Markowitz-típusú befektető a portfólió múltbeli teljesítménye alapján folyamatosan igazítja a kockázatkerülésének mértékét. A λ_n dinamikus változtatására formulát adtam.

Egy befekető számára nyilvánvalóan adódik a kérdés: vajon hogyan alakul az aszimptotikus átlagos növekedési ütem az elérhető legjobbhoz képest, ha átlag-variancia portfólió optimalizálást végzünk minden egyes kereskedési periódusban? Természetesen ilyenkor a kockázatra érzékenyebb olvasó felkaphatja a fejét és megkérdezheti vajon mi történik akkor ha a részvénypiac nem a kedvező irányban változik. Ekkor valóban egy "kockázatkezelt" stratégia elvileg jobban kell hogy teljesítsen, de én a legnagyobb "felülteljesítést" keresem a log-optimális javára.

Alsó becslést adtam a Markowitz-típusú stratégia aszimptotikus átlagos növekedési ütemére az optimálisan elérhető aszimptotikus átlagos növekedési ütemhez képest. Bármely stacionárius és ergodikus $\{X_n\}_{-\infty}^{\infty}$ folyamatra, amelyre $\leq X_n^{(j)} \leq \frac{1}{a}$ $j = 1, \ldots, d$-re, ahol $0 < a < 1$ fennáll, és minden $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$-ra

$$
\begin{aligned}
W^* &\geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \bar{S}^*_{n,\lambda} \\
&\geq W^* - A_{\lambda,a}\mathbb{E}\left\{\max_m \mathbb{E}\left\{X_0^{(m)} - 1 - \log(X_0^{(m)})\middle| X_{-\infty}^{-1}\right\}\right\} \\
&\quad -B_{\lambda,a}\mathbb{E}\left\{\max_m \mathbb{E}\left\{(X_0^{(m)}-1)^2 \mid X_{-\infty}^{-1}\right\} - \left(\min_m \mathbb{E}\left\{|X_0^{(m)}-1|\middle| X_{-\infty}^{-1}\right\}\right)^2\right\} \\
&\quad -C_{\lambda,a}\mathbb{E}\left\{\max_m \mathbb{E}\{\left|X_0^{(m)}-1\right|^3 \middle| X_{-\infty}^{-1}\}\right\} \qquad m.m.
\end{aligned}
$$

ahol $\bar{S}^*_{n,\lambda}$ a Markowitz-típusú portfólió-stratégia n-dik napi vagyona λ kockázatkerülési paraméter mellett továbbá

$$
A_{\lambda,a} = \frac{2\lambda a^{-1} + (1-4\lambda)(a^{-1}-1)\mathbb{I}_{\{0\leq\lambda\leq\frac{1}{4}\}}}{1-2\lambda}, \qquad B_{\lambda,a} = \frac{2\lambda - \frac{1}{2}}{1-2\lambda}\mathbb{I}_{\{\frac{1}{4}<\lambda<\frac{1}{2}\}}
$$

és

$$
C_{\lambda,a} = \frac{a^{-3}+1}{3(1-2\lambda)} .
$$

Fentebb $\lambda \in [0, \frac{1}{2})$ paraméterértékek mellett adtam meg állítást. Egy befektető tipikus kockázatelutasítási paramétere $\lambda = 0.005G$, ahol G értéke 2 és 4 közé esik (lásd pl. [6]). Így a tétel teljes mértékben lefedi a praktikus szempontból érdekes kockázatelutasítási paraméter értékeket.

A "hibatagok" nagyságrendjének elemzéséhez kisérleteket végezhetünk. A λ értékének optimális megválasztásával a W^* és a $\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \bar{S}^*_{n,\lambda}$ közötti különbség az empírikus W^* értékének 1%-a alá csökkenthető.

3.3. Explicit kockázat kontroll

Az eredeti log-optimális portfólióstratégia esetén előfordulhat, hogy az összeállított portfólió értéke az index zuhanása miatt rohamosan csökkenne egy bizonyos százalékkal, amikor is a kötelező kockázatkezelési szabályok miatt a kezelő átrendezné a portfólióját, azaz nemcsak a várható hozam, de annak a kockázata (varianciája) figyelembe vétele is fontos. Markowitz-típusú startégia és a log-optimális stratégia kapcsolatát már vizsgáltuk. Ugyanakkor nem lehet elégszer hangsúlyozni a kockázatkezelés fontosságát.

Míg a Markowitz-típusú portfólió-stratégia esetén lehetővé tettük, hogy a portfólióstratégia a teljes szimplexen optimalizáljon addig itt konkrét véletlen megszorítást alkalmazok a választható portfóliók halmazára.

Bevezettem a kockázat megszorítás melletti log-optimális portfólióvizsgálat egy lehetséges elemzési keretét. Kockázati megfontolások miatt megszorítom a lehetséges portfólióvektorok halmazát a

$$\widehat{\Delta} \subset \Delta_d$$

halmazra. Legyen a kockázat-megszorítás melletti log-optimális portfólió az n-dik kereskedési napon $b_n^{\widehat{\Delta}*}(\cdot)$ a következőképp definiálva

$$b_n^{\widehat{\Delta}*}(X_1^{n-1}) = \arg\max_{b(\cdot)\in\widehat{\Delta}} \mathbb{E}\left\{ \log \left\langle b(X_1^{n-1}), X_n \right\rangle \Big| X_1^{n-1} \right\}.$$

Állításokat mondtam ki és bizoníyítottam be a kockázat-megszorítás melletti log-optimális portfólió aszimptotikus tulajdonságairól. Megadtam a kockázat megszorítás melletti log-optimális portfólió Kuhn-Tucker jellemzését.

3.4. Empírikus portfólió-választás

A szemi-log-optimális és a Markowitz-típusú portfólió kiszámításához ismerni kell a hozamfolyamat eloszlását. Mivel ez nem áll rendelkezésre két empírikus stratégiát javasoltam a magfüggvény alapú szemi-log-optimális stratégiát és a magfüggvény alapú Markowitz típusú startégiát. Az eljárás a Györfi, Lugosi, Udina [14] által bevezetett magfüggvény alapú eljárás közelítése úgy, hogy a hozamvektor első és második momentumát használjuk csak.

Magfüggvény alapú szemi-log-optimális stratégia

Definiáljuk a szakértők végtelen vektorát a következőképpen: $\tilde{H}^{(k,\ell)} = \{\tilde{h}^{(k,\ell)}(\cdot)\}$, ahol k, ℓ pozitív egészek. Rögzített pozítiv egész k esetén válaszszuk meg az $r_{k,\ell} > 0$ sugarat a következőképpen:

$$\lim_{\ell\to\infty} r_{k,\ell} = 0.$$

Ekkor bármely $n > k+1$ esetén definiáljuk a $\tilde{h}^{(k,\ell)}$ szakértőket a következőképpen. Jelölje J_n az egybeeséseket:

$$J_n = \left\{ k < i < n : \|x_{i-k}^{i-1} - x_{n-k}^{n-1}\| \leq r_{k,\ell} \right\}.$$

Legyen

$$\tilde{h}^{(k,\ell)}(x_1^{n-1}) = \arg\max_{b \in \Delta_d} \sum_{\{i \in J_n\}} h(\langle b\,,\, x_i \rangle)\ , \tag{10}$$

ha az összegzés nem üres, egyébként $b_0 = (1/d, \ldots, 1/d)$.

Kombináljuk a szakértőket a következőképpen: legyen $\{q_{k,\ell}\}$ a (k, ℓ) pozitív egészek feletti valószínűségeloszlás, amelyre bármely k, ℓ esetén teljesül $q_{k,\ell} > 0$. A $\tilde{B}^K$ stratégiát a következőképpen kaphatjuk meg:

$$\tilde{b}(\mathbf{x}_1^{n-1}) \doteq \frac{\sum_{k,\ell} q_{k,\ell} S_{n-1}(\tilde{H}^{(k,\ell)}) \tilde{h}^{(k,\ell)}(\mathbf{x}_1^{n-1})}{\sum_{k,\ell} q_{k,\ell} S_{n-1}(\tilde{H}^{(k,\ell)})}.$$

Jelölje $S_n(\tilde{H}^{(k,\ell)})$ az elemi $\tilde{H}^{(k,\ell)}$ szakértő n-dik napra felhalmazott tőkéjét $S_0 = 1$ kezdeti tőkével

$$\tilde{S}_n^K = S_n(\tilde{B}^K) = \sum_{k,\ell} q_{k,\ell} S_n(\tilde{H}^{(k,\ell)})\ . \tag{11}$$

Megmutattam, hogy a $\tilde{h}^{(k,\ell)}(x_1^{n-1})$ kiszámításának futásideje sokkal kisebb volt (ha $|J|_n$ elég nagy) mint a $h^{(k,\ell)}(x_1^{n-1})$ számítási ideje.

Megmutattam, hogy ha a hozamfolyamat stacionárius és ergodikus és $1 - a \leq X_n^j \leq 1 + c$, $0.4 > a > 0$, $c > 0$, minden $j = 1, 2, \ldots d$-re, akkor $\tilde{S}_n^K = S_n(\tilde{B}^K)$ esetén

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \tilde{S}_n^K \geq W^* - \frac{5}{6} \mathbb{E}\{\max_j |X^{(j)} - 1|^3\} \quad \text{m.m.}$$

Az állítás azt mutatja, hogy a magfüggvény alapú szemi-log-optimális stratégia közel olyan veszteséget sznved el a log-optimális stratégiával szemben, mint amit a szemi-log-optimális stratégia elszenvedett.

Magfüggvény-alapú Markowitz-típusú stratégia

Olyan empírikus stratégiát konstruáltam, amelyre a Markowitz-típusú stratégia aszimptotikus növekedési üteménél alkalmazott alsó becsléséhez képest közel azonos aszimptotikus alsó becslés adható. Ez egy empírikus stratégia azaz kizárólag az elmúlt kereskedési napok alapján határozza meg a portfóliót, nem épít az eloszlás ismeretére mint az eredeti Markowitz-típusú stratégia. Bevezetve a szakértők következő végtelen sorozatát $\bar{\mathbf{H}}_\lambda^{(k,\ell)} = \{\bar{\mathbf{h}}_\lambda^{(k,\ell)}(\cdot)\}$, ahol k, ℓ pozitív egészek. Legyen

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{h}}_\lambda^{(k,\ell)}(x_1^{n-1}) \quad &= \quad \arg\max_{b \in \Delta_d} \left((1-2\lambda) \sum_{\{i \in J_n\}} (\langle b\,,\, x_i \rangle - 1) - \lambda \sum_{\{i \in J_n\}} (\langle b\,,\, x_i \rangle - 1)^2 \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\lambda}{|J_n|} \left(\sum_{\{i \in J_n\}} \langle b\,,\, x_i \rangle \right)^2 \right) \qquad (12)
\end{aligned}$$

ha a szumma nem üres, egyébként $b_0 = (1/d, \ldots, 1/d)$. A szakértőket a $\{q_{k,\ell}\}$ valószínűség eloszlás szerint kevertem, ahol bármely k, ℓ, $q_{k,\ell} > 0$. Az $\bar{\mathbf{B}}_\lambda$ stratégiát a következőképpen definiáltam

$$\bar{\mathbf{b}}_\lambda(\mathbf{x}_1^{n-1}) \doteq \frac{\sum_{k,\ell} q_{k,\ell} S_{n-1}(\bar{\mathbf{H}}_\lambda^{(k,\ell)}) \bar{\mathbf{h}}_\lambda^{(k,\ell)}(\mathbf{x}_1^{n-1})}{\sum_{k,\ell} q_{k,\ell} S_{n-1}(\bar{\mathbf{H}}_\lambda^{(k,\ell)})}.$$

$$\bar{S}_{n,\lambda}(\bar{\mathbf{B}}_\lambda) = \sum_{k,\ell} q_{k,\ell} S_n(\bar{\mathbf{H}}_\lambda^{(k,\ell)}) \,. \qquad (13)$$

A $\bar{\mathbf{B}}_\lambda$ magfüggvény-alapú Markowitz-típusú stratégia a $\{\bar{\mathbf{H}}_\lambda^{(k,\ell)}\}$ szakértők kombinációja a (13) kombináció szerint.

Bármely $\{\mathbf{X}_n\}_{-\infty}^{\infty}$ stacionárius és ergodikus folyamatra, amelyre $\leq X_n^{(j)} \leq \frac{1}{a}$ $j = 1, \ldots, d$-re, ahol $0 < a < 1$, bármely $\bar{S}_{n,\lambda} = \bar{S}_{n,\lambda}(\bar{B}_\lambda)$ és minden $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$-ra fennáll azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \bar{S}_{n,\lambda} \\
&\quad \geq \quad W^* - A_{\lambda,a} \mathbb{E} \left\{ \max_m \mathbb{E} \left\{ X_0^{(m)} - 1 - \log(X_0^{(m)}) \middle| X_{-\infty}^{-1} \right\} \right\} \\
&\qquad -B_{\lambda,a} \mathbb{E}\{ \max_m \mathbb{E} \left\{ (X_0^{(m)} - 1)^2 \mid X_{-\infty}^{-1} \right\} - \left(\min_m \mathbb{E} \left\{ |X_0^{(m)} - 1| \middle| X_{-\infty}^{-1} \right\} \right)^2 \} \\
&\qquad -C_{\lambda,a} \mathbb{E} \left\{ \max_m \mathbb{E}\{ \left| X_0^{(m)} - 1 \right|^3 \middle| X_{-\infty}^{-1} \} \right\} \qquad m.m.
\end{aligned}$$

ahol

$$A_{\lambda,a} = \frac{2\lambda a^{-1} + (1-4\lambda)(a^{-1}-1)\mathbb{I}_{\{0\le\lambda\le\frac{1}{4}\}}}{1-2\lambda}, \qquad B_{\lambda,a} = \frac{2\lambda - \frac{1}{2}}{1-2\lambda}\mathbb{I}_{\{\frac{1}{4}<\lambda<\frac{1}{2}\}}$$

és

$$C_{\lambda,a} = \frac{a^{-3}+1}{3(1-2\lambda)} .$$

3.5. Optimális portfólió-választás tranzakciós költség esetén

Két optimális portfólió-választási szabályt vezettem be. Jelölje $0 < \delta < 1$ a diszkontfaktort. Tekintsük a következő diszkontált Bellmann egyenletet:

$$F_\delta(b,x) = \max_{b'} \{v(b,b',x) + (1-\delta)\mathbb{E}\{F_\delta(b',X_2) \mid X_1 = x\}\} . \tag{14}$$

1 Stratégia Első portfólió-választási stratégiám a következő:

$$b_1^* = \{1/d, \dots, 1/d\}$$

és

$$b_{i+1}^* = \arg\max_{b'} \left\{v(b_i^*, b', X_i) + (1-\delta_i)\mathbb{E}\{F_{\delta_i}(b', X_{i+1})|X_i\}\right\}, \tag{15}$$

ahol $1 \le i$, és a $0 < \delta_i < 1$ diszkontfaktorra teljesül, hogy $\delta_i \downarrow 0$.

Megmutattam, hogy az 1 Stratégia trajektóriánként átlagos növekedési ütem szempontjából optimális:

Ha az $\{X_i\}$ homogén elsőrendű Markov folyamat és van olyan $0 < a_1 < 1 < a_2 < \infty$, hogy $a_1 \le X^{(j)} \le a_2$ minden $j = 1, \dots, d$, akkor a $\delta_i \downarrow 0$ megválasztható úgy, hogy

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\log S_n^* - \frac{1}{n}\log S_n\right) \ge 0$$

m.m. teljesüljön. Az S_n egy tetszőleges másik b_i stratégia által elért n-edik napi vagyon.

Rekurzió segítségével definiáltam a 2.stratégiámat.

2. Stratégia. Bármely $1 \leq k$ egész esetén, legyen

$$b_1^{(k)} = \{1/d, \ldots, 1/d\}$$

és

$$b_{i+1}^{(k)} = \arg\max_{b'} \left\{ v(b_i^{(k)}, b', X_i) + (1-\delta_k)\mathbb{E}\{F_{\delta_k}(b', X_{i+1})|X_i\} \right\}, \tag{16}$$

bármely $1 \leq i$-re. A $B^{(k)} = \{b_i^{(k)}\}$ portfóliót a k szakértő portfóliójának nevezzük $S_n(B^{(k)})$ tőkével. Válasszunk egy tetszőleges $q_k > 0$ valószínűség-eloszlást és definiáljuk a kombinált portfoliót a következőképpen

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{\infty} q_k S_n(B^{(k)}).$$

Megmutattam, hogy ha az $\{X_i\}$ homogén elsőrendű Markov folyamat és van olyan $0 < a_1 < 1 < a_2 < \infty$, hogy $a_1 \leq X^{(j)} \leq a_2$ minden $j = 1, \ldots, d$ és a diszkontfaktor a $\delta_i \downarrow 0$ amint $i \to \infty$ akkor

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \log S_n^* - \frac{1}{n} \log \tilde{S}_n \right) = 0$$

m.m.

Hivatkozások

[1] P. Algoet. Universal schemes for prediction, gambling, and portfolio selection. *Annals of Probability*, 20:901–941, 1992.

[2] P. Algoet. The strong law of large numbers for sequential decisions under uncertainty. *IEEE Transactions on Information Theory*, 40: 609–634, 1994.

[3] P. Algoet, T. Cover. Asymptotic optimality asymptotic equipartition properties of log-optimum investments. *Annals of Probability*, 16:876–898, 1988.

[4] A. Arapostathis, V. S. Borkar, E. Fernandez-Gaucherand, M. K. Ghosh and S. I. Marcus. Discrete-time Controlled Markov Processes with Average Cost Criterion: a Survey." *SIAM J. Control Optimzation*, 31:282-344, 1993

[5] D. P. Bertsekas, and S. E. Shreve. *Stochastic Optimal Control: the Discrete Time Case.* New York: Academic Press, 1978.

[6] Z. Bodie, A. Kane, and A. J. Marcus. Investments. *McGrawHill-Irwin*, 2005.

[7] L. Breiman. The individual ergodic theorem of information theory. *Annals of Mathematical Statistics*, 28:809–811, 1957. Correction. *Annals of Mathematical Statistics*, 31:809–810, 1960.

[8] L. Breiman. Optimal gambling systems for favorable games. *Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob.*, 1:65–78, 1961.

[9] Y. S. Chow. Local convergence of martingales and the law of large numbers. *Annals of Mathematical Statistics*, 36:552–558, 1965.

[10] T. Cover and J. Thomas. Elements of information theory. *John Wiley and Sons*, 1991.

[11] M. H. A. Davis and A. R. Norman. Portfolio Selection with Transaction Costs." *Mathematics of Operations Research*, 15:676–713, 1990.

[12] L. Györfi, D. Schäfer. Nonparametric prediction. *Advances in Learning Theory: Methods, Models and Applications, J. A. K. Suykens, G. Horváth, S. Basu, C. Micchelli, J. Vandevalle (Eds.), IOS Press, NATO Science Series*, 339–354, 2003.

[13] L. Györfi, M. Kohler, A. Krzyżak and H Walk. A distribution-free theory of nonparametric regression. *Springer, New York*, 2002.

[14] L. Györfi, G. Lugosi, and F. Udina. Nonparametric kernel-based sequential investment strategies. *Mathematical Finance*, 16:337–357, 2006.

[15] L. Györfi, F. Udina, H. Walk. Nonparametric nearest neighbor based empirical portfolio selection strategies. *Statistics and Decisions(in print)*, 2008.

[16] G. Iyengar. Discrete time growth optimal investment with costs. *Working Paper*, http://www.columbia.edu/ gi10/Papers/stochastic.pdf, 2002.

[17] G. Iyengar and T. Cover. Growths Optimal Investment in Horse Race Markets with Costs. *IEEE Transactions on Information Theory*, 46:2675–2683, 2000.

[18] J. B. Lasserre. Sample-path Average Optimality for Markov Control Processes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44:1966–1971, 1999.

[19] H. R. Markowitz. Investment for the long run: new evidence for and old rule. *The Journal of Finance* 31(5):1273–1286, 1976.

[20] H. R. Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance* 7(1):77–89, 1952.

[21] R. Merton. An intertemporal capital asset pricing model. *Econometrica*, 41(5):867–887, 1973.

[22] R. C. Merton and P. A. Samuelson. Fallacy of the log-normal approximation to optimal decision making over many periods. *Journal of Financial Economics*, 1(1):67–94, 1974.

[23] P. A. Samuleson. Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming. *The Review of Economics and Statistics* 51(3):239–246, 1969.

[24] D. Schafer. Nonparametric estimation for financial investment under log-utility. *PhD Dissertation, Mathematical Institute, University Stuttgart*, 2002.

[25] W. F. Stout. Almost sure convergence. *Academic Press, New York* 1974.

[26] M. Taksar, M. Klass and, D. Assaf. A Diffusion Model for Optimal Portfolio Selection in the Presence of Brokerage Fees." *Mathematics of Operations Research*, 13:277–294, 1988.

[27] O. Vega-Amaya. Sample-path Average Optimality of Markov Control Processes with Strictly Unbounded Costs." *Applicationes Mathematicae*, 26:363–381, 1999.

A témakörrel kapcsolatos saját és társszerzős publikációk jegyzéke

[28] L. Györfi, A. Urbán, and I. Vajda. Kernel-based semi-log-optimal empirical portfolio selection strategies. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 10(5):505–516, 2007.

[29] Gy. Ottucsák, I. Vajda. An asymptotic analysis of the mean-variance portfolio selection. *Statistics and Decisions*, 25:63–88, 2007.

[30] L. Györfi, I. Vajda. Growth Optimal Portfolio Selection Strategies with Transaction Costs, *Springer Lecture Notes in Artificial Intelligence* 5254:108–123, 2008.

[31] I. Vajda. Analysis of semi-log-optimal investment strategies. *Proc. Prague Stochastics*, 719–727, 2006.

[32] Gy. Ottucsák, I. Vajda. Empirikus portfólióstratégiák. *Közgazdasági Szemle*, 53:624–640, 2006.