NÖVEKEDÉSOPTIMÁLIS PORTFOLIÓ ELMÉLET

írta

Vajda István

Ph.D. disszertáció

Témavezető:
Dr. Györfi László

Budapesti Corvinus Egyetem
2009 május

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A dolgozat alapproblémája a végtelen időhorizonton való optimális befektetési politika vizsgálata. A kérdésen számos neves közgazdász dolgozott, még Merton és Samuelson figyelmét is felkeltették a kutatások.

A disszertációban szekvenciális befektetési (portfólióválasztási) stratégiákat mutatok be. Szekvenciális stratégia alatt olyan kauzális stratégiát értek, amely a piacról rendelkezésre álló múltbeli adatokat használva, minden kereskedési periódus (nap) elején megváltoztathatja a portfóliót, azaz a tőkét újraoszthatja a rendelkezésre álló értékpapírok között. A végtelen időhorizonton való optimális befektetés problémájának vizsgálata során először azt kell tisztázni, hogy mit is értünk egyáltalán az optimális szón. A dolgozat címében jelzett kutatási irány az optimalitás kritériumán a maximális átlagos növekedési ütemet érti a végtelenben vett határérték értelmében.

Szemben a klasszikus modellekkel, amelyek a piac működésének a leírására erős statisztikai feltételezéseket tesznek, modellekben a matematikai vizsgálatok során használt egyetlen feltétel, hogy a napi hozamok stacionárius és ergodikus folyamatot alkotnak. E feltétel mellett a növekedési ráta határértékének egy jól definiált maximuma van, amely elérhető a teljes folyamat eloszlásának ismeretében az úgynevezett log-optimális portfólióstratégia segítségével (lásd Algoet és Cover [4]). A log-optimális stratégia optimalítása azt jelenti, hogy egyetlen másik stratégia sem produkál a végtelen időhorizonton nagyobb átlagos növekedési ütemet.

A disszertáció főbb megválaszolandó kérdései a következők:

- Hogyan lehet approximálni a log-optimális portfóliót egy kisebb számítási komplexitású algoritmus segítségével?

- Mi a kapcsolat a log-optimális és a Markowitz portfólió között?
- Hogyan lehet természetesen bevezetni kockázat kontrollt a log-optimális elméletbe? Melyek a log-optimális portfóliónak azok a tulajdonságai amelyek továbbra is érvényben maradnak?
- Hogyan konstruálható meg a log-optimális portfólió empirikus változata?
- Mi az optimális portfólió arányos tranzakciós költség esetén?

Bevezetek egy szekvenciális befektetési stratégiát a szemi-log-optimális stratégiát, amely nagyon közel teljesít a log-optimális stratégiához miközben a portfólióvektor egyszerűbb és standardabb számolást teszi lehetővé. Ennek a stratégiának a teljesítményét összevetem a log-optimális stratégia aszimptotikus növekedési ütemével. A szemi-log-optimális stratégiát használva lehetővé válik, hogy összevessem a Markowitz-típusú stratégiát (ami stacionárius és ergodikus hozamokra történő természetes kiterjesztése a hagyományos átlag variancia stratégiának) a log-optimális stratégiával. Célom az, hogy megmutassam az aszimptotikus hozamban jelentkező veszteség nagyságát, ha a kockázattudatos Markowitz-típusú startégiát választjuk az aszimptotikusan legjobb log-optimális stratégiával szemben, amelynek nincs explicit kockázat kontrollja.

Megvizsgálom a kockázatmenedzsment kérdését, ami hiányzik a hagyományos log-optimális keretből. A kockázatkezelést a lehetséges portfóliók halmazának korlátozásával érem el. A részvényárfolyamokat generáló folyamatra tett általános feltételezések mellett megvizsgálom a kockázat kontroll melletti log-optimális portfólió növekedési rátájának aszimptotikus viselkedését. Megadom a kockázat kontroll melletti log-optimális portfólió Kuhn-Tucker jellemzését, ami a hagyományos log-optimális portfólió Kuhn-Tucker jellemzésére egyszerűsödik a kockázatmentes esetben.

Léteznek olyan *univerzális* eljárások, amelyek log-optimális stratégiával azonos aszimptotikus növekedési rátát tesznek lehetővé az eloszlás ismerete nélkül lásd. Algoet [2], Györfi and Schäfer [35], Györfi, Lugosi, Udina [37], and Györfi, Udina, Walk [39]. Mivel nem ismerjük a tényleges eloszlást az optimalizáló eljárásnak függetlennek kell lenni a tényleges eloszlástól. Vagyis olyan eljárást kell megadni, amelyet ha minden véges időhorizonton alkalmazunk, akkor végülis, vagyis határértékben, megkapjuk az optimális növekedési ütemet, amely azonban a teljes végtelen időhorizonttól függ. Az eljárás nagyon leegyszerűsítve a klasszikus mintaillesztéses módszernek vektorfolyamra való kiterjesztése. A klasszikus módszernél az emberi szem a pillanatnyi közelmúlthoz hasonló mintázatokat keresett a távolabbi múltban, amit meg tudott jegyezni, s csak egy-egy árfolyamot tudott figyelni, s nem azok együttesét. Továbbá különböző periódusokon (időablakokban) figyelünk. Hasonló elven fognak müködni a disszertációban bevezetésre kerülő magfüggvény alapú szemi-log-optimális stratégia, illetve a mag- függvény alapú Markowitz-típusú stratégia.

A szimulációs eredmények alátámasztják, hogy a javasolt módszerek képesek megtalálni és hatékonyan kiaknázni, a részvényárak közötti rejtett és bonyolult összefüggéseket.

Ezután feladok egy egyszerüsítő feltételezést: tranzakciós költséget vezetek be. Végtelen időhorizontú növekedésoptimális befektetést tekintek tranzakciós költség mellett. Feltételezve, hogy a részvényárfolyamok homogén Markov folya- matot követnek két rekurzív befektetési stratégiát mutatok, amelyeknek a trajektóriákon szá- mított növekedési rátája limes inferior értelemben megegyezik vagy nagyobb, mint bármely más befektetési stratégia növekedési rátája 1 valószínű- séggel.

1.1. Matematikai modell

A dolgozatban vizsgált részvénypiaci modellt alkalmazta többek között Breiman [15], Algoet és Cover [4], Cover [19]. Tegyük fel, hogy a piacon d darab részvény van, és a tőkénket minden nap elején szabadon újraoszthatjuk a részvények között. A vizsgálatok során nem használom a közgazdasági modellekben gyakran alkalmazott feltevést, hogy az egyik értékpapír kockázatmentes. Jelölje $x = (x^{(1)}, \dots x^{(d)}) \in \mathbb{R}_+^d$ a hozamvektort, amelynek j-edik komponense, $x^{(j)} \geq 0$, a j-edik részvény nyitó árainak arányát fejezi ki az adott nap és azt követő nap között. Más szóval, $x^{(j)}$, azt mondja meg, hogy az adott nap reggelén a j-edik részvénybe fektetett egységnyi tőke mennyit ér a következő nap reggelén. $x^{(j)}$ tehát egy 1 körüli szám.

A befektető minden egyes kereskedési periódus elején diverzifikálja a tőkéjét egy $b = (b^{(1)}, \dots b^{(d)})$ portfólióvektor szerint. A b j-edik komponense

$b^{(j)}$, azt mondja meg, hogy a j-edik részvénybe tőkéjének hányad részét fekteti be. A dolgozatban felteszem, hogy b portfólióvektor nem negatív komponensekből áll, amelyeknek az összege 1, azaz, $\sum_{j=1}^{d} b^{(j)} = 1$. Az utóbbi feltétel azt jelenti, hogy a befektetési stratégia önfinanszirozó, az előbbi pedig a rövidre eladási üzleteket zárja ki. Jelölje S_0 a befektető kezdeti tőkéjét, ekkor a tőkéje egy nap múlva

$$S_1 = S_0 \sum_{j=1}^{d} b^{(j)} x^{(j)} = S_0 \langle b \, , \, x \rangle \, ,$$

ahol $\langle \cdot \, , \, \cdot \rangle$ a skalárszorzatot jelöli.

Hosszú idejű befektetések esetén a piac változását $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}_+^d$ hozamvektor sorozattal jellemezhetjük. Az x_i hozamvektor j-edik komponense $x_i^{(j)}$, amely azt mondja meg, hogy a j-edik részvénybe fektetett egységnyi tőke mennyit ér az i-edik nap végén. Minden $j \le i$ esetén az x_j^i rövidítést használom a hozamvektorok $(x_j, \ldots, x_i)$ sorozatára és jelölje Δ_d az összes $b \in \mathbb{R}_+^d$ nemnegatív komponensű vektor szimplexét, amely komponenseinek az összege 1. Egy $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ *befektetési stratégia* függvényeknek egy sorozata

$$b_i : \left(\mathbb{R}_+^d\right)^{i-1} \to \Delta_d \, , \qquad i = 1, 2, \ldots$$

úgy, hogy $b_i(x_1^{i-1})$ jelöli a befektető által az i-edik napra a piac korábbi viselkedése alapján választott portfólióvektort. Az egyszerűség kedvéért a későbbiekben a következő jelölést használom $b(x_1^{i-1}) = b_i(x_1^{i-1})$.

Az S_0 kezdeti tőkéből kiindulva, n-edik nap végén a B befektetési stratégia tőkéje

$$S_n = S_0 \prod_{i=1}^{n} \left\langle b(x_1^{i-1}) \, , \, x_i \right\rangle = S_0 e^{\sum_{i=1}^{n} \log \left\langle b(x_1^{i-1}) \, , \, x_i \right\rangle} = S_0 e^{n W_n(B)},$$

ahol $W_n(B)$ az átlagos hozamszint (növekedési ráta)

$$W_n(B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log \left\langle b(x_1^{i-1}) \, , \, x_i \right\rangle \, .$$

Nyilvánvalóan, $S_n = S_n(B)$ maximalizálása ekvivalens $W_n(B)$ maximalizálásával. Természetesen a végtelen időhorizonton való relatív átlag sok mindent eltüntet. A különböző stratégiák esetén csak a végtelenben való növekedési ütemük érdekes. A helyzet azonos a nagy számok törvényével, amikor egy sorozatról csak az átlagát tudjuk. Elvben teljesen érdektelen, hogy a trajektória kezdeti szakaszán mi fog történni, a lényeg, hogy a végtelenben minden jól alakuljon.

Az elemzés megkönnyítése érdekében néhány egyszerűsítő feltételt kell bevezetni:

- felteszem, hogy az eszközök korlátlanul oszthatóak és minden eszköz tetszőleges mennyiségben érhető el az aktuális piaci áron bármely kereskedési periódusban,
- figyelmen kívül hagyom a tranzakciós kölstégeket a 4 fejezetig,
- a befektető viselkedése a vizsgált stratégiák használata során nem befolyásolja a piacot (ez a feltételezés akkor valósághű, ha a befektető a teljes kereskedési volumenhez képest kis mennyiségű tőkével kereskedik).

Ez utóbbi feltételben tágabb értelemben azt is ki kellene kötni, hogy nemcsak hogy az általam kereskedett mennyiség kevés az adott részvényekben megfogalmazott piaci forgalomhoz képest, hanem azt is, hogy mások nem használják az algoritmust. Ugyanis, ha mások is használják az algoritmust, s ez azt jelenti, hogy mondjuk napi zárás előtt, amikor a záróár már nagyjából beállt lefuttatják az algoritmust, s felveszik az új poziciókat a portfólió elemeiben. Mit jelent ez? Végső soron azt, hogy már ma elkezdik venni azt a részvényt, aminek árát holnapra felfelé mozdulónak sejtjük, azaz holnap az már semmit sem mozdul, eliminálták a kis profitunkat.
Ezen feltételezések mellett, a kereskedési módszerek múltbeli adatokon történő vizsgálata racionális.

Konstans újrasúlyozott portfólió

A konstans újrasúlyozott portfólió stratégia egy olyan B stratégia amely ugyanolyan arányban fektet be minden egyes periódusban. A konstans újrasúlyozott portfólió a $\mathbb{E}(\log(S_n))$ kifejezést maximalizálja.

A következő egyszerű példa demonstrálja a konstans újrasúlyozott portfólió erejét [44].

Legyen két részvény a piacon, az egyik kockázatmentes értékpapír, amelynek nincs hozama, illetve a másik egy nagy volatilitású részvény. Minden páros napon a részvény értéke megduplázódik és minden páratlanadik napon a részvény értéke megfeleződik. Az első értékpapír hozamvektora $1, 1, 1, \ldots$ a másodiké $\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \ldots$. Egyenként egyik értékpapír sem tudna 2-es faktornál nagyobb hozamot realizálni, de ha pénzünket egyenlően helyezzük el a két értékpapírban, azaz az egyenletes $b = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ portfóliót használjuk, akkor exponenciális növekedést tudunk elérni. A páratlan napokon a va- gyon csökkenése $\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$, míg páros napokon a növekedés $\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 = \frac{3}{2}$, azaz $2n$ nap után a hozam $\left(\frac{9}{8}\right)^n$.

Finkelstein and Whitley [29] megmutatta, hogy ha S_n jelöli a vagyont, amelyet a $\{b_1, \ldots, b_n\}$ stratégiával érünk el n egymást követő befektetési periódus alatt, és S_n^* jelölést alkalmazva a b^* konstans újrasúlyozott portfólióval elért vagyonra, akkor: $\frac{S_n}{S_n^*}$ egy szupermartingál, amelyre teljesül, hogy $\mathbb{E}(\frac{S_n}{S_n^*}) \leq 1$. Így $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{S_n^*}$ m.m. létezik és $\mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{S_n^*}) \leq 1$. Továbbá, ha b portfólió csak azon X_k-ra helyez súlyt, ahol $b^{*(k)} > 0$, és ha $\sum_{k=1}^d b_j^{(k)} = 1$ minden j-re, akkor $\frac{S_n}{S_n^*}$ egy martingál, amelyre $\mathbb{E}(\frac{S_n}{S_n^*}) = 1$.

Log-optimális portfólió f.a.e. piacok esetén

Tegyük fel, hogy a $x_1, x_2, \ldots$ a véletlen $X_1, X_2, \ldots$ vektorok realizácioi amelyek f.a.e $F(\mathbf{x})$ szerint. Legyen

$$S_n = \prod_{i=1}^{n} \langle \mathbf{b} \, , \, \mathbf{X}_i \rangle$$

továbbá

$$W(b, F) = \mathbb{E}\{\log \langle b \, , \, X \rangle\} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{b}^* = \arg\max_{\mathbf{b}} \mathbb{E}\{\log \langle \mathbf{b} \, , \, \mathbf{X} \rangle\}$$

A $\mathbf{b}^*$ portfóliót log-optimális portfóliónak nevezzük. Vegyük észre, hogy f.a.e. hozamok esetén log-optimális portfólió időben állandó $B = \{b^*, b^*, \ldots\}$. Ilyenkor a "globális" optimalizálási stratégia azonos az egy lépésből álló optimális stratégiával. Vagyis elegendő egyetlen lépés esetén megkeresni a legnagyobb növekedési ütemet. Mivel a következő lépésekben azonos szituációval találkozunk, a függetlenség miatt a múltból nem tudunk semmit sem tanulni, újra meg kell oldanunk a feladatot és újra azonos növekedési-beruházási stratégiát kell választani. Így elegendő megoldani egyszer a feladatot és azt végtelen sokszor ismételni. Jelölje W^* a log-optimális stratégia aszimptotikus növekedési ütemét, vagyis

$$W^* = \mathbb{E}\{\log \langle \mathbf{b}^* \, , \, \mathbf{X} \rangle\}$$

ekkor a nagyszámok erős törvénye miatt

$$\frac{1}{n}\log S_n^* \to W^*$$

m.m..

1.1. Példa. *(Cover [19]) Jelölje* $X = (X^{(1)}, X^{(2)})$ *a hozamvektort és legyen* $b = (b, 1-b)$ *a választott portfóliónk. Az első részvény hozama konstans* 1*, a második részvény hozama* 2 *vagy* $\frac{1}{2}$*,* $\frac{1}{2}$*,* $\frac{1}{2}$ *valószínűséggel. Formálisan* $\mathbb{P}(X^{(1)} = 1) = 1$ *és* $\mathbb{P}(X^{(2)} = 2) = \mathbb{P}(X^{(2)} = \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$*. Tegyük fel, hogy* $X_1, X_2, \ldots$ *f.a.e. sorozat. Az első részvény aránya a log-optimális portfólióban:*

$$\begin{aligned} b^* &= \arg\max_b \mathbb{E}\log\langle (b, 1-b)\,,\, X\rangle \\ &= \arg\max_b \mathbb{E}\log(b + (1-b)X_2) \\ &= \arg\max_b \left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\log(2-b)\right) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Így a log-optimális portfólió: $b^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$*. Az optimális növekedési ütem:*

$$W^* = \frac{1}{2}\log\left(\frac{9}{8}\right) = 0.059.$$

A log-optimális stratégia következő tulajdonságait érdemes fejben tartani a továbbiakban (Cover and Thomas [23]). $W(\mathbf{b}, F)$ konkáv függvény $\mathbf{b}$-ben és lineáris F-ben. $W^*(F)$ konvex F-ben. A log-optimális portfóliók halmaza konvex halmaz. Megmutatható, hogy a log-optimális portfólió teljesíti a következő szükséges és elégséges feltételeket:

$$\mathbb{E}\left(\frac{X^{(i)}}{\langle b, X\rangle}\right) \quad \begin{cases} = & 1, \ \ \text{ha } b^i > 0 \\ \leq & 1, \ \ \text{ha } b^i = 0 \end{cases}$$

A log-optimális portfólió aszimptotikusan optimális (pontosabban optimális az elsőrendű tagig az exponensben). Ezt pontosan a következő tétel fogalmazza meg. Legyen $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ f.a.e. hozamvektorsorozat.

Jelölje $S_n^* = \prod_{i=1}^n \langle \mathbf{b}^*, \mathbf{X}_i \rangle$a log-optimális portfólió elért vagyonát, ahol $\mathbf{b}^*$ a log-optimális portfólió, és S_n jelölje egy tetszőleges másik portfólió elért vagyonát. Ekkor,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{S_n}{S_n^*} \le 0,$$

m.m.. A tétel azt állítja, hogy egy valószínűségű trajektóriahalmazon a log-optimális portfólió elért vagyona meghaladja bármely más portfólió elért vagyonát. Pontosabban limes superior értelemben azaz trajektóriákon képzett hányadosok sorozatának felső torlódási pontja lesz nagyobb egyenlő mint nulla majdnem minden trajektórián.

Log-optimális portfóliók stacionárius piacok esetén

A dolgozat további részében elvetem a függetlenség feltételét és csak a stacionaritást tartom meg. (Kiegészítve az ergodicitással, amely az átlagok létezését biztosítja.) Tegyük fel, hogy $x_1, x_2, \ldots$ az $X_1, X_2, \ldots$ véletlen valószínűségi változók realizációja, amelyek egy vektor-értékű stacionárius és ergodikus folyamatot $\{X_n\}_{-\infty}^{\infty}$ alkotnak. Ennek az az értelme, hogy szemben a független esettel nem elegendő egyetlen változó eloszlását ismerni hanem végtelen számú esetet ismerni kell, ahhoz, hogy ismerjük a sorozatot. Ha a valószínűségi változók függetlenek és azonos eloszlásúak, akkor az együttes eloszlásuk ismeretéhez elegendő egyetlen változó eloszlását megadni. Ha azonban csak stacionárius a sorozat, akkor az együttes eloszlás ismeretéhez az összes változó együttes eloszlása szükséges. Mivel az optimális növekedési stratégia nyilván az együttes eloszlástól függ, ezért kell az egész problémát áttranszformálni a negatív időtengelyre.

A fenti feltételek mellett vizsgálta pl. Algoet és Cover [4], Algoet [2, 3] a portfólióválasztási problémát. A [4]-ben és [2, 3]-ban meghatározott fundamentális korlátok megmutatták, hogy az úgynevezett *log-optimális portfólió*

$$B^* = \{b^*(\cdot)\}$$

a legjobb választás. Formálisan, az n-edik kereskedési periódusban jelölje $b^*(\cdot)$ a log-optimális portfóliót:

$$\mathbb{E}\left\{\log \left\langle b^*(X_1^{n-1}), X_n \right\rangle \middle| X_1^{n-1}\right\} = \max_{b(\cdot)} \mathbb{E}\left\{\log \left\langle b(X_1^{n-1}), X_n \right\rangle \middle| X_1^{n-1}\right\}.$$

A log-optimális stratégia az optimális választás, ahogy azt a következő tétel mutatja. Ha $S_n^* = S_n(B^*)$ jelöli a B^* log-optimális portfólió stratégiával elért tőkét n nap után, akkor minden tetszőleges B befektetési stratégia által elért $S_n = S_n(B)$ vagyonra és $\{X_n\}_{-\infty}^{\infty}$ tetszőleges stacionárius és ergodikus folyamat esetén

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{S_n}{S_n^*} \leq 0 \quad 1 \text{ valószínűséggel} \tag{1.1}$$

és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log S_n^* = W^* \quad 1 \text{ valószínűséggel,} \tag{1.2}$$

ahol

$$W^* = \mathbb{E}\left\{\max_{b(\cdot)} \mathbb{E}\left\{\log \left\langle b(X_{-\infty}^{-1}),\, X_0\right\rangle \Big|\, X_{-\infty}^{-1}\right\}\right\} \tag{1.3}$$

a log-optimális befektetési stratégia növekedési rátája. (Kolmogorov tétele alapján minden stacionárius és ergodikus folyamat $\{X_n\}_1^{\infty}$ kiterjeszthető két irány- ba végtelen stacionárius folyamattá valamilyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn úgy, hogy az ergodicitás mindkét irányba $n \to \infty$ és $n \to -\infty$ fennáll.) Az első egyenlőtlenség ismét a log-optimális stratégia aszimptotikus optimalitását állítja, ahogy azt f.a.e. esetben is láttuk. Második egyenlet mutatja, hogy a log-optimalitási stratégia az optimális aszimptotikus növekedési ütemet realizálja. Az állítás harmadik része az optimális aszimptotikus növekedési ütem konkrét alakját mutatja, amit természetesen csak a teljes múlt megfigyelése alapján adhatunk meg.

Az első egyenlőtlenség (1.1) alapötlete a következő. Tekintsünk egy tetszőleges B stratégiát és a hozzátartozó vagyont, ekkor az átlagos napi hozamszint felbontható

$$\frac{1}{n} \log S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log \left\langle b(X_1^{i-1}),\, X_i\right\rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i \tag{1.4}$$

módon, ahol

$$Z_i = \log \left\langle b(X_1^{i-1}),\, X_i\right\rangle - \mathbb{E}\left\{\log \left\langle b(X_1^{i-1}),\, X_i\right\rangle \Big|\, X_1^{i-1}\right\}$$

és

$$Y_i = \mathbb{E}\left\{\log \left\langle b(X_1^{i-1}),\, X_i\right\rangle \Big|\, X_1^{i-1}\right\}.$$

Ekkor $Z_1, Z_2, \ldots$ egy úgynevezett martingáldifferencia-sorozat, amelyre igen általános feltételek mellett

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$$

1 valószínűséggel. Következésképpen $\frac{1}{n}\log S_n$ aszimptotikus viselkedését az $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ viselkedése határozza meg. Ugyanakkor b^* definíciója miatt

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left\{\log\left\langle b(X_1^{i-1}),\, X_i\right\rangle\Big|\, X_1^{i-1}\right\}\\ &\le \max_{b(\cdot)}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left\{\log\left\langle b(X_1^{i-1}),\, X_i\right\rangle\Big|\, X_1^{i-1}\right\}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left\{\log\left\langle b^*(X_1^{i-1}),\, X_i\right\rangle\Big|\, X_1^{i-1}\right\},\end{aligned}$$

ez utobbi a $\frac{1}{n}\log S_n^*$ aszimptotikus viselkedését határozza meg (1.2). Tehát nincsen olyan befektetési stratégia, amelynek aszimptotikusan nagyobb a hozamszintje, mint a log-optimális portfóliónak.

1.2. A log-optimális stratégia kritikája

Az átlagos növekedési ütem optimalizálása csak egyike a lehetséges optimalitási kritériumoknak. A modellkör közgazdasági kritikája nyilván ebből az észrevételből indul ki. A lehetséges kritikai észrevételek elfogadása és tudomásulvétele ellenére a megközelítés jogosultsága nem kérdőjelezhető meg.

Számos közgazdász nem értett egyet a $\mathbb{E}\log S_n$, mint cél maximalizálásával, és többnyire a hasznosságelmélet oldaláról indítottak támadást a log-optimális portfólió-választás ellen. Az eddigi általános feltételekkel szemben (stacionárius és ergodikus hozamok), ebben az alfejezetben jóval korlátozóbb feltételezéssel élek, mégpedig, hogy a hozamok független azonos eloszlásúak. A kritikák e feltételek mellett születtek.

Egy tipikus kritika a következő. Tételezzük fel, hogy az egyes eszközök hozama független azonos eloszlást követ. Jelölje S_n a vagyont az n-edik periódus végén, továbbá legyen a hasznosság a következő módon adott:

$$U(S_n,\gamma) = S_n^{\gamma}/\gamma,$$

ahol $\gamma \neq 0$. Ahhoz, hogy a várható hasznosságot maximalizáljuk, minden egyes időpontban azonos portfóliót kell választanunk. Jelöljük $\mathbf{c}$-vel az $U(\cdot)$ hasznossági függvény várható értékét maximalizáló portfóliót és legyen $\mathbf{d}$ a log-optimális portfólió, azaz az a portfólió, ami maximalizálja a $\mathbb{E}\log S_n$ kifejezést tetszőleges n esetén.

Összehasonlítva a két portfólió teljesítményét az $U(\cdot)$ hasznossági függvény által meghatározott mértékben, adódik, hogy

$$\frac{\mathbb{E}\{U(S_n^{\mathrm{c}},\gamma)\}}{\mathbb{E}\{U(S_n^{\mathrm{d}},\gamma)\}} \to \infty,$$

ha $n \to \infty$, [65].

Ennél valamivel komolyabb ellenérv, de még mindig ugyanazon gondolat ismétlésének tekinthető a következő, Merton és Samuelson szerzőpárostól [61] származó kritika. A szerzők megmutatták, hogy a log-optimális portfólió még közelítőleg sem lesz optimális *kezdeti vagyon egyenértékes értelemben.* Jelölje

$$\pi_{\mathbf{ef}}(n, S_0) \stackrel{\text{def}}{=} \pi_{\mathbf{ef}}$$

az $\mathbf{f}$ stratégia kezdeti vagyon egyenértékesét az $\mathbf{e}$ stratégiához viszonyítva, ha

$$\mathbb{E}\left\{U(\pi_{ef}S_n^{\mathrm{e}},\gamma)\right\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left\{U(S_n^{\mathrm{f}},\gamma)\right\},$$

feltéve, hogy $S_0 = 1$. Legyen $\mathbf{e}$ a log-optimális stratégia. Jelölje $\mathbf{f}$ az $U(x,\gamma) = x^\gamma/\gamma$ ($\gamma < 1$) hasznossági függvény esetén a várható hasznosságot maximalizáló stratégiát. A log-optimális stratégia „közelítőleg" optimális ebben a módosított értelemben, ha $\lim_{n\to\infty} \pi_{ef}(n, S_0) = 1$ és π_{ef} az idő csökkenő függvénye.

Tekintve az $U(x,\gamma) = x^\gamma/\gamma$, ($\gamma < 1$) hasznossági függvényt

$$\mathbb{E}\{U(S_n^{\mathrm{f}},\gamma)\} = \frac{\mathbb{E}\{(S_n^{\mathrm{f}})^\gamma\}}{\gamma} = \frac{(\mathbb{E}\{(S_1^{\mathrm{f}})^\gamma\})^n}{\gamma} \tag{1.5}$$

adódik. Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\left\{U\left(\pi_{ef}S_n^{\mathrm{e}},\gamma\right)\right\} = \frac{\mathbb{E}\{(\pi_{ef}S_n^{\mathrm{e}})^\gamma\}}{\gamma} = \frac{\pi_{ef}^\gamma(\mathbb{E}\{(S_1^{\mathrm{e}})^\gamma\})^n}{\gamma}. \tag{1.6}$$

Vizsgáljuk $\gamma \neq 0$-át, ekkor (1.5)-ből és (1.6)-ból azt kapjuk, hogy

$$\pi_{ef} = \lambda(\gamma)^{n/\gamma},$$

ahol

$$\lambda(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{E}\{(S_1^{\mathrm{f}})^\gamma\}}{\mathbb{E}\{(S_1^{\mathrm{e}})^\gamma\}}.$$

Így azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \pi_{ef}(n, S_0) = \infty$$

és
$$\frac{\partial \pi_{ef}(n, S_0)}{\partial n} > 0.$$
Tehát a log-optimális stratégia nem optimális ebben a módosított értelemben.

Az ilyen jellegű kritikákkal az a probléma, hogy figyelmen kívül hagyják azt a tényt, hogy a $\mathbb{E}\log S_n$-t nem hasznossági megfontolások miatt kell maximalizálni, hanem a kedvező aszimptotikus tulajdonságai miatt. Vegyük észre, hogy az egyes befektetők hasznosságától függetlenül pénzben kifejezve 1 valószínűséggel a legnagyobb vagyont fogja biztosítani aszimptotikusan. Ugyanakkor, ha már a logaritmus függvényt hasznossági függvénynek akarjuk tekinteni, akkor ne várjuk el, hogy a log-optimális stratégia egy logaritmustól különböző hasznossági függvény szerinti várható hasznosságot is maximalizáljon.

Maga Markowitz is olyan metakritérium megtalálásán fáradozott, ami a várható hasznosság megszállottjait is meggyőzi a log-optimális portfóliók aszimptotikus optimalitásáról. Hitte, hogy a Neumann és Morgenstern által bevezetett várható hasznosság maximalizálás az üdvőzítő út az optimális portfólió kiválasztására. Ez a log-optimális portfóliók optimalitását is igazolta nem túl szigorú feltételek mellett [58].

Tételezzük fel, hogy minden időpontban azonosak a befektetési lehetőségek, vagyis a hozamok független azonos eloszlásúak.

A hasznossági függvénnyel kapcsolatban Markowitz csak egy kikötést tesz: ha egy C stratégiából származó vagyonsorozat $S^C = (S_0, S_1^C, S_2^C, \dots)$ és egy $\mathbf{D}$ stratégiából származó vagyonsorozat $S^{\mathbf{D}} = (S_0, S_1^D, S_2^D, \dots)$ esetén az S^C sorozat minden eleme nagyobb, mint az S^D sorozat minden eleme egy bizonyos n után, akkor $U(S^C) \geq U(S^D)$.

Ezen két fentebbi feltételezés biztosítani fogja a log-optimális portfólióválasztás előnyét, amit Markowitz következőképp bizonyít.

Jelölje y_i a $\log(1 + r_i)$-t vagyis a logszázalékos hozamot. Jelölje C a log-optimális stratégiát és legyen D egy tetszőleges másik stratégia. A log-optimális stratégia definíciójából adódik, hogy $\mathbb{E}(y_n^C) \geq \mathbb{E}(y_n^D)$, minden n-re. Feltehetjük, hogy az $y_1, y_2, \dots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók véges μ várható értékkel, így
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i = \mu \quad \text{1 valószínűséggel.}$$

Mivel $\mathbb{E}(y_n^C) \geq \mathbb{E}(y_n^D)$, ezért adódik, hogy

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^C \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^D,$$

ahol valamely fix n-re $n \geq N(\omega)$ majdnem minden $\omega \in \Omega$ realizáció esetén. Alkalmazva $y_i = \log(1 + r_i)$-t kapjuk, hogy

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(1 + r_i^C) \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(1 + r_i^D)$$

minden $n \geq N(\omega)$-ra, majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén. Így,

$$S_n^C \geq S_n^D$$

minden $n \geq N(\omega)$-ra majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén.

Innen a hasznossági függvényre tett feltételezésből adódik, hogy

$$U(S_0, S_1^C, S_2^C, \dots) \geq U(S_0, S_1^D, S_2^D, \dots) \quad 1 \text{ valószínűséggel}$$

és így

$$\mathbb{E}U(S^C) \geq \mathbb{E}U(S^D).$$

1.3. Univerzálisan konzisztens empírikus befektetési stratégiák

Természetesen, a log-optimális portfólió meghatározásához, a folyamat (végtelen dimenziós) eloszlásának teljes ismerete szükséges. A későbbiekben azokat a befektetési stratégiákat, amelyek aszimptotikusan elérik az optimális W^* hozamszintet az eloszlás teljes ismerete nélkül *univerzálisan konzisz- tensnek* nevezem.

Mivel nem ismerjük a tényleges eloszlást, hiszen nem tudjuk az összes változót, csak véges sokat, az optimalizáló eljárásnak függetlennek kell lenni a tényleges eloszlástól. Vagyis olyan eljárást kell megadni, amelyet ha minden véges időhorizonton alkalmazunk, akkor végülis, vagyis határértékben, megkapjuk az optimális növekedési ütemet, amely azonban a teljes végtelen időhorizonttól függ.

Pontosabban, egy B befektetési stratégiát univerzálisan konzisztensnek nevezünk az $\{X_n\}_{-\infty}^{\infty}$ stacionárius és ergodikus folyamatok egy osztályán, ha minden folyamatra az osztályban

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log S_n(B)=W^* \quad 1 \text{ valószínűséggel.}$$

Algoet [2] bizonyította, hogy létezik univerzális stratégia a stacionárius és ergodikus folyamatok minden osztálya esetén. Algoet konstrukciója azonban komplex és az elméleti jelentősége ellenére, kicsi a gyakorlati értéke.

Következőkben három univerzálisan konzisztens portfólió-stratégiát mutatok be, amelyek a nemparaméteres regressziófüggvény-becslésen alapulnak: *hisztogramm alapú becslő*, a *magfüggvény alapú becslő* és a *legközelebbi szomszéd becslő*. Mindhárom stratégia legközelebbi múlt részvényárfolyamalakulásához hasonló mintázatot keres a múltben, azért, hogy annak alapján készítsen becslést a következő napi hozamra nézve, hogy maximalizálja a portfólió növekedési ütemét. A három megközelítés közötti különbség a hasonlóság definiciójában rejlik. Univerzálisan konzisztens portfólió-stratégia készítéséhez a *nemparaméteres regressziófüggvénybecslés* adja az alapötletet. Egy feltételes várható értéket maximalizáló portfóliót keresünk a log-optimális portfólió definiciójának megfelelően. Legyen Y egy valós értékű valószínűségi változó, jelöljön továbbá a X egy véletlen vektort. A $m(x)$ regressziós függvény az Y-nak a X-re vonatkozó feltételes várható értéke

$$m(x)=\mathbb{E}(Y|X=x).$$

Az adatok egy f.a.e. sorozatot alkotnak (X,Y):

$$D_n=\{(X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n)\}.$$

A regressziós függvény becslés a következő formában adható meg

$$m_n(x)=m_n(x,D_n).$$

Speciális típust alkotnak a lokális átlagoláson alapuló becslők

$$m_n(x)=\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(x,X_1,\ldots,X_n)Y_i$$

ahol a W_{ni} súlyok nem negatívak és 1 az összegük (cf.[36]). Ha ismeretlen eloszlás esetén a log-optimális portfóliót szeretnénk becsülni akkor egy olyan b portfóliót keresünk, amely a

$$\mathbb{E}[\log \left\langle b(X_1^{n-1})\,,\, X_n \right\rangle |X_1^{n-1}]$$

kifejezést maximalizálja. Így az általános regresszó függvény becslés a log-optimális portfólió becslés közötti megfeleltetés az alábbi

$$X \sim X_1^k$$

$$Y \sim \log \langle b\,,\, X_{k+1} \rangle$$

$$m(x) = \mathbb{E}\{Y|X = x\} \sim m(x_1^k) = \mathbb{E}[\log \langle b\,,\, X_{k+1} \rangle |X_1^k = x_1^k].$$

A következő három univerzálisan konzisztens befektetési stratégia abban különbözik, hogy a $W_{ni}(\cdot)$ függvényt hogyan definiáljuk. A *hisztogram alapú vagy partíciós regresszós becslő* egy lokális átlagoláson alapuló becslő. Jelölje a vektortér egy partícióját a $\mathcal{P}_n = \{A_{n,1}, A_{n,2} \dots\}$, ahonnan X felveszi az értékeit. A particióban szereplő $A_{n,j}$ halmazokat celláknak nevezzük. Ha $A_n(x)$ $\mathcal{P}_n$ partició egy olyan cellája, amelybe x esik akkor a partíciós regressziós becslőt a következőképpen definiáljuk

$$m_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i I_{[X_i \in A_n(x)]}}{\sum_{i=1}^n I_{[X_i \in A_n(x)]}},$$

ahol $I_{[\cdot]}$ az indikátor függvényt jelöli.

Legyen G_n a $\mathcal{P}_n$-nek megfelelő kvantáló vagyis $G_n(x) = j$, ha $x \in A_{n,j}$. Ha

$$I_n(x) = \{i \leq n : G_n(x) = G_n(X_i)\}$$

jelöli az egyezések (hasonlóságok halmazát) akkor a partíciós regressziós becslő az alábbi

$$m_n(x) = \frac{\sum_{i \in I_n(x)} Y_i}{|I_n(x)|}.$$

A következőkben a*hisztogram alapú portfólió-választást* mutatom be. Jelölje az elemi portfóliók végtelen vektorát a $B^{(k,\ell)} = \{b^{(k,\ell)}(.)\}$, $k, \ell = 1, 2, \dots$, ahol k a mintaillesztési ablakméret ℓ pedig a kvantálás finomságát adja meg. Legyen $\mathbb{R}_+^d$-nek egy partíciója, $\mathcal{P}_\ell = \{A_{\ell,j}\}$, ahol $j = 1, 2, \dots, m_\ell$, amely m_ℓ darab diszjunkt halmazból (cellából) áll. Jelölje G_ℓ a $\mathcal{P}_\ell$ partícióhoz tartozó diszkretizáló függvényt, azaz

$$G_\ell(x) = j, \text{ ha } x \in A_{\ell,j} \ .$$

Vezessük be a következő egyszerűsítő jelölést minden n-re és $x_1^n \in \mathbb{R}^{dn}$-re, jelentse $G_\ell(x_1^n)$ a $G_\ell(x_1), \ldots, G_\ell(x_n)$ sorozatot. Ezután definiáljuk a $H^{(k,\ell)} = \{h^{(k,\ell)}(\cdot)\}$ szakértőt

$$b^{(k,\ell)}(x_1^{n-1}) = \arg\max_{b \in \Delta_d} \prod_{\left\{k<i<n : G_\ell(x_{i-k}^{i-1}) = G_\ell(x_{n-k}^{n-1})\right\}} \langle b\,,\, x_i \rangle \ ,$$

minden $n > k+1$-re, ha a szorzat nem üres, különben pedig válasszuk az egyenletes $b_0 = (1/d, \ldots, 1/d)$ portfóliót. Tehát $b_n^{(k,\ell)}$ diszkretizálja x_1^{n-1} szekvenciát a $\mathcal{P}_\ell$ partíció szerint és megkeresi az összes egyezést a múltban az utoljára látott $G_\ell(x_{n-k}^{n-1})$ k hosszú kvantált sorozattal. Ezután kiválasztja azt a fix portfólióvektort, ami optimalizálja a kifizetést a kvantált sorozatok után következő napokon.

Kérdés hogyan válasszuk meg k, ℓ értékét. Két szélsőséges eset van:

- ha k vagy az ℓ kicsi, akkor a particiós becslőnek nagy lesz a torzítása,
- ha a k és az ℓ nagy, akkor tipikusan kevés az illeszkedés, ami nagy szóráshoz vezet.

Gépi tanulás irodalmában k és ℓ a becslés paraméterei, ezeket úgynevezett szakértőknek nevezik. A gépi tanulás alapötlete a szakértők kombinálása. Az a szakértő kap nagy súlyt egy becslés kialakításánál amelyiknek jó volt a múltbeli teljesítménye (cf.[17]).

A B^H hisztogram alapú stratégiát a $B^{(k,\ell)}$ szakértők kombinálásával kapjuk, felhasználva egy $\{q_{k,\ell}\}$ valószínűségeloszlást. A $\{q_{k,\ell}\}$ valószínűségeloszlás minden pozitív egész pár (k, ℓ) halmazán értelmezett úgy, hogy k, ℓ, $q_{k,\ell} > 0$. B^H stratégia a $B^{(k,\ell)}$ szakértők egyszerű súlyozása a múltbeli teljesítményük alapján:

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}_1^{n-1}) \doteq \frac{\sum_{k,\ell} q_{k,\ell} S_{n-1}(B^{(k,\ell)}) b^{(k,\ell)}(\mathbf{x}_1^{n-1})}{\sum_{k,\ell} q_{k,\ell} S_{n-1}(B^{(k,\ell)})}, \tag{1.7}$$

A portfólió-választás eredménye a következő egyszerűbb formában adható meg. Ha $S_n(B^{(k,\ell)})$ jelöli a $B^{(k,\ell)}$ stratégia n nap alatt felhalmozott tőkéjét, akkor n nap után a befektető tőkéje

$$\begin{aligned} S_n(B^H) &= \prod_{i=1}^{n} \left\langle b(x_1^{i-1})\,,\,x_i \right\rangle \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{\sum_{k,\ell} q_{k,\ell} S_{i-1}(B^{(k,\ell)}) \left\langle b^{(k,\ell)}(x_1^{i-1})\,,\,x_i \right\rangle}{\sum_{k,\ell} q_{k,\ell} S_{i-1}(B^{(k,\ell)})} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{\sum_{k,\ell} q_{k,\ell} S_{i}(B^{(k,\ell)})}{\sum_{k,\ell} q_{k,\ell} S_{i-1}(B^{(k,\ell)})} \\ &= \sum_{k,\ell} q_{k,\ell} S_n(B^{(k,\ell)}). \end{aligned}$$

Györfi és Schaefer [35] megmutatták, hogy B^H stratégia univerzálisan konzisztens az ergodikus folyamatoknak azon osztályra, amelyre igaz $\mathbb{E}\{|\log X^{(j)}|\} < \infty$ $j = 1, 2, \ldots, d$ és a kvantáláshoz használt partíciók teljesítik az alábbi két tulajdonságot:

(a) a partíciók sorozata finomodó, azaz, $\mathcal{P}_{\ell+1}$ minden cellája egy részhalmaza $\mathcal{P}_\ell$ partíció megfelelő cellájának, $\ell = 1, 2, \ldots$ és

(b) ha $\mathrm{diam}(A) = \sup_{x,y\in A} \|x - y\|$ jelöli a halmaz átmérőjét, akkor minden origó középpontú gömb $S \subset \mathbb{R}^d$ esetén

$$\lim_{\ell\to\infty} \max_{j:A_{\ell,j}\cap S\neq\emptyset} \mathrm{diam}(A_{\ell,j}) = 0\ .$$

Az előbb bemutatott empirikus stratégia alapötlete a **szakértők (portfóliók) kombinálása**, azaz ha most általánosan B-vel jelöljük a keverés után kapott stratégiát

$$S_n(B) = \sum_{k,\ell} q_{k,\ell} S_n(B^{(k,\ell)}).$$

Az univerzális konzisztenciához azt kell megmutatni, hogy

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log S_n(B) \geq W^* \quad 1 \text{ valószínűséggel.}$$

Mivel

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log S_n(B) &= \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\sum_{k,\ell} q_{k,\ell}S_n(B^{(k,\ell)})\right)\\
&\geq \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\sup_{k,\ell} q_{k,\ell}S_n(B^{(k,\ell)})\right)\\
&= \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sup_{k,\ell}\left(\log q_{k,\ell}+\log S_n(B^{(k,\ell)})\right)\\
&\geq \sup_{k,\ell}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log S_n(B^{(k,\ell)}),
\end{aligned}$$

ezért az előzőekben taglalt stratégiák esetén azt kell megmutatni [37], hogy

$$\sup_{k,\ell}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log S_n(B^{(k,\ell)}) \geq W^* \quad 1 \text{ valószínűséggel.}$$

A *magfüggvény alapú regressziós becslő* egy magfüggvény $K(x) \geq 0$ és egy ablakaméret $h > 0$ segítségével van definiálva

$$m_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)}.$$

Az egyenletes $K(x) = I_{\{\|x\|\leq 1\}}$ magfüggvény esetén,

$$m_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i I_{\{\|x-X_i\|\leq h\}}}{\sum_{i=1}^n I_{\{\|x-X_i\|\leq h\}}}.$$

Györfi, Lugosi, Udina [37] vezette be a *magfüggvény alapú stratégiát*, amelynek egy egyszerűbb, az egyenletes magfüggvényhez tartozó, „mozgó ablakos" verzióját ismertetem.

Ugyanúgy, mint az előző alfejezetben, a stratégiához definiálom a szakértők egy végtelen osztályát $B^{(k,\ell)} = \{b^{(k,\ell)}(\cdot)\}$-t, ahol k és ℓ pozitív egészek.

Minden fix k, ℓ pozitív egészhez válasszunk egy $r_{k,\ell} > 0$ sugarat, úgy, hogy minden fix k-ra

$$\lim_{\ell\to\infty} r_{k,\ell} = 0\ .$$

Ekkor minden $n > k+1$ esetén definiáljuk a $b^{(k,\ell)}$ szakértőt a következőképpen

$$b^{(k,\ell)}(x_1^{n-1}) = \arg\max_{b\in\Delta_d} \prod_{\left\{k<i<n:\|x_{i-k}^{i-1}-x_{n-k}^{n-1}\|\leq r_{k,\ell}\right\}} \langle b\,,\,x_i\rangle\ ,$$

ha a szorzat nem üres, különben pedig válasszuk az egyenletes $b_0 = (1/d, \ldots, 1/d)$ portfóliót.

A szakértők a hisztogram alapú stratégia esetén bemutatott módon (lásd. 1.7) szerint kombinálódnak.

Györfi, Lugosi, Udina [37] bebizonyította, hogy B^K portfólióséma univerzálisan konzisztens az ergodikus folyamatok azon osztályára, amelyre igaz $\mathbb{E}\{|\log X^{(j)}|\} < \infty$, $j = 1, 2, \ldots, d$.

Egy $k > 0$, esetén a *k-legközelebbi szomszéd(LSZ) regressziós becslő* egy lokális átlagoláson alapuló regressziós becslő,

$$m_n(x) = \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x; X_1, \ldots, X_n) Y_i,$$

ahol W_{ni} súlyok $1/k$-val egyenlők, ha X_i az x k legközelebbi szomszédjának egyike az $X_1, \ldots, X_n$ közül, egyébként $W_{ni} = 0$.

Györfi, Udina, Walk [39] bevezette a *legközelebbi szomszéd alapú stratégiát*. A korábbiakhoz hasonlóan definiáljuk a szakértők egy végtelen osztályát $B^{(k,\ell)} = \{b^{(k,\ell)}(\cdot)\}$-t, ahol $0 < k$, ℓ egészek. Jelölje k a mintaillesztési ablak hosszát és minden ℓ-hez válasszuk $q_\ell \in (0, 1)$-t úgy, hogy

$$\lim_{\ell \to \infty} q_\ell = 0. \tag{1.8}$$

Legyen

$$\hat{\ell} = \lfloor q_\ell n \rfloor.$$

Minden adott napon a szakértő megkeresi $\hat{\ell}$ legközelebbi szomszédot a múltban. k, ℓ $(n > k + \hat{\ell} + 1)$ fix pozitív egészekre vezessük be az $\hat{\ell}$ legközelebbi szomszéd (LSZ) halmazát:

$$\hat{J}_n^{(k,\ell)} = \left\{ i;\ k+1 \le i \le n \text{ úgy, hogy } X_{i-k}^{i-1} \text{ benne van } X_{n-k}^{n-1}\ \hat{\ell} \text{ LSZ-ja között} \right\}.$$

Legyen $b^{(k,\ell)}$ szakértő definíciója

$$b^{(k,\ell)}(x_1^{n-1}) = \arg\max_{b \in \Delta_d} \prod_{\left\{ i \in \hat{J}_n^{(k,\ell)} \right\}} \langle b\,,\, X_i \rangle\,.$$

ha a szorzat nem üres, egyébként pedig $b_0 = (1/d, \ldots, 1/d)$. Azaz, $b^{(k,\ell)}$ szakértő egy fix portfólió vektor, amely a legközelebbi szomszédok előfordulását követő napokra nézve optimális. A szakértők kombinálása ugyanúgy történik, mint a korábbi két stratégia esetén (lásd (1.7)). A kapott stratégiát B^{LSZ} jelöli.

Azt mondjuk, hogy nulla valószínűségű az egyezés ha bármely $s = s_1^k$ vektor esetén a

$$||X_1^k - s||$$

valószínűségi változónak folytonos az eloszlása. Györfi, Udina és Walk [39] bebizonyította, hogy ha az egyezésnek nulla a valószínűsége és teljesül (1.8), akkor a B^{LSZ} portfóliós éma univerzálisan konzisztens az ergodikus folyamatoknak azon osztályára, amelyre igaz $\mathbb{E}\{|\log X^{(j)}|\} < \infty$ $j = 1, 2, \ldots, d$.

Az egy valószínűséggel tanulhatóság érdekes eredmény. Nagyon durván fogalmazva azt állítja az előbb ismertett három módszer, hogy egy nagyon fejlett "technikai elemzés" lehet hatékony. Egy ilyen megjegyzéssel szemben a szokásos ellenérv, hogy nem elég az "árfolyamgörbéket" lesni, sok más információ is szükséges a sikerhez, így a kapcsolatos cégek fundamentális elemezése, a makrogazdasági környezet, a gazdasági ciklus mely pontjan sejtjük magunkat, hogy áll a világgazdaság, szoval sok minden más. Az előbb ismertett módszerek során persze nem néhány tucat típusmintát figyelünk, az árfolyamokon keresztben is, s nemcsak az időtengely menten dolgozunk. Ez mindenkeppen rengeteg plusz információt hordoz, ami csökkenti a fenti szokasos fanyalgás érvényességét, nem beszélve az egy valószínűségű bizonyítás erejéről. Ugyanakkor a fenti módszerek végtelen időhorizontra vonatkoznak véges időhorizontú befektetés sikerére nem jelentenek garanciát.

2. fejezet

Két új portfólió-stratégia

Ebben a fejezetben egy új szekvenciális befektetési stratégiát vezetek be a szemi-log-optimális stratégia névvel. A log-optimális stratégiával ellentétben a logaritmus célfüggvény helyett annak Taylor soros kiterjesztését használom. Ismét stacionárius és ergodikus hozamfolymat feltétel mellett vizsgálom az aszimptotikus növekedési ütemet. A stratégia teljesítményét az átlagos aszimptotikus növekedési ütemének a log-optimális portfolió aszimptotikus növekedési ütemével történő összevetéssel mérem.

A szemi-log-optimális stratégián keresztül lehetőségünk nyílik a Markowitz-típusú stratégia (ami a hagyományos átlag-variancia optimalizálás stacionárius és ergodikus hozamfolyamatra történő kiterjesztése) és a log-optimális stratégia összevetésére. A fejezet második felében a hozamfolyamtra tett enyhe feltételek mellett egy aszimptotikus megközelítést mutatok be az átlag-variancia (Markowitz-típusú) portfólió-választás- hoz. Ennek a résznek az a jelentősége, hogy megkapom a Markowitz-típusú portfólió-stratégia által egy-valószínűségű trajektóriahalmazon elszenvedett aszimptotikus növekedési ütem veszteségnek a maximális nagyságát.
Ebben a fejezetben ugyancsak vizsgálni fogom hogyan illeszthető be az explicit kockázatkezelés a log-optimális keretbe. Ez alatt azt értem, hogy míg a Markowitz-típusú stratégia esetén egy speciális formájú hasznossági függvény választásával korlátoztam a kockázatot addig itt a log-optimális portfóliót egy feltételekkel korlátozott lehetséges portfólió-vektorhalmaz felett fogom keresni. Megvizsgálom, hogy továbbra is érvényben maradnak a log-optimális portfólióval kapcsolatban megfogalmazott klasszikus állítások. Megadom a kockázat-megszorítás melletti log-optimális portfólió Kuhn-Tucker jellemzését.

2.1. A szemi-log-optimális portfólió

Legyen
$$h(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2,$$
amely a $\log x$ másodrendű Taylor sorfejése az $x = 1$ helyen. Az n-dik kereskedési napon a szemi-log-optimális portfólió-stratégiát a következőképpen definiálom

$$\tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{X}_1^{n-1}) = \arg\max_{\mathbf{b}(\cdot)} \mathbb{E}\left\{ h\left(\left\langle \mathbf{b}(\mathbf{X}_1^{n-1}), \mathbf{X}_n \right\rangle\right) \Big| \mathbf{X}_1^{n-1} \right\}.$$

és $\tilde{S}_n = S_n(\tilde{\mathbf{B}})$ ahol $\tilde{B} = \{\tilde{b}(\cdot)\}$.

Összevetem a stratégia teljesítményét az optimális aszimptotikus növekedési rátát produkáló log-optimális stratégiával.

2.1. Tétel. *(Vajda [74]) Bármely stacionárius és ergodikus $\{\mathbf{X_n}\}_{-\infty}^{\infty}$ folyamat esetén, ahol $1-a \leq X_n^j \leq 1+c$, $0.4 > a > 0$, $c > 0$ a következő adódik*

$$W^* \geq \liminf_n \frac{1}{n} \log \tilde{S}_n \geq W^* - \frac{5}{6}\mathbb{E}[\max_i \mathbb{E}(|X_0^{(i)} - 1|^3 | X_{-\infty}^{-1})] \qquad m.m..$$

A Tétel 2.1 jelentősége a következőképpen ragadható meg. A részvénypiacokon ahol az eszközökkel napi szinten kereskednek korlátokat állítanak fel a napi maximális árfolyamváltozásra. Ha ezt a maximumot eléri a napi árfolyamváltozás, például az árfolyam nagyot esik napon belül, akkor az adott eszköz kereskedését felfüggesztik arra a napra. Ha feltesszük, hogy $a = c = 0.1$, az eredmény azt állítja, hogy szemi-log-optimális stratégia legfeljebb $5/6 \cdot 0.1^3 \simeq 0.083\%$al teljesít rosszabbul mint a log-optimális stratégia. Hangsúlyozni kell azonban hogy a W^* értékét nem ismerjük és végtelen időn belül nem is tudjuk megismerni.

A 2.1 Tétel bizonyításában a következő lemmákat alkalmazom:

2.1. Lemma. (BREIMAN [14]). *Legyen $Z = \{Z_i\}_{-\infty}^{\infty}$ egy stacionárius és ergodikus folyamat. Bármely pozitiv i egészre, jelölje T^i azt az operátort, amely egy $\{\ldots, z_{-1}, z_0, z_1, \ldots\}$ sorozat elemeit i lépéssel balra tolja. Legyen $f_1, f_2, \ldots$ valós értékű függvények egy sorozata, amelyre teljesül,* *hogy* $\lim_{n\to\infty} f_n(Z) = f(Z)$ *majdnem mindenütt valamely* f *függvényre. Tegyük fel, hogy* $\mathbb{E}\sup_n |f_n(Z)| < \infty$. *Akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(T^i Z) = \mathbb{E} f(Z) \qquad m.m.$$

2.2. Lemma. *Bármely* $\{\mathbf{X_n}\}_{-\infty}^{\infty}$ *stacionárius és ergodikus folyamatra, amelyre* $1-a \leq X_n^{(j)} \leq 1+c$ *és* $p \in C_0[a,c]$, *ahol* $1 > a > 0$, $c > 0$, *adódik, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \max_j \mathbb{E}[p\left(X_i^{(j)}\right) \Big| \mathbf{X}_1^{i-1}] = \mathbb{E}[\max_j \mathbb{E}[p\left(X_0^{(j)}\right) \Big| \mathbf{X}_{-\infty}^{-1}]] \qquad \text{m.m.}$$

Bizonyítás Vezessük be a következő jelölést

$$\bar{w}_n = \bar{w}_n(X_0) \doteq \max_j \mathbb{E}[p(X_0^{(j)}) \mid \mathbf{X}_{-n+1}^{-1}].$$

Először megmutatom, hogy $\{\bar{w}_n\}$ egy szubmartingál, vagyis $\mathbb{E}[\bar{w}_{n+1} \mid X_{-n+1}^{-1}] \geq \bar{w}_n$. $\mathbb{E}[p(X_0^{(j)}) \mid \mathbf{X}_{-n+1}^{-1}]$ X_{-n+1}^{-1}-mérhető, ezért X_{-n}^{-1}-mérhető, és így azt kapjuk

$$\begin{aligned}
\bar{w}_n &= \max_j \mathbb{E}[p(X_0^{(j)}) \mid X_{-n+1}^{-1}] \\
&= \max_j \mathbb{E}[\mathbb{E}[p(X_0^{(j)}) \mid X_{-n}^{-1}] \mid X_{-n+1}^{-1}] \\
&\leq \mathbb{E}[\max_j \mathbb{E}[p(X_0^{(j)}) \mid X_{-n}^{-1}] \mid X_{-n+1}^{-1}] \\
&= \mathbb{E}[\bar{w}_{n+1} \mid X_{-n+1}^{-1}].
\end{aligned}$$

Így $\bar{w}_n$ egy szubmartingál és $\mathbb{E}|\bar{w}_n|_+ \leq \infty$, mivel $p \in C_0\,[a,c]$. Alkalmazva a szubmartingálok konvergenciájára vonatkozó tételt tudjuk, hogy létezik egy olyan $\bar{w}_\infty$ valószínűségi változó, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \bar{w}_n = \bar{w}_\infty = \max_j \mathbb{E}[p(X_0^{(j)}) \mid \mathbf{X}_{-\infty}^{-1}] \qquad \text{m.m.}$$

Alkalmazva a Lemma 2.1-et az $f_i(X) \doteq \bar{w}_i(X)$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \max_j \mathbb{E}[p(X_i^{(j)})|X_1^{i-1}] = \mathbb{E}[\max_j \mathbb{E}[p(X_0^{(j)})|X_{-\infty}^{-1}]] \qquad \text{m.m.}$$

ugyanis

$$f_i(T^i X) = \bar{w}_i(T^i X) = \max_j \mathbb{E}\left(p(X_0^{(j)}) \mid X_1^{i-1}\right).$$

és $\mathbb{E}[\sup_i |f_i(X)|] < \infty$, mivel $p(\cdot)$ korlátos. ∎

A 2.1 Tétel bizonyítása. A $\log z$ függvény $z = 1$ körüli másodrendű Taylor sorfejtése alapján a következő korlátokat kapjuk

$$\log z \geq h(z) - \frac{1}{2}|z-1|^3$$

és

$$\log z \leq h(z) + \frac{1}{3}|z-1|^3,$$

ahol $0.6 < z$. Továbbá, figyelembe véve a $\tilde{b}(\mathbf{X}_1^{n-1})$ szemi-log-optimális portfólió definicióját kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\log\left\langle \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{X}_1^{n-1}), \mathbf{X}_n \right\rangle | \mathbf{X}_1^{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(|\left\langle \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{X}_1^{n-1}), \mathbf{X}_n \right\rangle - 1|^3 | \mathbf{X}_1^{n-1}) \\
\geq\ & \mathbb{E}(h(\left\langle \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{X}_1^{n-1}), \mathbf{X}_n \right\rangle) | \mathbf{X}_1^{n-1}) \\
\geq\ & \mathbb{E}(h(\langle \mathbf{b}_n^*, \mathbf{X}_n \rangle) | \mathbf{X}_1^{n-1}) \\
\geq\ & \mathbb{E}(\log\left\langle \mathbf{b}^*(\mathbf{X}_1^{n-1}), \mathbf{X}_n \right\rangle | X_1^{n-1}) - \frac{1}{3}\mathbb{E}(|\left\langle \mathbf{b}^*(\mathbf{X}_1^{n-1}), \mathbf{X}_n \right\rangle - 1|^3 | \mathbf{X}_1^{n-1}).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Egyszerű korlátot vezetek le a következő formulára $\mathbb{E}(|\left\langle \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{X}_1^{n-1}), \mathbf{X}_n \right\rangle - 1|^3 | \mathbf{X}_1^{n-1})$ és $\mathbb{E}(|\left\langle \mathbf{b}^*(\mathbf{X}_1^{n-1}), \mathbf{X}_n \right\rangle - 1|^3 | \mathbf{X}_1^{n-1})$. A portfólió vektort, mint diszkrét valószínűségeloszlását tekintve, továbbá $|z-1|^3$ konvexitását figyelembe véve, alkalmazva a Jensen egyenlőtlenséget

$$\begin{aligned}
|\left\langle \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{X}_1^{n-1}), \mathbf{X}_n \right\rangle - 1|^3 &= |\sum_{i=1}^d \tilde{b}^{(i)}(\mathbf{X}_1^{n-1})(X_n^{(i)} - 1)|^3 \\
&\leq \sum_{i=1}^d \tilde{b}^{(i)}(\mathbf{X}_1^{n-1})|X_n^{(i)} - 1|^3.
\end{aligned}$$

Feltételes várható értéket véve az előző egyenlőtlenség két oldalán majd egyszerű átalakitásokkal

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|\left\langle \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{X}_1^{n-1}), \mathbf{X}_n \right\rangle - 1|^3 | \mathbf{X}_1^{n-1}) &\leq \sum_{i=1}^d \tilde{b}^{(i)}(\mathbf{X}_1^{n-1})\mathbb{E}(|X_n^{(i)} - 1|^3 | \mathbf{X}_1^{n-1}) \\
&\leq \max_i \mathbb{E}(|X_n^{(i)} - 1|^3 | \mathbf{X}_1^{n-1}).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Hasonlóan

$$\mathbb{E}(|\left\langle \mathbf{b}^*(\mathbf{X}_1^{n-1}), \mathbf{X}_n \right\rangle - 1|^3 | \mathbf{X}_1^{n-1}) \leq \max_i \mathbb{E}(|X_n^{(i)} - 1|^3 | \mathbf{X}_1^{n-1}) \tag{2.3}$$

teljesül a log-optimális portfólióra. A (2.1), (2.2) és a (2.3) egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(\log\left\langle \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{X}_1^{n-1})\,,\,\mathbf{X}_n\right\rangle|\mathbf{X}_1^{n-1})\\ \geq\;&\mathbb{E}(\log\left\langle \mathbf{b}^*(\mathbf{X}_1^{n-1})\,,\,\mathbf{X}_n\right\rangle|\mathbf{X}_1^{n-1})-\frac{5}{6}\max_i\mathbb{E}(|X_n^{(i)}-1|^3|\mathbf{X}_1^{n-1}).\quad(2.4)\end{aligned}$$

Tekintsük a következő felbontást

$$\frac{1}{n}\log\tilde{S}_n=\tilde{U}_n+\tilde{V}_n,$$

ahol

$$\tilde{U}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n[\log\left\langle \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{X}_1^{i-1})\,,\,\mathbf{X}_i\right\rangle-\mathbb{E}[\log\left\langle \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{X}_1^{i-1})\,,\,\mathbf{X}_i\right\rangle|\mathbf{X}_1^{i-1}]]$$

és

$$\tilde{V}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\mathbb{E}[\log\left\langle \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{X}_1^{i-1})\,,\,\mathbf{X}_i\right\rangle|\mathbf{X}_1^{i-1}].$$

Megmutatható, hogy $\tilde{U}_n\to 0$ m.m., mivel martingál-differenciák átlaga. Így

$$\liminf_{n\to\infty}\tilde{V}_n=\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\tilde{S}_n.\qquad(2.5)$$

Hasonlóan tekintsük a következő felbontást

$$\frac{1}{n}\log S_n^*=U_n^*+V_n^*,$$

ahol

$$U_n^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n[\log\left\langle \mathbf{b}^*(\mathbf{X}_1^{i-1})\,,\,\mathbf{X}_i\right\rangle-\mathbb{E}[\log\left\langle \mathbf{b}^*(\mathbf{X}_1^{i-1})\,,\,\mathbf{X}_i\right\rangle|\mathbf{X}_1^{i-1}]]$$

és

$$V_n^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\mathbb{E}[\log\left\langle \mathbf{b}^*(\mathbf{X}_1^{i-1})\,,\,\mathbf{X}_i\right\rangle|\mathbf{X}_1^{i-1}].$$

Ismét megmutatható, hogy $U_n^*\to 0$ m.m. Így

$$\lim_{n\to\infty}V_n^*=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log S_n^*.\qquad(2.6)$$

Átlagot véve a (2.4) egyenlőtlenség mindkét oldalán $1,\ldots,n$ kereskedési periódusra, majd véve a limes inferiort mindkét oldalon, amint n tart a végtelenbe és alkalmazzuk Lemma 2.2 a $p(x) = |x-1|^3$ helyettesítéssel, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\liminf_n \frac{1}{n}\log \tilde{S}_n &\geq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log S_n^* - \lim_{n\to\infty}\frac{5}{6n}\sum_{i=1}^{n}\max_j \mathbb{E}\left(|X_i^{(j)}-1|^3|\mathbf{X}_1^{i-1}\right)\\ &= W^* - \frac{5}{6}\mathbb{E}\left[\max_j \mathbb{E}\left(|X_0^{(j)}-1|^3|\mathbf{X}_{-\infty}^{-1}\right)\right] \qquad (2.7)\end{aligned}$$

■

2.2. A szemi-log-optimális portfólió megkeresése

A szemi-log-optimális portfólió meghatározásánál, ahelyett hogy a

$$\mathbb{E}\left\{\log\left(\langle \mathbf{b}\,,\,\mathbf{X}_n\rangle\right)|\,\mathbf{X}_1^{n-1}\right\}$$

logaritmus függvény maximumát keresnénk meg a

$$\mathbb{E}\left\{h\left(\langle \mathbf{b}\,,\,\mathbf{X}_n\rangle\right)|\,\mathbf{X}_1^{n-1}\right\}. \qquad (2.8)$$

a kvadratikus közelítés maximumát keressük a $\mathbf{b}\in\Delta_d$ szimplex felett. A kvadratikus célfüggvény használatának egyik előnye a , hogy klasszikus matematikai programozási feladathoz vezet.

2.3. Lemma. *A szemi-log-optimális portfólió megkeresése ekvivalens azzal, hogy megtaláljuk a következő kvadratikus programozási feladat megoldását:*
maximalizáljuk a

$$g(b,\boldsymbol{X}_1^{n-1}) = 2\left\langle b\,,\,m(\boldsymbol{X}_1^{n-1})\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle b\,,\,C(\boldsymbol{X}_1^{n-1})b\right\rangle$$

célfüggvényt a b vektor szerint
a $\sum_{i=1}^{d} b_i = 1$ megszorítás mellett, ahol $b_i \geq 0$ minden i-re, ahol

$$m(\boldsymbol{X}_1^{n-1}) = \mathbb{E}(\boldsymbol{X}_n|\boldsymbol{X}_1^{n-1})$$

és

$$C(\boldsymbol{X}_1^{n-1}) = \{C_{i,j}\}$$
$$C_{i,j} = \mathbb{E}(X_n^{(i)}X_n^{(j)}|\boldsymbol{X}_1^{n-1}).$$

Bizonyítás Egyértelmű levezetéssel adódik

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[h(\langle \mathbf{b}\,,\,\mathbf{X}_n\rangle)|\mathbf{X}_1^{n-1}\right] &= \mathbb{E}\left[2\langle \mathbf{b}\,,\,\mathbf{X}_n\rangle - \tfrac{1}{2}\langle \mathbf{b}\,,\,\mathbf{X}_n\rangle^2 - 3/2|\mathbf{X}_1^{n-1}\right] \\ &= 2\left\langle \mathbf{b}\,,\,\mathbb{E}(\mathbf{X}_n|\mathbf{X}_1^{n-1})\right\rangle - \tfrac{1}{2}\left\langle \mathbf{b}\,,\,\mathbf{C}(\mathbf{X}_1^{n-1})\mathbf{b}\right\rangle - 3/2.\end{aligned}$$

■

Mivel $\mathbf{C}$ pozitiv szemidefinit, a célfüggvény konkáv és a megszorítás lineáris. Ismert, hogy $\mathbf{b}$ optimalitásának a szükséges és elégséges feltétele az, hogy $\mathbf{b}$ Karush-Kuhn-Tucker (KKT) pont legyen.

2.3. Dinamikus átlag-variancia optimalizálás

Markowitz portfólióstratégiájának a célja olyan eszközallokálás végrehajtása a pénzügyi piacon, ami optimális átváltást biztosít a várható hozam és a kockázat között. A *statikus* (egyperiódusos modell) klasszikus megoldását Markowitz [59] és Merton [60] adták meg. Ez a modell a *várható hasznosság modellekhez* képest a diverzifikáció intuitív magyarázatát adta. Ugyanakkor míg az átlag-variancia modellek irodalma tipikusan egyperiódusos modellekre épít, addig a várható hasznosság modellek irodalma számos *többperiódusos modellt* tartalmaz. Egy befekető számára nyilvánvalóan adódik a kérdés: vajon hogyan alakul az aszimptotikus átlagos növekedési ütem az elérhető legjobbhoz képest, ha átlag-variancia portfólió optimalizálást végzünk minden egyes kereskedési periódusban? Természetesen ilyenkor a kockázatra érzékenyebb olvasó felkaphatja a fejét és megkérdezheti, vajon mi történik akkor, ha a részvénypiac nem a kedvező irányban változik. Ekkor valóban egy "kockázatkezelt" stratégia elvileg jobban kell hogy teljesítsen, de én a legnagyobb "felülteljesítést" keresem a log-optimális javára. Az átlag-variancia modellt és a várható hasznosság modellt először Tobin [73] hasonlította össze kvadratikus hasznossági függvényt feltételezve. Grauer [33] a hozam eloszlására tett különböző feltélezések mellett hasonlította össze a log-optimális és az átlag-variancia portfólióválasztást egy egyperiódusos modellben. A kisérletek azt mutatták, hogy a normális eloszlás feltételezése mellett a két megközelítés közel azonos teljesítményt nyújtott. Kroll, Levy és Markowitz [53] hasonló elemzést végzett. Merton [60] folytonos idejű átlag-variancia elemzést végzett és arra a következtetésre jutott, hogy a log-optimális portfólió átlag-variancia hatékony abban az esteben ha az eszközhozamok log-normálisak. Hakansson és Ziemba [43] a dinamikus átlag-variancia elemzés egy újabb megközelítését javasolta, miszerint a log-optimális portfóliónak kellene betöltenie a kockázatos eszköz szerepét. Hakansson és Ziemba véges időhorizontú modellt vizsgáltak az eszközhozamokra tett Wiener folyamat feltételezés mellett.

Ebben az alfejezetben Mertonhoz[60] hasonló megközelítést alkalmazok, a hozamfolyamatra, azonban általánosabb stacionárius és ergodikus folyamatot tételezek fel egy diszkrét modellben.

Markowitz [59] cikkében egyperiódusos befektetést vizsgált f.a.e. hozamfolyamat mellett. Ezzel szemben az alábbiakban többperiódusú modellt és általános stacionárius és ergodikus hozamfolyamatot tételezek fel. Adódik, hogy sima várható hasznosság helyett feltételes várható hasznosságot kell használnunk. Abban a speciális esetben amikor a hozamfolyamat f.a.e., a feltételes várható hasznosság nyilvánvalóan a hagyományos várható hasznosságra egyszerűsödik. A standard Markowitz modelltől való megkülönböztetés érdekében a bevezetett hasznossági függvényemet *Markowitz-típusú hasznossági függvénynek* nevezzük.

A Markowitz-típusú hasznossági függvény feltételes várható értékét a következő kifejezéssel adom meg:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left\{U_M(\left\langle b(X_1^{n-1}),\, X_n\right\rangle, \lambda)|X_1^{n-1}\right\} && (2.9)\\
&\doteq \mathbb{E}\{\left\langle b(X_1^{n-1}),\, X_n\right\rangle|X_1^{n-1}\} - \lambda \mathbf{Var}\left\{\left\langle b(X_1^{n-1}),\, X_n\right\rangle|X_1^{n-1}\right\} && (2.10)\\
&= \mathbb{E}\{\left\langle b(X_1^{n-1}),\, X_n\right\rangle|X_1^{n-1}\} - \lambda \mathbb{E}\left\{\left(\left\langle b(X_1^{n-1}),\, X_n\right\rangle\right)^2|X_1^{n-1}\right\} && (2.11)\\
&\quad +\lambda\mathbb{E}^2\left\{\left\langle b(X_1^{n-1}),\, X_n\right\rangle|X_1^{n-1}\right\}\ , && (2.12)
\end{aligned}$$

ahol X_n az n-dik nap piaci hozamvektora, $b(X_1^{n-1}) \in \Delta_d$, $\lambda \in [0,\infty)$ a befektető konstans kockázatelutasításának mértéke, továbbá

$$\begin{aligned}
U_M(\left\langle b(X_1^{n-1}),\, X_n\right\rangle, \lambda) &\doteq \left\langle b(X_1^{n-1}),\, X_n\right\rangle - \lambda\left\langle b(X_1^{n-1}),\, X_n\right\rangle^2\\
&\quad +\lambda\mathbb{E}^2\{\left\langle b(X_1^{n-1}),\, X_n\right\rangle|X_1^{n-1}\}.
\end{aligned}$$

A Markowitz-típusú hasznossági függvény feltételes várható értéke némi átalakítás után a következő alakban is megadható:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\{U_M(\left\langle b(X_1^{n-1}),\, X_n\right\rangle, \lambda)|X_1^{n-1}\} \\
&\quad = \quad (1-2\lambda)\mathbb{E}\left\{\left\langle b(X_1^{n-1}),\, X_n\right\rangle - 1|X_1^{n-1}\right\} - \lambda\mathbb{E}\{(\left\langle b(X_1^{n-1}),\, X_n\right\rangle - 1)^2|X_1^{n-1}\} \\
&\qquad +1-\lambda+\lambda\mathbb{E}^2\left\{\left\langle b(X_1^{n-1}),\, X_n\right\rangle|X_1^{n-1}\right\}.
\end{aligned}$$

Így a Markowitz-típusú hasznossági függvényt a

$$\begin{aligned}
&U_M(\left\langle b(X_1^{n-1}),\, X_n\right\rangle, \lambda) \\
&\quad = \quad (1-2\lambda)(\left\langle b(X_1^{n-1}),\, X_n\right\rangle - 1) - \lambda(\left\langle b(X_1^{n-1}),\, X_n\right\rangle - 1)^2 + 1 - \lambda \\
&\qquad +\lambda\mathbb{E}^2\{\left\langle b(X_1^{n-1}),\, X_n\right\rangle|X_1^{n-1}\}.
\end{aligned}$$

kifejezés deiniálja. A Markowitz-típusú portfólió-stratégiát a következőképpen adhatjuk meg $\bar{B}_\lambda^* = \{\bar{\mathbf{b}}_\lambda^*(\cdot)\}$, ahol

$$\bar{\mathbf{b}}_\lambda^*(X_1^{n-1}) = \arg\max_{b\in\Delta_d}\mathbb{E}\left\{U_M(\left\langle b(X_1^{n-1}),\, X_n\right\rangle, \lambda)|X_1^{n-1}\right\}.$$

Jelölje $\bar{S}_{n,\lambda}^* = S_n(\bar{B}_\lambda^*)$ a Markowitz-típusú portfólió-stratégia elért vagyonát, az n-dik kereskedési periódus után. A következő alfejezetben kapcsolatba hozom a Markowitz-típusú és a log-optimális portfólió-választást a szemi-log-optimális portfólión keresztül.

2.4. A Markowitz-típusú és a log-optimális portfólió-stratégia összevetése: egy intuitív megközelítés

A szemi-log függvényt a $\log z$ függvény $z = 1$ körüli másodrendű Taylor sorfejtéseként definiáltuk

$$h(z) \doteq z - 1 - \frac{1}{2}(z-1)^2.$$

A $\tilde{B} = \{\tilde{\mathbf{b}}\}$ szemi-log-optimális stratégiát a

$$\tilde{\mathbf{b}}(X_1^{n-1}) \doteq \arg\max_{b\in\Delta_d}\mathbb{E}\left\{h\left(\left\langle b(X_1^{n-1}),\, X_n\right\rangle\right)|X_1^{n-1}\right\}.$$

kifejezéssel adtuk meg. Alkalmazva a szemi-log közelítést:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left\{\log\left\langle b(X_1^{n-1}),\, X_n\right\rangle \Big| X_1^{n-1}\right\}\\
&\approx \quad \mathbb{E}\left\{h\left(\left\langle b(X_1^{n-1}),\, X_n\right\rangle\right)|X_1^{n-1}\right\}\\
&= \quad \mathbb{E}\left\{\left(\left\langle b(X_1^{n-1}),\, X_n\right\rangle - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\left\langle b(X_1^{n-1}),\, X_n\right\rangle - 1\right)^2 \Big| X_1^{n-1}\right\} \quad (2.13)
\end{aligned}$$

Ahhoz, hogy egyszerűsítsük a (2.13) formulát bevezetjük a feltételes várható érték

$$E_n(b) \doteq \mathbb{E}\left\{\left\langle b(X_1^{n-1}),\, X_n\right\rangle \Big| X_1^{n-1}\right\},$$

a feltételes második momentum

$$E_n(b)^2 \doteq \mathbb{E}\left\{\left(\left\langle b(X_1^{n-1}),\, X_n\right\rangle\right)^2 \Big| X_1^{n-1}\right\},$$

továbbá a feltételes variancia

$$V_n(b) \doteq E_n(b)^2 - E_n^2(b).$$

jelöléseit. Így

$$\begin{aligned}
\tilde{b}(X_1^{n-1}) &= \arg\max_{b\in\Delta_d}\left(2E_n(b) - \frac{1}{2}E_n(b)^2 - \frac{3}{2}\right)\\
&= \arg\max_{b\in\Delta_d}\left(2E_n(b) - \frac{1}{2}\left(E_n(b)^2 - E_n^2(b)\right) - \frac{1}{2}E_n^2(b)\right)\\
&= \arg\max_{b\in\Delta_d}\left(E_n(b)(4 - E_n(b)) - V_n(b)\right)\\
&= \arg\max_{b\in\Delta_d}\left(\frac{E_n(b)}{\lambda_n} - V_n(b)\right) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\mathrm{b}}^*_{\lambda_n}(X_1^{n-1}),
\end{aligned}$$

adódik, ahol

$$\lambda_n \doteq \frac{1}{4 - E_n(b)}.$$

A befektető kockázatelutasítási mutatója a feltételes várható érték függvényeként adódik. Vegyük észre, hogy a λ_n paraméter dinamikusan változik időben, vagyis a Markowitz-típusú befektető a portfólió múltbeli teljesítménye alapján folyamatosan igazítja a kockázatkerülésének mértékét.

2.5. A Markowitz-típusú és a log-optimális portfólió-választás ismert eloszlás esetén

Természetesen adódik a kérdés, vajon mekkora lehet a maximális veszteségünk egy valószínűségű trajektóriahalmazon a log-optimális portfólióhoz képest, ha kockázatelutasító befektetők vagyunk. A fejezetben bemutatott tétel ismert eloszlás esetén adja meg a maximális veszteség lehetséges nagyságát, ha a befektető λ kockázat-elutasítási paraméterrel rendelkezik. Pontosabban tetszőleges λ kockázat-elutasítási paraméter mellett megadom a Markowitz-típusú stratégia átlagos aszimptotikus növekedési ütemének a maximális lehetséges aszimptotikus növekedési ütemtől történő lehető legnagyobb
eltérését egy valószínűségű trajektóriahalmazon.

Tegyük fel, hogy a $\{X_n\}_{-\infty}^{\infty}$ stacionárius és ergodikus folyamatból származik, amelyre

$$a \le X_n^{(j)} \le \frac{1}{a} \tag{2.14}$$

bármely $j = 1, \ldots, d$-re, ahol $0 < a < 1$.

2.2. Tétel. *(Ottucsák és Vajda[63]) Bármely stacionárius és ergodikus $\{X_n\}_{-\infty}^{\infty}$ folyamatra, amelyre (2.14) fennáll, és minden $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$-ra*

$$\begin{aligned}
W^* &\ge \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \bar{S}^*_{n,\lambda} \\
&\ge W^* - A_{\lambda,a}\mathbb{E}\left\{\max_m \mathbb{E}\left\{X_0^{(m)} - 1 - \log(X_0^{(m)}) \middle| X_{-\infty}^{-1}\right\}\right\} \\
&\quad - B_{\lambda,a}\mathbb{E}\left\{\max_m \mathbb{E}\left\{(X_0^{(m)} - 1)^2 \mid X_{-\infty}^{-1}\right\} - \left(\min_m \mathbb{E}\left\{\left|X_0^{(m)} - 1\right| \middle| X_{-\infty}^{-1}\right\}\right)^2\right\} \\
&\quad - C_{\lambda,a}\mathbb{E}\left\{\max_m \mathbb{E}\{\left|X_0^{(m)} - 1\right|^3 \middle| X_{-\infty}^{-1}\}\right\} \qquad \text{m.m.}
\end{aligned}$$

ahol $\bar{S}^*_{n,\lambda}$ a Markowitz-típusú portfólió-stratégia n-dik napi vagyona λ kockázatkerülési paraméter mellett továbbá

$$A_{\lambda,a} = \frac{2\lambda a^{-1} + (1-4\lambda)(a^{-1}-1)\mathbb{I}_{\{0\le\lambda\le\frac{1}{4}\}}}{1-2\lambda}, \qquad B_{\lambda,a} = \frac{2\lambda - \frac{1}{2}}{1-2\lambda}\mathbb{I}_{\{\frac{1}{4}<\lambda<\frac{1}{2}\}}$$

and

$$C_{\lambda,a} = \frac{a^{-3}+1}{3(1-2\lambda)} .$$

A tételben a $\lambda \in [0, \frac{1}{2})$ paraméterértékek mellett fogalmazok meg állítást. Egy befektető tipikus kockázat-elutasítási paramétere $\lambda = 0.005A$, ahol A értéke 2 és 4 közé esik (lásd pl. [12], [34]). Így a tétel teljes mértékben lefedi a praktikus szempontból érdekes kockázat-elutasítási paraméter értékeket.

A "hibatagok" nagyságrendjének elemzéséhez kisérleteket végezhetünk. A λ értékének optimális megválasztásával a W^* és a $\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \bar{S}^*_{n,\lambda}$ közötti különbség az empírikus W^* értékének 1% alá csökkenthető.

Bizonyítások

A 2.2 Tétel bizonyításához a Lemma 2.2-öt és a három másik lemmát használom. A lemmák a tételben szereplő becslések összerakásában segítenek.

2.4. Lemma. *Legyen $Z_1, \ldots, Z_n$ véletlen változók sorozata, $f_n(\cdot)$ egy mérhető függvény és $Y_n \doteq f_n(Z_1^n)$ minden n-re. Ekkor a következő alsó és felső korlát adható az Y_n logaritmusára.*

$$U_M(Y_n, \lambda) + g(Y_n, \lambda) - \lambda \mathbb{E}^2\{Y_n | Z_1^{n-1}\} + \frac{(Y_n - 1)^3}{3Y_n^3} \leq (1 - 2\lambda) \log Y_n$$
$$\leq U_M(Y_n, \lambda) + g(Y_n, \lambda) - \lambda \mathbb{E}^2\{Y_n | Z_1^{n-1}\} + \frac{(Y_n - 1)^3}{3}$$

ahol $U_M(Y_n, \lambda)$ a Markowitz-típusú hasznossági függvény

$$U_M(Y_n, \lambda) = (1 - 2\lambda)(Y_n - 1) - \lambda(Y_n - 1)^2 + 1 - \lambda + \lambda \mathbb{E}^2\{Y_n | Z_1^{n-1}\} \ ,$$

továbbá

$$g(Y_n, \lambda) = \left(2\lambda - \frac{1}{2}\right)(Y_n - 1)^2 - 1 + \lambda$$

és $\lambda \geq 0$.

Bizonyítás. A logaritmus függvény Taylor sorfejtését felhasználva kapcsolatot mutatunk a log- és a Markowitz-típusú hasznossági függvény között

$$\log Y_n = (Y_n - 1) - \frac{1}{2}(Y_n - 1)^2 + R_2$$

ahol $R_2 = \frac{(Y_n-1)^3}{3(Y^*)^3}$ ($Y^* \in [\min\{Y_n, 1\}, \max\{Y_n, 1\}]$) a Lagrange maradéktag. Ekkor azt írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} U_M(Y_n,\lambda)-&(1-2\lambda)\log Y_n \\ &= \left(\frac{1}{2}-2\lambda\right)(Y_n-1)^2+1-\lambda+\lambda\mathbb{E}^2\{Y_n|Z_1^{n-1}\}-R_2, \end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy

$$\frac{1}{3Y_n^3}(Y_n-1)^3 \le R_2 \le \frac{1}{3}(Y_n-1)^3$$

adódik a lemma állítása. ∎

A következő lemma két tetszőleges portfólió-stratégia teljesítményének eltérésére fogalmaz meg állítást, ha a hozamok teljesítik a (2.14) feltételt. Önmagában nehezen látható az állítás célja, csak a tétel bizonyításában töltődik meg tartalommal, ahol az előző lemma állításban szereplő harmadfokú tagok összevetésében van szerepe.

2.5. Lemma. *Legyen a X egy véletlen vektor, amely teljesiti a (2.14) feltételt. Ekkor tetszőleges b' és b'' portfóliókra*

$$\left|\frac{(\langle b', X\rangle-1)^3}{\langle b', X\rangle^3}-(\langle b'', X\rangle-1)^3\right| \le (a^{-3}+1)\max_m |X^{(m)}-1|^3.$$

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy

$$\frac{(\langle b', X\rangle-1)^3}{\langle b', X\rangle^3}-(\langle b'', X\rangle-1)^3 \ge -(a^{-3}+1)\max_m |X^{(m)}-1|^3. \tag{2.15}$$

Tekintsük a következő alsó becslést

$$\begin{aligned} &\frac{(\langle b', X\rangle-1)^3}{\langle b', X\rangle^3}-(\langle b'', X\rangle-1)^3 \\ \ge\;& -\frac{|\langle b', X\rangle-1|^3}{\langle b', X\rangle^3}-|\langle b'', X\rangle-1|^3 \\ \ge\;& -\max\left\{|\langle b', X\rangle-1|^3, |\langle b'', X\rangle-1|^3\right\}(\langle b', X\rangle^{-3}+1). \end{aligned} \tag{2.16}$$

A maximum mögött levő tagokat a Jensen egyenlőtlenséggel maximalizálva adódik, hogy

$$|\langle b, X\rangle-1|^3 = \left|\sum_{m=1}^d b^{(m)}(X^{(m)}-1)\right|^3 \le \sum_{m=1}^d b^{(m)}\left|X^{(m)}-1\right|^3$$

$$\leq \max_m \left|X^{(m)} - 1\right|^3, \tag{2.17}$$

Itt használva a $\langle b', X\rangle^{-3} \leq a^{-3}$ becslést, továbbá beírva a határokat a (2.16)-ba kapjuk a (2.15) becslést. Hasonló érveléssel adódik, hogy

$$\frac{(\langle b', X\rangle - 1)^3}{\langle b', X\rangle^3} - (\langle b'', X\rangle - 1)^3 \leq (a^{-3} + 1) \max_m \left|X^{(m)} - 1\right|^3.$$

■

2.1. Következmény (A 2.5 lemma következménye). *Legyen $\{X_n\}_{-\infty}^{\infty}$ egy stacionárius és ergodikus folyamat, amely teljesíti a (2.14) feltételt. Ekkor bármely $b' \doteq b'(X_1^{n-1})$ és $b'' \doteq b''(X_1^{n-1})$ portfólióra*

$$\mathbb{E}\left\{ \left|\frac{(\langle b', X_n\rangle - 1)^3}{\langle b', X_n\rangle^3} - (\left\langle b'', X_n\right\rangle - 1)^3\right| \middle| X_1^{n-1}\right\}$$
$$\leq (a^{-3} + 1) \max_m \mathbb{E}\{|X_n^{(m)} - 1|^3 \big| X_1^{n-1}\}.$$

Bizonyítás. A 2.5 lemma bizonyításában (2.17) helyett használjuk a következő becslést:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{|\langle b, X_n\rangle - 1|^3 \, |X_1^{n-1}\} &= \mathbb{E}\left\{\left|\sum_{m=1}^{d} b^{(m)}(X_n^{(m)} - 1)\right|^3 \middle| X_1^{n-1}\right\} \\
&\leq \sum_{m=1}^{d} b^{(m)} \mathbb{E}\left\{\left|X_n^{(m)} - 1\right|^3 \middle| X_1^{n-1}\right\} \qquad (2.18) \\
&\leq \max_m \mathbb{E}\left\{\left|X_n^{(m)} - 1\right|^3 \middle| X_1^{n-1}\right\},
\end{aligned}$$

ahol (2.18) a Jensen egyenlőtlenségből adódik. ■

2.6. Lemma. *Legyen $\{X_n\}_{-\infty}^{\infty}$ egy stacionárius és ergodikus folyamat ekkor*

$$\mathbb{E}\left\{\left\langle b^*(X_1^{n-1}), X_n\right\rangle - \langle b, X_n\rangle \mid X_1^{n-1}\right\}$$
$$\geq \min_m \mathbb{E}\left\{1 + \log(X_n^{(m)}) - X_n^{(m)} \mid X_1^{n-1}\right\}$$

ahol $b^*(X_1^{n-1})$ a log-optimális portfólió, továbbá $b \in \Delta_d$ egy tetszőleges portfólió.

Bizonyítás. Alulról korlátozva az állítás első tagját

$$\mathbb{E}\left\{\left\langle b^*(X_1^{n-1})\,,\,X_n\right\rangle \mid X_1^{n-1}\right\} \geq e^{\mathbb{E}\left\{\log\left\langle b^*(X_1^{n-1})\,,\,X_n\right\rangle \mid X_1^{n-1}\right\}} \tag{2.19}$$

$$\geq e^{\mathbb{E}\left\{\log\left\langle b(X_1^{n-1})\,,\,X_n\right\rangle \mid X_1^{n-1}\right\}} \tag{2.20}$$

$$\geq 1 + \sum_{m=1}^{d} b^{(m)}\mathbb{E}\left\{\log X_n^{(m)} \mid X_1^{n-1}\right\}, \tag{2.21}$$

ahol (2.19) a Jensen-egyenlőtlenségből, (2.20) a b^* definiciójából továbbá (2.21) $e^x \geq 1 + x$ és a Jensen egyenlőtlenség alapján adódik. Írjuk be ezt az állítás baloldalát

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left\{\left\langle b^*(X_1^{n-1})\,,\,X_n\right\rangle - \left\langle b(X_1^{n-1})\,,\,X_n\right\rangle \mid X_1^{n-1}\right\} \\
&\geq \sum_{m=1}^{d} b^{(m)}\mathbb{E}\left\{1 + \log X_n^{(m)} - X_n^{(m)} \mid X_1^{n-1}\right\} \\
&\geq \min_m \mathbb{E}\left\{1 + \log X_n^{(m)} - X_n^{(m)} \mid X_1^{n-1}\right\}
\end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy $\mathbb{E}\left\{1 + \log X_n^{(m)} - X_n^{(m)} \middle| X_1^{n-1}\right\} \leq 0$. ∎

Most már készen állunk arra, hogy bebizonyítsuk a 2.2 tételt. A kényelem kedvéért a következő jelölést használjuk $\bar{\mathrm{b}}^*$ a $\bar{\mathrm{b}}^*_\lambda$ helyett, $\bar{B}^*$ pedig a $\bar{B}^*_\lambda$ helyett és $\bar{S}^*_n$-t pedig $\bar{S}^*_{n,\lambda}$ helyett.

A 2.2 Tétel bizonyítása. Legyen λ rögzített paraméter. Alkalmazva a 2.4 lemmát $Y_n \doteq \left\langle \bar{\mathrm{b}}^*(X_1^{n-1})\,,\,X_n\right\rangle$ esetén, ahol $\bar{\mathrm{b}}^*(X_1^{n-1})$ a Markowitz-típusú portfólió, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&(1-2\lambda)\mathbb{E}\{\log\left\langle \bar{\mathrm{b}}^*(X_1^{n-1})\,,\,X_n\right\rangle \mid X_1^{n-1}\} - \mathbb{E}\{g(\left\langle \bar{\mathrm{b}}^*(X_1^{n-1})\,,\,X_n\right\rangle, \lambda) \mid X_1^{n-1}\} \\
&\quad + \lambda\mathbb{E}^2\{\left\langle \bar{\mathrm{b}}^*(X_1^{n-1})\,,\,X_n\right\rangle \mid X_1^{n-1}\} - \frac{1}{3}\left(\mathbb{E}\frac{\left(\left\langle \bar{\mathrm{b}}^*(X_1^{n-1})\,,\,X_n\right\rangle - 1\right)^3}{\left\langle \bar{\mathrm{b}}^*(X_1^{n-1})\,,\,X_n\right\rangle^3}\middle| X_1^{n-1}\right) \\
&\geq \mathbb{E}\{U_M(\left\langle \bar{\mathrm{b}}^*(X_1^{n-1})\,,\,X_n\right\rangle, \lambda) \mid X_1^{n-1}\} \\
&\geq \mathbb{E}\{U_M(\left\langle b^*(X_1^{n-1})\,,\,X_n\right\rangle, \lambda) \mid X_1^{n-1}\} \\
&\geq (1-2\lambda)\mathbb{E}\{\log\left\langle b^*(X_1^{n-1})\,,\,X_n\right\rangle \mid X_1^{n-1}\} - \mathbb{E}\{g(\left\langle b^*(X_1^{n-1})\,,\,X_n\right\rangle, \lambda) \mid X_1^{n-1}\} \\
&\quad + \lambda\mathbb{E}^2\{\left\langle b^*(X_1^{n-1})\,,\,X_n\right\rangle \mid X_1^{n-1}\} - \frac{1}{3}\mathbb{E}\{(\left\langle b^*(X_1^{n-1})\,,\,X_n\right\rangle - 1)^3 \mid X_1^{n-1}\}.
\end{aligned}$$

Átrendezve a fenti egyenlőtlenségeket, kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
&(1-2\lambda)\mathbb{E}\{\log \left\langle \bar{\mathbf{b}}^*(X_1^{n-1}),\, X_n \right\rangle \mid X_1^{n-1}\} \\
&\geq\ (1-2\lambda)\mathbb{E}\{\log \left\langle b^*(X_1^{n-1}),\, X_n \right\rangle \mid X_1^{n-1}\} \\
&\quad +\lambda \left(\mathbb{E}^2\{\left\langle b^*(X_1^{n-1}),\, X_n \right\rangle \mid X_1^{n-1}\} - \mathbb{E}^2\{\left\langle \bar{\mathbf{b}}^*(X_1^{n-1}),\, X_n \right\rangle \mid X_1^{n-1}\}\right) \\
&\quad +\mathbb{E}\{g(\left\langle \bar{\mathbf{b}}^*(X_1^{n-1}),\, X_n \right\rangle, \lambda) - g(\left\langle b^*(X_1^{n-1}),\, X_n \right\rangle, \lambda) \mid X_1^{n-1}\} \\
&\quad +\frac{1}{3}\mathbb{E}\left\{ \frac{(\left\langle \bar{\mathbf{b}}^*(X_1^{n-1}),\, X_n \right\rangle - 1)^3}{\left\langle \bar{\mathbf{b}}^*(X_1^{n-1}),\, X_n \right\rangle^3} - (\left\langle b^*(X_1^{n-1}),\, X_n \right\rangle - 1)^3 \middle| X_1^{n-1} \right\} \qquad (2.22)
\end{aligned}
$$

Véve a $1, \ldots, n$ kereskedési periódusok feletti átlagot, adódik, hogy

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\{\log \left\langle \bar{\mathbf{b}}^*(X_1^{i-1}),\, X_i \right\rangle \mid X_1^{i-1}\} \\
&\geq\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\{\log \left\langle b^*(X_1^{i-1}),\, X_i \right\rangle \mid X_1^{i-1}\} \\
&\quad +\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda \left(\mathbb{E}^2\{\left\langle b^*(X_1^{i-1}),\, X_i \right\rangle \mid X_1^{i-1}\} - \mathbb{E}^2\{\left\langle \bar{\mathbf{b}}^*(X_1^{i-1}),\, X_i \right\rangle \mid X_1^{i-1}\}\right)}{1-2\lambda} \\
&\quad +\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}\{g(\left\langle \bar{\mathbf{b}}^*(X_1^{i-1}),\, X_i \right\rangle, \lambda) - g(\left\langle b^*(X_1^{i-1}),\, X_i \right\rangle, \lambda) \mid X_1^{i-1}\}}{1-2\lambda} \\
&\quad +\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}\left\{ \frac{(\left\langle \bar{\mathbf{b}}^*(X_1^{i-1}),\, X_i \right\rangle - 1)^3}{\left\langle \bar{\mathbf{b}}^*(X_1^{i-1}),\, X_i \right\rangle^3} - (\left\langle b^*(X_1^{i-1}),\, X_i \right\rangle - 1)^3 \middle| X_1^{i-1} \right\}}{1-2\lambda}. \qquad (2.23)
\end{aligned}
$$

Korlátokat vezetünk le a fenti egyenlőtlenség három additív tagjára. Először, mivel $\lambda < \frac{1}{2}$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^2\{\left\langle b^*(X_1^{i-1}),\, X_i \right\rangle \mid X_1^{i-1}\} - \mathbb{E}^2\{\left\langle \bar{\mathbf{b}}^*(X_1^{i-1}),\, X_i \right\rangle \mid X_1^{i-1}\} \\
&=\ \mathbb{E}\{\left\langle b^*(X_1^{i-1}),\, X_i \right\rangle + \left\langle \bar{\mathbf{b}}^*(X_1^{i-1}),\, X_i \right\rangle \mid X_1^{i-1}\} \\
&\quad \cdot\mathbb{E}\{\left\langle b^*(X_1^{i-1}),\, X_i \right\rangle - \left\langle \bar{\mathbf{b}}^*(X_1^{i-1}),\, X_i \right\rangle \mid X_1^{i-1}\} \\
&\geq\ \mathbb{E}\{\left\langle b^*(X_1^{i-1}),\, X_i \right\rangle + \left\langle \bar{\mathbf{b}}^*(X_1^{i-1}),\, X_i \right\rangle \mid X_1^{i-1}\} \\
&\quad \cdot \min_m \mathbb{E}\left\{1 + \log(X_i^{(m)}) - X_i^{(m)} \mid X_1^{i-1}\right\} \qquad (2.24) \\
&\geq\ 2a^{-1} \min_m \mathbb{E}\left\{1 + \log(X_i^{(m)}) - X_i^{(m)} \mid X_1^{i-1}\right\}, \qquad (2.25)
\end{aligned}
$$

ahol (2.24) a 2.6 lemmából következik. Másodszor a $\lambda < \frac{1}{2}$-ra

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\{\frac{g(\left\langle \bar{\mathrm{b}}^*(X_1^{i-1}), X_i \right\rangle, \lambda) - g(\left\langle b^*(X_1^{i-1}), X_i \right\rangle, \lambda)}{1-2\lambda} \Big| X_1^{i-1}\} \\
= \ & \frac{2\lambda - \frac{1}{2}}{1-2\lambda}\Bigg(\mathbb{I}_{\{0\le\lambda\le\frac{1}{4}\}} \mathbb{E}\left((\left\langle \bar{\mathrm{b}}^*(X_1^{i-1}), X_i \right\rangle - 1)^2 - (\left\langle b^*(X_1^{i-1}), X_i \right\rangle - 1)^2 | X_1^{i-1} \right) \\
& + \mathbb{I}_{\{\frac{1}{4}<\lambda<\frac{1}{2}\}} \mathbb{E}\left\{ (\left\langle \bar{\mathrm{b}}^*(X_1^{i-1}), X_i \right\rangle - 1)^2 - (\left\langle b^*(X_1^{i-1}), X_i \right\rangle - 1)^2 | X_1^{i-1} \right\} \Bigg) \\
= \ & \frac{2\lambda - \frac{1}{2}}{1-2\lambda}\Bigg(- \mathbb{I}_{\{0\le\lambda\le\frac{1}{4}\}} \mathbb{E}\Big\{ (\left\langle b^*(X_1^{i-1}), X_i \right\rangle - \left\langle \bar{\mathrm{b}}^*(X_1^{i-1}), X_i \right\rangle) \\
& \cdot (\left\langle \bar{\mathrm{b}}^*(X_1^{i-1}), X_i \right\rangle + \left\langle b^*(X_1^{i-1}), X_i \right\rangle - 2) | X_1^{i-1} \Big\} \\
& + \mathbb{I}_{\{\frac{1}{4}<\lambda<\frac{1}{2}\}} \mathbb{E}\left\{ (\left\langle \bar{\mathrm{b}}^*(X_1^{i-1}), X_i \right\rangle - 1)^2 - (\left\langle b^*(X_1^{i-1}), X_i \right\rangle - 1)^2 | X_1^{i-1} \right\} \Bigg) \\
\ge \ & \frac{2\lambda - \frac{1}{2}}{1-2\lambda}\Bigg(- \mathbb{I}_{\{0\le\lambda\le\frac{1}{4}\}} \min_m \mathbb{E}\left\{ 1 + \log(X_i^{(m)}) - X_i^{(m)} \mid X_1^{i-1} \right\} (2a^{-1} - 2) \qquad (2.26) \\
& + \mathbb{I}_{\{\frac{1}{4}<\lambda<\frac{1}{2}\}} \mathbb{E}\left\{ (\left\langle \bar{\mathrm{b}}^*(X_1^{i-1}), X_i \right\rangle - 1)^2 - (\left\langle b^*(X_1^{i-1}), X_i \right\rangle - 1)^2 | X_1^{i-1} \right\} \Bigg) \\
\ge \ & \frac{2\lambda - \frac{1}{2}}{1-2\lambda}\Bigg(- \mathbb{I}_{\{0\le\lambda\le\frac{1}{4}\}} \min_m \mathbb{E}\left\{ 1 + \log(X_i^{(m)}) - X_i^{(m)} \mid X_1^{i-1} \right\} (2a^{-1} - 2) \\
& + \mathbb{I}_{\{\frac{1}{4}<\lambda<\frac{1}{2}\}} \left[\left(\min_m \mathbb{E}\left\{ |X_i^{(m)} - 1| \Big| X_1^{i-1} \right\} \right)^2 - \max_m \mathbb{E}\left\{ (X_i^{(m)} - 1)^2 \mid X_1^{i-1} \right\} \right] \Bigg), \\
& \qquad (2.27)
\end{aligned}
$$

ahol (2.26) a 2.6 lemma miatt továbbá a (2.27) a Jensen-egyenlőtlenségből adódó alsó korlát.
Végül használva a 2.1 következményt,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{3(1-2\lambda)} \mathbb{E}\left\{ \frac{(\left\langle \bar{\mathrm{b}}^*(X_1^{i-1}), X_i \right\rangle - 1)^3}{\left\langle \bar{\mathrm{b}}^*(X_1^{i-1}), X_i \right\rangle^3} - (\left\langle b^*(X_1^{i-1}), X_i \right\rangle - 1)^3 \Big| X_1^{i-1} \right\} \\
&\qquad \ge -\frac{a^{-3}+1}{3(1-2\lambda)} \max_m \mathbb{E}\{ |X_n^{(m)} - 1|^3 | X_1^{i-1} \}. \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

Tekintsük a következő felbontást

$$
\frac{1}{n} \log \bar{S}_n^* = \bar{Y}_n + \bar{V}_n,
$$

ahol

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\log\left\langle \bar{\mathbf{b}}^*(X_1^{i-1}),\, X_i\right\rangle - \mathbb{E}\{\log\left\langle \bar{\mathbf{b}}^*(X_1^{i-1}),\, X_i\right\rangle |X_1^{i-1}\}\right)$$

és

$$\bar{V}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\log\left\langle \bar{\mathbf{b}}^*(X_1^{i-1}),\, X_i\right\rangle |X_1^{i-1}.$$

Megmutatható, hogy $\bar{Y}_n \to 0$ m.m., mivel az korlátos martingál-differenciák átlaga. Így

$$\liminf_{n\to\infty} \bar{V}_n = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log \bar{S}_n^*. \tag{2.29}$$

Hasonlóan tekintsük a következő felbontást

$$\frac{1}{n}\log S_n^* = Y_n + V_n,$$

ahol

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\log\left\langle b^*(X_1^{i-1}),\, X_i\right\rangle - \mathbb{E}\{\log\left\langle b^*(X_1^{i-1}),\, X_i\right\rangle |X_1^{i-1}\}\right)$$

és

$$V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\{\log\left\langle b^*(X_1^{i-1}),\, X_i\right\rangle |X_1^{i-1}\}.$$

Ismét megmutatható, hogy $Y_n \to 0$ m.m. Így

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log S_n^*. \tag{2.30}$$

A limes inferiort véve az (2.23) egyenlőtlenség mindkét oldalán, amint n tart a végtelenbe és alkalmazva (2.25), (2.27), (2.28), (2.29), (2.30) formulákat és a 2.2 lemmát kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
W^* &\geq \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log \bar{S}_n^* \\
&\geq W^* - A_{\lambda,a}\mathbb{E}\left\{\max_m \mathbb{E}\left\{X_0^{(m)} - 1 - \log(X_0^{(m)})\middle| X_{-\infty}^{-1}\right\}\right\} \\
&\quad - B_{\lambda,a}\mathbb{E}\left\{\max_m \mathbb{E}\left\{(X_0^{(m)}-1)^2 \mid X_{-\infty}^{-1}\right\} - \left(\min_m \mathbb{E}\left\{|X_0^{(m)}-1|\middle| X_{-\infty}^{-1}\right\}\right)^2\right\} \\
&\quad - C_{\lambda,a}\mathbb{E}\left\{\max_m \mathbb{E}\{\left|X_0^{(m)}-1\right|^3 \middle| X_{-\infty}^{-1}\}\right\} ,
\end{aligned}$$

ahol

$$A_{\lambda,a} = \frac{2\lambda a^{-1} + (1-4\lambda)(a^{-1}-1)\mathbb{I}_{\{0\leq\lambda\leq\frac{1}{4}\}}}{1-2\lambda}, \qquad B_{\lambda,a} = \frac{2\lambda-\frac{1}{2}}{1-2\lambda}\mathbb{I}_{\{\frac{1}{4}<\lambda<\frac{1}{2}\}}$$

és

$$C_{\lambda,a} = \frac{a^{-3}+1}{3(1-2\lambda)} .$$

■

Ezzel beláttuk a Markowitz típusú portfólió stratégia teljesítményére vonatkozó állítást.

2.6. Explicit kockázat kontroll

Az eredeti log-optimális portfólió stratégia esetén előfordulhat, hogy az összeállított portfólió értéke az index zuhanása miatt rohamosan csökkenne egy bizonyos százalékkal, kötelező kockázatkezelési szabályok miatt a kezelő átrendezné a portfólióját, azaz nemcsak a várható hozam, de annak a kockázata (varianciája) is fontos. Markowitz típusú stratégia és a log-optimális stratégia kapcsolatát már vizsgáltuk. Ugyanakkor nem lehet elégszer hangsúlyozni a kockázatkezelés fontosságát. A kockázatmenedzselés alapvető volta ma áthatja az összes banki, befektetési területet. Míg a Markowitz-típusú portfólió-stratégia esetén lehetővé tettük, hogy a portfólió-stratégia a teljes szimplexen optimalizáljon addig itt konkrét véletlen megszorítást alkalmazok a választható portfóliók halmazára.

Kockázati megfontolások miatt megszorítom a lehetséges portfólióvektorok halmazát a

$$\widehat{\Delta} \subset \Delta_d$$

halmazra. $\widehat{\Delta}$ egy speciális esete, amikor a b portfólió kockázatosságát a portfólió hozamának varianciájával mérem

$$B_r = \{b \mid b \in \Delta_d, \langle b\,, Cb\rangle \leq r\} ,$$

ahol C a $d \times d$-dimenziós X hozamvektor kovariancia mátrixa,

$$C_{i,j} = \mathbb{E}\{(X^{(i)} - \mathbb{E}\{X^{(i)}\})(X^{(j)} - \mathbb{E}\{X^{(j)}\})\}$$

$1 \leq i, j \leq d$. Legyen a kockázatmegszorítás melletti log-optimális portfólió az n-dik kereskedési napon $b_n^{\widehat{\Delta}*}(\cdot)$ a következőképp definiálva

$$b_n^{\widehat{\Delta}*}(X_1^{n-1}) = \arg\max_{b(\cdot)\in\widehat{\Delta}} \mathbb{E}\left\{\log\left\langle b(X_1^{n-1})\,,\, X_n\right\rangle \Big| X_1^{n-1}\right\}.$$

Jelölje $S_n^{\widehat{\Delta}*}$ és $S_n^{\widehat{\Delta}}$ a kockázatmegszorítás melletti log-optimális stratégia és egy tetszőleges másik megengedett kereskedési stratégia által az n-dik kereskedési nap végére elért vagyont. Egy megengedett kereskedési stratégia megengedett portfólióvektorokból áll $b_n \in \widehat{\Delta}$.

$$S_n^{\widehat{\Delta}*} = S_0 \prod_{i=1}^{n} (b_i^{\widehat{\Delta}*}(X_1^{i-1}), X_i)$$

$$S_n^{\widehat{\Delta}} = S_0 \prod_{i=1}^{n} (b_i^{\widehat{\Delta}}(X_1^{i-1}), X_i)$$

Speciálisan, ha $\widehat{\Delta} = B_r$

$$S_n^{(r)*} = S_0 \prod_{i=1}^{n} (b_i^{*}(X_1^{i-1}), X_i)$$

Jelölje $W^{\widehat{\Delta}*}$ a maximálisan elérhető átlagos aszimptotikus növekedési ütemet tetszőleges megengedett befektetési stratégia esetén.

$$W^{\widehat{\Delta}*} = \mathbb{E}\left\{\max_{b(\cdot)\in\widehat{\Delta}} \mathbb{E}\left\{\log\left\langle b(X_{-\infty}^{-1})\,,\, X_0\right\rangle \Big| X_{-\infty}^{-1}\right\}\right\}.$$

Speciálisan

$$W^{(r)*} = \mathbb{E}\left\{\max_{b(\cdot)\in B_r} \mathbb{E}\left\{\log\left\langle b(X_{-\infty}^{-1})\,,\, X_0\right\rangle \Big| X_{-\infty}^{-1}\right\}\right\}.$$

A gyakorlatban nem egyszerű megtalálni magát a kockázatmegszorítás melletti log-optimális portfóliót. Ezért fontos feladat egy hatékony algoritmus keresése ennek megtalálására, vagy közelítésére.

2.7. A kockázatmegszorítás melletti log-optimális stratégia tulajdonságai

Az alábbiakban állításokat mondok ki a kockázat megszorítás melletti log-optimális portfólió aszimptotikus tulajdonságairól. Az első tétel azt állítja, hogy a kockázat megszorítás melletti log-optimális portfólió által elért vagyon (vagy a növekedés ütem) egy valószínűséggel túllép bármely más, kockázat megszorítás melletti portfólió által elért vagyont.

2.3. Tétel. *(Vajda [75]) Bármely stacionárius és ergodikus folyamatra $\{X_n\}_{-\infty}^{\infty}$, amelyre $1-a \le X_n^j \le 1+c$, $a>0$, $c>0$ teljesül, következik, hogy*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(S_n^{\widehat{\Delta}*}/S_n^{\widehat{\Delta}}) \ge 0$$

m.m..

Bizonyítás Legyen $b_i^{\widehat{\Delta}}(X_1^{i-1}) \in \widehat{\Delta}$, $i=1,2,\ldots$ megengedett portfóliók sorozata. Használjuk a következő felbontást

$$\frac{1}{n}\log S_n^{\widehat{\Delta}} = U_n + V_n, \tag{2.31}$$

ahol

$$U_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\log\left\langle b_i^{\widehat{\Delta}}, X_i\right\rangle - \mathbb{E}[\log\left\langle b_i^{\widehat{\Delta}}, X_i\right\rangle|X_1^{i-1}]]$$

és

$$V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\log\left\langle b_i^{\widehat{\Delta}}, X_i\right\rangle|X_1^{i-1}].$$

Legyen $b_i^{\widehat{\Delta}^*}(X_1^{i-1}) \in \widehat{\Delta}$, $i=1,2,\ldots$ kockázat megszorítás melletti log-optimális portfólió. Hasonlóan

$$\frac{1}{n}\log S_n^{\widehat{\Delta}*} = U_n^* + V_n^*, \tag{2.32}$$

amely a (2.31) felbontással analóg, ahol

$$U_n^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\log\left\langle b_i^{\widehat{\Delta}*}, X_i\right\rangle - \mathbb{E}[\log\left\langle b_i^{\widehat{\Delta}*}, X_i\right\rangle|X_1^{i-1}]]$$

és

$$V_n^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\log\left\langle b_i^{\widehat{\Delta}*}, X_i\right\rangle|X_1^{i-1}].$$

Így

$$\delta_n = \frac{1}{n}\log S_n^{\widehat{\Delta}*} - \frac{1}{n}\log S_n^{\widehat{\Delta}} = (U_n - U_n^*) + (V_n - V_n^*).$$

Megmutatjuk, hogy a

$$\log \left\langle b_n^{\widehat{\Delta}} , X_n \right\rangle - \mathbb{E}[\log \left\langle b_n^{\widehat{\Delta}} , X_n \right\rangle |X_1^{n-1}]$$

differencia egy martingál-differencia. Mérhető az $\mathcal{F}_n = \{\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n\}$ σ-algebrára nézve, továbbá

$$\mathbb{E}[\log \left\langle b_{n+1}^{\widehat{\Delta}} , X_{n+1} \right\rangle |X_1^n] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[\log \left\langle b_{n+1}^{\widehat{\Delta}} , X_{n+1} \right\rangle |X_1^n]|X_1^n] = 0.$$

Így U_n(és U_n^* is) martingáldifferenciák átlaga egy valószínűséggel 0-hoz konvergál a hozamra tett feltételezések mellett (lásd. Chow [18]). Ennek megfelelően

$$\begin{aligned}
& \liminf_{n\to\infty} \delta_n \geq \liminf_{n\to\infty}(U_n^* - U_n) + \liminf_{n\to\infty}(V_n^* - V_n) \\
= \; & \lim_{n\to\infty}(U_n^* - U_n) + \liminf_{n\to\infty}(V_n^* - V_n) \\
= \; & \lim_{n\to\infty} U_n^* - \lim_{n\to\infty} U_n + \liminf_{n\to\infty}(V_n^* - V_n) \\
= \; & 0 - 0 + \liminf_{n\to\infty}(V_n^* - V_n) \geq 0,
\end{aligned}$$

m.m.. Mivel $V_n^* - V_n \geq 0$ bármely n-re, amely a log-optimális portfólió-választás következménye. Így

$$\liminf_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\log S_n^{\widehat{\Delta}*} - \frac{1}{n}\log S_n^{\widehat{\Delta}}) \geq 0$$

A gyengébb állítás is igaz: a kockázat megszorítás melletti log-optimális stratégia várható növekedési üteme egy valószínűséggel nagyobb mint a tetszőleges másik kockázat megszorítás melletti befektetési stratégia növekedési üteme.

2.4. Tétel. *(Vajda [75]) Bármely $\{X_n\}_{-\infty}^{\infty}$ stacionárius és ergodikus folyamatra, amelyre $1-a \leq X_n^j \leq 1+c$, $a > 0$, $c > 0$ teljesül következik, hogy*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}\{\log(S_n^{\widehat{\Delta}*}/S_n^{\widehat{\Delta}})\} \geq 0.$$

Bizonyítás. Ahelyett, hogy csak hivatkoznám a kockázat megszorítás nélkü- li log-optimális portfóliókra vonatkozó eredeti bizonyításokra, itt rekonstruálom az eredeti bizonyításokat, megmutatva, hogy hol kell a szükséges változtatásokat megtenni a kockázat megszorítás miatt.

A kockázat megszorítás szerinti log-optimális portfólió definiciója alapján tetszőleges $\mathbf{b}_i^{\widehat{\Delta}}$-re

$$\mathbb{E}[\log \left\langle \mathbf{b}_i^{\widehat{\Delta}*}, \mathbf{X}_i \right\rangle |X_1^{i-1}] \geq \mathbb{E}[\log \left\langle \mathbf{b}_i^{\widehat{\Delta}}, \mathbf{X}_i \right\rangle |X_1^{i-1}].$$

Várható értéket véve kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\{\log \left\langle \mathbf{b}_i^{\widehat{\Delta}*}, \mathbf{X}_i \right\rangle\} \geq \mathbb{E}\{\log \left\langle \mathbf{b}_i^{\widehat{\Delta}}, \mathbf{X}_i \right\rangle\},$$

így tetszőleges megengedett portfólióra

$$\mathbb{E}\{\log(S_{i+1}^{\widehat{\Delta}*}/S_i^{\widehat{\Delta}*})\} \geq \mathbb{E}\{\log(S_{i+1}^{\widehat{\Delta}}/S_i^{\widehat{\Delta}})\}$$

Így, ha a kezdeti vagyonunk egy egységnyi pénz

$$\mathbb{E}\{\log(S_n^{\widehat{\Delta}*})\} = \mathbb{E}\{\sum_{i=1}^{n-1} \log(S_{i+1}^{\widehat{\Delta}*}/S_i^{\widehat{\Delta}*})\} \geq \mathbb{E}\{\sum_{i=1}^{n-1} \log(S_{i+1}^{\widehat{\Delta}}/S_i^{\widehat{\Delta}})\}$$

$$= \mathbb{E}\{\log(S_n^{\widehat{\Delta}})\},$$

vagyis

$$\mathbb{E}\{\log(S_n^{\widehat{\Delta}*}/S_n^{\widehat{\Delta}})\} \geq 0,$$

tetszőleges n-re, amelyből adódik a tétel állítása. ∎

A 2.4 tétel következményeként adódik, hogy bármely n-re

$$\mathbb{E}(S_n^{\widehat{\Delta}*}/S_n^{\widehat{\Delta}}) \geq 1. \tag{2.33}$$

A Jensen egyenlőtlenség alkalmazásából adódik

$$\log(\mathbb{E}(S_n^{\widehat{\Delta}*}/S_n^{\widehat{\Delta}})) \geq \mathbb{E}(\log(S_n^{\widehat{\Delta}*}/S_n^{\widehat{\Delta}})) \geq 0$$

Így

$$\mathbb{E}(S_n^{\widehat{\Delta}*}/S_n^{\widehat{\Delta}}) \geq 1$$

és

$$\mathbb{E}(S_n^{\widehat{\Delta}}/S_n^{\widehat{\Delta}*}) \leq 1.$$

(2.33) egyenlőtlenség alapján mutatok még egy rövidebb bizonyí- tást a 2.3 tételre.

Újabb bizonyítás a 2.3 Tételre A Markov egyenlőtlenség alkalmazásával, bármely $\epsilon > 0$-ra

$$P\{\frac{1}{n}log(S_n^{\widehat{\Delta}}/S_n^{\widehat{\Delta}*}) > \epsilon\} = P\{S_n^{\widehat{\Delta}}/S_n^{\widehat{\Delta}*} > e^{\epsilon n}\} \leq e^{-\epsilon n}\mathbb{E}\{S_n^{\widehat{\Delta}}/S_n^{\widehat{\Delta}*}\} \leq e^{-\epsilon n},$$

ebből következik

$$\sum_{i=1}^{\infty} P\{\frac{1}{i}log(S_i^{\widehat{\Delta}}/S_i^{\widehat{\Delta}*}) > \epsilon\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\epsilon i} < \infty.$$

A Borel-Cantelli lemma szerint annak a valószínűsége, hogy az $\{\frac{1}{n}\log(S_n^{\widehat{\Delta}}/S_n^{\widehat{\Delta}*}) > \epsilon\}$ esemény véges sok n esetén igaz, egyenlő 1-el. Mivel ϵ tetszőleges pozitív konstans

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log(S_n^{\widehat{\Delta}}/S_n^{\widehat{\Delta}*}) \leq 0$$

m.m., így

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log(S_n^{\widehat{\Delta}*}/S_n^{\widehat{\Delta}}) \geq 0$$

m.m.. ∎

A következő tétel a növekedési ütem egy valószínűségű konvergenciáját állítja.

2.5. Tétel. *(Vajda [75]) Bármely stacionárius és ergodikus folyamtra $\{X_n\}_{-\infty}^{\infty}$, amelyre $1 - a \leq X_n^j \leq 1 + c$, $a > 0$, $c > 0$ teljesül, következik, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log(S_n^{\widehat{\Delta}*}) = W^{\widehat{\Delta}*}$$

m.m..

Bizonyítás Alkalmazva a 2.3 tétel szerinti felbontást adódik, hogy

$$\frac{1}{n}\log S_n^{\widehat{\Delta}*} = U_n^* + V_n^*,$$

ahol

$$U_n^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\log\left\langle b_i^{\widehat{\Delta}*}, X_i\right\rangle - \mathbb{E}[\log\left\langle b_i^{\widehat{\Delta}*}, X_i\right\rangle |X_1^{i-1}]]$$

és

$$V_n^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\log\left\langle b_i^{\widehat{\Delta}*}, X_i\right\rangle |X_1^{i-1}].$$

Megmutattuk a 2.3 tétel bizonyításban, hogy $U_n^* \to 0$ m.m.. Tekintsük a következő a formulát.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \max_{\mathbf{b}\in\widehat{\Delta},\mathbf{b}\in\sigma\{X_{i-1},X_{i-2}\dots,X_0\}} \mathbb{E}[\log\langle\mathbf{b}, \mathbf{X}_i\rangle |\{X_{i-1}, X_{i-2}\dots, X_0\}].$$

Vegyük észre hogy a formula éppen a V_n^* lesz, amely 1 valószínűséggel konvergál a $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log S_n^{\widehat{\Delta}*}$ kifejezéshez.
Alkalmazzuk a $\mathcal{F}_n = \sigma(X_{-1}, X_{-2} \ldots, X_{-n})$ jelölést és legyen

$$\overline{w}_n = \max_{\mathbf{b}\in\widehat{\Delta},\mathbf{b}\in\mathcal{F}_n} \mathbb{E}[\log \langle \mathbf{b}\,,\, \mathbf{X}_0\rangle\,|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\log \langle \mathbf{b}^*(\mathcal{F}_n)\,,\, \mathbf{X}_0\rangle\,|\mathcal{F}_n],$$

ahol $n = 1, 2 \ldots$, és a $\mathbf{b} \in \mathcal{F}_n$ azt jelenti, hogy a portfólió vektor az n-dik időpontban $\mathcal{F}_n$-mérhető (vagyis a korábbi piaci árfolyamváltozások mérhető függvénye). $\overline{w}_n$ a maximális feltételes várható értékű loghozam a nulladik időszakra a $\mathcal{F}_n$ feltétel mellett.

Először megmutatjuk, hogy a $\{\overline{w}_n, \mathcal{F}_n\}$ szubmartingál. Az $\overline{w}_n$ valószínűségi változó - triviálisan - mérhető $\mathcal{F}_n$-re. Meg kell mutatni, hogy $\mathbb{E}[\overline{w}_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq \overline{w}_n$. Ha egy portfólió $\mathcal{F}_n$-mérhető, akkor $\mathcal{F}_{n+1}$-mérhető is, így adódik, hogy

$$\bar{w}_n = \mathbb{E}[\bar{w}_n|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\max_{\mathbf{b}\in\widehat{\Delta},\mathbf{b}\in\mathcal{F}_n} \mathbb{E}[\log \langle \mathbf{b}(\mathcal{F}_n)\,,\, \mathbf{X}_0\rangle\,|\mathcal{F}_n]|\mathcal{F}_n] \leq$$

$$\leq \mathbb{E}[\max_{\mathbf{b}\in\widehat{\Delta},\mathbf{b}\in\mathcal{F}_{n+1}} \mathbb{E}[\log \langle \mathbf{b}(\mathcal{F}_{n+1})\,,\, \mathbf{X}_0\rangle\,|\mathcal{F}_{n+1}]|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\bar{w}_{n+1}|\mathcal{F}_n]$$

Az eszközhozamok napi változása korlátos:

$$1 - a \leq \langle \mathbf{b}\,,\, \mathbf{X}_0\rangle \leq 1 + c$$

$$\log(1-a) \leq \log \langle \mathbf{b}\,,\, \mathbf{X}_0\rangle \leq \log(1+c)$$

$$\log(1-a) \leq \mathbb{E}|\log \langle \mathbf{b}\,,\, \mathbf{X}_0\rangle\,|_+ \leq \log(1+c)$$

Így $\overline{w}_n$ egy szubmartingál, amelyre $\mathbb{E}|\overline{w}_n|_+ \leq K$, ezért alkalmazhatjuk rá szubmartingál konvergencia tételt

$$\lim_{n\to\infty} \overline{w}_n = \overline{w}_\infty.$$

m.m..

A létezik a $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log S_n^{\widehat{\Delta}*}$ határérték. Következő lépésként megmutatjuk, hogy ez egyenlő $W^{\widehat{\Delta}*}$-val. Vezessük be a következő jelölést $f_i(X) = \bar{w}_i(X)$,

$$f_i(T^i X) =$$

$$= \bar{w}_i(T^i X) = \max_{\mathbf{b}\in\widehat{\Delta},\mathbf{b}\in\sigma\{X_{i-1},X_{i-2}\ldots,X_0\}} \mathbb{E}[\log \langle \mathbf{b}\,,\, \mathbf{X}_i\rangle\,|\{X_{i-1}, X_{i-2} \ldots, X_0\}]$$

Teljesül a $\mathbb{E}\sup_i |f_i(X)| < \infty$ kritérum is mivel a hozamok korlátosak. Így Breiman ergodtétel miatt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(T^i X)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \max_{\mathbf{b}\in\widehat{\Delta},\mathbf{b}\in\sigma\{X_{i-1},X_{i-2}\ldots,X_0\}} \mathbb{E}[\log\langle \mathbf{b}\,,\,\mathbf{X}_i\rangle\,|\{X_{i-1},X_{i-2}\ldots,X_0\}]$$

$$= \mathbb{E}\{\max_{b\in\widehat{\Delta}} \mathbb{E}[\log\langle b\,,\,X_0\rangle\,|X_{-\infty}^{-1}]\} = W^{\widehat{\Delta}*}.$$

m.m.. Vegyük észre, hogy $\lim_{n\to\infty} V_n^* = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} f_i(T^i X)$.

A két megközelítés összehasonlítása adja az eredményt:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} log(S_n^{\widehat{\Delta}*}) = W^{\widehat{\Delta}*}.$$

■

A következő tételben megmutatom, hogy, ha a kockázatmegszorítást folyamatosan 'enyhítem' akkor, ahogy az sejthető, folyamatosan emelkedik az átlagos aszimptotikus növekedési ütem.

2.6. Tétel. *(Vajda [75]) Bármely $\{X_n\}_{-\infty}^{\infty}$ stacionárius és ergodikus folyamatra, amelyre $1-a \leq X_n^j \leq 1+c$, $a>0$, $c>0$, továbbá legyen $r_{max} = \max_b \langle b\,,\,Cb\rangle$ akkor,*

$$\lim_{r\to r_{max}} W^{(r)*} = W^{(r_{max})*},$$

Bizonyítás Először megmutatjuk hogy $\max_b \langle b\,,\,Cb\rangle$ létezik. $X_n^j \leq (1+c)$, így $\langle b\,,\,X_n\rangle^2 \leq (1+c)^2$ és $\max_b \langle b\,,\,Cb\rangle \leq (1+c)^2$. Nyilvánvalóan $r_1 > r_2 \Rightarrow B_{r_1} \supseteqq B_{r_2}$. Így,

$$\begin{aligned} & W^{(r_1)*} - W^{(r_2)*} \\ = & \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\log S_n^{(r_1)*} - \frac{1}{n}\log S_n^{(r_2)*}\right) \\ \geq & \; 0, \end{aligned}$$

ennek megfelelően $W^{(r_2)*} \leq W^{(r_1)*}$, és $W^{(r)*}$ monoton emelkedik r-ben. Így $W^{(r)*}$ konvergens a nyilvánvaló $W^{(r_{max})*}$ határértékkel. ■

A klasszikus log-optimális elméletben fontos lépés volt a log-optimális portfólió Kuhn-Tucker jellemzésének megadása. Hiszen ez szolgálhatja egy olyan numerikus algoritmus meghatározását, amely alapján a log-optimális portfólió meghatározható.

A célom a továbbiakban a Thomas Cover által bevezetett hagyományos log-optimális portfólió Kuhn-Tucker jellemzésnek megfelelő Kuhn-Tucker jellemzés elkészítése kockázat megszorítás melletti log-optimális portfólió esetén. Legyen $W(\mathbf{b}) = \mathbb{E}\{\log\langle b\,,\,X\rangle\}$. A következő nemlineáris programozási feladatra jutunk.

$$\begin{aligned}
&g_1(\mathbf{b}) = \langle b\,,\,Cb\rangle - r \le 0\\
&g_2(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{d} b_i - 1 \le 0\\
&g_3(\mathbf{b}) = -\sum_{i=1}^{d} b_i + 1 \le 0\\
&\mathbf{b} \ge 0\\
&f(\mathbf{b}) = W(b) \to \max
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Amint az olvasó észrevehette, ebben a fejezetben f.a.e. esetre térünk vissza.

A fenti nemlineáris programozási feladathoz kapcsolódó Lagrange függvény a következő:

$$L(\mathbf{b},\lambda) = W(\mathbf{b}) - \lambda_1(\langle b\,,\,Cb\rangle - r) - \lambda_2(\sum_i b^{(i)} - 1) + \lambda_3(\sum_i b^{(i)} - 1)$$

A kapcsolódó Kuhn-Tucker feltételek a következők:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L(\mathbf{b})}{\partial b^{(i)}} \le 0, b^{(i)} \ge 0, \text{és}\;\; b^{(i)}\frac{\partial L(\mathbf{b})}{\partial b^{(i)}} = 0,\;\; i = 1, ..., d\\
&\langle b\,,\,Cb\rangle \le r,\;\; \lambda_1 \ge 0,\; \text{és}\;\; \lambda_1(\langle b\,,\,Cb\rangle - r) = 0\\
&\sum_{i=1}^{d} b^{(i)} \le 1,\;\; \lambda_2 \ge 0,\;\; \text{és}\;\; \lambda_2(\sum_{i=1}^{d} b^{(i)} - 1) = 0\\
&-\sum_{i=1}^{d} b^{(i)} \le -1,\;\; \lambda_3 \ge 0,\;\; \text{és}\;\; \lambda_3(\sum_{i=1}^{d} b^{(i)} - 1) = 0,
\end{aligned}$$

ahol

$$\frac{\partial L(\mathbf{b})}{\partial b^{(i)}} = \mathbb{E}\left(X^{(i)}/\langle b\,,\,X\rangle\right) - 2\lambda_1(Cb)_i - \lambda_2 + \lambda_3,$$

$i = 1, ..., d.$

A Kuhn-Tucker-féle feltételek megoldásai szolgáltatják a

$$(\mathbf{b},(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)) \in R^d \times R^3$$

Kuhn-Tucker (KT) pontokat. KT feltételeket tipikusan arra használják, hogy az egyéb úton meghatározott extrémumokat optimalitás szempontjából megvizsgálják.
Vegyük észre hogy a fenti nemlineáris optimalizálási feladatban minden függvény $(g_1(\mathbf{b}), g_2(\mathbf{b}), g_3(\mathbf{b}), f(\mathbf{b}))$ konvex. Konvex halmazok metszete konvex ezért konvex célfüggvényt szeretnénk minimalizálni egy konvex halmaz fellett. Így ez egy konvex programozási feladat, ezért a KT pontok halmaza optimális megoldás lesz.

A KT feltételek első sora alapján, ha $b^{(i)} > 0$, akkor $\frac{\partial L(\mathbf{b})}{\partial b^{(i)}} = 0$, és ha $b^{(i)} = 0$ akkor $\frac{\partial L(\mathbf{b})}{\partial b^{(i)}} \leq 0$.

Azokban az esetekben, amikor a $\mathbf{b}$ portfólió kockázata a megengedett maximális kockázatnál kisebb, vagyis ha $\langle b\,,\, Qb\rangle < r$, akkor a KT feltételek második sora alapján következik, hogy $\lambda_1 = 0$ és így

$$\mathbb{E}\left(X^{(i)}/\left\langle b\,,\, X\right\rangle\right) \quad \begin{cases} = & \lambda_3 - \lambda_2,\ \ ha\ b_i > 0 \\ \leq & \lambda_3 - \lambda_2,\ \ ha\, b_i = 0 \end{cases}$$

$i = 1, ..., d$. Innen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{d} b^{(i)}\mathbb{E}\left(X^{(i)}/\left\langle b\,,\, X\right\rangle\right) &= \sum_{i=1}^{d} \mathbb{E}\left(b^{(i)}X^{(i)}/\left\langle b\,,\, X\right\rangle\right) \\ &= \sum_{i=1}^{d} \mathbb{E}\left(\left\langle b\,,\, X\right\rangle / \left\langle b\,,\, X\right\rangle\right) = 1 \\ &= \sum_{i=1}^{d} b^{(i)}(\lambda_3 - \lambda_2) \\ &= (\lambda_3 - \lambda_2)\sum_{i=1}^{d} b^{(i)} \\ &= (\lambda_3 - \lambda_2), \end{aligned}$$

így azt kapjuk, hogy $\lambda_3 - \lambda_2 = 1$. Vegyük észre, hogy abban az esetben, amikor a kockázatra tett megszorítás inaktív, visszajutunk a hagyományos log-optimális portfólió Cover [20] által vizsgált esetéhez.

Abban az esetben, ha a portfólió kockázata megegyezik a maximálisan megengedettel, vagyis, ha $\langle b\,, Qb\rangle = r$ ($\lambda_1 \geq 0$), és ha $b^{(i)} > 0$ bármely i-re, akkor a következő összefüggést kapjuk a Lagrange szorzók között:

$$\sum_{i=1}^{d} b^{(i)} \frac{\partial L(\mathbf{b})}{\partial b^{(i)}} = \mathbb{E}\left(\langle b\,, X\rangle \,/\, \langle b\,, X\rangle\right) - 2\lambda_1 \langle b\,, Qb\rangle - \lambda_2 + \lambda_3$$

$$= 1 - 2\lambda_1 r - \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

azaz $-\lambda_2 + \lambda_3 = -1 + 2\lambda_1 r$, a következő lemma adódik:

2.7. Lemma. *(Vajda [75]) Abban az esetben, ha kockázatra tett megszorító feltétel aktív, akkor a KT feltétel az alábbi lesz*

$$\mathbb{E}\left(X^{(i)}/\left\langle b\,, X\right\rangle\right) - 2\lambda_1((Cb)_i - r) - 1 = 0,$$

$i = 1, ..., d.$

Általában a KT feltételeket úgy használjuk, hogy a megsejtett $\mathbf{b}$ optimális portfóliót behelyettesítjük a feltételekbe és ellenőrizzük, hogy vajon minden feltétel teljesül egy konstans λ_1 szorzó, (és a $\lambda_2 - \lambda_3$ különbség segítségével.). A teljesülést megadott pontosság mellett kell érteni.

Egy további fontos tényt is megfogalmazok alább a kockázatmegszorítás melletti log-optimális portfólióval kapcsolatban.

2.8. Lemma. *(Vajda [75]) Tegyük fel, hogy a variancia korlátozás nélküli esetben az optimális portfólió a $B^{(r)}$ halmazon kívül esik, azaz a $\Delta_d \setminus B^{(r)}$ halmaznak az eleme. Ekkor a kockázatmegszorítás melletti log-optimális portfólió egyértelmű és a $B^{(r)}$ halmaz határán helyezkedik el.*

Bizonyítás As $B^{(r)}$ halmaz és a célfüggvény is konvex, így a lokális szélsőértékhely nem lehet a $B^{(r)}$ belső pontja. Ugyanis, ha egy konkáv függvénynek lokáli szélsőértéke van egy konvex halmaz belsejében, akkor egyben ez globális szélsőértékhely is. Így mivel a lokális szélsőérték lokális szélsőérték lenne a Δ_d belül is így globális szélsőérték lenne a Δ_d belül, így a globális zsélsőérték belső pontja lenne $B^{(r)}$ halmaznak. Ez utóbbi viszont ellentmond a tétel feltételének. Így kockázatmegszorítás melletti szélsőértéke csak a $\overline{B}^{(r)}$ halmazon vagyis $B^{(r)}$ határán lehet. Megmutatjuk, hogy a szélsőérték egyértelm(̋u). Megmutatható, hogy kockázatmegszorítás mellett is érvényben marad a log-optimális portfóliók azon tulajdonsága, hogy konvex halmazt alkotnak. Igy, ha két szélsőérték lenne a határon, akkor ezek konvex kombinációja is szélsőérték lenne, ekkor a kombinációknak egy része a $B^{(r)}$ halmaz belsejébe esne. ∎

A 2.8 lemma alapján fontos közelítő becslést kapunk az optimum elhelyezkedéséről: az optimális portfólió a hagyományos log-optimális portfólió esetén $B^{(r)}$ halmazon belül vagy kívül helyezkedik el. Az utóbbi esetben a megszorítás felületén keressük az optimumot.

3. fejezet

Empírikus portfólió-választás

A disszertáció 1. fejezetében bemutattam az *univerzálisan konzisztens* stratégiákat, amelyek a log-optimális stratégia aszimptotikus növekedési ütemét az eloszlás ismerete nélkül elérik.

Ebben a fejezetben egy új stratégiát a magfüggvény alapú szemi-log-optimális stratégiát vezetem be, amely stacionárius és ergodikus hozamfolyamat feltételezése mellett közel optimális aszimptotikus növekedési ütemet ér el, alacsony számítási költség mellett. Az eljárás a Györfi, Lugosi, Udina [37] által bevezetett magfüggvény alapú eljárás közelítése úgy, hogy a hozamvektor első és második momentumát használjuk csak.

Ugyancsak ebben a fejezetben vezetek be egy olyan stratégiát amely azonos növekedési ütemet produkál, mint a Markowitz-típusú stratégia a hozamfolyamat eloszlásának ismerete nélkül. A stratégia minden egyes lépésben átlag- variancia optimalizálást végez ilyen értelemben kockázatkerülő.

Olyan eljárásokat kell megadni, amelyet ha minden véges időhorizonton alkalmazunk, akkor végülis, vagyis határértékben, megkapjuk az eredeti stratégia növekedési ütemet.

A fejezetet NYSE adatokon végzett empírikus vizsgálat zárja a magfüggvény alapú szemi-log-optimális és a magfüggvény alapú Markowitz-típusú stratégiára vonatkozóan.

3.1. Magfüggvény alapú szemi-log-optimális stratégia

Definiáljuk a szakértők végtelen vektorát a következőképpen: $\tilde{H}^{(k,\ell)} = \{\tilde{h}^{(k,\ell)}(\cdot)\}$, ahol k, ℓ pozitív egészek. Rögzített pozítiv egész k esetén válaszszuk meg az $r_{k,\ell} > 0$ sugarat a következőképpen:

$$\lim_{\ell\to\infty} r_{k,\ell} = 0.$$

Ekkor bármely $n > k+1$ esetén definiáljuk a $\tilde{h}^{(k,\ell)}$ szakértőket a következőképpen. Jelölje J_n az egybeeséseket:

$$J_n = \left\{k < i < n : \|x_{i-k}^{i-1} - x_{n-k}^{n-1}\| \leq r_{k,\ell}\right\}.$$

Legyen

$$\tilde{h}^{(k,\ell)}(x_1^{n-1}) = \arg\max_{b\in\Delta_d} \sum_{\{i\in J_n\}} h(\langle b\,,\, x_i\rangle) \tag{3.1}$$

ha az összegzés nem üres, egyébként $b_0 = (1/d, \ldots, 1/d)$.

Kombináljuk a szakértőket a következőképpen: legyen $\{q_{k,\ell}\}$ a (k, ℓ) pozitív egészek feletti valószínűségeloszlás, amelyre bármely k, ℓ esetén teljesül $q_{k,\ell} > 0$. A $\tilde{B}^K$ stratégiát a következőképpen kaphatjuk meg:

$$\tilde{b}(\mathrm{x}_1^{n-1}) \doteq \frac{\sum_{k,\ell} q_{k,\ell} S_{n-1}(\tilde{H}^{(k,\ell)}) \tilde{h}^{(k,\ell)}(\mathrm{x}_1^{n-1})}{\sum_{k,\ell} q_{k,\ell} S_{n-1}(\tilde{H}^{(k,\ell)})},$$

Jelölje $S_n(\tilde{H}^{(k,\ell)})$ az elemi $\tilde{H}^{(k,\ell)}$ szakértő n-dik napra felhalmazott tőkéjét $S_0 = 1$ kezdeti tőkével

$$\tilde{S}_n^K = S_n(\tilde{B}^K) = \sum_{k,\ell} q_{k,\ell} S_n(\tilde{H}^{(k,\ell)})\ . \tag{3.2}$$

Belátható hogy a $\tilde{h}^{(k,\ell)}(x_1^{n-1})$ kiszámításának futásideje sokkal kisebb volt (ha $|J|_n$ elég nagy) mint a $h^{(k,\ell)}(x_1^{n-1})$ számítási ideje. Ahhoz hogy meghatározzuk $h^{(k,\ell)}(x_1^{n-1}) = \arg\max_{b\in\Delta_d} \prod_{\{i\in J_n\}} \langle b\,,\, x_i\rangle$ magfüggvény alapú log-optimális portfóliót, a lehetséges b értékek felett kell optimalizálni. Minden egyes optimlizációs lépés esetén a kiszámítás futásideje az illeszkedések ($|J_n|$) számától függ. Pontosabban, ha s jelöli egy adott k és ℓ pár esetén az optimális b meghatározásához szükséges iterációk számát akkor a számítási költség $O(|J_n| * s)$ (ahol O a nagy ordot jelöli). A $\tilde{h}^{(k,\ell)}(x_1^{n-1})$ magfüggvény alapú szemi-log-optimális portfólió esetén a komplexítás csökkenthető. Tekintsük a

$$\sum_{\{i \in J_n\}} h(\langle b\,,\, x_i\rangle) = \sum_{\{i \in J_n\}} (\langle b\,,\, x_i\rangle - 1) - \frac{1}{2} \sum_{\{i \in J_n\}} (\langle b\,,\, x_i\rangle - 1)^2.$$

kifejezést, ha $\mathbf{1}$ jelöli az azonosan 1 vektort, akkor

$$\sum_{\{i \in J_n\}} h(\langle b\,,\, x_i\rangle) = \langle b\,,\, \mathbf{m}\rangle - \langle b\,,\, Cb\rangle\,,$$

ahol

$$\mathbf{m} = \sum_{\{i \in J_n\}} (x_i - \mathbf{1})$$

és

$$C = \frac{1}{2} \sum_{\{i \in J_n\}} (x_i - \mathbf{1})(x_i - \mathbf{1})^T.$$

Ha előre meghatározzuk a $\mathbf{m}$ vektort és C mátrixot akkor az egyes optimalizációs lépések esetén a a futásidő nem függ az illeszkedések számától, a futásidő $O(|J_n| + d^2 * s)$. Így a $\tilde{h}^{(k,\ell)}(x_1^{n-1})$ kiszámításának futásideje (ha $|J|_n$ elég nagy) akkor sokkal kisebb, mint a $h^{(k,\ell)}(x_1^{n-1})$ meghatározásának futásideje.

3.1. Tétel. *(Györfi, Urbán és Vajda [38]) Megmutatható, hogy ha a hozamfolyamat stacionárius és ergodikus és $1 - a \le X_n^j \le 1 + c$, $0.4 > a > 0$, $c > 0$, minden $j = 1, 2, \ldots d$-re, akkor $\tilde{S}_n^K = S_n(\tilde{B}^K)$ esetén*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \tilde{S}_n^K \ge W^* - \frac{5}{6}\mathbb{E}\{\max_j |X^{(j)} - 1|^3\} \quad m.m.$$

Az állítás azt mutatja, hogy a magfüggvény alapú szemi-log-optimális stratégia közel olyan veszteséget szenved el a log-optimális stratégiával szemben, mint amit a szemi-log-optimális stratégia szenved el.

A 3.1 tétel bizonyítása a következő két alapvető eredményt használja. A lemmák Algoet and Cover [4, Theorems 3 and 4] eredményeinek módosításai.

3.1. Lemma. *Legyen $Q_{n\in\mathcal{N}\cup\{\infty\}}$ a $1 - a \le X_n^{(j)} \le 1 + c$, $1 > a > 0$, $c > 0$ piaci vektorok $\mathbb{R}_+^d$ feletti reguláris valószínűségek családja,* *amelyeknek bármely $X_n = (X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(d)})$ koordinátája Q_n eloszlású. Továbbá, legyen $\tilde{B}(Q_n)$ a Q_n szerinti szemi-log-optimális portfóliók halmaza, azaz azon b portfóliók halmaza amelyek elérik $\max_{b\in\Delta_d} \mathbb{E}_{Q_n}\{h(\langle b\,,\, X_n\rangle)\}$ maximumot. Tekintsünk egy tetszőleges $\tilde{b}_n \in \tilde{B}(Q_n)$ sorozatot. Ha*

$$Q_n \to Q_\infty \quad \textit{gyengén konvergál, ahogy } n \to \infty$$

akkor, Q_∞ majdnem minden x-re,

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle \tilde{b}_n\,,\, x\right\rangle = \left\langle \tilde{b}^*\,,\, x\right\rangle,$$

ahol $\tilde{b}^*$ bejárja $\tilde{B}(Q_\infty)$-t.

Bizonyítás. Jelölje X a piaci vektorok halmazát

$$X = \{x : x \in R_+^d, x^{(i)} \in [1-a, 1+c] i = 1, 2, ..d.\}$$

Legyen $\mathcal{Q}$ a valószínűségi mértékek tere a kompakt metrikus X téren. A $\mathcal{Q}$ tér kompakt és metrizálható, ha a gyenge topológiával szereljük fel, és jelölje a $\mathcal{Q}$-ön a valószínűségi mértékek terét Q. A gyenge topologia az a leggyengébb topológia a $\mathcal{Q}$-ön, amelyre a $Q \to \mathbb{E}_Q f(X)$ függvény folytonos $Q \in \mathcal{Q}$-ben, bármely folytonos és korlátos függvényre $f : X \to R$.

Első lépésként megmutatjuk a következőt:
a $\tilde{w}(Q) = \sup_{b\in\Delta_d}\{\mathbb{E}_Q\{h(b, X)\}\}$ leképezés konvex, korlátos és folytonos, ha a $\mathcal{Q}$ téren a gyenge topológia van. A szemi-log-optimális portfóliók $\tilde{\mathrm{B}}(Q)$ halmaza a Δ_d-nek nemüres konvex és kompakt részhalmaza bármely X-en levő Q eloszlás esetén, és a bármely $Q \in \mathcal{Q}$ esetén kiválasztható $\tilde{b}(Q)$ szemi-log-optimális portfólió mérhető módon.
A $\tilde{w}(Q)$ leképezés konvex a Q-ban, mivel a Q-ban affin függvények suprémuma. Először megmutatjuk, hogy $\tilde{w}(Q)$ alulról félig-folytonos. A $h(b, x)$ függvény folytonos x-ben, így alulról félig folytonos x-ben. A $w(b, Q) = \mathbb{E}_Q\{h(b, X)\}$ is alulról félig-folytonos és a $\tilde{w}(Q) = \sup_{b\in\Delta_d} w(b, Q)$ is alulról félig-folytonos Q-ban. Mivel h korlátos és folytonos, használva a gyenge topológia definicióját és azt, hogy az alulról félig-folytonos függyvények suprémuma ismét alulról félig-folytonos. Másrészről $h(b, x)$ felülről is félig-folytonos a $\Delta_d \times X$-ben a $h(b, x)$ folytonossága miatt, így $w(b, Q)$ felülről korlátos és felülről félig-folytonos $\Delta_d \times \mathcal{Q}$-ben. Δ_d kompaktsága miatt (Bertsekas and Shreve (1978), 7.33 állítás), hogy $\tilde{w}(Q)$ felülről-félig folytonos $\mathcal{Q}$-ben. A szemi-log-optimális portfólió mérhető módon kiválasztható bármely

$Q \in \mathcal{Q}$-ra a Kuratowski and Ryll-Nardzewski (1961) mérhető kiválasztási tétele szerint.

A második lépésként megmutatjuk: Ha $Q_n \to Q_\infty$ $\mathcal{Q}$-ben, $\tilde{b}_n \to \tilde{b}^*$ Δ_d-ban és $\tilde{b}_n \in \tilde{B}(Q_n)$ bármely n-re, akkor $\tilde{b}^* \in \tilde{B}(Q_\infty)$. Tekintsük a szemi-log-optimális portfóliók $\tilde{w}(Q_n) = w(\tilde{b}_n, Q_n)$ sorozatát. $\tilde{w}(Q_n) \to \tilde{w}(Q_\infty)$ mivel $Q_n \to Q_\infty$ $\mathcal{Q}$-ben, és $\tilde{w}(Q)$ folytonos Q-ban. Másrészről $w(b, Q)$ felülről félig folytonos $\Delta_d \times \mathcal{Q}$-én és így

$$\limsup_{n\to\infty} w(\tilde{b}_n, Q_n) \leq w(\lim_{n\to\infty} \tilde{b}_n, \lim_{n\to\infty} Q_n) = w(\tilde{b}^*, Q_\infty).$$

A $\{\tilde{b}^* \in \tilde{B}(Q_\infty)\}$ állítás következik abból, hogy

$$w(\tilde{b}^*, Q_\infty) \geq \limsup_{n\to\infty} w(\tilde{b}_n, Q_n) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{w}(Q_n) = \tilde{w}(Q_\infty) = \sup_b w(b, Q_\infty)$$

Következésképpen $(\tilde{b}_n, x) \to (\tilde{b}^*, x)$ majdnem minden Q_∞ x-re. ∎

A következő lemmát is a magfüggvény alalpú szemi-log-optimális stratégia teljesítményének bizonyításában fogjuk használni. A bizonyítás a szubmartingál konvergencia tételre és a Lebesque-féle dominált konvergencia tételre épül.

3.2. Lemma. *Legyen X egy véletlen vektor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn. Legyen $h \in C_0[a, c]$, ahol $1 > a > 0$, $c > 1$. Ha $\mathcal{F}_k$ a rész-σ-algebrák növekvő családja. Továbbá $\mathcal{F}$ olyan, hogy*

$$\mathcal{F}_k \nearrow \mathcal{F}_\infty \subseteq \mathcal{F} \ ,$$

akkor

$$\mathbb{E}\left\{\max_b \mathbb{E}\left[h(\langle b\,,\, X\rangle)|\mathcal{F}_k\right]\right\} \nearrow \mathbb{E}\left\{\max_b \mathbb{E}\left[h(\langle b\,,\, X\rangle)|\mathcal{F}_\infty\right]\right\}$$

és $k \to \infty$, ahol a baloldali maximumot az összes $\mathcal{F}_k$-mérhető b függvény felett vesszük, és jobboldali maximum az $\mathcal{F}_\infty$-mérhető b függvények felett van véve.

Bizonyítás. Vezessük be a

$$\overline{w}_n \doteq \max_{\mathbf{b}} \mathbb{E}\left[h(\langle b\,,\, X\rangle)|\mathcal{F}_n\right]$$

jelölést, ahol $n = 1, 2 \ldots$. Először megmutatjuk, hogy $\{\bar{w}_n\}$ szubmartingál. $\bar{w}_n$ valószínűségi változó $\mathcal{F}_n$ mérhető. Meg kell mutatni, hogy $E[\overline{w}_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq \bar{w}_n$. Ha a portfólió $\mathcal{F}_n$-mérhető, akkor $\mathcal{F}_{n+1}$-mérhető is, ezért azt kapjuk hogy

$$\begin{aligned}
\bar{w}_n &= \max_{\mathbf{b}} \mathbb{E}\left[h\left\langle b\,,\,X\right\rangle|\mathcal{F}_n\right] \\
&= \max_{\mathbf{b}} \mathbb{E}[\mathbb{E}\left[h\left\langle b\,,\,X\right\rangle|\mathcal{F}_{n+1}\right]|\mathcal{F}_n] \\
&\leq \mathbb{E}[\max_{\mathbf{b}} \mathbb{E}\left[h\left\langle b\,,\,X\right\rangle|\mathcal{F}_{n+1}\right]|\mathcal{F}_n] \\
&= \mathbb{E}[\bar{w}_{n+1}|\mathcal{F}_n],
\end{aligned}$$

Így $\bar{w}_n$ egy szubmartingál és $E|\bar{w}_n|_+ \leq \infty$, is teljesül, mivel $h \in C_0[a, c]$. Alkalmazva a szubmartingál konvergencia tételt kapjuk, hogy létezik olyan $\bar{w}_\infty$ valószínűségi változó, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \overline{w}_n = \overline{w}_\infty.$$

m.m.. $|\bar{w}_n|$ korlátos, mivel $h \in C_0[a, c]$, vagyis van egy integrálható függvényünk, amely dominálja $\bar{w}_n$. Lebesque dominált konvergencia tétel miatt

$$\mathbb{E}\left\{\max_{b} \mathbb{E}\left[h\left\langle b\,,\,X\right\rangle|\mathcal{F}_k\right]\right\} \to \mathbb{E}\left\{\max_{b} \mathbb{E}\left[h\left\langle b\,,\,X\right\rangle|\mathcal{F}_\infty\right]\right\}$$

Elég megmutatni, hogy

$$\mathbb{E}[\bar{w}_n] \leq \mathbb{E}[\bar{w}_{n+1}],$$

ami következik abból hogy

$$\bar{w}_n \leq \mathbb{E}[\bar{w}_{n+1}|\mathcal{F}_n],$$

várható értéket véve mindkét oldalon.

∎

A két lemma bebizonyítása után készen állunk arra, hogy belássuk a alsó becslésünket a magfüggvény alapú szemi-log-optimális stratégia aszimptotikus növekedési ütemére.

A 3.1 Tétel bizonyítása. A bizonyítás egyszerű módosítása a Györfi, Lugosi, Udina [37] fő bizonyításának. Feltehetjük, hogy $S_0 = 1$, így

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} W_n(\tilde{B}^K) &= \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log S_n(\tilde{B}^K) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{k,\ell} q_{k,\ell} S_n(\tilde{H}^{(k,\ell)}) \right) \\
&\geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left(\sup_{k,\ell} q_{k,\ell} S_n(\tilde{H}^{(k,\ell)}) \right) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{k,\ell} \left(\log q_{k,\ell} + \log S_n(\tilde{H}^{(k,\ell)}) \right) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \sup_{k,\ell} \left(W_n(\tilde{H}^{(k,\ell)}) + \frac{\log q_{k,\ell}}{n} \right) \\
&\geq \sup_{k,\ell} \liminf_{n\to\infty} \left(W_n(\tilde{H}^{(k,\ell)}) + \frac{\log q_{k,\ell}}{n} \right) \\
&= \sup_{k,\ell} \liminf_{n\to\infty} W_n(\tilde{H}^{(k,\ell)}). \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Taylor sorfejtéssel

$$h(z) - \frac{1}{2}|z-1|^3 \leq \log z \leq h(z) + \frac{1}{3}|z-1|^3,$$

bármely $z > 0.6$ esetén, így

$$\begin{aligned}
W_n(\tilde{H}^{(k,\ell)}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log \left\langle \tilde{h}^{(k,\ell)}(X_1^{i-1}),\, X_i \right\rangle \\
&\geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h\left(\left\langle \tilde{h}^{(k,\ell)}(X_1^{i-1}),\, X_i \right\rangle \right) - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \left| \left\langle \tilde{h}^{(k,\ell)}(X_1^{i-1}),\, X_i \right\rangle - 1 \right|^3.
\end{aligned}$$

A Jensen egyenlőtlenség felhasználásával,

$$|\langle b,\, X_i \rangle - 1|^3 = \left| \sum_{j=1}^{d} b^{(j)}(X_i^{(j)} - 1) \right|^3 \leq \sum_{j=1}^{d} b^{(j)} \left| X_i^{(j)} - 1 \right|^3 \leq \max_j \left| X_i^{(j)} - 1 \right|^3,$$

következésképpen

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \left| \left\langle \tilde{h}^{(k,\ell)}(X_1^{i-1}),\, X_i \right\rangle - 1 \right|^3 &\geq -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \max_j \left| X_i^{(j)} - 1 \right|^3 \\
&\to -\frac{1}{2} \mathbb{E} \left\{ \max_j \left| X_0^{(j)} - 1 \right|^3 \right\}.
\end{aligned}$$

Rögzítsük a k, ℓ egészeket és a $s = s_{-k}^{-1} \in \mathbb{R}_+^{dk}$ vektort. Jelölje $\mathbb{P}_{j,s}^{(k,\ell)}$ a $\{X_i : 1-j+k \le i \le 0, \|X_{i-k}^{i-1} - s\| \le r_{k,\ell}\}$ koncentrált valószínűségi mértéket, amit a következőképpen definiálunk

$$\mathbb{P}_{j,s}^{(k,\ell)}(A) = \frac{\sum_{i:1-j+k\le i\le 0, \|X_{i-k}^{i-1}-s\|\le r_{k,\ell}} \mathbb{I}_A(X_i)}{|\{i : 1-j+k \le i \le 0, \|X_{i-k}^{i-1} - s\| \le r_{k,\ell}\}|}, \qquad A \subset \mathbb{R}_+^d$$

ahol $\mathbb{I}_A$ az A halmaz indikátorfüggvényét. Ha X_i-k fenti halmaza üres, akkor koncentrálódjon a $\mathbb{P}_{j,s}^{(k,\ell)} = \delta_{(1,\dots,1)}$ valószínűségi mérték a $(1, \dots, 1)$. vektoron. Más szavakkal, $\mathbb{P}_{j,s}^{(k,\ell)}(A)$ a $X_{1-j+k}, \dots, X_0$ vektorok A halmazba esésének relatív gyakorisága. Györfi, Lugosi, Udina [37] bizonyította hogy bármely s-re

$$\mathbb{P}_{j,s}^{(k,\ell)} \to \begin{cases} \mathbb{P}_{X_0 \big| \|X_{-k}^{-1}-s\|\le r_{k,\ell}} & \text{if } \mathbb{P}(\|X_{-k}^{-1} - s\| \le r_{k,\ell}) > 0, \\ \delta_{(1,\dots,1)} & \text{if } \mathbb{P}(\|X_{-k}^{-1} - s\| \le r_{k,\ell}) = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

gyengén, ahogy $j \to \infty$, ahol $\mathbb{P}_{X_0 \big| \|X_{-k}^{-1}-s\|\le r_{k,\ell}}$ jelöli a X_0 vektor eloszlását a $\|X_{-k}^{-1} - s\| \le r_{k,\ell}$ esemény felett.

Jelölje a $\tilde{b}^{(k,\ell)}(X_{1-j}^{-1}, s)$ a szemi-log-optimális portfóliót $\mathbb{P}_{j,s}^{(k,\ell)}$ valószínűségi mértékre nézve. Így

$$\tilde{b}^{(k,\ell)}(X_{1-j}^{-1}, s) = \arg\max_{b \in \Delta_d} \frac{\sum_{\{i:1-j+k\le i\le 0, \|X_{i-k}^{i-1}-s\|\le r_{k,\ell}\}} h\langle b\,,\, X_i\rangle}{\left|\left\{i : 1-j+k \le i \le 0, \|X_{i-k}^{i-1} - s\| \le r_{k,\ell}\right\}\right|}.$$

ha a szumma nem üres, egyébként $b_0 = (1/d, \dots, 1/d)$. Jelölje $\tilde{b}_{k,\ell}^*(s)$ a $\mathbb{P}_s^{*(k,\ell)}$ határeloszlás szerinti szemi-log-optimális portfóliót. Ekkor 3.1 lemma miatt, ha j végtelenbe tart akkor

$$\lim_{j\to\infty} \left\langle \tilde{b}^{(k,\ell)}(X_{1-j}^{-1}, s)\,,\, x_0 \right\rangle = \left\langle \tilde{b}_{k,\ell}^*(s)\,,\, x_0 \right\rangle$$

egy valószínűségű konvergencia adódik $\mathbb{P}_s^{*(k,\ell)}$ majdnem minden x_0-ra és így $\mathbb{P}_{X_0}$-majdnem minden x_0-ra is. Mivel s tetszőleges volt

$$\lim_{j\to\infty} \left\langle \tilde{b}^{(k,\ell)}(X_{1-j}^{-1}, X_{-k}^{-1})\,,\, x_0 \right\rangle = \left\langle \tilde{b}_{k,\ell}^*(X_{-k}^{-1})\,,\, x_0 \right\rangle \quad \text{m.m.} \tag{3.5}$$

Most alkalmazzuk 2.1 lemmát a

$$f_i(x_{-\infty}^{\infty}) = h\left(\left\langle \tilde{h}^{(k,\ell)}(x_{1-i}^{-1})\,,\, x_0 \right\rangle\right) = h\left(\left\langle \tilde{b}^{(k,\ell)}(x_{1-i}^{-1}, x_{-k}^{-1})\,,\, x_0 \right\rangle\right)$$

függvényre, amely a $x_{-\infty}^{\infty} = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ sorozat felett van definiálva. Vegyük észre, hogy

$$\left|f_i(X_{-\infty}^{\infty})\right| = \left|h\left(\left\langle \tilde{h}^{(k,\ell)}(X_{1-i}^{-1})\,,\, X_0\right\rangle\right)\right| \le \sum_{j=1}^{d}\left|h(X_0^{(j)})\right| \;,$$

amelynek véges a várható értéke és

$$f_i(X_{-\infty}^{\infty}) \to \left\langle \tilde{b}_{k,\ell}^*(X_{-k}^{-1})\,,\, X_0\right\rangle \quad \text{m.m., amikor } i \to \infty$$

a (3.9) miatt. Ha $n \to \infty$ akkor a 2.1 lemmából

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h\left(\left\langle \tilde{h}^{(k,\ell)}(X_1^{i-1})\,,\, X_i\right\rangle\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(T^i X_{-\infty}^{\infty}) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h\left(\left\langle \tilde{h}^{(k,\ell)}(X_1^{i-1})\,,\, X_i\right\rangle\right) \\
&\to \mathbb{E}\left\{h\left(\left\langle \tilde{b}_{k,\ell}^*(X_{-k}^{-1})\,,\, X_0\right\rangle\right)\right\} \\
&\doteq \bar{\epsilon}_{k,\ell} \quad \text{m.m.}
\end{aligned}$$

kapjuk. $b_{k,\ell}^*(s)$ jelölje a $\mathbb{P}_s^{*(k,\ell)}$ határeloszlás szerinti log-optimális portfóliót. Ekkor

$$\begin{aligned}
\bar{\epsilon}_{k,\ell} &= \mathbb{E}\left\{h\left(\left\langle \tilde{b}_{k,\ell}^*(X_{-k}^{-1})\,,\, X_0\right\rangle\right)\right\} \\
&\ge \mathbb{E}\left\{h\left(\left\langle b_{k,\ell}^*(X_{-k}^{-1})\,,\, X_0\right\rangle\right)\right\} \\
&\ge \mathbb{E}\left\{\log\left\langle b_{k,\ell}^*(X_{-k}^{-1})\,,\, X_0\right\rangle\right\} - \frac{1}{3}\mathbb{E}\left\{\max_j\left|X_0^{(j)} - 1\right|^3\right\} \\
&\stackrel{\text{def}}{=} \epsilon_{k,\ell} - \frac{1}{3}\mathbb{E}\left\{\max_j\left|X_0^{(j)} - 1\right|^3\right\}.
\end{aligned}$$

Györfi, Lugosi, Udina [37] bebizonyították

$$\sup_{k,\ell}\epsilon_{k,\ell} = W^*,$$

ezért a (3.10) miatt

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} W_n(\tilde{B}^K) &\ge \sup_{k,\ell}\bar{\epsilon}_{k,\ell} - \frac{1}{2}\mathbb{E}\left\{\max_j\left|X_0^{(j)} - 1\right|^3\right\} \\
&\ge \sup_{k,\ell}\epsilon_{k,\ell} - \frac{5}{6}\mathbb{E}\left\{\max_j\left|X_0^{(j)} - 1\right|^3\right\} \\
&= W^* - \frac{5}{6}\mathbb{E}\left\{\max_j\left|X_0^{(j)} - 1\right|^3\right\} \qquad \text{m.m.,}
\end{aligned}$$

amivel befejeztük a bizonyítást. ∎

3.2. Magfüggvény-alapú Markowitz-típusú stratégia

A disszertáció 2 fejezetében bevezettem a Markowitz-típusú stratégiát. Ebben az alfejezeteben olyan empírikus stratégiát konstruálok, amelyre a Markowitz-típusú stratégia aszimptotikus növekedési üteménél alkalmazott alsó becsléséhez képest közel azonos aszimptotikus alsó becslés adható. Ugyanakkor ez egy empírikus stratégia azaz kizárólag az elmúlt kereskedési napok alapján határozza meg a portfóliót, nem épít az eloszlás ismeretére mint az eredeti Markowitz-típusú stratégia. Definiáljuk a szakértők következő végtelen sorozatát $\bar{\mathbf{H}}_\lambda^{(k,\ell)} = \{\bar{\mathbf{h}}_\lambda^{(k,\ell)}(\cdot)\}$, ahol k, ℓ pozitív egészek. Fix pozitív k, ℓ egészekre válasszuk meg az $r_{k,\ell} > 0$ sugarat így, hogy bármely fix k-ra,

$$\lim_{\ell \to \infty} r_{k,\ell} = 0 \ .$$

Ekkor $n > k+1$ esetén, definiáljuk a $\bar{\mathbf{h}}_\lambda^{(k,\ell)}$ szakértőket a következőképpen. Jelölje J_n:

$$J_n = \left\{ k < i < n : \|x_{i-k}^{i-1} - x_{n-k}^{n-1}\| \leq r_{k,\ell} \right\},$$

az illeszkedések helyeit, ahol $\|\cdot\|$ az Euklideszi normát jelöli. Legyen

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{h}}_\lambda^{(k,\ell)}(x_1^{n-1}) &= \arg\max_{b \in \Delta_d} \left((1-2\lambda) \sum_{\{i \in J_n\}} (\langle b\,,\, x_i \rangle - 1) - \lambda \sum_{\{i \in J_n\}} (\langle b\,,\, x_i \rangle - 1)^2 \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\lambda}{|J_n|} \left(\sum_{\{i \in J_n\}} \langle b\,,\, x_i \rangle \right)^2 \right), \end{aligned} \tag{3.6}$$

ha a szumma nem üres, egyébként $b_0 = (1/d, \ldots, 1/d)$. A szakértőket keverjük a $\{q_{k,\ell}\}$ valószínűség eloszlás szerint, ahol bármely k, ℓ, $q_{k,\ell} > 0$. Az $\bar{\mathbf{B}}_\lambda$ stratégiát a következőképpen definiáljuk

$$\bar{\mathbf{b}}_\lambda(\mathbf{x}_1^{n-1}) \doteq \frac{\sum_{k,\ell} q_{k,\ell} S_{n-1}(\bar{\mathbf{H}}_\lambda^{(k,\ell)}) \bar{\mathbf{h}}_\lambda^{(k,\ell)}(\mathbf{x}_1^{n-1})}{\sum_{k,\ell} q_{k,\ell} S_{n-1}(\bar{\mathbf{H}}_\lambda^{(k,\ell)})}.$$

Amint azt a korábbi fejezetekben láttuk

$$\bar{S}_{n,\lambda}(\bar{\mathbf{B}}_\lambda) = \sum_{k,\ell} q_{k,\ell} S_n(\bar{\mathbf{H}}_\lambda^{(k,\ell)}) \ . \tag{3.7}$$

A $\bar{\mathbf{B}}_\lambda$ magfüggvény-alapú Markowitz-típusú stratégia a $\{\bar{\mathbf{H}}_\lambda^{(k,\ell)}\}$ szakértők kombinációja a (3.7) kombináció szerint.

3.2. Tétel. *(Ottucsák és Vajda [63]) Bármely* $\{\mathbf{X}_n\}_{-\infty}^{\infty}$ *stacionárius és ergodikus folyamatra, amelyre (2.14) bármely* $\bar{S}_{n,\lambda} = \bar{S}_{n,\lambda}(\bar{B}_\lambda)$ *és minden* $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$*-ra fennáll azt kapjuk, hogy*

$$
\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\bar{S}_{n,\lambda} \\
&\geq \ W^* - A_{\lambda,a}\mathbb{E}\left\{\max_m \mathbb{E}\left\{X_0^{(m)} - 1 - \log(X_0^{(m)})\middle|X_{-\infty}^{-1}\right\}\right\} \\
&\quad -B_{\lambda,a}\mathbb{E}\{\max_m \mathbb{E}\left\{(X_0^{(m)}-1)^2 \mid X_{-\infty}^{-1}\right\} - \left(\min_m \mathbb{E}\left\{|X_0^{(m)}-1|\middle|X_{-\infty}^{-1}\right\}\right)^2\} \\
&\quad -C_{\lambda,a}\mathbb{E}\left\{\max_m \mathbb{E}\{\left|X_0^{(m)}-1\right|^3\middle|X_{-\infty}^{-1}\}\right\} \qquad \text{m.m.}
\end{aligned}
$$

ahol

$$
A_{\lambda,a} = \frac{2\lambda a^{-1} + (1-4\lambda)(a^{-1}-1)\mathbb{I}_{\{0\leq\lambda\leq\frac{1}{4}\}}}{1-2\lambda}, \qquad B_{\lambda,a} = \frac{2\lambda - \frac{1}{2}}{1-2\lambda}\mathbb{I}_{\{\frac{1}{4}<\lambda<\frac{1}{2}\}}
$$

és

$$
C_{\lambda,a} = \frac{a^{-3}+1}{3(1-2\lambda)} \ .
$$

A 3.2 tétel bizonyításához a következő lemmákra van szükségünk.

3.3. Lemma. *Legyen* $Q_{n\in\mathcal{N}\cup\{\infty\}}$ *az* $\mathbb{R}_+^d$ *feletti olyan piaci vektorok, amelyekre teljesül, hogy a* $a \leq X_n^{(j)} \leq \frac{1}{a}$ *feletti reguláris feltételes valószínűségek olyan családja amelyre* $X_n = (X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(d)})$ Q_n *eloszlású. Le- gyen* $f, g \in C_0[a, \frac{1}{a}]$*, ahol* C_0 *jelöli a folytonos fügvények családját. Továbbá jelölje* $\bar{B}_\lambda^*(Q_n)$ *a* Q_n *szerinti Markowitz-típusú portfóliók csa- ládját, vagyis azon b portfóliók halmazát, amelyekre teljesül, hogy* $\max_{b\in\Delta_d}\{\mathbb{E}_{Q_n}\{f\langle b\,,\,X_n\rangle\} + \lambda\mathbb{E}_{Q_n}^2\{g\langle b\,,\,X_n\rangle\}\}$*. Tekintsünk egy tetszőleges* $b_n \in \bar{B}_\lambda^*(Q_n)$ *sorozatot. Ha*

$$
Q_n \to Q_\infty \quad \textit{gyengén, amint } n \to \infty
$$

akkor, Q_∞*-majdnem minden u esetén,*

$$
\lim_{n\to\infty} \langle b_n\,,\,x\rangle = \left\langle \bar{\mathbf{b}}^*\,,\,x\right\rangle,
$$

ahol a jobboldal konstans, amint $\bar{\mathbf{b}}^*$ *bejárja a* $\bar{B}_\lambda^*(Q_\infty)$*-t.*

Bizonyítás. A bizonyítás hasonló a 3.1 lemma bizonyításához. ∎

Könnyebb olvashatóság okán a következő lemmában és tételben nem írjuk ki a λ jelölést az egyes szakértők és portfóliók megadásánál.

3.4. Lemma. *A 3.2 tétel feltételei mellett, bármely k, ℓ egészre és rögzített λ mellett*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\left(\left\langle \bar{\mathbf{h}}^{(k,\ell)}(X_1^{i-1}),\, X_i\right\rangle\right) = \mathbb{E}\left\{\log\left(\left\langle \bar{\mathbf{b}}^*_{k,\ell}(X_{-k}^{-1}),\, X_0\right\rangle\right)\right\}\ m.m.,$$

ahol $\bar{\mathbf{b}}^*_{k,\ell}(X_{-k}^{-1})$ a $\mathbb{P}_{X_0}$ szerinti Markowitz-típusú portfólió.

Bizonyítás. Rögzítsük a k, ℓ egészeket és a $s = s_{-k}^{-1} \in \mathbb{R}_+^{dk}$ vektort. Jelölje a $\{X_i : 1-j+k \le i \le 0, \|X_{i-k}^{i-1} - s\| \le r_{k,\ell}\}$-re koncentrált valószínűségi mértéket $\mathbb{P}_{j,s}^{(k,\ell)}$, amelyet a következőképpen definiálunk

$$\mathbb{P}_{j,s}^{(k,\ell)}(A) = \frac{\sum_{\{i:1-j+k\le i\le 0, \|X_{i-k}^{i-1}-s\|\le r_{k,\ell}\}} \mathbb{I}_A(X_i)}{|\{i : 1-j+k \le i \le 0, \|X_{i-k}^{i-1} - s\| \le r_{k,\ell}\}|}\,, \qquad A \subset \mathbb{R}_+^d$$

ahol $\mathbb{I}_A$ jelöli az A halmaz indikátorfüggvényét. Ha a X_i-k fenti halmaza üres, akkor legyen $\mathbb{P}_{j,s}^{(k,\ell)} = \delta_{(1,\dots,1)}$ a $(1,\dots,1)$ koncentrált valószínűségi mérték. Györfi, Lugosi, Udina [37] bebizonyították, hogy bármely s esetén

$$\mathbb{P}_{j,s}^{(k,\ell)} \to \mathbb{P}_s^{*(k,\ell)} = \begin{cases} \mathbb{P}_{X_0 | \|X_{-k}^{-1}-s\| \le r_{k,\ell}} & \text{if } \mathbb{P}(\|X_{-k}^{-1} - s\| \le r_{k,\ell}) > 0, \\ \delta_{(1,\dots,1)} & \text{if } \mathbb{P}(\|X_{-k}^{-1} - s\| \le r_{k,\ell}) = 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

gyengén, ahogy $j \to \infty$, ahol $\mathbb{P}_{X_0 | \|X_{-k}^{-1}-s\| \le r_{k,\ell}}$ jelöli a X_0 vektor eloszlását az $\|X_{-k}^{-1} - s\| \le r_{k,\ell}$ feltétel mellett.

Jelölje $\bar{\mathbf{b}}^{(k,\ell)}(X_{1-j}^{-1}, s)$ a $\mathbb{P}_{j,s}^{(k,\ell)}$ szerinti Markowitz-típusú portfóliók halmazát. Így

$$\bar{\mathbf{b}}^{(k,\ell)}(X_{1-j}^{-1}, s) = \arg\max_{b\in\Delta_d} \sum_M \left((1-2\lambda)(\langle b,\, X_i\rangle - 1) - \lambda(\langle b,\, X_i\rangle - 1)^2\right)$$

$$+ \frac{\lambda}{|M|}\left(\sum_M \langle b,\, X_i\rangle\right)^2\,,$$

ahol $M = \{i : 1-j+k \le i \le 0, \|X_{i-k}^{i-1} - s\| \le r_{k,\ell}\}$, ha M nem üres a kifejezés évényes, egyébként $b_0 = (1/d,\dots,1/d)$. Jelölje $\bar{\mathbf{b}}^*_{k,\ell}(s)$ a $\mathbb{P}_s^{*(k,\ell)}$

határ- eloszlás szerinti Markowitz-típusú portfóliók halmazát. Ekkor a 3.3 lemma alapján, a (3.8)-ból következik, ha j tart a végtelenbe, akkor

$$\lim_{j\to\infty}\left\langle \bar{\mathbf{b}}^{(k,\ell)}(X_{1-j}^{-1},s)\,,\,x_0\right\rangle = \left\langle \bar{\mathbf{b}}_{k,\ell}^{*}(s)\,,\,x_0\right\rangle$$

egy valószínűséggel, $\mathbb{P}_s^{*(k,\ell)}$-majdnem minden x_0 esetén és így $\mathbb{P}_{X_0}$-majdnem minden x_0-ra. Mivel s tetszőleges volt kapjuk, hogy

$$\lim_{j\to\infty}\left\langle \bar{\mathbf{b}}^{(k,\ell)}(X_{1-j}^{-1},X_{-k}^{-1})\,,\,x_0\right\rangle = \left\langle \bar{\mathbf{b}}_{k,\ell}^{*}(X_{-k}^{-1})\,,\,x_0\right\rangle \quad \text{m.m.} \tag{3.9}$$

Következő lépésként a 2.1 lemmát alkalmazzuk a logaritmus függvényre

$$f_i(x_{-\infty}^{\infty}) \stackrel{\text{def}}{=} \log\left(\left\langle \bar{\mathbf{h}}^{(k,\ell)}(x_{1-i}^{-1})\,,\,x_0\right\rangle\right) = \log\left(\left\langle \bar{\mathbf{b}}^{(k,\ell)}(x_{1-i}^{-1},x_{-k}^{-1})\,,\,x_0\right\rangle\right)$$

ahol $x_{-\infty}^{\infty} = (\ldots,x_{-1},x_0,x_1,\ldots)$. Mivel $\left|f_i(X_{-\infty}^{\infty})\right| < \infty$ és

$$\lim_{i\to\infty} f_i(X_{-\infty}^{\infty}) = \log(\left\langle \bar{\mathbf{b}}_{k,\ell}^{*}(X_{-k}^{-1})\,,\,X_0\right\rangle) \quad \text{m.m.}$$

a (3.9)-vel. Mivel $n\to\infty$, a 2.1 lemma miatt

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(T^iX_{-\infty}^{\infty}) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\left(\left\langle \bar{\mathbf{h}}^{(k,\ell)}(X_1^{i-1})\,,\,X_i\right\rangle\right)\\ &\to \mathbb{E}\left\{\log\left(\left\langle \bar{\mathbf{b}}_{k,\ell}^{*}(X_{-k}^{-1})\,,\,X_0\right\rangle\right)\right\}\text{m.m.}\end{aligned}$$

amit meg szerettünk volna mutatni. ∎

A 3.2 bizonyítása Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $S_0 = 1$, így

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} W_n(\bar{\mathbf{B}}) &= \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log S_n(\bar{\mathbf{B}})\\ &= \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\sum_{k,\ell} q_{k,\ell}S_n(\bar{\mathbf{H}}^{(k,\ell)})\right)\\ &\geq \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\sup_{k,\ell} q_{k,\ell}S_n(\bar{\mathbf{H}}^{(k,\ell)})\right)\\ &= \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sup_{k,\ell}\left(\log q_{k,\ell}+\log S_n(\bar{\mathbf{H}}^{(k,\ell)})\right)\\ &= \liminf_{n\to\infty}\sup_{k,\ell}\left(W_n(\bar{\mathbf{H}}^{(k,\ell)})+\frac{\log q_{k,\ell}}{n}\right)\\ &\geq \sup_{k,\ell}\liminf_{n\to\infty}\left(W_n(\bar{\mathbf{H}}^{(k,\ell)})+\frac{\log q_{k,\ell}}{n}\right)\\ &= \sup_{k,\ell}\liminf_{n\to\infty} W_n(\bar{\mathbf{H}}^{(k,\ell)}).\end{aligned} \tag{3.10}$$

A 3.4 lemma miatt azt írhatjuk, hogy amint $n \to \infty$

$$\begin{aligned} W_n(\bar{\mathbf{H}}^{(k,\ell)}) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log \left\langle \bar{\mathbf{h}}^{(k,\ell)}(X_1^{i-1}), X_i \right\rangle \\ &\to \mathbb{E}\left\{\log \left\langle \bar{\mathbf{b}}^*_{k,\ell}(X_{-k}^{-1}), X_0 \right\rangle\right\}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

ahol a $\bar{\mathbf{b}}^*_{k,\ell}(X_{-k}^{-1})$ $\mathbb{P}^{*(k,\ell)}_{X_{-k}^{-1}}$ határeloszlás szerinti Markowitz-típusú portfólió. A 2.4 lemma miatt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (1-2\lambda)\mathbb{E}\left\{\log \left\langle \bar{\mathbf{b}}^*_{k,\ell}(X_{-k}^{-1}), X_0 \right\rangle\right\} \geq\ & \mathbb{E}\left\{U_M\left(\left\langle \bar{\mathbf{b}}^*_{k,\ell}(X_{-k}^{-1}), X_0 \right\rangle, \lambda\right)\right\} \\ & -\lambda\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}^2\left\{\left\langle \bar{\mathbf{b}}^*_{k,\ell}(X_{-k}^{-1}), X_0 \right\rangle \mid X_{-\infty}^{-1}\right\}\right\} \\ & +\mathbb{E}\left\{g\left(\left\langle \bar{\mathbf{b}}^*_{k,\ell}(X_{-k}^{-1}), X_0 \right\rangle, \lambda\right)\right\} \\ & +\frac{1}{3}\mathbb{E}\left\{\frac{\left(\left\langle \bar{\mathbf{b}}^*_{k,\ell}(X_{-k}^{-1}), X_0 \right\rangle - 1\right)^3}{\left\langle \bar{\mathbf{b}}^*_{k,\ell}(X_{-k}^{-1}), X_0 \right\rangle^3}\right\} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Jelölje $b^*_{k,\ell}(X_{-k}^{-1})$ a $\mathbb{P}^{*(k,\ell)}_{X_{-k}^{-1}}$ határeloszlás szerinti log-optimális portfóliók halmazát. Ekkor

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left\{U_M\left(\left\langle \bar{\mathbf{b}}^*_{k,\ell}(X_{-k}^{-1}), X_0 \right\rangle, \lambda\right)\right\} \\ & \geq \mathbb{E}\left\{U_M\left(\left\langle b^*_{k,\ell}(X_{-k}^{-1}), X_0 \right\rangle, \lambda\right)\right\} \\ & \geq (1-2\lambda)\mathbb{E}\left\{\log \left\langle b^*_{k,\ell}(X_{-k}^{-1}), X_0 \right\rangle\right\} + \lambda\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}^2\left\{\left\langle b^*_{k,\ell}(X_{-k}^{-1}), X_0 \right\rangle \middle| X_{-\infty}^{-1}\right\}\right\} \\ & \quad -\mathbb{E}\{g\left(\left\langle b^*_{k,\ell}(X_{-k}^{-1}), X_0 \right\rangle, \lambda\right)\} - \frac{1}{3}\mathbb{E}\left(\left\langle b^*_{k,\ell}(X_{-k}^{-1}), X_0 \right\rangle - 1\right)^3, \end{aligned} \tag{3.13}$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség a 2.4 lemmából következik. Legyen $\epsilon_{k,\ell} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left\{\log \left\langle b^*_{k,\ell}(X_{-k}^{-1}), X_0 \right\rangle\right\}$. Kombináljuk (3.11), (3.12) és (3.13), ekkor kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \liminf_{n\to\infty} W_n(\bar{\mathbf{H}}^{(k,\ell)}) \\ & \geq \epsilon_{k,\ell} + \frac{\lambda}{1-2\lambda}\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}^2\left\{\left\langle b^*_{k,\ell}(X_{-k}^{-1}), X_0 \right\rangle \mid X_{-\infty}^{-1}\right\} - \mathbb{E}^2\left\{\left\langle \bar{\mathbf{b}}^*_{k,\ell}(X_{-k}^{-1}), X_0 \right\rangle \mid X_{-\infty}^{-1}\right\}\right\} \\ & \quad +\frac{1}{1-2\lambda}\mathbb{E}\left\{g\left(\left\langle \bar{\mathbf{b}}^*_{k,\ell}(X_{-k}^{-1}), X_0 \right\rangle, \lambda\right) - g\left(\left\langle b^*_{k,\ell}(X_{-k}^{-1}), X_0 \right\rangle, \lambda\right)\right\} \\ & \quad +\frac{1}{3(1-2\lambda)}\mathbb{E}\left\{\frac{\left(\left\langle \bar{\mathbf{b}}^*_{k,\ell}(X_{-k}^{-1}), X_0 \right\rangle - 1\right)^3}{\left\langle \bar{\mathbf{b}}^*_{k,\ell}(X_{-k}^{-1}), X_0 \right\rangle^3} - \left(\left\langle b^*_{k,\ell}(X_{-k}^{-1}), X_0 \right\rangle - 1\right)^3\right\} \text{m.m.} . \end{aligned}$$

Ahhoz, hogy korlátozni tudjuk a három additív tagot, felhasználjuk a (2.25), (2.27) és (2.28) kifejezéseket:

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty} W_n(\bar{\mathbf{H}}^{(k,\ell)}) \\
&\geq \epsilon_{k,\ell} - A_{\lambda,a}\mathbb{E}\left\{\max_m \mathbb{E}\left\{X_0^{(m)} - 1 - \log(X_0^{(m)})\Big| X_{-\infty}^{-1}\right\}\right\} \\
&\quad -B_{\lambda,a}\left[\max_m \mathbb{E}\left\{(X_0^{(m)}-1)^2 \mid X_{-\infty}^{-1}\right\} - \left(\min_m \mathbb{E}\left\{|X_0^{(m)}-1|\Big|X_{-\infty}^{-1}\right\}\right)^2\right] \\
&\quad -C_{\lambda,a}\mathbb{E}\left\{\max_m \mathbb{E}\{\left|X_0^{(m)}-1\right|^3 \Big| X_{-\infty}^{-1}\}\right\} \text{ m.m. }, \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

ahol

$$A_{\lambda,a} = \frac{2\lambda a^{-1} + (1-4\lambda)(a^{-1}-1)\mathbb{I}_{\{0\leq\lambda\leq\frac{1}{4}\}}}{1-2\lambda}, \qquad B_{\lambda,a} = \frac{2\lambda - \frac{1}{2}}{1-2\lambda}\mathbb{I}_{\{\frac{1}{4}<\lambda<\frac{1}{2}\}}$$

és

$$C_{\lambda,a} = \frac{a^{-3}+1}{3(1-2\lambda)} .$$

Györfi, Lugosi and Udina [37] bebizonyította, hogy

$$\sup_{k,\ell} \epsilon_{k,\ell} = W^*,$$

vagyis (3.10) és (3.14) miatt a tétel bizonyítását befejeztük. ∎

3.3. Kisérletek eredményei

A javasolt stratégiák mindegyike szakértők végtelen vektorát alkalmazza. A gyakorlatban véges számú szakértővel dolgozunk méghozzá $K \times L$ méretű szakértő vektort használunk. Legyen $K = 5$ és $L = 10$ minden esetben. Válasszuk a szakértők feletti egyenletes $\{q_{k,\ell}\} = 1/(KL)$ eloszlást, a sugár legyen

$$r_{k,l}^2 = 0.0001 \cdot d \cdot k \cdot \ell.$$

A 3.1 táblázat számos portfólió teljesítményét foglalja össze. A harmadik oszlopban a két részvény közül a jobbik részvény, a legjobb újrasúlyozott portfólió (BCRP), az orákulum (amit a legjobb előrelátó stratégiaként definiálunk, a teljes tőkét minden nap elején abba a részvénybe

Részvények					Legjobb Exp. $[k, \ell]$
Iroquois	Legjobb eszköz	8.92	B^K	2.58e+10	3.6e+11 [2,10]
Kin Ark	BCRP	73.70	$\tilde{B}^K$	2.57e+10	3.6e+11 [2,10]
	Orákulum	6.85e+53			
	Cover UP	39.97			
	Singer SAP	143.7			
Com. Met.	Legjobb eszköz	52.02	B^K	1224	4765 [3,10]
Mei. Corp	BCRP	103.0	$\tilde{B}^K$	1219	4685 [3,10]
	Orákulum	2.12e+35			
	Cover UP	74.08			
	Singer SAP	107.7			
Com. Met.	Legjobb eszköz	52.02	B^K	1.5e+11	1.9e+12 [2,8]
Kin Ark	BCRP	144.0	$\tilde{B}^K$	1.5e+11	1.9e+12 [2,8]
	Orákulum	1.84e+49			
	Cover UP	80.54			
	Singer SAP	206.7			
IBM	Legjobb eszköz	13.36	B^K	52.3	182.4 [1,1]
Coca-Cola	BCRP	15.02	$\tilde{B}^K$	52.2	182.6 [1,1]
	Orákulum	1.08e+15			
	Cover UP	14.24			
	Singer SAP	15.05			

3.1. táblázat. A táblázat különböző stratégiák által elért vagyont mutatja (legjobb eszköz, legjobb konstans újrasúlyozott portfólió (BCRP), orákulum, Cover's [19] univerzális portfóliója (UP) és Singer [68] kapcsolgatós adaptív portfóliója (SAP).) Az ötödik oszlop a (B^K) magfüggvény alapú log-optimális portfólió és a $(\tilde{B}^K)$ magfüggvény alapú szemi-log-optimális portfólió elért eredményét mutatja. Például a második szám a második sorban azt mutatja, hogy csak a Com. Met és a Mei. Corp részvényekbe fektetve a magfüggvény alapú szemi-log-optimális portfólió $2.57e+10$ dollárt ér el egy dollár befektetésével a vizsgált időtávon. Az utolsó oszlop a K, L versengő szakértő között a legjobb szakértő elért vagyonát és indexét mutatja.

$S_{5651}(B^K) = 2.58e+10$					
ℓ k	1	2	3	4	5
1	1.2e+8	6.8e+3	1.7e+3	1.4e+3	2.9e+2
2	4.1e+8	3.3e+6	7.3e+4	5e+3	5.2e+2
3	2.9e+9	9.7e+7	3e+6	8.2e+4	1.4e+3
4	5.6e+9	3.7e+9	4.7e+6	1.5e+6	1.2e+5
5	9.1e+9	2.1e+10	1.8e+7	4.5e+6	3.4e+4
6	8.3e+9	4.7e+10	1.2e+8	1.6e+7	1.9e+5
7	1.2e+10	3e+11	2.6e+8	1.2e+7	1e+6
8	2.4e+10	2e+11	8.5e+8	7e+8	3e+6
9	1.4e+10	2.1e+11	1.3e+10	1.1e+9	1.4e+7
10	2.7e+10	3.6e+11	3.9e+10	5.5e+8	5e+7
$S_{5651}(\tilde{B}^K) = 2.57e+10$					
1	1.3e+8	7.2e+3	1.7e+3	1.4e+3	2.9e+2
2	4.5e+8	3.1e+6	7.2e+4	5.1e+3	5.2e+2
3	3e+9	9.9e+7	3.1e+6	8.4e+4	1.4e+3
4	5.6e+9	3.7e+9	4.8e+6	1.6e+6	1.2e+5
5	9.6e+9	2.2e+10	1.9e+7	4.5e+6	3.5e+4
6	8.8e+9	4.8e+10	1.3e+8	1.6e+7	2e+5
7	1.2e+10	2.9e+11	2.7e+8	1.2e+7	1e+6
8	2.5e+10	1.9e+11	8.8e+8	6.9e+8	2.9e+6
9	1.4e+10	2e+11	1.4e+10	1.1e+9	1.4e+7
10	2.7e+10	3.6e+11	3.8e+10	5.4e+8	5e+7

3.2. táblázat. A táblázat az Iroquois/Kin-Ark NYSE jegyzett részvénypár elért vagyonát mutatja. A táblázat felső fele a B^K magfüggvény alapú log-optimális portfólió, az alsó fele a $\tilde{B}^K$ magfüggvény alapú szemi-log-optimális portfólió teljesítményét mutatja. Bármely k és ℓ párra megkereshetjük a táblázatban a $B^{(k,\ell)}$ és a $\tilde{B}^{(k,\ell)}$ teljesítményét.

fekteti ami aznap jobban fog teljesíteni), Cover [19] univerzális portfóliójának (UP) és Singer [68] kapcsolgatós adaptív portfóliójának (SAP) a teljesítményét tüntettük fel. (Vegyük észre, hogy az orákulum vagy előrelátó portfólió nem felel meg egy valós befektetési stratégiának sem hiszen csak a napi hozamok előrelátása után határozható meg.) Az ötödik oszlop a (B^K) magfüggvény alapú log-optimális és a ($\tilde{B}^K$) magfüggvény alapú szemi-log-optimális teljesítményét mutatja. Például a második oszlop két száma azt mutatja, hogy a Com. Met és a Mei. Corp cégekbe történő befektetés esetén a magfüggvény alapú log-optimális portfólió $2.58e + 10$ ($S_{5651}(B^K) = 2.58e + 10$), míg a magfüggvény alapú szemi-log-optimális portfólió $2.57e + 10$ ($S_{5651}(\tilde{B}^K) = 2.57e + 10$) vagyont ér el 1 dollár befektetésével. Például a táblázat második sorában a $k = 3$ és az $l = 10$ paramétert választva a $B^{(3,10)}$ log-optimális szakértő 4765 dollárt ér el 1 dollár befektetésével a 22 éves periódus alatt($S_{5651}(B^{(3,10)}) = 4765$), míg a $\tilde{B}^{(3,10)}$ szemi-log-optimális szakértő $S_{5651}(\tilde{B}^{(3,10)}) = 4685$ dollárt ér el.

A 3.2 táblázat az Iroquois/Kin-Ark részvénypárba történő 22 éves befektetés elért vagyonát mutatja. Így a 3.1 táblázat első sorában leírtakat részletezi. A táblázat felső fele a B^K magfüggvény alapú log-optimális portfólió, míg az alsó fele a $\tilde{B}^K$ magfüggvény alapú szemi-log-optimális portfólió teljesítményét mutatja be. A szakértők $k = 1 \dots 5$-el indexeltek az oszlopok és $\ell = 1 \dots 10$-el indexeltek a sorok szerint.

Mindkét táblázatból megállapíthatjuk, hogy a magfüggvény alapú log-optimális és magfüggvény alapú szemi-log-optimális portfóliók azonos teljesítményt érnek el.

Annak ellenére hogy log-optimális stratégia és az azt tanuló magfüggvény alapú log-optimális stratégia illetve magfüggvény alapú szemi-log optimális stratégia végtelen időhorizontra optimalizált meglehetősen erős teljesítményt nyújtanak ezen a véges időperióduson. Ezt két ok is pozitívan befolyásolhatja. A dolgozat eddigi fejezeteiben nem vettük figyelembe a tranzakciós költséget (ez a disszertáció 4.fejezetében feloldásra kerül) másrészt az időszak választást. Az egész stratégia mögött végülis az a - megalapozott hit - áll, hogy legalábbis hosszú távon a nemzetgazdaságok fejlődnek, az index hosszú távon növekszik, a részvényárfolyamoknak legalább egy része, különösképp a nem recessziós szakaszban, növekszik, s ciklusonként esetleg más és más részcsoport prosperál, amelyekre adaptívan "rásúlyoz" az algoritmus. Mivel a részvénybefektetés kockázatos - legalábbis- hosszabb távon az elvárt hozam felette marad a kockázatmentes hozamnak a piac átlagaban. Emiatt kell a portfólió, mivel egy rögzített részvény hosszú távon "akárhogyan" is viselkedhet ("ne tedd az összes tojást egy kosárba" elv).

Markowitz	$S_n(\bar{H}_\lambda^{(2,10)})$	$S_n(\bar{H}_\lambda^{(3,10)})$	$S_n(\bar{H}_\lambda^{(2,8)})$	$S_n(\bar{H}_\lambda^{(1,1)})$
Részvénypárok	Iro-Kin	Com-Mei	Com-Kin	IBM-Coc
λ=0.00	2.61e+11	<u>7.13e+03</u>	1.75e+12	1.52e+02
0.05	2.75e+11	6.73e+03	1.73e+12	1.57e+02
0.10	2.51e+11	5.74e+03	1.76e+12	1.62e+02
0.15	2.45e+11	5.44e+03	1.61e+12	1.67e+02
0.20	2.60e+11	5.87e+03	1.56e+12	1.69e+02
0.25	2.97e+11	6.12e+03	1.54e+12	1.72e+02
0.30	3.09e+11	5.66e+03	1.57e+12	1.73e+02
0.33	3.26e+11	5.47e+03	1.75e+12	1.73e+02
0.35	3.32e+11	5.46e+03	1.67e+12	1.73e+02
0.40	<u>3.76e+11</u>	5.45e+03	1.70e+12	1.73e+02
0.45	3.62e+11	5.12e+03	1.85e+12	1.79e+02
0.50	3.44e+11	4.82e+03	<u>1.92e+12</u>	1.83e+02
0.55	3.23e+11	4.07e+03	1.74e+12	1.88e+02
0.60	2.64e+11	3.28e+03	1.49e+12	1.94e+02
0.65	2.05e+11	2.62e+03	1.12e+12	2.04e+02
0.70	1.49e+11	1.97e+03	7.40e+11	2.13e+02
0.75	7.30e+10	1.53e+03	3.65e+11	2.20e+02
0.80	1.80e+10	1.19e+03	9.15e+10	<u>2.23e+02</u>
0.85	1.18e+09	7.02e+02	4.17e+09	2.05e+02
0.90	8.68e+06	3.30e+02	2.01e+07	1.70e+02
0.95	1.73e+04	1.38e+02	5.83e+04	7.59e+01
log-optimális	$S_n(B^{(2,10)})$	$S_n(B^{(3,10)})$	$S_n(B^{(2,8)})$	$S_n(B^{(1,1)})$
	3.6e+11	4765	1.9e+12	182.4

3.3. táblázat. Table 3.3 a magfüggvény alapú Markowitz-típusú stratégia teljesítményét mutatja különböző λ értékek esetén. A *legjobban teljesítő szakértőkhöz* tartozó k és ℓ paraméterértékek amelyeket a táblázat $2-5$ oszlopa tartalmaz: (2,10), (3,10), (2,8) és az (1,1). A legjobban teljesítő szakértők különböző λ parméterértékek mellett adódtak(a táblázatban aláhúzással jelölve.)

A 3.3 táblázat a magfüggvény alapú Markowitz-típusú stratégia teljesítményét mutatja különböző λ paraméterértékek esetén. Vegyük észre hogy a 3.3 táblázat a $0.5 \leq \lambda \leq 1$ parméterértékek esetén is tartalmaz sorokat noha ezeket nem vizsgálta a 3.2 Tétel. Ennek ellenére a magfüggvény alapú Markowitz-típusú stratégia alkalmazható ebben az esetben is. A *legjobban teljesítő szakértőhöz* tartozó k és ℓ paraméterértékek, amelyeket a táblázat 2−5 oszlopa tartalmaz részvénypáronként különbözőek: (2,10), (3,10), (2,8) és (1,1). A táblázatban log-optimális név alatt a legjobb teljesítményt nyújtó k és ℓ szakértőpárral rendelkező magfüggvény alapú log-optimális portfóliót adtuk meg. Ez ugyancsak megtalálható a 3.1 táblázat utolsó oszlopában, de itt ugyancsak megadtuk a könnyebb összehasonlíthatóság érdekében.

Vegyük észre, hogy a $\lambda = 0$ paraméter érték mellett a Markowitz-típusú stratégia elért hozama a többi λ mellett elért értékhez képest nem a legjobb, holott ez nem veszi figyelembe a piaci kockázatot a részvénybefektetéskor.

4. fejezet

Optimalítás tranzakciós díj mellett

Diszkrét idejű végtelen időhorizontú növekedés-optimális befektetést vizsgálok több eszközt és arányos tranzakciós költséget feltételezve[41]. Az eszközhozamokról homogén Markov folyamatot tételezek fel. Dinamikus programozási és gépi tanulási technikákat alkalmazva két rekurzív befektetési stratégiát mutatok be, amelyekre teljesül, hogy hosszútávon a trajektóriákon vett átlagos növekedési ütem 1 valószínűséggel nagyobb mint bármely más stratégia esetén.

A arányos tranzakciós költség melletti befektetés kérdését főleg folytonos időben vizsgálták korábban: Davis and Norman [26], Taksar et al. [72] and Shreve and Soner [67], etc. Taksar, Klass and Assaf [72].

Kevés olyan cikk van, amely a diszkrét időben vizsgálja a tranzakciós költség kérdését növekedésoptimális politika esetén. Cover és Iyengar[50] fogalmazta meg a lóversenypiac kérdését, ahol minden egyes periódusban csak az egyik eszköznek van pozitív kifizetőfüggvénye az összes többi eszköz nem fizet semmit. Arányos tranzakciós költséget tételeztek fel és aszimptotikus várható átlagos növekedési ütem kritériumot alkalmaztak. Általánosabb piacok esetén is vannak eredmények. Iyengar [48] növekedés optimális befektetést vizsgált több eszköz f.a.e. hozamok és arányos tranzakciós költség feltételezése melett. Bobryk and Stettner [11] két eszközt, részvényt és bankszámlát feltételezve, fogyasztással kiegészített portfólióválasztást vizsgálták. aszimptotikus várható diszkontált hozamot és f.a.e. hozamokat tételeztek fel. Diszkrét időben a legmesszebbre jutó tanulmány Schäfer [66] dolgozata volt, amely aszimptotikus várható átlagos növekedési ütemet, több eszközt, arányos tranzakciós költséget tételezett fel, az eszközhozamok pedig stacionárius Markov folyamatot kö- vettek.

A legtöbb a kérdéskörrel foglalkozó cikk sztochasztikus optimális kontrollt alkalmaz és a aszimptotikus várható átlagos növekedési ütem szempontjából vizsgálja a kérdést. Ezért érdekes megvizsgálni vajon van-e nemcsak várható értékben, de egy valószínűséggel optimális stratégia.

4.1. Matematikai modell

A tranzakciós költség bevezetésénél támaszkodok az [50] cikkre. Az 1.1 fejezetben bevezettem a S_n, amit az n-dik napi vagyonként definiáltunk. Ebben a fejezetben S_n jelölje a bruttó vagyon nagyságát az n-dik nap végén $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, ugyanis a tranzakciós kölstég miatt meg kell különböztetnünk a nettó és a bruttó vagyon nagyságát. N_n jelölje az n-dik kereskedési periódus végén kialakuló nettó vagyon nagyságát. Feltehetjük, hogy a befeketető kezdeti vagyona S_0 1 dollárral egyenlő. Minden további az 1.1 fejezetben bevezetett jelölés érvényben marad. A fenti jelölés tudatában az n-dik kereskedési periódus kezdetén az N_{n-1} nettó vagyont a b_n portfólióvektor szerint fektessük be. Ekkor a n-dik nap végén kialakuló S_n bruttó vagyon

$$S_n = N_{n-1} \sum_{j=1}^{d} b_n^{(j)} x_n^{(j)} = N_{n-1} \langle b_n \, , \, x_n \rangle \, ,$$

ahol $\langle \cdot \, , \, \cdot \rangle$ a belső szorzatot jelöli.

Az $n + 1$-dik nap elején a befektető felállítja az új portfólióját, azaz végrehajtja az új b_{n+1} vektor szerint szükséges vételeket és eladásokat. A vételekért és az eladásokért tranzakciós költséget kell fizetnie, ezért az $n+1$-dik nap kezdetén a b_{n+1} portfólióban levő vagyona kevesebb, mint S_n. A fenti jelölések alapján n-dik nap végi bruttó vagyon S_n a következőképpen néz ki:

$$S_n = N_{n-1} \langle b_n \, , \, x_n \rangle \, .$$

A kiszabott tranzakciós költség egy eszköz vásárlása vagy eladása esetén $0 < c_p < 1$ illetve $0 < c_s < 1$, vagyis, 1 dollár értékű részvény eladása csak $1 - c_s$ dollár jövedelmet jelent, és hasonlóan 1 dollár értékű eszköz megvásárlása $1+c_p$ dollárba kerül. Felteszem, hogy ezek a költségek minden eszközre azonosak.

Számoljuk ki a b_{n+1} portfólió összeállításakor fizetendő tranzakciós költséget. Mielőtt a tőkénket átrendeznénk, a j-dik eszközben fekvő tőke $b_n^{(j)} x_n^{(j)} N_{n-1}$ dollár, míg az átrendezés után $b_{n+1}^{(j)} N_n$ mennyiségű dollárt kell képviselnie. Ha $b_n^{(j)} x_n^{(j)} N_{n-1} \geq b_{n+1}^{(j)} N_n$ akkor el kell adnunk és a fizetendő tranzakciós költség a j-dik eszközhöz kapcsolódóan

$$c_s \left(b_n^{(j)} x_n^{(j)} N_{n-1} - b_{n+1}^{(j)} N_n \right),$$

másküllönben vennünk kell és ekkor a tranzakciós költség a j-dik eszközhöz kapcsolódóan

$$c_p \left(b_{n+1}^{(j)} N_n - b_n^{(j)} x_n^{(j)} N_{n-1} \right).$$

Jelölje x^+ az x pozitív részét. Ekkor a bruttó vagyon felbomlik a nettó vagyon és a bruttó vagyon összegére a következő önfinanszírozó módon

$$N_n = S_n - \sum_{j=1}^{d} c_s \left(b_n^{(j)} x_n^{(j)} N_{n-1} - b_{n+1}^{(j)} N_n \right)^+ - \sum_{j=1}^{d} c_p \left(b_{n+1}^{(j)} N_n - b_n^{(j)} x_n^{(j)} N_{n-1} \right)^+,$$

vagy hasonlóan

$$S_n = N_n + c_s \sum_{j=1}^{d} \left(b_n^{(j)} x_n^{(j)} N_{n-1} - b_{n+1}^{(j)} N_n \right)^+ + c_p \sum_{j=1}^{d} \left(b_{n+1}^{(j)} N_n - b_n^{(j)} x_n^{(j)} N_{n-1} \right)^+.$$

Mindkét oldalt elosztva S_n értékével, és bevezetve a w_n kifejezést

$$w_n = \frac{N_n}{S_n},$$

$0 < w_n < 1$, ahonnan

$$1 = w_n + c_s \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{b_n^{(j)} x_n^{(j)}}{\langle b_n \, , \, x_n \rangle} - b_{n+1}^{(j)} w_n \right)^+ + c_p \sum_{j=1}^{d} \left(b_{n+1}^{(j)} w_n - \frac{b_n^{(j)} x_n^{(j)}}{\langle b_n \, , \, x_n \rangle} \right)^+. \tag{4.1}$$

Az alábbiakban alaposan megvizsgálom a (4.1) egyenletet. Látni fogjuk, hogy tetszőleges b_n, b_{n+1} portfólió-vektorok és x_n hozamvektor esetén egyértelműen létezik egy $w_n \in [0, 1)$ költségfaktor, vagyis a portfólió-stratégia önfinanszírozó. Az n-dik napi költségfaktort w_n-et a b_n, b_{n+1} portfólió-vektorok és a x_n hozamvektor határozza meg, vagyis

$$w_n = w(b_n, b_{n+1}, x_n),$$

valamely w függvényre. A jelölés egyszerűsítése érdekében vizsgáljuk a (4.1) egyenlet következő egyszerűsített formáját:

$$1 - w = c_s \sum_{j=1}^{d} (u_j - v_j w)^+ + c_p \sum_{j=1}^{d} (v_j w - u_j)^+ \tag{4.2}$$

ahol w,u_j és v_j jelöli w_n, $\frac{b_n^{(j)} x_n^{(j)}}{\langle \mathbf{b}_n\, , \mathbf{x}_n \rangle}$ and $b_{n+1}^{(j)}$ kifejezéseket.

A (4.2) egyenlet bal oldalán álló függvény 1-ben metszi az tengelyt, a jobb oldalon álló függvény c_s és c_p között metszi a y tengelyt. Az egyenlet bal oldala monoton csökken w-ben. A jobb oldalon álló függvény pozitív és negatív szakaszokból áll. Ezen lineáris szakaszok töréspontjainak x koordinátái a következők: u_j/v_j, $j = 1, ...d$. Jelöljük a töréspontokat növekvő sorrendben $w^*(j) = u_j^*/v_j^*$, $j = 1, ...d$-vel. Ha j^* jelöli azt az értéket amelyre

$$c_p \sum_{i=j^*}^{d} (v_i^* w^*(j^*) - u_i^*)^+ + c_s \sum_{i=j^*}^{d} (u_i^* - v_i^* w^*(j^*))^+ \le w^*(j^*)$$

és $j^* + 1$ teljesíti

$$c_p \sum_{i=j^*}^{d} (v_i^* w^*(j^*) - u_i^*)^+ + c_s \sum_{i=j^*+1}^{d} (u_i^* - v_i^* w^*(j^*+1))^+ \ge w^*(j^*+1)$$

egyenlőtlenséget, akkor eredeti egyenlet két oldala $w_n^*(j^*)$ és $w_n^*(j^*+1)$ között metszi egymást. Ha a jobboldal és a baloldal keresztezte egymást akkor a jobboldal a baloldal felett marad, mivel ez utóbbi -1-es meredekséggel csökken. Másrészt metszeniük kell egymást mivel a jobboldal pozitív ha $w > 0$, míg a baloldal 1-ben metszi az x tengelyt.

Ha jelentősen át akarjuk rendezni a portfóliónkat, akkor a nettó vagyonunk jelentősen csökken, de pozitív marad. Jegyezzük meg továbbá, hogy a költség nem korlátozza a lehetséges portfóliók halmazát, vagyis minden egyes lépésben a teljes szimplexen keressük az optimális portfóliót. A költségfaktor nagysága

$$\frac{1 - c_s}{1 + c_p} \le w_n \le 1$$

között helyezkedik el.

Elindulva $S_0 = 1$ kezdeti vagyonnal és a $w_0 = 1$-el, az S_n értéke az n-dik nap végén a következő lesz

$$S_n = N_{n-1} \langle b_n\, , x_n \rangle = w_{n-1} S_{n-1} \langle b_n\, , x_n \rangle = \prod_{i=1}^{n} [w(b_{i-1}, b_i, x_{i-1}) \langle b_i\, , x_i \rangle].$$

Vezessük be a

$$g(b_{i-1}, b_i, x_{i-1}, x_i) = \log(w(b_{i-1}, b_i, x_{i-1}) \langle b_i\,,\, x_i\rangle)$$

jelölést. Így az átlagos növekedési ütem

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\log S_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(w(b_{i-1}, b_i, x_{i-1}) \langle b_i\,,\, x_i\rangle) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(b_{i-1}, b_i, x_{i-1}, x_i). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Ezt az átlagos növekedési ütemet szeretnénk maximalizálni.

Megjegyzés. Egyszerű korlátot adhatunk a növekedési ráta csökkenésésre nemnulla tranzakciós költség esetén:

Jelölje $W^*(n, c_s, c_p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log S_n^*$ az optimális növekedési ütemet c_s vételi és c_p eladási tranzakciós költség mellett. Ekkor

$$W^*(n, 0, 0) \geq W^*(n, c_s, c_p)$$

$$\geq W^*(n, 0, 0) + log(\frac{1-c_s}{1+c_p}) \simeq W^*(n, 0, 0) - \frac{1-c_s}{1+c_p}.$$

Ebből a megjegyzésből adódik, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\log S_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\log w_{i-1} + \log\langle \mathbf{b}_i\,,\, \mathbf{x}_i\rangle) \\ &\geq \log(\frac{1-c_s}{1+c_p}) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\langle \mathbf{b}_i\,,\, \mathbf{x}_i\rangle) \\ &\geq \log(\frac{1-c_s}{1+c_p}) + W(n, 0, 0), \end{aligned}$$

igaz minden S_n esetén, és az optimális esetben is.

Ezután legyen x_i valószínűségi változó és jelöljük X_i-vel. Használjuk a következő felbontást

$$\frac{1}{n}\log S_n = I_n + J_n, \tag{4.4}$$

ahol

$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(g(b_{i-1}, b_i, X_{i-1}, X_i) - \mathbb{E}\{g(b_{i-1}, b_i, X_{i-1}, X_i)|X_1^{i-1}\})$$

és

$$J_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\{g(b_{i-1}, b_i, X_{i-1}, X_i)|X_1^{i-1}\}.$$

I_n martingál-differenciák átlaga. Mivel $g(b_{i-1}, b_i, X_{i-1}, X_i)$ korlátos, ezért I_n korlátos martingáldifferenciák átlaga, amely 0-hoz tart 1 valószínűséggel a Chow tétel (lásd 3.3.1 Tétel a Stout [69] könyvben). Igy az átlagos növekedési ütem: $\frac{1}{n}\log S_n$ aszimptotikus maximalizálása egybeesik a J_n maximalizálásával:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\{g(b_{i-1}, b_i, X_{i-1}, X_i)^2\}}{i^2} < \infty,$$

amiből adódik, hogy

$$I_n \to 0$$

m.m.. Így az $\frac{1}{n}\log S_n$ átlagos növekedési ütem aszimptotikus maximalizálása ekvivalens a J_n maximalizálásával.

Ha a $\{X_i\}$ piaci folyamat egy *homogén elsőrendű Markov folyamat* akkor, megfelelő $\{b_i\}$ portfólió-választása esetén, adódik, hogy

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\{g(b_{i-1}, b_i, X_{i-1}, X_i)|X_1^{i-1}\} \\
= \; & \mathbb{E}\{\log(w(b_{i-1}, b_i, X_{i-1})\langle b_i \, , \, X_i\rangle)|X_1^{i-1}\} \\
= \; & \log w(b_{i-1}, b_i, X_{i-1}) + \mathbb{E}\{\log\langle b_i \, , \, X_i\rangle \, |X_1^{i-1}\} \\
= \; & \log w(b_{i-1}, b_i, X_{i-1}) + \mathbb{E}\{\log\langle b_i \, , \, X_i\rangle \, |b_i, X_{i-1}\} \\
\stackrel{\text{def}}{=} \; & v(b_{i-1}, b_i, X_{i-1}),
\end{aligned}$$

így a $\frac{1}{n}\log S_n$ átlagos növekedési ütem aszimptotikus maximalizálása aszimptotikusan ekvivalens a

$$J_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v(b_{i-1}, b_i, X_{i-1}). \tag{4.5}$$

kifejezés maximalizálásával.

4.2. A kapcsolódó Markov kontroll probléma

A tranzakciós költség melletti optimális befektetés kérdésköre, amint azt a fejezet bevezetőjében említettem alapvetően folytonos időben lett megfogalmazva: a terület klasszikusnak számító cikke Davis és Norman [26] dolgozata. Taksar és szerzőtársai [72], Shreve és Soner [67], Taksar, Klass és Assaf [72] két eszközt tételeztek fel amelyeket Wiener folyamat vezérel, arányos tranzakciós költséget vizsgált, és aszimptótikus várható átlagos növekedési kritériumot alkalmaztak. Akien, Sulem és Taksar [1] kiterjesztették a vizsgálatukat több eszköz feltételezésére.

Más szerzők azzal a feltételezéssel éltek, hogy a tranzakciós költség fix és arányos részből áll: Morton és Pliska [62], Easthem és Hastings [27], (ld. [9], [70], [71], [52]). Optimalitási kritériumként vagy várható átlagos aszimptotikus növekedési ütemet vagy várható aszimptotikus diszkontált növekedési ütemet tételeztek fel. Folytonos idejű árfolyamfolyamatot vizsgáltak: geometriai Brown mozgást vagy más általánosabb paraméteres sztochasztikus folyamatot feltételezve. Easthem and Hastings[27] cikke az impulzív kontroll reneszánszát hozta a portfólió optimalizálás területén. Egy impulzív stratégia a $\Pi = ((N_0, 0)(N_1, \tau_1), (N_2, \tau_2) \dots)$ módon adott, ahol (N_i, τ_i) sorozataként, ahol τ_i megállási idők nem csökkenő sorozata, N_i pedig a portfólió poziciókat jelöli. A véletlen τ_k időpontokban a portfólió N_{k-1}-ről N_k-ra változik.

A legtöbb fent említett cikk sztochasztikus optimális kontrollt és kivétel nélkül aszimptotikus várható átlagos hozam kritériumot alkalmaz. Egyik cikk sem foglalkozik az 1 valószínűségű optimalítás kérdésével. A disszertáció ezen fejezetében két portfólió-választási stratégiát mutatok és Markov-i árfolyamalakulás feltételezése mellett belátom, hogy 1 valószínűséggel optimálisak.

A diszkrét idejű portfólió-optimalizálás az általános Markov kontroll folyamatok elmélet egyik speciális esete. Egy diszkrét idejű Markov kontroll folyamat a következő öt mennyiséggel jellemezhető: $(S, A, U(s), Q, r)$ (cf. [45]). S jelöli az állapotteret, A az akciók tere, míg az egyes állapotokban megengedett akciók terét $U(s)$ jelöli ami egy részhalamaza az A-nak. Legyen a K halmaz a következőképpen definiálva $\{(s, a) : s \in S, a \in U(s)\}$. A $Q(.|s, a)$ egy átmenetvalószinűség magfüggvény S a K feltétel mellett, továbbá $r(s, a)$ a megtérülési függvény.

A folyamat a következőképpen alakul. Jelölje S_t a t időpontban elfoglalt állapotot. S_t állapotban kiválasztjuk a számunkra optimális akciót: A_t-t. Ha $S_t = s$ és $A_t = a$, akkor a megtérülés $r(s, a)$ és a folyamat S_{t+1} állapotba mozdul a $Q(.|s, a)$ átmenetfüggvény szerint. A kontroll politika egy sorozat az A halmazon, ahol a múltbeli akciók és állapotok vannak a feltételben, azaz $\pi_n(\cdot|s_0, a_0, \dots, s_{n-1}, a_{n-1}, s_n)$ akár egy véletlenített politika is lehet.

Két megtérülési kritériumot szokás figyelembe venni. A aszimptotikus várható hozam a π kontrollpolitika esetén a következőképpen van definiálva

$$J(\pi) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1} \mathbb{E}r(S_t, A_t). \tag{4.6}$$

A trajektóriánkénti aszimptotikus hozamot a következőképpen kell definiálni

$$J(\pi) := \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1} r(S_t, A_t). \tag{4.7}$$

A Markov kontroll elméletben az eredmények többsége a (4.6) szerinti várható átlagos hozammal kapcsolatos, csak néhány cikk foglalkozik a (4.7) szerinti trajektóriánkénti hozammal.

A Markov kontroll folyamatok elméletében a legtöbb eredmény a (4.6) kifejezésre vonatkozik. Kevés eredményt fogalmaztak meg a (4.7) kritériummal kapcsolatban. A trajektórinánkénti eredményeket a következő cikkek tartalmazzák: [5] korlátos hozamokra, míg [46], [47], [76], [55] nem korlátos hozamokra vonatkozik.

A cél megközelíteni a

$$J^* = \sup_{\pi} J(\pi),$$

maximális aszimptotikus hozamot, ami dinamikus programozási feladathoz vezet el.

Az alábbiakban portfólió optimalizálási feladatunk esetére megfogalmazom a kapcsolódó Markov kontroll feladatot. Tételezzük fel, hogy létezik $0 < a_1 < 1 < a_2 < \infty$, hogy

$$X_i \in [a_1, a_2]^d .$$

1. Legyen az állapottér a következő:

$$S := \left\{(b, x) | b \in \Delta_d, x \in [a_1, a_2]^d\right\} .$$

2. Legyen az akciók halmaza:

$$A := \Delta_d.$$

3. A fentebb bemutatott tranzakciós költség modellben a lehetséges akciók halmaza a következő:

$$U(b, x) := \Delta_d.$$

4. Mivel a piac viselkedését nem befolyásolja a választott stratégia, ezért az átmenetvalószínűségek éppen az eredeti Markov folyamat átmenetvalószínűségei lesznek:

$$Q(d(b', x')|(b, x), b') := P(dx'|x) := \mathbb{P}\{dX_2 = dx'|X_1 = x\}.$$

5. A megtérülési függvény:

$$r((b, x), b') = v(b, b', x).$$

6. A trajektóriánkénti átlagos hozam kritérium következő:

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} r((b_{t-1}, x_{t-1}), b_t) &= \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} v(b_{t-1}, b_t, x_{t-1}) \\
&= \liminf_{n\to\infty} J_n.
\end{aligned}$$

4.3. Optimális portfólió-választás

Két optimális portfólió-választási szabályt vezetek be. Jelölje $0 < \delta < 1$ a diszkontfaktort. Egyfajta eltűnő diszkontfaktor módszert alkalmazok, amely a következő diszkontált Bellmann egyenlettel adott:

$$F_\delta(b, x) = \max_{b'} \{v(b, b', x) + (1-\delta)\mathbb{E}\{F_\delta(b', X_2) \mid X_1 = x\}\}. \tag{4.8}$$

Standard technika annak a bizonyítása, hogy a (4.8) egyenletnek tetszőleges $0 < \delta < 1$ esetén van folytonos $F_\delta \in C(\Delta_d \times [a_1, a_2]^d)$ megoldása. (ld. Hernández-Lerma, Lasserie [45], Bertsekas, Shreve [8], Schäfer [66]).

1 Stratégia Első portfólió-választási stratégiám a következő:

$$b_1^* = \{1/d, \ldots, 1/d\}$$

és

$$b_{i+1}^* = \arg\max_{b'} \left\{ v(b_i^*, b', X_i) + (1-\delta_i)\mathbb{E}\{F_{\delta_i}(b', X_{i+1})|X_i\}\right\}, \tag{4.9}$$

ahol $1 \leq i$, és a $0 < \delta_i < 1$ diszkontfaktorra teljesül, hogy $\delta_i \downarrow 0$.

Megjegyzés. A (4.9)-hez stratégiához hasonlót konstruált Schäfer [66]. Schäfer [66] cikke ugyancsak Markov kontroll modellt használ arra, hogy optimális megoldást találjon tranzakciós költség melletti portfólió-optimalizá-

lás esetén. Stacionárius Markov láncot feltételez, ahol az állapottér az m dimenziós Euklideszi tér korlátos részhalmaza. A költség függvény - természetesen- korlátozott. Feltételezi az átmenetmagfüggvény folytonosságát: tetszőleges $h(.,.)$ folytonos függvényre teljesül, hogy
$E[h(b, X_{t+1})|X_t = x]$ a (b, x) változókban folytonos, ahol b a portfólióvektor.
Ugyancsak eltünő diszkontfaktor módszert alkalmaz. A cikkben felállított diszkontált Bellmann egyenletnek létezik korlátos megoldása. Véve a diszkontált Bellmann egyenletek sorozatát a megoldásaikból konstruál átlagköltség-optimális politikát. Az ebben a fejezetben közölt hozzájárulásom kiterjeszti ezt az eredményt: hasonló politikával 1 valószínűségű optimalitás érhető el. Sőt nem tételezek fel stacionaritást sem.

A $\{b_i\}$ portfólió-választást rekurzívnak nevezzük, ha

$$b_i = b_i(x_1^{i-1}) = b_i(b_{i-1}, x_{i-1}).$$

A $\{b_i^*\}$ portfólió rekurzív. A $\{b_i^*\}$ portfólió definicójában rekurzió nem időinvariáns, azaz ez egy *nemstacionárius portfólió-választási szabály.*

Most megmutatjuk, hogy az 1 Stratégia trajektóriánként átlagos növekedési ütem szempontjából optimális:

4.1. Tétel. *(Györfi és Vajda [41]) Ha az $\{X_i\}$ homogén elsőrendű Markov folyamat és van olyan $0 < a_1 < 1 < a_2 < \infty$, hogy $a_1 \leq X^{(j)} \leq a_2$ minden $j = 1, \ldots, d$, akkor a $\delta_i \downarrow 0$ megválasztható úgy, hogy*

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \log S_n^* - \frac{1}{n} \log S_n \right) \geq 0$$

m.m. teljesüljön. Az S_n tetszőleges másik b_i stratégia által elért n-dik napi vagyon.

A Schäfer [66] -ben található 4.2.1 Tétel alapján

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{n} \log S_n^* - \frac{1}{n} \log S_n \right\} \geq 0,$$

vagyis a $\{b_i^*\}$ portfolio várható értékben optimális. A 4.1 tétel erősebb, mivel azt állítja, hogy a $\{b_i^*\}$ portfólió-stratégia egy valószínűségű trajektóriahalmazon optimális.

Megjegyzés. Válasszuk

$$\delta_i = i^{-\epsilon},$$

ahol $\epsilon < 1/2$. Ezen választás teljesíti a 4.1 Tétel feltételeit.

Megjegyzés. Nyitott probléma annak a bizonyítása, hogy

$$\frac{1}{n}\log S_n^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(b_i^*, b_{i+1}^*, X_i, X_{i+1})$$

konvergál ergodikus hozamfolyamat feltételezése mellett, és a W^* határérték nem konstans. További probléma a W^* értékének meghatározása. Tipikus értékpapirpiac feltételezése mellett

$$a_1 = 0.9 \quad \text{and} \quad a_2 = 1.1,$$

módon teljesül (cf.Fernholz [28]).

2. Stratégia A következő lépésként *stacionárius* (időinvariáns) rekurzió segítségével definiálok egy egyvalószínűségű trajektóriahalmazon optimális portfóliót. Bármely $1 \le k$ egész esetén, legyen

$$b_1^{(k)} = \{1/d, \dots, 1/d\}$$

és

$$b_{i+1}^{(k)} = \arg\max_{b'} \left\{ v(b_i^{(k)}, b', X_i) + (1-\delta_k)\mathbb{E}\{F_{\delta_k}(b', X_{i+1}) | X_i\}\right\}, \tag{4.10}$$

bármely $1 \le i$-re. A $B^{(k)} = \{b_i^{(k)}\}$ portfóliót a k szakértő portfóliójának nevezzük $S_n(B^{(k)})$ tőkével. Válasszunk egy tetszőleges $q_k > 0$ valószínűségeloszlást és definiáljuk a kombinált portfoliót a következőképpen

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{\infty} q_k S_n(B^{(k)}).$$

4.2. Tétel. *(Györfi és Vajda [41]) Tegyük fel, hogy a 4.1 Tétel feltételei teljesülnek. Válasz- szuk meg a diszkontfaktort a $\delta_i \downarrow 0$, amint $i \to \infty$ módon. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\log S_n^* - \frac{1}{n}\log \tilde{S}_n\right) = 0$$

m.m.

A 4.2 Tétel jelentősége, hogy aszimptotikusan $\tilde{S}_n$-nel megközelíthetjük a maximális átlagos növekedési ütemet. Fontos jövőbeni kutatási kérdés lehet, hogy hogyan lehet megkonstruálni ennek a stacionárius stratégiának az empírikus változatát.

Mielőtt bebizonyítanánk az ebben a fejezetben kimondott két tételt egy híres példán keresztül bemutatom hogyan határozható meg a 2. Stratégia konkrét esetben.

4.4. Tranzakciós költséggel kibővített Cover példa

A 2. Stratégiát alkalmazva tranzakciós költséget vezetünk be Cover híres példájába (1.1.példa), amelyet a log-optimális portfólió erejének demonstrálására idéznek számos cikkben. A példabeli portfólió egy részvényből és egy kötvényből áll. További egyszerűsítés érdekében feltesszük, hogy a kötvénynek nincs hozama (ez természetesen általánosítható). Az i-dik napra vonatkozó piaci hozamvektor $\mathbf{x}_i = (1, y_i)$, ahol az 1 jelenti a kötvény állandó értékét
(kamatláb nulla), az y_i pedig a részvény árát. A részvény ára megduplázódhat vagy megfeleződhet minden egyes periódusban.

Az i-dik napon $\mathbf{b}_i = (1 - b_i, b_i)$ a portfólióvektor. Tételezzük fel, hogy $c_p = 0$.

Az egyszerűség kedvéért az alábbiakban az f.a.e. esetet mutatom be, mint speciális egylépéses Markov láncot. $w_i = w(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i+1}, \mathbf{x}_i) = w(b, b', y)$ a költségfüggvény, ahol $\mathbf{b}_i = (1 - b, b)$, $\mathbf{b}_{i+1} = (1 - b', b')$, $\mathbf{x}_i = (1, y)$, a következő egyenlet megoldása (egyszerűség kedvéért hasonló w jelö- lést használom a skalár argumentumokkal rendelkező függvényre is):

$$1 = w + c_s \cdot \{u - b'w\}^+, \tag{4.11}$$

ahol $u = by/(by+(1-b))$. A (4.11) egyenlet w megoldása a következőképpen vezethető le:

Tekintsük először azt az esetet amikor $y = 2$. Egyszerűen adódik, hogy $u = 2b/(2b + (1 - b)) = 2b/(1 + b)$. Ha $b' \geq 2b/(1 + b)$, akkor $w = 1$. Ha $b' \leq 2b/(1 + b)$, akkor $w \leq 1$, és a $1 - w = c_s \cdot \{2b/(1 + b) - b'w\}$ formulából kapjuk, hogy $w = (1 - c_s 2b/(1 + b))/(1 - cb')$.

Hasonlóan ha $y = 0.5$, akkor $u = 0.5b/(0.5b + (1 - b)) = b/(2 - b)$. Ha $b' \geq b/(2 - b)$, akkor $w = 1$. Ha $b' \leq b/(2 - b)$, akkor $w \leq 1$ és adódik, hogy $w = (1 - c_s b/(2 - b))/(1 - c_s b')$.

Ha w egyenlő 1-el akkor a logaritmusa 0. Jelölje δ_k a diszkontfaktort.

A (4.10) egyenlet a következő konkrét formát ölti (az egyszerűség kedvéért ugyancsak f-fel jelöljük a skalár argumentumokkal rendelkező függvényt):

$$F_{\delta_k}(b^{(k)}, 2) =$$
$$\max_{b^{(k)'}} I_{b^{(k)'} < z} \log \frac{(1 - c_s \cdot u)}{(1 - c_s \cdot b^{(k)'})} + 1/2 \log((1 + b^{(k)'})(1 - b^{(k)'}/2)) +$$
$$\frac{1}{2}(1 - \delta_k)(F_{\delta_k}(b^{(k)'}, 2) + F_{\delta_k}(b^{(k)'}, 1/2)),$$

ahol $u = 2b^{(k)}/(1 + b^{(k)})$;

$$F_{\delta_k}(b^{(k)}, 1/2) =$$
$$\max_{b^{(k)'}} I_{b^{(k)'} < z} \log \frac{1 - c_s \cdot u}{1 - c_s \cdot b^{(k)'}} + 1/2 \log((1 + b^{(k)'})(1 - b^{(k)'}/2)) +$$
$$1/2(1 - \delta_k)(F_{\delta_k}(b^{(k)'}, 2) + F_{\delta_k}(b^{(k)'}, 1/2)),$$

ahol $u = b^{(k)}/(2 - b^{(k)})$. Legyen $F_{\delta_k}(b, y) = 0$, az első lépésként $k = 1$

$$F^l_{\delta_k}(b, 2) = \max_{b'}\{v(b, b', 2) + (1 - \delta_k)1/2(F^l_{\delta_k}(b', 2) + F^l_{\delta_k}(b', 1/2))\}$$

$$F^l_{\delta_k}(b, \frac{1}{2}) = \max_{b'}\{v(b, b', \frac{1}{2}) + (1 - \delta_k)1/2(F^{l-1}_{\delta_k}(b', 2) + F^{l-1}_{\delta_{k-1}}(b', 1/2))\}$$

Megállunk, ha $M^l_{\delta_k} - m^l_{\delta_k} \leq \epsilon \cdot m^l_{\delta_k}$, ahol

$$m^l_{\delta_k} = \min_{(b,x)}(F^l_{\delta_k}(b, x) - F^{l-1}_{\delta_k}(b, x))$$

$$M^l_{\delta_k} = \max_{(b,x)}(F^l_{\delta_k}(b, x) - F^{l-1}_{\delta_k}(b, x)),$$

egyébként $l = l + 1$ és megyünk tovább a következő iterációs lépésre.

4.5. Bizonyítások

A 4.1 Tétel bizonyítása. Bevezetve a következő jelölést:

$$F_i(b,x) = F_{\delta_i}(b,x).$$

Meg kell mutatnunk hogy

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(g(b_i^*, b_{i+1}^*, X_i, X_{i+1}) - g(b_i, b_{i+1}, X_i, X_{i+1})) \geq 0$$

m.m.. A korábbi martingál differencia érvelés alapján adódik, hogy

$$\begin{aligned} &\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(g(b_i^*, b_{i+1}^*, X_i, X_{i+1}) - g(b_i, b_{i+1}, X_i, X_{i+1})) \\ = &\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(v(b_i^*, b_{i+1}^*, X_i) - v(b_i, b_{i+1}, X_i)) \end{aligned}$$

m.m., ezért meg kell mutatni, hogy

$$\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v(b_i^*, b_{i+1}^*, X_i) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v(b_i, b_{i+1}, X_i)\right) \geq 0 \tag{4.12}$$

m.m.. (4.9) implikálja, hogy

$$F_i(b_i^*, X_i) = v(b_i^*, b_{i+1}^*, X_i) + (1-\delta_i)\mathbb{E}\{F_i(b_{i+1}^*, X_{i+1})|b_{i+1}^*, X_i\}, \tag{4.13}$$

míg tetszőleges $\{b_i\}$ portfólióra,

$$F_i(b_i, X_i) \geq v(b_i, b_{i+1}, X_i) + (1-\delta_i)\mathbb{E}\{F_i(b_{i+1}, X_{i+1})|b_{i+1}, X_i\}. \tag{4.14}$$

A (4.13) és (4.14) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v(b_i^*, b_{i+1}^*, X_i) \\ = &\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(F_i(b_i^*, X_i) - (1-\delta_i)\mathbb{E}\{F_i(b_{i+1}^*, X_{i+1})|b_{i+1}^*, X_i\}\Big) \\ = &\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(F_i(b_i^*, X_i) - (1-\delta_i)\mathbb{E}\{F_i(b_{i+1}^*, X_{i+1})|X_1^i\}\Big) \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v(b_i, b_{i+1}, X_i) \\ \leq & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (F_i(b_i, X_i) - (1-\delta_i)\mathbb{E}\{F_i(b_{i+1}, X_{i+1})|b_{i+1}, X_i\}) \\ = & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(F_i(b_i, X_i) - (1-\delta_i)\mathbb{E}\{F_i(b_{i+1}, X_{i+1})|X_1^i\}\right), \end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v(b_i^*, b_{i+1}^*, X_i) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v(b_i, b_{i+1}, X_i) \\ \geq & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(F_i(b_i^*, X_i) - (1-\delta_i)\mathbb{E}\{F_i(b_{i+1}^*, X_{i+1})|X_1^i\}\right) \\ - & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(F_i(b_i, X_i) - (1-\delta_i)\mathbb{E}\{F_i(b_{i+1}, X_{i+1})|X_1^i\}\right). \end{aligned}$$

Alkalmazva a következő azonosságot

$$\begin{aligned} & (1-\delta_i)\mathbb{E}\{F_i(b_{i+1}, X_{i+1})|X_1^i\} - F_i(b_i, X_i) \\ = & \mathbb{E}\{F_i(b_{i+1}, X_{i+1})|X_1^i\} - F_i(b_{i+1}, X_{i+1}) \\ + & F_i(b_{i+1}, X_{i+1}) - F_i(b_i, X_i) \\ - & \delta_i\mathbb{E}\{F_i(b_{i+1}, X_{i+1})|X_1^i\} \\ = & a_i + b_i + c_i. \end{aligned}$$

Mivel

$$F_i(b, x) = \max_{b'}\{v(b, b', x) + (1-\delta_i)\mathbb{E}(F_i(b', X_{i+1})|X_i = x), \}$$

ezért

$$||F_i||_\infty \leq ||v||_\infty + (1-\delta_i)||F_i||_\infty,$$

ahonnan

$$||F_i||_\infty \leq \frac{||v||_\infty}{\delta_i}$$

(lásd. Lemma 4.2.3 Schäfer [66] dolgozatában). Mivel $\{a_i\}$ egy martingál-differencia sorozat

$$|a_i| \leq 2||F_i||_\infty \leq \frac{2}{\delta_i}||v||_\infty,$$

ezért, mivel $\sum_n \frac{1}{n^2\delta_n^2} < \infty$, a Chow Tétel implikálja

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \to 0 \tag{4.15}$$

m.m. (lásd. Stout [69]).
Hasonlóan a fenti korláthoz az egyenlőségből az adódik, hogy

$$F_i(b,x) = \max_{b'}\{v(b,b',x) + (1-\delta_i)\mathbb{E}(F_i(b',X_{i+1})|X_i = x))\}$$

és az egyenlőtlenség

$$\begin{aligned} & F_{i+1}(b,x) \\ = \ & \max_{b''}\{v(b,b'',x) + (1-\delta_{i+1})\mathbb{E}(F_{i+1}(b'',X_{i+2})|X_{i+1} = x)\} \\ \geq \ & v(b,b',x) + (1-\delta_{i+1})\mathbb{E}(F_{i+1}(b',X_{i+1})|X_i = x) \end{aligned}$$

tetszőleges b'-re. Véve a különbséget

$$\begin{aligned} & F_i(b,x) - F_{i+1}(b,x) \\ \leq \ & \max_{b'}\{(1-\delta_i)\mathbb{E}(F_i(b',X_{i+1}|X_i = x)) \\ & -(1-\delta_{i+1})\mathbb{E}(F_{i+1}(b',X_{i+1})|X_i = x))\} \\ \leq \ & (1-\delta_i)||F_i - F_{i+1}||_\infty \\ & +(\delta_{i+1}-\delta_i)\max_{b'}\mathbb{E}(F_{i+1}(b',X_{i+1})|X_i = x) \\ \leq \ & (1-\delta_i)||F_i - F_{i+1}||_\infty + (\delta_{i+1}-\delta_i)||F_{i+1}||_\infty. \end{aligned}$$

Így adódik

$$||F_i - F_{i+1}||_\infty \leq \frac{\delta_i - \delta_{i+1}}{\delta_i}||F_{i+1}||_\infty.$$

felhasználva, hogy $||F_{i+1}||_\infty \leq \frac{||v||_\infty}{\delta_{i+1}}$ és a δ_i-re vonatkozó feltételeket, azt kapjuk, hogy

$$||F_i - F_{i+1}||_\infty \leq ||v||_\infty \frac{\delta_i - \delta_{i+1}}{\delta_i^2}$$

(lásd. 4.2.3 lemmát Schäfer [66] dolgozatában). Vizsgálva a $\{b_i\}$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(F_i(b_{i+1}, X_{i+1}) - F_i(b_i, X_i))\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(F_i(b_{i+1}, X_{i+1}) - F_{i+1}(b_{i+1}, X_{i+1}))\right| \\
&+ \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(F_{i+1}(b_{i+1}, X_{i+1}) - F_i(b_i, X_i))\right| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}||F_i - F_{i+1}||_\infty \\
&+ \left|\frac{1}{n}(F_{n+1}(b_{n+1}, X_{n+1}) - F_1(b_1, X_1))\right| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}||F_i - F_{i+1}||_\infty + \frac{||F_{n+1}||_\infty + ||F_1||_\infty}{n} \\
&\leq ||v||_\infty \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|\delta_{i+1} - \delta_i|}{\delta_{i+1}^2} + ||v||_\infty \frac{1/\delta_{n+1} + 1/\delta_1}{n} \\
&\to 0 \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

adódik a feltételekből. A (4.12) belátásához még azt kell megmutatni, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_i(\mathbb{E}\{F_i(b_{i+1}^*, X_{i+1})|X_1^i\}$$
$$-\mathbb{E}\{F_i(b_{i+1}, X_{i+1})|X_1^i\}) \leq 0$$

m.m.. Az F_i definiciójának a következménye, hogy

$$\begin{aligned}
& F_i(b_{i+1}^*, X_{i+1}) - F_i(b_{i+1}, X_{i+1}) \\
= & \max_{b'}\left\{v(b_{i+1}^*, b', X_{i+1}) + (1-\delta_i)\mathbb{E}\{F_i(b', X_{i+2})|X_{i+1}\}\right\} \\
- & \max_{b''}\left\{v(b_{i+1}, b'', X_{i+1}) + (1-\delta_i)\mathbb{E}\{F_i(b'', X_{i+2})|X_{i+1}\}\right\} \\
\leq & \max_{b'}\left\{v(b_{i+1}^*, b', X_{i+1}) + (1-\delta_i)\mathbb{E}\{F_i(b', X_{i+2})|X_{i+1}\}\right. \\
& \left. -v(b_{i+1}, b', X_{i+1}) - (1-\delta_i)\mathbb{E}\{F_i(b', X_{i+2})|X_{i+1}\}\right\} \\
\leq & \max_{b'}\left\{v(b_{i+1}^*, b', X_{i+1}) - v(b_{i+1}, b', X_{i+1})\right\} \\
\leq & 2||v||_\infty,
\end{aligned}$$

ezért

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i \mathbb{E}\{F_i(b^*_{i+1}, X_{i+1}) - F_i(b_{i+1}, X_{i+1})|X_1^i\} \\
\leq \quad & \frac{2\|v\|_\infty}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i \to 0.
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

(4.15)-ból, (4.16)-ból és (4.17)-ből adódik (4.12). ∎

A 4.2 Tétel bizonyítása. A 4.1 Tételből következik, hogy

$$
\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\log S_n^* - \frac{1}{n}\log \tilde{S}_n\right) \geq 0
$$

m.m. meg kell mutatni

$$
\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\log \tilde{S}_n - \frac{1}{n}\log S_n^*\right) \geq 0 \tag{4.18}
$$

m.m.. A $\tilde{S}_n$ definiciója miatt,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}\log \tilde{S}_n &= \frac{1}{n}\log\sum_{k=1}^{\infty} q_k S_n(B^{(k)}) \\
&\geq \frac{1}{n}\log\sup_k q_k S_n(B^{(k)}) \\
&= \sup_k\left(\frac{\log q_k}{n} + \frac{1}{n}\log S_n(B^{(k)})\right),
\end{aligned}
$$

így (4.18) adódik a

$$
\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \quad & \left(\sup_k\left(\frac{\log q_k}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(b_i^{(k)}, b_{i+1}^{(k)}, X_i, X_{i+1})\right)\right. \\
- \quad & \left.\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(b_i^*, b_{i+1}^*, X_i, X_{i+1})\right) \geq 0
\end{aligned}
$$

m.m., amely ekvivalens azzal, hogy

$$
\begin{aligned}
& \liminf_{n\to\infty}\sup_k\left(\frac{\log q_k}{n}\right. \\
+ \quad & \left.\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(v(b_i^{(k)}, b_{i+1}^{(k)}, X_i) - v(b_i^*, b_{i+1}^*, X_i))\right) \geq 0
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

m.m.. (4.10) implikálja hogy

$$\begin{aligned} & F_k(b_i^{(k)}, X_i) \\ = \; & v(b_i^{(k)}, b_{i+1}^{(k)}, X_i) + (1-\delta_k)\mathbb{E}\{F_k(b_{i+1}^{(k)}, X_{i+1}) | b_{i+1}^{(k)}, X_i\}, \end{aligned} \tag{4.20}$$

míg tetszőleges $\{b_i\}$ portfólióra,

$$F_k(b_i, X_i) \geq v(b_i, b_{i+1}, X_i) + (1-\delta_k)\mathbb{E}\{F_k(b_{i+1}, X_{i+1}) | b_{i+1}, X_i\},$$

így a $\{b_i^*\}$ portfólióra

$$F_k(b_i^*, X_i) \geq v(b_i^*, b_{i+1}^*, X_i) + (1-\delta_k)\mathbb{E}\{F_k(b_{i+1}^*, X_{i+1}) | b_{i+1}^*, X_i\}. \tag{4.21}$$

A (4.20) és (4.21) miatt azt kapjuk hogy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n v(b_i^*, b_{i+1}^*, X_i) \\ \leq \; & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(F_k(b_i^*, X_i) - (1-\delta_k)\mathbb{E}\{F_k(b_{i+1}^*, X_{i+1}) | b_{i+1}^*, X_i\} \right) \\ = \; & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(F_k(b_i^*, X_i) - (1-\delta_k)\mathbb{E}\{F_k(b_{i+1}^*, X_{i+1}) | X_1^i\} \right) \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n v(b_i^{(k)}, b_{i+1}^{(k)}, X_i) \\ = \; & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(F_k(b_i^{(k)}, X_i) - (1-\delta_k)\mathbb{E}\{F_k(b_{i+1}^{(k)}, X_{i+1}) | b_{i+1}^{(k)}, X_i\} \right) \\ = \; & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(F_k(b_i^{(k)}, X_i) - (1-\delta_k)\mathbb{E}\{F_k(b_{i+1}^{(k)}, X_{i+1}) | X_1^i\} \right), \end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n v(b_i^{(k)}, b_{i+1}^{(k)}, X_i) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n v(b_i^*, b_{i+1}^*, X_i) \\ \geq \; & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(F_k(b_i^{(k)}, X_i) - (1-\delta_k)\mathbb{E}\{F_k(b_{i+1}^{(k)}, X_{i+1}) | X_1^i\} \right) \\ - \; & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(F_k(b_i^*, X_i) - (1-\delta_k)\mathbb{E}\{F_k(b_{i+1}^*, X_{i+1}) | X_1^i\} \right). \end{aligned}$$

Alkalmazva a következő azonosságot

$$\begin{aligned}
& (1-\delta_k)\mathbb{E}\{F_k(b_{i+1}, X_{i+1})|X_1^i\} - F_k(b_i, X_i) \\
= \; & \mathbb{E}\{F_k(b_{i+1}, X_{i+1})|X_1^i\} - F_k(b_{i+1}, X_{i+1}) \\
+ \; & F_k(b_{i+1}, X_{i+1}) - F_k(b_i, X_i) \\
- \; & \delta_k\mathbb{E}\{F_k(b_{i+1}, X_{i+1})|X_1^i\} \\
= \; & a_i + b_i + c_i.
\end{aligned}$$

Hasonlóan a 4.1 Tétel bizonyításához, az a_i-k és b_i-k átlaga nullához tart m.m., így vizsgálva (4.19) az adódik, hogy 1 valószínűséggel,

$$\begin{aligned}
& \liminf_{n\to\infty} \sup_k \Bigg(\frac{\log q_k}{n} \\
& + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(v(b_i^{(k)}, b_{i+1}^{(k)}, X_i) - v(b_i^*, b_{i+1}^*, X_i))\Bigg) \\
\geq \; & \sup_k \liminf_{n\to\infty} \Bigg(\frac{\log q_k}{n} \\
& + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(v(b_i^{(k)}, b_{i+1}^{(k)}, X_i) - v(b_i^*, b_{i+1}^*, X_i))\Bigg) \\
= \; & \sup_k \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(v(b_i^{(k)}, b_{i+1}^{(k)}, X_i) - v(b_i^*, b_{i+1}^*, X_i)) \\
= \; & \sup_k \liminf_{n\to\infty} \frac{\delta_k}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{E}\{F_k(b_{i+1}^{(k)}, X_{i+1})|X_1^i\} \\
& -\mathbb{E}\{F_k(b_{i+1}^*, X_{i+1})|X_1^i\}).
\end{aligned}$$

Még meg kell mutatnunk azt, hogy az utolsó tag nemnegatív m.m.. Használva az F_k

$$\begin{aligned}
& F_k(b_{i+1}^{(k)}, X_{i+1}) - F_k(b_{i+1}^*, X_{i+1}) \\
= \;& \max_{b'} \Big\{ v(b_{i+1}^{(k)}, b', X_{i+1}) + (1-\delta_k)\mathbb{E}\{F_k(b', X_{i+2})|X_{i+1}\}\Big\} \\
- \;& \max_{b''} \Big\{ v(b_{i+1}^*, b'', X_{i+1}) + (1-\delta_k)\mathbb{E}\{F_k(b'', X_{i+2})|X_{i+1}\}\Big\} \\
= \;& \max_{b'} \min_{b''} \Big\{\Big\{ v(b_{i+1}^{(k)}, b', X_{i+1}) \\
& +(1-\delta_k)\mathbb{E}\{F_k(b', X_{i+2})|X_{i+1}\}\Big\} \\
& -\Big\{ v(b_{i+1}^*, b'', X_{i+1}) + (1-\delta_k)\mathbb{E}\{F_k(b'', X_{i+2})|X_{i+1}\}\Big\}\Big\} \\
\geq \;& \min_{b''} \Big\{\Big\{ v(b_{i+1}^{(k)}, b'', X_{i+1}) \\
& +(1-\delta_k)\mathbb{E}\{F_k(b'', X_{i+2})|X_{i+1}\}\Big\} \\
& -\Big\{ v(b_{i+1}^*, b'', X_{i+1}) + (1-\delta_k)\mathbb{E}\{F_k(b'', X_{i+2})|X_{i+1}\}\Big\}\Big\} \\
= \;& \min_{b''} \Big\{ v(b_{i+1}^{(k)}, b'', X_{i+1}) - v(b_{i+1}^*, b'', X_{i+1})\Big\} \\
\geq \;& -2\|v\|_\infty,
\end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned}
& \sup_k \liminf_{n\to\infty} \frac{\delta_k}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\{F_k(b_{i+1}^{(k)}, X_{i+1}) - F_k(b_{i+1}^*, X_{i+1})|X_1^i\} \\
\geq \;& \sup_k \delta_k(-2\|v\|_\infty) \\
= \;& 0
\end{aligned}$$

m.m., és (4.19) ezzel bebizonyítottuk a tételt. ∎

Irodalomjegyzék

[1] M. Akien , A. Sulem, and M. I. Taksar. Dynamic Optimization of Long-term Growth Rate for a Portfolio with Transaction Costs and Logaritmic Utility." *Mathematical Finance*, 11, 153-188, 2001

[2] P. Algoet. Universal schemes for prediction, gambling, and portfolio selection. *Annals of Probability*, 20:901–941, 1992.

[3] P. Algoet. The strong law of large numbers for sequential decisions under uncertainty. *IEEE Transactions on Information Theory*, 40: 609–634, 1994.

[4] P. Algoet, T. Cover. Asymptotic optimality asymptotic equipartition properties of log-optimum investments. *Annals of Probability*, 16:876–898, 1988.

[5] A. Arapostathis, V. S. Borkar, E. Fernandez-Gaucherand, M. K. Ghosh and S. I. Marcus. Discrete-time Controlled Markov Processes with Average Cost Criterion: a Survey." *SIAM J. Control Optimzation*, 31:282-344, 1993

[6] A. R. Barron, T. Cover. Bound on the financial value of information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 34(5):1097–1100, 1988.

[7] R. Bell and T. M. Cover. Competitive optimality of logarithmic investment. properties of log-optimum investments. *Math of Operational Research*, 5:161–166, 1980.

[8] D. P. Bertsekas, and S. E. Shreve. *Stochastic Optimal Control: the Discrete Time Case.* New York: Academic Press, 1978.

[9] T. R. Bielecki and S. R. Pliska. Risk Sensitive Asset Managment with Transaction Costs." *Finance and Stochastics*, 4:1–33, 2000.

[10] A. Blum, A. Kalai. Universal portfolios with and without transaction costs. *Proceedings of the 10th Annual Conference on Learning Theory.*, 309–313, 1997.

[11] R. V. Bobryk, and L. Stettner. Discrete Time Portfolio Selection with Proportional Transaction Costs." *Probability and Mathematical Statistics*, 19:235–248, 1999.

[12] Z. Bodie, A. Kane, and A. J. Marcus. Investments. *McGrawHill-Irwin*, 2005.

[13] A. Borodin, R. El-Yaniv, and V. Gogan. On the competitive theory and practice of portfolio selection (extended abstract). In *Proc. of the 4th Latin American Symposium on Theoretical Informatics (LATIN'00)*, 173–196, 2000.

[14] L. Breiman. The individual ergodic theorem of information theory. *Annals of Mathematical Statistics*, 28:809–811, 1957. Correction. *Annals of Mathematical Statistics*, 31:809–810, 1960.

[15] L. Breiman. Optimal gambling systems for favorable games. *Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob.*, 1:65–78, 1961.

[16] N. Cesa-Bianchi and G. Lugosi. Minimax values and metric entropy bounds for portfolio selection problems. *Communicated at the First World Congress of the Game Theory Society*, 2000.

[17] N. Cesa-Bianchi and G. Lugosi. *Prediction, Learning, and Games.* Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[18] Y. S. Chow. Local convergence of martingales and the law of large numbers. *Annals of Mathematical Statistics*, 36:552–558, 1965.

[19] T. Cover. Universal portfolios. *Mathematical Finance*, 1:1–29, 1991.

[20] T. Cover. An Algorithm for Maximizing Expected Log Investment Return *IEEE Transactions on Information Theory*, 30:369–373, 1984.

[21] T. Cover and E. Ordentlich. Universal portfolios with side information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 42: 348–363, 1996.

[22] T. Cover and E. Ordentlich. The cost of achieving the best portfolio in hindsight. *Mathematics of Operations Research*, 23(4):960–982, 1997.

[23] T. Cover and J. Thomas. Elements of information theory. *John Wiley and Sons*, 1991.

[24] J. E. Cross and A. R. Barron. Efficient universal portfolios for past-dependent target Classes. *Mathematical Finance*, 13(2):245–276, 2003.

[25] Datasets. `http://www.szit.bme.hu/~oti/portfolio`.

[26] M. H. A. Davis and A. R. Norman. Portfolio Selection with Transaction Costs." *Mathematics of Operations Research*, 15:676–713, 1990.

[27] J. Eastham and K. Hastings. Optimal Impulse Control of Portfolios." *Mathematics of Operations Research*, 13:588–605, 1988.

[28] E. R. Fernholz. *Stochastic Portfolio Theory* New York: Springer, 2000.

[29] M. Finkelstein, R. Whitley. Optimal strategies for repeated games. *Advances in Applied Probability*, 13:415–428, 1981.

[30] D.M., Gay. Computing optimal locally constrained steps. *SIAM J. on. Sci.Statist.Comput.*, 2(2):186–197, 1981.

[31] X.P. Guo and Xi-Ren Cao, Optimal Control of ergodic continuous -time Markov chains with average sample-path rewards, SIAM J. Control. Optim., 44(1):29–48, 2005.

[32] X.P.Guo and P.Shi, Limiting average criteria for nonstationary Markov decision processes, SIAM J.Optim.,11:1037-1053, 2001.

[33] R. Grauer. A comparison of growth optimal investment and mean variance investment policies. *Journal of Financial and Quantiative Analysis*, 16:1–21, 1981.

[34] S. J. Grossman and R. J. Schiller. The determinants of the variability of stock market prices. *American Economic Review*, 71(2):222–227, 1981.

[35] L. Györfi, D. Schäfer. Nonparametric prediction. *Advances in Learning Theory: Methods, Models and Applications, J. A. K. Suykens, G. Horváth, S. Basu, C. Micchelli, J. Vandevalle (Eds.), IOS Press, NATO Science Series*, 339–354, 2003.

[36] L. Györfi, M. Kohler, A. Krzyżak and H Walk. A distribution-free theory of nonparametric regression. *Springer, New York*, 2002.

[37] L. Györfi, G. Lugosi, and F. Udina. Nonparametric kernel-based sequential investment strategies. *Mathematical Finance*, 16:337–357, 2006.

[38] L. Györfi, A. Urbán, and I. Vajda. Kernel-based semi-log-optimal empirical portfolio selection strategies. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 10(5):505–516, 2007.

[39] L. Györfi, F. Udina, H. Walk. Nonparametric nearest neighbor based empirical portfolio selection strategies. *Statistics and Decisions(in print)*, 2008.

[40] L. Györfi, Gy. Ottucsák. Empirical log-optimal portfolio selections: a survey. *manuscript*, 2008.

[41] L. Györfi, I. Vajda. Growth Optimal Portfolio Selection Strategies with Transaction Costs, *Springer Lecture Notes in Artificial Intelligence* 5254:108–123, 2008.

[42] N. H. Hakansson. Capital growth and the mean-variance approach to portfolio selection. *Journal of Financial and Quantiataive Analysis*, 6:517–557, 1971.

[43] N. H. Hakansson and W. T. Ziemba. Capital growth theory. In R. Jarrow, V. Maksimovic, and W. Ziemba, editors, *Handbooks in Operations Research and Management Science: Finance,Elsevier Science, North-Holland, Amsterdam*, 9:61–86, 1995.

[44] D. P. Helmbold, R. E. Schapire, Y. Singer,and M. K. Warmuth. On-line portfolio selection using multiplicative updates. *Mathematical Finance*, 8:325–347. 1998.

[45] O. Hernández-Lerma and J.B.Lasserre. *Discrete-Time Markov Control Processes: Basic Optimality Criteria.* New York: Springer, 1996.

[46] O. Hernández-Lerma, O. Vega-Amaya. Infinite-horizon Markov Control Processes with Undiscounted Cost Criteria: from Average to Overtaking Optimality." *Applicationes Mathematicae*, 25:153–178,1998.

[47] O. Hernández-Lerma, O. Vega-Amaya and G. Carracasco. Sample-path Optimality and Variance-minimization of Average Cost Markov Control Processes." *SIAM J. Control Optimization*, 38:79–93,1999.

[48] G. Iyengar. Discrete time growth optimal investment with costs. *Working Paper*, http://www.columbia.edu/ gi10/Papers/stochastic.pdf, 2002.

[49] G. Iyengar. Universal Investment in Markets with Transaction Costs. *Mathematical Finance*,15:359–371, 2005.

[50] G. Iyengar and T. Cover. Growths Optimal Investment in Horse Race Markets with Costs. *IEEE Transactions on Information Theory*, 46:2675–2683, 2000.

[51] J. Kelly. A new interpretation of information rate. *IEEE Transactions on Information Theory* 2(3):185–189, 1956.

[52] R. Korn. Portfolio Optimization with Strictly Positive Transaction Cost and Impulse Control. *Finance and Stochastics*, 2:85–114, 1998.

[53] Y. Kroll, H. Levy, and H. Markowitz. Mean-variance versus direct utility maximization. *Journal of Finance*, 39:47–75, 1984.

[54] H. Latané. Criteria for choice among risky adventures. *J. Politic. Economy*, 67:144–155, 1959.

[55] J. B. Lasserre. Sample-path Average Optimality for Markov Control Processes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44:1966–1971, 1999.

[56] D. G. Luenberger. Linear and Nonlinear Programming Second Edition, Addison-Wesley Publ. Co., 1989.

[57] D. G. Luenberger. Investment Science Oxford University Press, 1997.

[58] H. R. Markowitz. Investment for the long run: new evidence for and old rule. *The Journal of Finance* 31(5):1273–1286, 1976.

[59] H. R. Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance* 7(1):77–89, 1952.

[60] R. Merton. An intertemporal capital asset pricing model. *Econometrica*, 41(5):867–887, 1973.

[61] R. C. Merton and P. A. Samuelson. Fallacy of the log-normal approximation to optimal decision making over many periods. *Journal of Financial Economics*, 1(1):67–94, 1974.

[62] A. J. Morton and S. R. Pliska. Optimal Portfolio Manangement with Transaction Costs. *Mathematical Finance*, 5, 337–356, 1995

[63] Gy. Ottucsák, I. Vajda. An asymptotic analysis of the mean-variance portfolio selection. *Statistics and Decisions*, 25:63–88, 2007.

[64] Gy. Ottucsák, I. Vajda. Empirikus portfólióstratégiák. *Közgazdasági Szemle*, 53:624–640, 2006.

[65] P. A. Samuleson. Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming. *The Review of Economics and Statistics* 51(3):239–246, 1969.

[66] D. Schafer. Nonparametric estimation for financial investment under log-utility. *PhD Dissertation, Mathematical Institute, University Stuttgart*, 2002.

[67] S. E. Shreve and H. M. Soner. Optimal Investment and Consumption with Transaction Costs. *Annals of Applied Probability*, 4:609–692, 1994.

[68] Y. Singer. Switching portfolios. *International Journal of Neural Systems*, 84:445–455, 1997.

[69] W. F. Stout. Almost sure convergence. *Academic Press, New York* 1974.

[70] J. Palczewski and L. Stettner. Optimisation of Portfolio Growth Rate on the Market with Fixed Plus Proportional Transaction Cost." *CIS to Appear a Special Issue Dedicated to Prof. T. Duncan*, 2006.

[71] S. R. Pliska and K. Suzuki. Optimal Tracking for Asset Allocation with Fixed and Proportional Transaction Costs. *Quantitative Finance*, 4:233–243, 2004.

[72] M. Taksar, M. Klass and, D. Assaf. A Diffusion Model for Optimal Portfolio Selection in the Presence of Brokerage Fees." *Mathematics of Operations Research*, 13:277–294, 1988.

[73] J. Tobin. Liquidity preference as behavior towards risk. *The Review of Economic Studies*, 25(2):65–86, 1958.

[74] I. Vajda. Analysis of szemi-log-optimal investment strategies. *Proc. Prague Stochastics*, 719–727, 2006.

[75] I.Vajda. Risk controlled log-optimal investment. *manuscript*

[76] O. Vega-Amaya. Sample-path Average Optimality of Markov Control Processes with Strictly Unbounded Costs." *Applicationes Mathematicae*, 26:363–381, 1999.

[77] H. Walk and S. Yakowitz. Iterative nonparametric estimation of a log-optimal portfolio selection function. *IEEE Transactions on Information Theory*, 48(1): 324–333, 2002.