

Budapesti Corvinus Egyetem

MODERN BAYES-I ÖKONOMETRIAI ELEMZÉSEK

**SIMASÁGI PRIOROK ALKALMAZÁSA AZ
ÜZLETI CIKLUSOK SZINKRONIZÁCIÓJÁNAK
MÉRÉSÉRE ÉS AZ INFLÁCIÓ ELŐREJELZÉSÉRE**

Ph.D. értekezés

dr. Várpalotai Viktor

Budapest, 2008.

dr. Várpalotai Viktor

Modern Bayes-i ökonometriai elemzések

**Simasági priorok alkalmazása az üzleti ciklusok
szinkronizációjának mérésére és az infláció előrejelzésére**

Matematikai Közgazdaságtan és Gazdaságelemzés
Tanszék

Témavezető: Móczár József, Ph.D.

Bíráló bizottság:

© dr. Várpalotai Viktor

Budapesti Corvinus Egyetem

Közgazdaságtani Doktori Iskola

Modern Bayes-i ökonometriai elemzések

**Simasági priorok alkalmazása az üzleti ciklusok
szinkronizációjának mérésére és az infláció előrejelzésére**

Ph.D. értekezés

dr. Várpalotai Viktor

Budapest, 2008.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
Az értekezésben alkalmazott simasági priorokról	4
Az értekezésben vizsgált kérdések, alkalmazott új módszerek és az értekezés szerkezete	6
Köszönetnyilvánítás	9
1. Bevezetés a Bayes-i ökonometriába	10
1.1. A klasszikus és a Bayes-i ökonometria alapvető eltérései	10
1.2. A Bayes-i becslés alapvető eszközei	11
1.2.1. Lineáris regressziós modell természetes konjugált priorral	12
1.2.2. Lineáris regressziós modell nem informatív priorral	16
1.3. A Bayes-i elemzés eredményeinek bemutatása, értelmezése	20
1.4. Bayes-i előrejelzések	22
1.5. Bayes-i tesztek	24
1.5.1. HPD-teszt	24
1.5.2. Bayes-hányados	25
1.6. Szimulációs technikák	27
1.6.1. Direkt mintavétel	28
1.6.2. Gibbs-féle mintavétel	29
1.6.3. Metropolis–Hastings-féle eljárás	32
1.6.4. Rácpontos Gibbs-féle mintavétel	37
1.6.5. Adatkiegészítésen alapuló eljárás	37
1.6.6. Vegyes eljárások	39
1.6.7. Előrejelzések generálása szimulációs technikákkal	39
1.6.8. A poszterior momentumok származtatása a generált mintákból	40
2. Időben változó tört késleltetés modellje és alkalmazása az üzleti ciklusok szinkronizációjának mérésére	43
2.1. A késleltetés operátor általánosítása	45
2.1.1. A tört késleltetés	46
2.1.2. Időben változó tört késleltetés	50
2.2. Modell az üzleti ciklusok szinkronizációjának mérésére	52
2.3. Az üzleti ciklusok szinkronizációját mérő modellek összevetése mesterséges adatokon	60
2.4. A szinkronizáció méréséhez felhasznált valós adatok	64
2.5. Eredmények	64
2.6. Következtetések	67
3. Dezaggregált, költségbegyűrződéses, Bayes-i ökonometriai infláció-előrejelző modell	69
3.1. Az inflációs egyenletek vázlatos története	70
3.1.1. A kezdetek	70

3.1.2.	A Sargent-Lucas kritika	71
3.1.3.	A háromszög modell	71
3.1.4.	Az új-Keynes-i Phillips-görbe	72
3.1.5.	A hibrid új-Keynes-i Phillips-görbe	73
3.1.6.	Három szögmodell vs Hibrid új-Keynes-i Phillips-görbe: érvek és ellenérvek	73
3.2.	A dezaggregált költségbegyűrűződéses modell alapváza	74
3.2.1.	A költségűnyok meghatározása (Hosszú táv)	74
3.2.2.	A költség-begyűrűződések meghatározása (Rövid távú dinamika)	75
3.3.	Osztott késleltetés Bayes-i becslése simasági priorral, összeg- és előjelmegkötésekkel	77
3.4.	Felhasznált adatok	85
3.5.	A modell paraméterezése és becslési eredményei	86
3.6.	A dezaggregált költségbegyűrűződéses modell előrejelző képessége	90
4.	Összegzés és a jövőbeli fejlesztések lehetséges irányai	93
4.1.	A modern Bayes-i ökonometria eszközök ismertetése	93
4.2.	Időben változó paraméterű és tört késleltetéses modell	93
4.2.1.	Üzleti ciklusok szinkronizációjának vizsgálata 24+1 ország adatain	93
4.2.2.	A vizsgálat gazdaságpolitikai következményei	94
4.2.3.	Jövőbeli fejlesztési irányok	94
4.3.	Költségbegyűrűződésen alapuló inflációs előrejelző modell	94
4.3.1.	Eltérő költségbegyűrűződési sebességek	95
4.3.2.	Kiemelkedő előrejelző képesség	95
4.3.3.	Jövőbeli fejlesztési irányok	95
4.4.	Értekezésben bemutatott módszertani újítások	96
4.5.	Záró gondolat	97
	Hivatkozások	99
	Függelék	108
A.	Függelék az 1. fejezethez	108
A.1.	Dekompozíciós szabály igazolása	108
A.2.	Az értekezésben használt nem elemi eloszlások	108
A.2.1.	Student féle t-eloszlás	108
A.2.2.	Inverz gamma-2 eloszlás	109
A.3.	Mintavételezés különböző eloszlásokból	109
A.3.1.	Inverz eloszlásfüggvény technika	109
A.3.2.	Többváltozós normális eloszlás	110
A.3.3.	χ^2 eloszlás	110
A.3.4.	Többváltozós t -eloszlás	110
A.3.5.	Inverz gamma-2 eloszlás	110
A.4.	Thomas Bayes portréja	111

B. Függelék a 2. fejezethez	112
B.1. $V'V$ invertálhatóságának bizonyítása	112
B.2. $W'W$ invertálhatóságának bizonyítása	112
B.3. Az i_t peremsűrűségfüggvényei	112
B.4. Felhasznált adatok	114
B.5. Táblázatok a 2. fejezethez	116
B.6. Ábrák a 2. fejezethez	118
C. Függelék a 3. fejezethez	128
C.1. $Z'_\mu Z_\mu$ invertálhatóságának bizonyítása	128
C.2. $Z'_j Z_j$ invertálhatóságának bizonyítása	128
C.3. $Z'_\phi Z_\phi$ invertálhatóságának bizonyítása	128
C.4. Táblázatok a 3. fejezethez	129
C.5. Ábrák a 3. fejezethez	136

Táblázatok jegyzéke

1. A β paraméterre vonatkozó prior feltevések és poszterior jellemzők	22
2. A β paraméterre vonatkozó prior feltevések, poszterior jellemzők és a 95%-os HPD intervallumok	25
3. Az alternatív modell-hipotézisek Bayes-hányadosai	27
4. USA negyedéves növekedési ütemének modellezése AR(1) folyamattal, független jelölt-generáló sűrűségfüggvénnyel	36
5. USA negyedéves növekedési ütemének modellezése AR(1) folyamattal, véletlen bolyongás jelölt-generáló sűrűségfüggvénnyel	36
6. Simasági priorokat alkalmazó tanulmányok és az értekezés egyes fejezeteinek összehasonlítása	97
7. Üzleti ciklusok elemzéséhez felhasznált negyedéves GDP adatok	115
8. Üzleti ciklusok szinkronizációját vizsgáló modellek összehasonlítása mesterséges adatokon	116
9. Üzleti ciklusok szinkronizációját vizsgáló modellek összehasonlítása valós adatokon	117
10-a. A KSH 160 elemet tartalmazó fogyasztási kosarának csoportosítása	129
10-b. A KSH 160 elemet tartalmazó fogyasztási kosarának csoportosítása	130
11-a. Az infláció előrejelző modell specifikációja	131
11-b. Az infláció előrejelző modell specifikációja	132
11-c. Az infláció előrejelző modell specifikációja	133
11-d. Az infláció előrejelző modell specifikációja	134
12. Az infláció előrejelző modell ex-post előrejelzőképessége	135

Ábrák jegyzéke

1. Bayes-i témájú találatok száma az EconLit adatbázisban	2
---	---

2.	A Bayes-i vonatkozású tanulmányok aránya az összes tanulmányhoz viszonyítva az EconLit adatbázis alapján	2
3.	Az USA GDP-jének negyedéves növekedési üteme 1990. II. – 1999. IV. n.é. között	22
4.	A likelihood valamint a β prior és poszterior sűrűségfüggvényei különféle prior paraméterek mellett	23
5.	A Metropolis–Hastings-féle eljárás grafikus illusztrálása	33
6.	1000 egymás utáni $\rho^{(m)}$ húzás a független és a véletlen bolyongás jelölt generáló sűrűségfüggvénnyel	36
7.	Az EMU aggregált ciklusa és tört késleltettje ($i = -2.6$)	47
8.	Az EMU aggregált ciklusa és időben változó tört késleltettje. (Az időben változó tört késleltetés i_t idősorát $i_t = 0.002(t - 49)^2$ -nek választottam.)	51
9.	A szinkronizáció különböző lehetséges esetei	55
10.	Mesterségesen generált idősorokhoz felhasznált β_t^c , β_t^v , i_t^c és i_t^v idősorok	60
11.	Eredeti x_t és mesterségesen generált y_t^1 , y_t^2 , y_t^3 és y_t^4 idősorok	61
12.	Az olaj árának begyűrűződése a fogyasztói árakba	87
13.	A dezaggregált költségbegyűrűződéses modell és a Reuter's felmérés előrejelzési képessége	91
14.	Thomas Bayes tiszteletes	111
15.	Szinkronizáció becslése gördülő mintás megközelítésben (1. modell)	118
16.	Szinkronizáció becslése időben változó paraméteres modellel (2. modell)	119
17-a.	Szinkronizáció becslése időben változó paraméterű és tört késleltetéses modellel (3. modell) β_t paraméter	120
17-b.	Szinkronizáció becslése időben változó paraméterű és tört késleltetéses modellel (3. modell) i_t paraméter	120
18.	Szinkronizáció mozgóablakos megközelítésben: üzleti ciklusok, becsült β_t , i_t és ρ_t idősorok és 95%-os konfidencia-intervallumaik az egyes országokban 20 negyedéves (5 éves) mozgóablakkal	121
19-a.	Üzleti ciklusok szinkronizációja a Közép-Kelet Európai országokban	125
19-b.	Üzleti ciklusok szinkronizációja a Gazdasági és Monetáris Uniós országokban	126
19-c.	Üzleti ciklusok szinkronizációja a kontrollcsoport országokban	127
20-a.	A hosszú távú egyenletek illeszkedése az inflációs előrejelző modellben	137
20-b.	A hosszú távú egyenletek illeszkedése az inflációs előrejelző modellben	138
20-c.	A hosszú távú egyenletek illeszkedése az inflációs előrejelző modellben	139
20-d.	A hosszú távú egyenletek illeszkedése az inflációs előrejelző modellben	140
21-a.	Becsült begyűrűzési profilok	141
21-b.	Becsült begyűrűzési profilok	142
21-c.	Becsült begyűrűzési profilok	143
21-d.	Becsült begyűrűzési profilok	144
22-a.	Tény éves infláció és a modell ex-post előrejelzései az MNB-csoportosítása szerint	145
22-b.	Tény éves infláció és a modell ex-post előrejelzései az MNB-csoportosítása szerint	146

Bevezetés

Az utóbbi években az empirikus elemzések készítői egyre szélesebb körben alkalmazzák a Bayes-i ökonometria eszköztárát. E térnyerésnek több oka van.

Az első és egyben legfontosabb ok, hogy a Bayes-i ökonometriai vizsgálatok egy igen egyszerű valószínűségi összefüggésre épülnek: a Bayes-szabályra. Nemi túlzással az mondhatjuk, hogy kizárólag a Bayes-szabály ismerete elegendő a Bayes-i elemzések elvégzéséhez, minden egyéb ismeret "csak" ahhoz szükséges, hogy a Bayes-szabállyal kapott valószínűségeket jól értelmezhető statisztikai mutatókká transzformáljuk. Sokáig azonban éppen ezeknek az információ-tömörítést célzó technikáknak a hiánya korlátozta a Bayes-i ökonometria széleskörű alkalmazhatóságát. Leszámítva ugyanis néhány egyszerű esetet, a Bayes-szabály alkalmazásával kapott poszterior sűrűségfüggvény nem azonosítható egyetlen ismert eloszlás sűrűségfüggvényével sem, így a poszterior eloszlás momentumai (az ismeretlen paraméterek várható értéke, szórása, stb.) sem határozhatók meg analitikus eszközökkel. Az analitikus eszközök helyettesítésére az utóbbi évtizedekben több, összefoglalóan szimulációs technikának nevezett eljárást dolgoztak ki, melyekkel bármilyen, sűrűségfüggvényvel adott eloszlásnak momentumai meghatározhatók. A szimulációs technikák számításgényeinek, ezért ökonometriai alkalmazásuk a számítógépek számítási kapacitásának korlátai miatt sokáig csupán elméleti lehetőség volt. A számítógépek számítási kapacitásának utóbbi években végbement ugrásszerű fejlődése azonban mára lehetővé tette, hogy az elméletileg kidolgozott szimulációs technikák algoritmusai viszonylag gyorsan lefuthassanak, így az utóbbi években a Bayes-i ökonometriai elemzésekben mind gyakrabban használják a szimulációs technikákat.

A Bayes-i elemzés térnyerésének másik oka, hogy a Bayes-szabály a sűrűségfüggvényen keresztül egyben meghatározza az ismeretlen paraméterek eloszlását is. Emiatt – ellentétben a hagyományos megközelítéssel – a paraméterek eloszlásának meghatározásához a Bayes-i ökonometriában nincs szükség semmilyen, a mintaelemszám növelésére építő aszimptotikus eredményre.¹

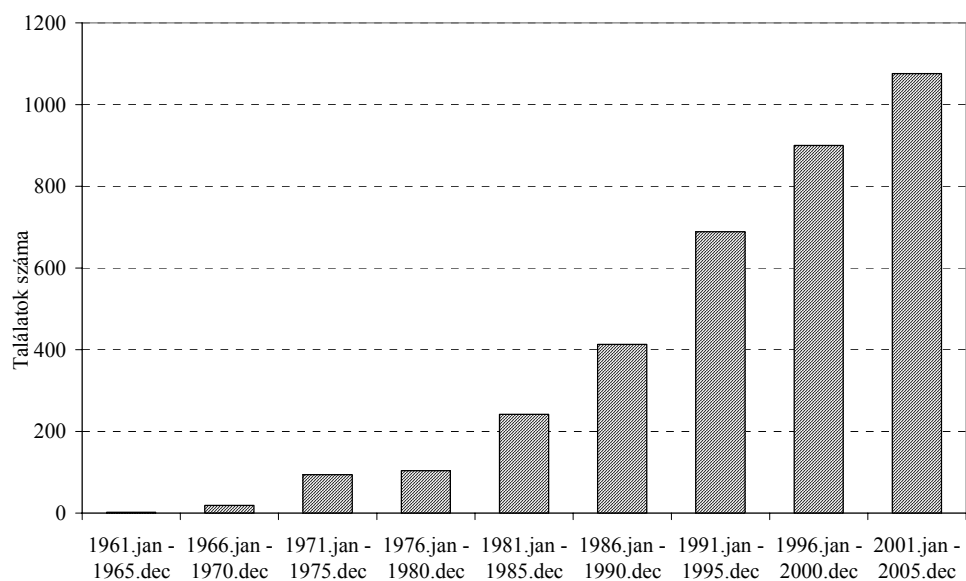
A Bayes-i elemzés térnyerésének harmadik oka, hogy néhány sok ismeretlen változót tartalmazó ökonometriai modell, mint például nagyméretű közgazdasági, időben változó együtthatójú modell, stb., vagy nem is lenne becslhető a hagyományos eszközökkel az adatok szűkös információ tartalma miatt, míg a Bayes-i elemzési keretek között a hiányzó információk, melyek származhatnak akár közgazdasági elméletből, akár korábbi eredményekből, illetőleg az elemző saját meggyőződéséből, könnyen beépíthetők a becslésekbe; vagy a paraméterek optimális értékeinek meghatározása válna numerikusan problémássá.

A Bayes-i módszerek növekvő népszerűsége tükröződik a külföldi publikációk rohamosan emelkedő számában, mint ahogy azt az EconLit, az egyik legszélesebb körű közgazdasági adatbázisban a "Bayesian" szóra való keresés találati száma is mutatja (lásd 1. ábra). Látható, hogy a Bayes-i vonatkozású tanulmányok száma szinte exponenciálisan növekszik: az utóbbi években évente kétszázszáznál is több ilyen tanulmány születik, több mint amennyit például 10 év alatt 1971. januárjától 1980. decemberéig készítettek.²

¹ Ahhoz, hogy a poszterior eloszlás klasszikus ökonometriai értelemben konzisztens legyen, az szükséges, hogy a modell likelihoodja is konzisztens becsléseket eredményezzen.

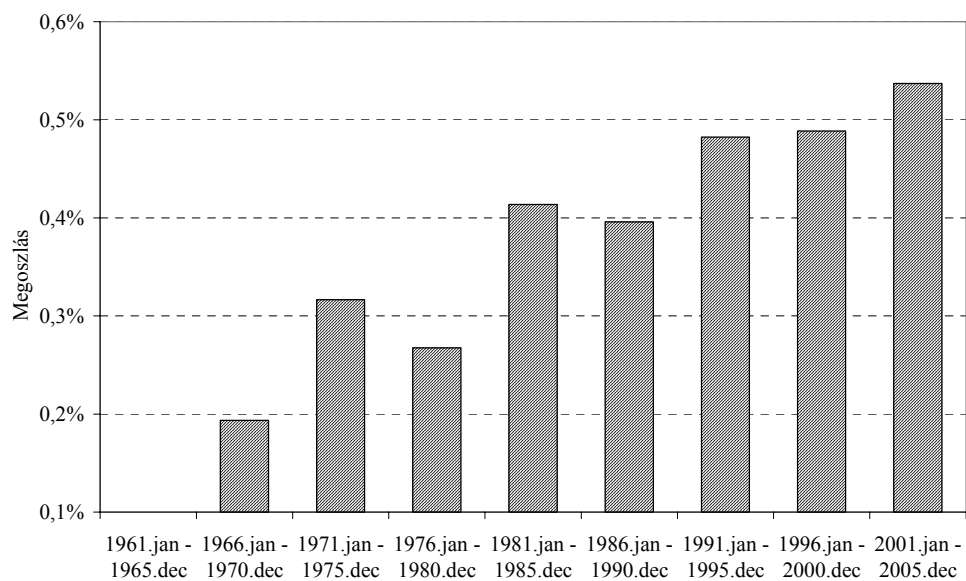
² A Bayes-i vonatkozású tanulmányok persze heterogének, sok köztük a Bayes-i döntéelmélettel vagy játékelmélettel foglalkozó tanulmány.

1. ábra. Bayes-i témájú találatok száma az EconLit adatbázisban



A népszerűség növekedése azonban nemcsak az abszolút számokban mutatkozik meg, hanem a Bayes-i témájú tanulmányok számának az összes, az adatbázisban szereplő tanulmány számához viszonyítva is (lásd 2. ábra). Míg a '60-as évek második felében csak nagyjából minden 500-ik tanulmány volt Bayes-i vonatkozású, addig az új évezredben már minden 200-ik.

2. ábra. A Bayes-i vonatkozású tanulmányok aránya az összes tanulmányhoz viszonyítva az EconLit adatbázis alapján



A Bayes-i módszerek, azon belül is a Bayes-i ökonometriai módszerek, Magyarországon egyelőre kevésbé népszerűek, legalábbis a három legnagyobb tekintélyű magyar közgazdasági szakfolyóirat

cikkeit áttanulmányozva.³ A Közgazdasági Szemle 1995-től megjelent számaiban mindössze 5-ször fordul elő Bayes neve, ebből kétszer a Bayes-i Nash játékelméleti egyensúlyhoz kötődően (Szatmáry, 1996 és Valentinyi, 2005) és háromszor mint hivatkozás más szerzők eredményeire (Darvas-Szapáry, 2004a; Komáromi, 2002 és Kristóf-Virág, 2005), vagyis egyszer sem fordul elő tényleges Bayes-i ökonometrai elmélet vagy alkalmazás az utóbbi évtizedben. Részben kivétel ez alól tanulmányom (Várpalotai, 2003d), mely egy dezaggregált kibocsátási réseket tartalmazó makromodell (pont)becslését mutatja be, igaz még nem teljes Bayes-i eszköztárral. A Statisztikai Szemlében egyedül Theiss (1971) tanulmányát találtam, amely a Bayes-i módszertan alkalmazását ismerteti "gazdaságpolitikai" (makro)modellekben. Ide sorolható továbbá az időben változó törtékelletetést és becslését ismertető tanulmányom (Várpalotai, 2006b). A Szigma folyóiratban Bayes-i vonatkozású tanulmányt nem találtam.

A folyóiratokon kívül a magyar szerzők által írt ökonometrai tankönyvek is csak korlátozottan foglalkoznak a Bayes-i módszertannal.⁴ Kőrösi-Mátyás-Székely (1990) ökonometria tankönyve röviden ismerteti a Bayes-i becslés alapjait. Hunyadi (2001) egy fejezetet szentel a Bayes-i statisztika alapjainak ismertetésére, kiegészítve néhány empirikus alkalmazással is.⁵ Azonban mindkét tankönyv eltekint a modern szimulációs technikák ismertetésétől, melyek a nem elemi becslési feladatoknál nélkülözhetetlenek. Részben talán a modern eszköztár magyar nyelvű ismertetésének hiánya is oka annak, hogy a közgazdaságtan egyetemi oktatásában sem kap hangsúlyt a Bayes-i ökonometria.⁶

A fent említett folyóiratcikkek és tankönyvek mellett azonban készültek Bayes-i ökonometriát alkalmazó tanulmányok. Így Hunyadi (1980) tanulmánya, mely Shiller-féle simasági priort használt külkereskedelmi egyenletek becslésére, illetve kandidátusi értekezése (Hunyadi, 1985), mely átfogó képet adott az osztott kékelletetési modellekről, közte a Shiller-féle simasági prioron alapuló osztott kékelletetéről.⁷ Hosszú szünet után az utóbbi években néhány szerző Bayes-i ökonometriát használó tanulmányokkal jelentkezett, mint például Gál (1998), aki halandósági táblákat becslt Bayes-i módszerekkel, Horváth (2001) hierarchikus Bayes-i becslése, vagy Horváth (2003) értekezése, mely az agrárpiaci döntéshozatalban alkalmaz Bayes-i módszereket. Ide sorolom továbbá egyes korábbi, Bayes-i ökonometriát használó tanulmányaimat is (Várpalotai, 2002, 2003a, 2003b, 2003c, 2003d, 2006a, 2006b, 2006c).

Látható, hogy viszonylag kis számban, de születnek Bayes-i ökonometriával foglalkozó tanulmányok magyar szerzők tollából. Ugyanakkor mindezekig nem készült olyan ismertetés, amely átfogóan áttekintené a Bayes-i becslések során alkalmazható szimulációs technikákat.⁸ E hiány

³Ide a Közgazdasági Szemlét, a Statisztikai Szemlét és a Szigma folyóiratot sorolom.

⁴A külföldi (bevezető) ökonometrai tankönyvekben sem gyakori a Bayes-i elemzés ismertetése. Helyette a Bayes-i ökonometriával önálló bevezető tankönyvek foglalkoznak. Lásd például korábról Zellner (1971), vagy a modern eszköztárat is ismertető Koop (2003) vagy Lancaster (2004) tankönyveit.

⁵A tankönyvet, s külön a Bayes-i fejezetet Oravecz (2001) méltaja recenziójában.

⁶Érdekes, hogy a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Villamosmérnöki és Informatikai Karán Antal Péter jegyez egy Bayes-i tanulóssal foglalkozó tárgyat, amelynek tematikája tartalmazza a modern szimulációs technikák ismertetését is. A tantárgy tematikáját lásd a <http://www.vdk.bme.hu/targykov/valaszthato/vimm9052.htm> honlapon

⁷Tudomásunk szerint Hunyadi László volt az első és sokáig egyedüli, aki simasági priorokkal foglalkozott Magyarországon.

⁸Kivétel ez alól Horváth (2003) értekezése, mely a szimulációs módszerek egyik típusát, a Gibbs-féle eljárást részletesen ismerteti.

részbeni pótlására az értekezés I. fejezetében rövid áttekintést adok a Bayes-i becslésekről, kiegészítve az utóbbi két évtized fő eredményeivel, a szimulációs eljárásokkal, melyek segítségével a korábban elemezhetetlennek tűnő poszterior eloszlások is kezelhetővé váltak. Úgy gondolom, hogy e módszerek széles körben való megismerése Magyarországon is sok szerzőt inspirálna arra, hogy empirikus elemzéseit Bayes-i eszközökkel végezze.

Az értekezésben alkalmazott simasági priorokról

A disszertációban tárgyalt témákat a Bayes-i megközelítés és az együttthatókhoz társított azonos típusú simasági prior fűzi össze. Az ökonometriai becslés során alkalmazott Bayes-i módszerekről az értekezés egyes fejezetei részletesen szólnak, ezért most csak az értekezésben mindvégig alkalmazott speciális priorról, a simasági priorról adok részletesebb elméleti-történeti áttekintést.

A simasági prior alkalmazását Shiller (1973, 775. o.) a következőképpen motiválja:

"A lineáris osztott késleltetésű modellek becslésekor a kutatónak legtöbbször van egy olyan érzése, hogy előre tudja, hogy a késleltetésekhez társított együttthatók egy 'sima' vagy 'egyszerű' görbe mentén helyezkednek el. Emiatt – főleg, ha kevés adat áll rendelkezésre – a legkisebb négyzetek elvével tipikusan kapott véletlenszerű, cikk-cakk formájú késleltetési együtttható alakzatok észszerűtlennek tűnnek. Másképpen fogalmazva valószínűtlen, hogy egy stabil osztott késleltetésű kapcsolat ilyen formát öltön. Ha a kutató nem annyira felkészült, hogy azt állítsa, hogy a késleltetési együttthatók alakját egy ismert függvénytípus írja le, amelynek csak véges számú paramétereit nem ismeri, akkor ezt a fajta előzetes tudását kizárólag csak valószínűségekkkel lehet kifejezni. Az osztott késleltetés becslésére használt klasszikus mintavételi elméleten alapuló megközelítésnek ezért nincsenek megfelelő eszközei, hogy az ilyen típusú becslési probléma legáltalánosabb formáját kezelje."

Shiller konkrétan is utal a klasszikus ökonometriában alkalmazott függvényformákra, melyekkel az osztott késleltetések együttthatóinak alakulását szokták leírni. Az ismertebb függvényformák a következők: polinomiális késleltetés, amikor a késleltetésekhez tartozó együttthatók ismert fokszámú polinomot követnek egy ismert intervallumon, ismertetlen paraméterekkel (Almon, 1965); mértani sorozattal arányos, ismeretlen lecsengési rátájú késleltetés (Koyck, 1954); ismertetlen paraméteres negatív binomiális (Pascal) eloszlással arányos késleltetés (Solow, 1960); továbbá két ismert fokú polinom hányadosát követő késleltetés (Jorgenson, 1966). Ezekkel a megoldásokkal kapcsolatban Shiller megjegyzi, hogy egyik változat sem magától értetődő abban az értelemben, hogy az előzetes ismeretek alapján melyiket válasszuk. Ezek a függvényformák és parametrizációk természetesen azért használatosak az osztott késleltetések együttthatóinak leírására, mert egyes paraméterkombinációk mellett sima késleltetési együtttható-alakzatot eredményeznek.

Shiller azonban amellet érvel, hogy ezek a késleltetési típusok nem tükrözik hatékonyan a simaságra vonatkozó a priori információt. Igaz ugyan, hogy amennyiben kevés számú paramétert használunk, ezek a megközelítések egy sima görbe mentén elhelyezkedő paramétereket eredményeznek (késleltetési profil), de ennek az az ára, hogy a késleltetésekhez tartozó együttthatókat egy speciális görbéhez kényszerítjük, így eleve kizárunk számos hasonló sima alakzatot. Amennyiben

több paramétert használunk, természetesen sokkal rugalmasabb lehet a becsült alakzat formája, de ekkor a függvényformák sok irreguláris – az előzetes simasági elképzeléssel nem összeegyeztethető – alakzatot is megengednek. Shiller szerint a fentiek miatt helyesebb elvárásainkat a megfelelő valószínűségekkel kifejezni, és ennek megfelelően Bayes-i eszköztárat használni a becslésekhez.

Shiller simasági érvelése azonban nemcsak az osztott késleltetésekre vonatkoztatható, hanem az együtthatók időbeni alakulására is. Shiller érveivel megegyezik Hodrick–Prescott (1980, 1997) érvelése, azonban ők a simasági érvelést a potenciális kibocsátás időbeni alakulására vonatkoztatják:

"A priori tudásunk az, hogy a növekedési komponens az időben 'simán' változik."
(Hodrick–Prescott, 1980, 3. o.)

Hodrick és Prescott az alapvetően Bayes-i megfogalmazás ellenére egy klasszikus ökonometriai megközelítést javasolnak az időben változó növekedési komponens becslésére. Az eltérő módszer ellenére azonban belátható – mint azt az első fejezet 1. példájában be is mutatom –, hogy Shiller valamint Hodrick és Prescott módszere lényegileg ugyanazt a poszterior várható értéket, illetve pontbecslést eredményezi.

Hodrick és Prescott tanulmánya bár néhány évvel későbbi, mint Shilleré, továbbá Shiller tanulmánya az *Econometrica*-ban, a nagy tekintélyű közgazdasági folyóiratban jelent meg, ennek ellenére Hodrick és Prescott nem hivatkoznak Shiller tanulmányára.⁹

A simasági prior gondolatának története azonban mégsem Shiller (1973) tanulmányával kezdődött. Mint azt Hodrick–Prescott (1980, 1997) is megállapítják:

"Módszerünket (az irodalomban már) régóta használják, különösképpen az aktuárius tudományokban. Létezik egy Whittaker–Henderson-féle módszer (Whittaker, 1923) a halandósági táblák összeállítására, mely a megfigyelt halandóságok simításán alapszik. Ez a módszer még mindig használatban van. És mint ahogy arra Stigler (1978) történeti összefoglaló tanulmányában rámutatott, miénkhez (*t.i. Hodrick és Prescottéhoz, szerző megjegyzése*) szorosan kapcsolódó módszereket fejlesztett ki egy Schiaparelli nevezetű olasz csillagász 1867-ben és a ballisztikus irodalomban a negyvenes évek elején – többek között – Neumann János."

A Shiller- és a Hodrick–Prescott-féle megközelítések utóélete eltérő. A Hodrick és Prescott által javasolt módszer, mely Hodrick–Prescott-féle szűrőként (röviden HP-szűrő) ismert, az ökonometriában nagy népszerűségnek örvend: általánosan használják gazdasági idősorok trendszűrésére, melynek alkalmazásával előálló idősor a gazdasági ciklusok elemzésére használják. Shiller cikke azonban szinte visszhang nélkül maradt. Korai kivételnek számít Taylor (1974) tanulmánya, mely azt mutatja be, hogy Shiller becslése milyen klasszikus ökonometriai módszernek feleltethető meg, ezáltal a Bayes-i ökonometriában kevésbé járatos ökonometerek számára is "emészthetővé" tette a simasági prior ötletét.¹⁰ A visszhang elmaradásának több oka lehet. Egyrészt, amit még Shiller

⁹Bizonyára a hivatkozás hiánya is közrejátszik abban, hogy az ökonometriában nem közismert, hogy e két megközelítés lényegét tekintve azonos elgondolásra épül.

¹⁰A korábban említettek szerint a hazai szerzők közül Hunyadi (1980, 1985) és Gál (1998) alkalmazta a Shiller-féle megközelítést osztott késleltetések becslésére.

előnynek gondolt, hogy az osztott késleltetések poszterior várható értékét bármelyik, legkisebb négyzetek becslését implementáló programmal ki lehet számítani, arra a következtetésre jutathatta az olvasót – ezt erősítette Taylor (1974) cikke is –, hogy lényegileg egy klasszikus ökonometriai eszközről van szó. Másrészt közrejátszhatott a Bayes-i elemzések akkori eszköztárának fejletlensége. Az ismeretlen paraméterek momentumainak meghatározása ugyanis nem ismert eloszlást követő poszteriorokból – márpedig az összetettebb modellek általában ilyen eredményeznek – abban az időben még nem volt kidolgozott. Így a Bayes-i elemzés inkább különbségnek tűnt, nem pedig egy becslésekre széleskörűen használható ökonometriai megközelítésnek.

Az értekezésben vizsgált kérdések, az értekezésben alkalmazott új módszerek és az értekezés szerkezete

Az értekezés három fejezetre tagolódik. Az I. fejezetben a modern Bayes-i ökonometria – az értekezés további fejezeteiben is használt – eszközeit ismertetem, példákkal is illusztrálva. Ez az ismertetés három célt is szolgál: egyrészt magyar nyelven elérhető ökonometriai tankönyvek, cikkek közül hiányoznak az olyan összefoglaló jellegű munkák, melyek a Bayes-i ökonometria utóbbi két évtizedének fő újdonságait, a szimulációs eljárásokat ismertetik. Első célkitűzése ennek a fejezetnek, hogy rövid kézikönyvként szolgáljon a modern Bayes-i ökonometria iránt érdeklődőknek. Másrészt a modern Bayes-i eszköztár összefoglaló ismertetésével fel kívánja kelteni a hazai tudományos közösség érdeklődését a Bayes-i elemzések iránt. Harmadrészt meg kívánja könnyíteni az értekezés II. és III. fejezetében bemutatásra kerülő Bayes-i becslések ismertetését, tehát egy helyen gyűjti össze a disszertációban előforduló fogalmakat, elemzési eszközöket, és azok részletes ismertetését.

Az értekezés II. fejezetében bevezetem az időben változó tört késleltetés operátorát. Az időben változó tört késleltetés egy rendkívül rugalmas idősorvizsgálati transzformáció, mellyel az idősorok tetszés szerint eltolhatók, "kinyújthatók" és "összenyomhatók". Az időben változó tört késleltetés operátorát felhasználva bemutatok egy kétváltozós modellt, mellyel explicit módon mérhetővé válik két idősor együttmozgásának időben változó erőssége és fáziseltolódása. A modell becslésére egy simasági priorokon alapuló Bayes-i eljárást mutatok be.

A modell és a javasolt becslési eljárás relevanciáját – összehasonlítva más modellekkel és becslési eljárásokkal – először mesterségesen generált mintákon mutatom be. Ezt követően az időben változó tört késleltetésre épülő modell segítségével megvizsgálom, hogy az Európai Unió tagországok, illetve néhány további ország üzleti ciklusai milyen mértékben szinkronizáltak az Európai Monetáris Unió üzleti ciklusával.

A vizsgálat elméleti hátterét az optimális valutaövezet irodalma adja, mely szerint jóléti nyereséggel járhat egy közös valuta bevezetése olyan államokban, amelyek optimális valutaövezetet alkotnak. Az optimális valutaövezet létezésének egyik szükséges feltétele, hogy a valutaövezet országainak üzleti ciklusai kellő mértékben együttmozogjanak, azaz szinkronizáltak legyenek.

Az üzleti ciklusok együttmozgásának vizsgálata az (Európai) Gazdasági és Monetáris Unió létrehozása után is aktuális. Egyrészt vizsgálható, hogy a jelenlegi tagállamok üzleti ciklusainak együttmozgása fokozódott-e a közös pénz bevezetése óta. Másrészt az Európai Unió újonnan csatlakozott országai, köztük Magyarország is kötelezettséget vállalt a közös pénz bevezetésére. Ezen

országok körében azt fontos vizsgálni, hogy a Gazdasági és Monetáris Unió jelenlegi tagállamainak ciklusaival milyen mértékben mozognak együtt üzleti ciklusaik, illetve kimutatható-e szinkronizáció, hiszen a Monetáris Unióhoz való jövőbeli csatlakozásuk sikerét a szorosabb együttmozgás elősegítheti. A vizsgálatba bevontam néhány Európai Unión kívüli országot is, ami által a világciklus – azaz Európai Unión kívüli országok az Európai Unió országokkal való együttmozgásának – jelenlétére is vonhatunk le következtetéseket.

Eredményeim szerint az újonnan csatlakozott Európai Unió tagállamok közül egyedül Magyarország és Szlovénia üzleti ciklusa mozog szorosan együtt a Gazdasági és Monetáris Unió tagállamainak üzleti ciklusaival. A jelenlegi Monetáris Unióban résztvevő tagállamok üzleti ciklusai – Finnország és Portugália – kivételével igen szinkronizáltak mind a ciklusok együttmozgásának erősségét, mind a fáziseltolódást tekintve. Dánia, Egyesült Királyság és Svédország esetében a szinkronizáltság szintén nagyfokú, hasonlóan Svájchoz, viszont mindenképp megelőzve Norvégia szinkronizáltságát. Érdekes, hogy az USA üzleti ciklusai is igen szinkronizáltak a Monetáris Unióéval, ugyanakkor egy határozott előidejűség is mutatkozik az USA javára, azaz a Monetáris Unió ciklusai követik az USA ciklusait.

Az eredmények alapján néhány óvatos gazdaságpolitikai következtetés is levonható. A legfontosabb, hogy az újonnan csatlakozott Európai Unió tagállamok túlnyomó többségének gazdasága még nincs szoros együttmozgásban a Monetáris Unió üzleti ciklusaival, ezért számukra nagyobb kockázatot jelenthet a csatlakozási szerződésükben vállalt jövőbeni Monetáris Unió tagságukkal együttjáró közös monetáris politika. Ez alól kivételt képezhet Magyarország és Szlovénia, ahol a szinkronizáltság a jelenlegi GMU tagokéval egyező mértékű.

Az értekezés III. fejezetében egy Bayes-i ökonometriai infláció-előrejelző modellt ismertetek, melyben a fogyasztói árak változását a költségek változásával magyarázom.¹¹ Magyarországon a jegybanki inflációs előrejelzések szerepe felértékelődött az inflációs célkövetés rendszerének 2001. júniusi meghirdetése óta. A Magyar Nemzeti Bank monetáris tanácsa ugyanis döntő mértékben az inflációs előrejelzések alapján formálja a monetáris politikát, illetve alakítja a monetáris kondíciókat. Az előrejelzések rendszeres publikálásával, illetve az előrejelzéseken alapuló monetáris döntéseken keresztül a jegybank hatással van a gazdasági szereplők inflációs várakozásaira, ezért fontos, hogy a jegybanki inflációs előrejelzések megbízhatók legyenek. Az általam kidolgozott inflációs előrejelző modell előrejelző képessége kiváló, még a piaci elemzők előrejelzéseivel összehasonlítva is. A bemutatásra kerülő modellel készített előrejelzéseket a Magyar Nemzeti Bank is felhasználja hivatalos előrejelzéseiben.

Az infláció-előrejelző modellben hosszú osztott késleltetések alkalmazásával lehetővé tettem, hogy a költségek megváltozása a végső fogyasztói árakban csak fokozatosan jelenjen meg (lassú költségbegyűrűződés). A lassú költségbegyűrűződést lehetővé tevő osztott késleltetések becslése a Shiller-féle simasági priorokkal kombinált osztott késleltetésű modellek továbbfejlesztésén alapul. A továbbfejlesztés többirányú: egyrészt Shiller (1973) osztott késleltetésű modelljét kiterjesztem több változóra, továbbá bemutatom, hogy miként lehet előjelmegkötéseket, kezdeti és

¹¹A modell egy korábbi, még nem "valódi" – azaz a poszteriorok eloszlását nem tárgyaló – Bayes-i változatát ismerteti Várpalotai (2003c). A valódi Bayes-i változatról lásd Várpalotai (2006a).

végfeltételeket, továbbá paraméter-restrikciókat egyidejűleg figyelembe venni a simasági priorok használatával becsült osztott késleltetés együtthatóira.

Az osztott késleltetésű modell együtthatóinak előjelmegkötéseivel már Shiller (1975) tanulmánya is foglalkozott, ugyanakkor a modern Bayes-i szimulációs technikák híján az együtthatók poszterior eloszlását nem tudta megfelelően kezelni, így csak egy pontbecslést javasolt. Az értekezés III. fejezetében bemutatom azt is, hogy miként határozható meg az előjelmegkötéseket tartalmazó osztott késleltetésű modell együtthatóinak poszterior eloszlása.

Az értekezés egyes fejezeteiben vizsgált kérdéseket, az alkalmazott módszereket, és a vizsgálatok eredményeit, következtetéseit az értekezést záró fejezetben foglalom össze.

Köszönetnyilvánítás

Disszertációm elkészítésében sokan segítettek. Igen hálás vagyok témavezetőmnek, Móczár Józsefnek, aki témakeresésemet segítette az elmúlt évek során. Hálás vagyok tanárainknak, Bugnics Richárdnak, Darvas Zsoltnak, Hunyadi Lászlónak, akiktől az ökonometria alapokat elsajátítottam és különösen Richard Paapnak, akinek kurzusán megismerhettem a Bayes-i ökonometria modern eszköztárát.

Köszönöm Benczúr Péternek, Darvas Zsoltnak, Horváth Csillának, Hunyadi Lászlónak, Kőrösi Gábornak, Reiff Ádámnak, Richard Paapnak, Simon Andrásnak az értekezés, illetve annak alapját képező korábbi tanulmányaim írása során kapott értékes észrevételeket, javaslatokat. Köszönnettel tartozom számos konferencia résztvevőinek, az MNB Közgazdasági és Kutatási Főosztály munkatársainak, hogy a tézisben szereplő gondolatok előadásain hozzászólásukkal formálták a tézis fejezeteit. Köszönöm továbbá a II. fejezetben szereplő gondolatok publikálásakor Hunyadi Lászlótól, illetve a III. fejezetben szereplő gondolatok publikálásakor a tanulmány névtelen bírálójától kapott észrevételeket.

Külön köszönöm Rappai Gábornak és Kőrösi Gábornak, hogy vállalták értekezés-tervezetem bírálatát, és megjegyzéseikkel segítették értekezésem végső formájának kialakítását.

Köszönöm korábbi és mostani feletteseim, Simon András és Kaderjákné Csermely Ágnes, nélkülözhetetlen támogatását az értekezés elkészítéséhez.

Végezetül, de nem utolsó sorban köszönöm feleségemnek és édesanyámnak azt a nyugodt környezetet, mely lehetővé tette disszertációm megírását.

1. Bevezetés a Bayes-i ökonometriába

A fejezet a célja kettős. Egyfelől Magyarországon a Bayes-i eszközök modern eszköztára kevésbé ismert. Úgy vélem, hogy a széles körben való elterjedéséhez hozzájárulhat egy olyan áttekintés, mely a Bayes-i módszerek széles körét felöleli, lehetővé téve szinte minden ökonometriai modell Bayes-i becslését.¹² Másfelől az értekezés további fejezeteiben ismertetésre kerülő modellek és becslési eljárások bemutatását is megkönnyíti jelen áttekintés, mivel ez a fejezet összegyűjti az értekezésben előforduló technikákat és elemzési eszközöket, így kézikönyvet képez a disszertáció további fejezeteiben leírt gondolatokhoz.

Az ismertetés két forráson, Koop (2003) Bayes-i ökonometriába bevezető tankönyvén és Paap (2005) 2005. május 30. - június 3. között a Magyar Nemzeti Bankban megtartott "Bevezetés a Bayes-i ökonometriába" című kurzusának előadásvázlatain nyugszik.¹³

A Bayesi ökonometriai elemzések módszertani szempontból három általános lépésre bonthatók: (1) a vizsgálni kívánt modell likelihoodjának meghatározása, (2) az előzetes ismeretek valószínűségeken történő megfogalmazása, (3) a Bayes-szabály alkalmazásával a poszterior sűrűségfüggvény meghatározása, illetve ez alapján a paraméterek poszterior momentumainak meghatározása.

Az első és második lépés, sőt a harmadik lépés első felének megtétele nem kihívás, viszont a paraméterek poszterior momentumainak meghatározása igen intenzív módszertani ismereteket követel. Ezen a módszerek elsajátítása jelentős kezdeti befektetést igényel, azonban ez bőven megtérül a módszerek univerzális alkalmazhatósága miatt.

1.1. A klasszikus és a Bayes-i ökonometria alapvető eltérései

A Bayes-i ökonometria a klasszikus ökonometriától eltérő szemszögből tekint az adatokra, és az azokból levonható következtetésekre. A hasonlóságok és különbségek legjobban az általuk használt feltevéseken keresztül mutathatók be.

Mindkét megközelítésben közös, hogy adott struktúrájú modellt feltételez, mely a becslendő (nem ismert) paraméterek θ vektorától és az y adatoktól függ.¹⁴ Mindkét megközelítés feltételezi továbbá, hogy az y adatok az adatgeneráló folyamatnak egy realizációi.

A klasszikus ökonometria vagy másnéven gyakoriságon alapuló megközelítés (frequentist approach) a fenti, közös alapokat az alábbi módon használja fel: (1) Létezik egy valódi, nem valószínűségi változó θ_0 paramétervektor, mely a megfigyelt adatokat generálta. (2) A becslőfüggvények, teszt statisztikák, konfidencia intervallumok mind az y adatok függvényei, s tulajdonságaikat hipotetikus ismételt mintavételből származtatják. (3) Adott modellel hipotetikus adatok generálhatók, melyekre vonatkozóan a becslések, statisztikák ismételten kiszámíthatók, ezekből pedig a becslések eloszlása származtatható. (4) A következtetések az y valós adatokon és a hipotetikus adatokon alapuló becslés összehasonlításán alapulnak.

A klasszikus ökonometriával szemben a Bayes-i megközelítés (1) a θ paramétereket valószínűségi változóként kezeli, és eloszlásukat szubjektív valószínűséggel írja le. (2) Az adatok vizsgálata előtt

¹²E fejezet természetesen nem tűzi célul a teljeskörűséget, ezért egyes speciális modelltípus elemzéséhez további ismeretekre lehet szükség. A téma iránt érdeklődők a hivatkozásokban találhatnak ezekhez útmutatót.

¹³Mivel a két forrás hasonló módon vezeti fel a Bayes-i ökonometriát, ezért az alábbiakban e két forrást külön nem jelzem.

¹⁴ y lehet vektor vagy mátrix, az adatsorok számától függően.

prior információkat feltételez θ eloszlásáról, mely lehet akár teljesen szubjektív vélemény (prior eloszlás). (3) Az adatokat arra használja, hogy azokkal a prior információkat "felfrissítse", előállítva a poszterior információkat (poszterior eloszlás). (4) A θ paramétereiről levont következtetések az adatok egyszeri, megfigyelt realizációján alapulnak.

1.2. A Bayes-i becslés alapvető eszközei

A Bayes-i ökonometria sarokköve a Bayes-tétel. Ismertetéséhez vegyünk két eseményt, jelölje őket A és B , bekövetkezésük valószínűségét $p(A)$ és $p(B)$, együttes bekövetkezésük valószínűségét $p(A, B)$. Ha a B esemény bekövetkezésének valószínűsége nem nulla, akkor az A és B együttes bekövetkezésének és a B esemény valószínűségének hányadosát az A esemény B -re vonatkozó feltételes valószínűségének nevezzük, azaz:

$$p(A|B) = \frac{p(A, B)}{p(B)}.$$

A B esemény A -ra vonatkozó feltételes valószínűség ehhez hasonlóan:

$$p(B|A) = \frac{p(A, B)}{p(A)}.$$

Amennyiben mindkét kifejezést átrendezzük $p(A, B)$ -ra és egyenlővé tesszük őket, megkapjuk a nevezetes Bayes-szabályt:

$$p(B|A) = \frac{p(A|B)p(B)}{p(A)}.$$

A Bayes-tétel valójában egy ennél általánosabb összefüggés, melynek egy speciális esete a fenti azonosság. A Bayes-tétel egy teljes eseményrendszer mellett teremt kapcsolatot a feltételes valószínűségek között.

A Bayes-tétel szerint, ha a $B_1, B_2, \dots, B_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak, és $p(B_i) > 0$, valamint A egy tetszőleges nem nulla valószínűségű esemény, akkor teljesül az alábbi összefüggés:

$$p(B_k|A) = \frac{p(A|B_k)p(B_k)}{\sum_{i=1}^n p(A|B_i)p(B_i)}.$$

A Bayes-i ökonometriában a legtöbbször a Bayes-tétel folytonos verzióját használják.¹⁵

$$f(x|y) = \frac{f(y|x)f(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(y|x)f(x)dx} = \frac{f(y|x)f(x)}{f(y)},$$

ahol $f(x)$ és $f(y)$ perem-, míg $f(x|y)$ és $f(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvények.¹⁶

A Bayes-i ökonometriában, hasonlóan a klasszikushoz, a feltételezett modell struktúra adja az y adatok *likelihood* függvényét, mely valószínűségét mutatja, hogy adott θ paramétereket feltételezve éppen az y adatokat eredményezi a mintavétel:

$$f(y|\theta).$$

¹⁵A Bayes-tételről részletesebben lásd például Reimann – Tóth (1994) 35. o. és 62.o.

¹⁶A továbbiakban folytonos y eseménytér esetén y sűrűségfüggvényét $f(y)$ -vel jelölöm.

Az elemző a θ paraméterről rendelkezésre álló ismereteit a θ paraméter prior eloszlásának (a továbbiakban *prior*) megadásával írja le:

$$f(\theta).$$

A Bayes-i ökonometriában kitüntetett szerepe van a prioroknak. Ezek testesítik meg az elemző ismereteit a vizsgált paraméterekről az adatelemzés elkezdése előtt. Ezek az ismeretek származhatnak például korábbi tanulmányokból, így korábbi vagy más országok, régiók adataiból készített becslésekből, más adatforrásokból (például makroösszefüggések esetén mikroadatokból), de lehetséges az is, hogy a prior egyszerűen az elemző saját szubjektív meggyőződésén nyugaljon.

A prior információkat és a megfigyelt adatok bekövetkezésének paraméterektől függő valószínűségében rejlő információkat a *poszterior* foglalja magába. A θ paraméterek poszterior sűrűségfüggvénye a Bayes-tétel alapján:

$$f(\theta|y) = \frac{f(y|\theta)p(\theta)}{f(y)},$$

azaz a poszterior a megfigyelések és a prior információk függvényében adja meg a paraméterek szubjektív eloszlását.

Minthogy az y minta bekövetkezésének $f(y)$ valószínűsége csak arányossági tényező¹⁷, ezért a poszterior sűrűségfüggvény a következő kernel-sűrűségfüggvénnyel¹⁸ arányos:

$$f(\theta|y) \propto f(y|\theta)f(\theta).$$

1.2.1. Lineáris regressziós modell természetes konjugált priorral

A Bayes-i ökonometria alapvető eszközeinek szemléltetését példán keresztül mutatom be. Vegyünk egy lineáris regressziós modellt:

$$y = X\beta + \varepsilon, \tag{1}$$

ahol $y = (y_1, \dots, y_N)'$ a függő változó vektora, $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{iN})'$ az i -edik magyarázó változó vektora, és $X = (x_1, \dots, x_N)'$ az x_i a magyarázó változókból képzett $N \times k$ típusú adatmátrix, β a k dimenziós paramétervektor, végül $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)'$ a hibatag, melyről tegyük fel, hogy független azonos normális eloszlást követ 0 várható értékkel és σ^2 varianciával, azaz $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$, ahol I az egységmátrix.

Ekkor a modell likelihood függvénye:

$$f(y|\beta, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^N \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y - X\beta)'(y - X\beta)\right). \tag{2}$$

Felhasználva az alábbi *dekompozíciós szabály*nak nevezett azonosságot¹⁹:

$$(y - X\beta)'(y - X\beta) = (y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta}) + (\beta - \hat{\beta})'X'X(\beta - \hat{\beta}), \tag{3}$$

¹⁷Az $f(y)$ valószínűség (perem likelihood) is kiszámolható: $f(y) = \int_{\theta} f(y, \theta) d\theta = \int_{\theta} f(y|\theta)p(\theta) f\theta$. Erre a mennyiségre főként modellek összehasonlításakor van szükség.

¹⁸Az angol terminológiában kernelnek nevezik azokat a sűrűségfüggvényeket, amelyekre $\int f(y) dy \neq 1$.

¹⁹Az azonosság igazolása a függelék A.1 alpontjánál található.

ahol $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$, ami nem más mint a legkisebb négyzetek módszerével készített becslés (OLS becslőfüggvény)²⁰, a (2) kifejezés így is írható:

$$f(y|\beta, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^N \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta}) + (\beta - \hat{\beta})' X'X (\beta - \hat{\beta})\right]\right). \quad (4)$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} \nu &= N - k \\ s^2 &= \frac{(y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta})}{N - k}, \end{aligned}$$

ahol a klasszikus ökonometriában jártas olvasónak feltűnhet, hogy s^2 nem más, mint a variancia torzítatlan becslése, illetve ν a becslés szabadságfoka.

A bevezetett jelölésekkel a (4) lineáris regresszió likelihoodja átírható a következő alakra:

$$\begin{aligned} f(y|\beta, \sigma^2) &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^N \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\nu s^2 + (\beta - \hat{\beta})' X'X (\beta - \hat{\beta})\right]\right) \propto \\ &\propto \left\{ \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^k \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(\beta - \hat{\beta})' X'X (\beta - \hat{\beta})\right]\right) \right\} \left\{ \left(\frac{1}{\sigma}\right)^\nu \exp\left(-\frac{\nu s^2}{2\sigma^2}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

A fenti átalakításból kitűnik, hogy a szorzat első tényezője normális, míg a második inverz gamma-2 eloszlás sűrűségfüggvényére emlékeztet. Ez a megfigyelés a priorok definiálásánál jelent majd segítséget.

Az ökonometriai modellek paramétereire vonatkozó priorokat sokféle eloszlással lehet formalizálni, mégis kitüntetett szerepe van a *konjugált* prioroknak, melyek a modell likelihoodja mellett a Bayes-tétel alkalmazásával önmagukkal megegyező eloszlás-típusú poszteriort eredményeznek, ami általában egyszerűsíti a számításokat. A *természetes konjugált* prior ezen belül egy speciális típus. Olyan priorokat jelöl, amelyeknek eloszlás-típusa megegyezik a likelihood függvény eloszlásával.

A fenti lineáris modell esetén a megfelelő $f(\beta, \sigma^2)$ prior formalizálása a cél. A továbbiakban kényelmesnek bizonyul, ha feltesszük, hogy a prior felbontható: $f(\beta, \sigma^2) = f(\beta|\sigma^2) f(\sigma^2)$ formában, így a β -ra és a σ^2 paraméterekre vonatkozó prior külön kezelhető. A likelihood fenti (5) felbontása azt sugallja, hogy a β -ra vonatkozó természetes konjugált prior normális eloszlású, σ^2 -re vonatkozó természetes konjugált prior pedig inverz gamma-2 eloszlású. Mint látni fogjuk, sejtésünk igaz. Az egyszerűség kedvéért azonban σ^2 eloszlására tegyünk fel egy nem informatív priort.²¹ Definiáljuk ezért a priorokat a következőképpen:

$$\begin{aligned} f(\sigma^2) &\propto \sigma^{-2} \\ f(\beta|\sigma^2) &\propto |\sigma^2 B|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (\beta - b)' B^{-1} (\beta - b)\right), \end{aligned}$$

²⁰ $(X'X)^{-1}$ létezéséhez természetesen fel kell tenni, hogy a magyarázó változók lineárisan ne legyenek összefüggők (egzakt multikollinearitás esetének kizárása).

²¹Belátható, hogy a σ^2 -re feltett nem informatív prior az inverz gamma-2 eloszlásnak egy speciális esete, amikor a $\nu = 2$ szabadságfokú inverz gamma-2 eloszlás varianciája a végtelenhez tart ($s^2 \rightarrow \infty$).

azaz β paraméter k dimenziós normál eloszlást követ b várható vektorral és $\sigma^2 B$ varianca-kovariancia mátrixszal.

Ekkor a poszterior a Bayes-tételből és a valószínűségek szorzási szabályából:

$$\begin{aligned} f(\beta, \sigma^2 | y) &\propto f(y | \beta, \sigma^2) f(\beta | \sigma^2) p(\sigma^2) \propto \\ &\propto \sigma^{-N} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (y - X\beta)' (y - X\beta)\right) \sigma^{-k} |B|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (\beta - b)' B^{-1} (\beta - b)\right) \sigma^{-2} \propto \\ &\propto \sigma^{-N-k-2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (y - X\beta)' (y - X\beta) + (\beta - b)' B^{-1} (\beta - b)\right), \end{aligned} \quad (6)$$

melynek átrendezéséhez néhány további azonosságot használok fel.

Elsőként a Cholesky-féle dekompozíció segítségével felbontom B^{-1} -et: $B^{-1} = B^{-\frac{1}{2}'} B^{-\frac{1}{2}}$ formára, aminek segítségével:

$$(\beta - b)' B^{-1} (\beta - b) = \left(B^{-\frac{1}{2}} b - B^{-\frac{1}{2}} \beta\right)' \left(B^{-\frac{1}{2}} b - B^{-\frac{1}{2}} \beta\right).$$

Ezt felhasználva a (6) képletben az exponenciális függvény kitevőjében szereplő kifejezés összevonható:

$$(W - V\beta)' (W - V\beta) \text{ alakra, ahol } W = \begin{pmatrix} y \\ B^{-\frac{1}{2}} b \end{pmatrix} \text{ és } V = \begin{pmatrix} X \\ B^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

A bevezetett jelöléssel (6) átírható egy tömörebb formára:

$$f(\beta, \sigma^2 | y) \propto \sigma^{-(N+k+2)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (W - V\beta)' (W - V\beta)\right), \quad (7)$$

melyből látható, hogy a poszterior a likelihoodhoz hasonló alakú függvény: egy normális és egy gamma eloszlás sűrűségfüggvényének szorzata, vagyis a priorok tényleg természetes konjugáltak.

A fenti (7) együttes poszterior eloszlásból már származtatható β és σ^2 peremeloszlása.

β peremsűrűségfüggvénye²²:

$$\begin{aligned} f(\beta | y) &= \int_0^\infty f(\beta, \sigma^2 | y) d\sigma^2 \propto \\ &\propto \int_0^\infty \sigma^{-(N+k+2)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (W - V\beta)' (W - V\beta)\right) d\sigma^2. \end{aligned}$$

A fenti kifejezés integráljának kiszámításához egy újabb, gyakran használt azonosságot alkalmazok, melyet gamma-2 inverz lépésnek neveznek:

$$\int_0^\infty \sigma^{-(M+2)} \exp\left(-\frac{a}{2\sigma^2}\right) d\sigma^2 \propto a^{-\frac{1}{2}M}. \quad (8)$$

A fenti azonossággal β peremsűrűségfüggvénye így írható:

$$f(\beta | y) \propto [(W - V\beta)' (W - V\beta)]^{-\frac{N+k}{2}}.$$

²²A Bayes-i elemzésekben, több paraméter esetén – most β és σ^2 – azokat a feltételes eloszlásokat is peremeloszlásnak nevezzük, amelyekben már csak az adatok (esetünkben y) szerepelnek kondícióként, a többi paraméter viszont nem. Így a $f(\beta | y)$ és $f(\sigma^2 | y)$ sűrűségfüggvényeket is peremsűrűségfüggvénynek nevezem a továbbiakban.

Majd ismét használva a (3) dekompozíciós szabályt kapjuk:

$$f(\beta|y) \propto \left[(W - V\hat{\beta})' (W - V\hat{\beta}) + (\beta - \hat{\beta})' V'V (\beta - \hat{\beta}) \right]^{-\frac{N+k}{2}}, \quad (9)$$

ahol:

$$\hat{\beta} = (V'V)^{-1} V'W = (X'X + B^{-1})^{-1} (X'y + B^{-1}b).$$

Elosztva a (9) kifejezést $\hat{\sigma}^2 = (W - V\hat{\beta})' (W - V\hat{\beta}) / N$ -el kapjuk:

$$f(\beta|y) \propto \left(N + \frac{(\beta - \hat{\beta})' V'V (\beta - \hat{\beta})}{(W - V\hat{\beta})' (W - V\hat{\beta}) / N} \right)^{-\frac{N+k}{2}}, \quad (10)$$

mely a függelék A.2.1 pontja alapján egy k dimenziós t -eloszlás sűrűségfüggvénye $\hat{\beta}$ lokációs paraméterrel, $\hat{\sigma}^2 (V'V)^{-1} = \hat{\sigma}^2 (X'X + B^{-1})^{-1}$ skála paraméterrel és N szabadságfokkal. Tehát a β paraméter t -eloszlást követ az előzőekben felsorolt paraméterekkel.

σ^2 peremsűrűségfüggvénye definíció szerint:

$$\begin{aligned} p(\sigma^2|y) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(\beta, \sigma^2|y) d\beta \propto \\ &\propto \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^{-(N+k+2)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (W - V\beta)' (W - V\beta)\right) d\beta \propto \\ &\propto \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^{-(N+k+2)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(W - V\hat{\beta})' (W - V\hat{\beta}) + (\beta - \hat{\beta})' V'V (\beta - \hat{\beta}) \right]\right) d\beta \propto \\ &\propto \sigma^{-(N+k+2)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (W - V\hat{\beta})' (W - V\hat{\beta})\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (\beta - \hat{\beta})' V'V (\beta - \hat{\beta})\right) d\beta, \end{aligned}$$

ahol a dekompozíciós szabályt használtuk. Kihasználva, hogy az utolsó tag integrálja arányos $\left| \sigma^2 (V'V)^{-1} \right|^{-\frac{1}{2}} = \sigma^{-k} \left| (V'V)^{-1} \right|^{-\frac{1}{2}}$ -val, mivel az integrálandó kifejezés egy normális eloszlás sűrűségfüggvényére hasonlít, ezért kapjuk:

$$p(\sigma^2|y) \propto \sigma^{-(N+2)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (W - V\hat{\beta})' (W - V\hat{\beta})\right),$$

mely egy inverz gamma-2 eloszlás sűrűségfüggvénye $(W - V\hat{\beta})' (W - V\hat{\beta})$ lokációs paraméterrel és N szabadságfokkal.

A fenti lineáris regresszió példája számos részletre rámutat. A paraméterek poszterior eloszlásából számos további mutató származtatható: a paraméterek poszterior várható értéke, varianciája stb. A paraméterek poszterior eloszlása miatt a β és σ^2 poszterior várható értéke:

$$\hat{\beta} = (X'X + B^{-1})^{-1} (X'y + B^{-1}b), \text{ illetve } \hat{\sigma}^2 = (X'X + B^{-1})^{-1}.$$

Ezekből a várható értékekből már látható, hogy a priorok miként hatnak a poszterior várható értékekre. Amennyiben a B prior variancia alacsony, akkor a priornak erős hatása lesz a paraméterek poszterior várható értékeire és varianciáira. Ha a B prior variancia nagy, akkor a paraméterek poszterior várható értékeire és varianciáira csekély hatással lesz. Amennyiben a megfigyelések N száma

nagy, akkor a prior befolyása kisebb lesz, mivel $X'X = \sum_{i=1}^N x_i x_i'$ és $X'y = \sum_{i=1}^N x_i y_i'$ értékei nagyok lesznek, tehát a prior nem fog számítani sok megfigyelés rendelkezésre állása esetén.

A fenti példa segít a különféle prior-típusok elnevezésének szemléltetésében. A legegyszerűbb bontásban megkülönböztetik a *diffúz*, más néven *nem informatív* és az *informatív* priorokat. Az informatív priorok tényleges információt tartalmaznak a paraméterekre vonatkozóan, azaz hatással vannak a paraméterek poszterior eloszlására. (A fenti példában a β paraméterre informatív priort tételeztem fel.) A nem informatív priorok nevükből is következően nem tartalmaznak valódi információt az adott paraméter eloszlására vonatkozóan, hanem azt tetszőlegesnek tételezik fel. Ennek ellenére nem egyértelmű, hogy adott esetben milyen a nem informatív prior formája.²³ (A fenti példában a σ^2 paraméterre nem informatív priort tételeztem fel.) A β természetes konjugált prior tulajdonságai között említettem, hogy ha B értéke nagy, akkor a prior csak kis mértékben hat β poszterior eloszlására. Szélső esetben, ha $B \rightarrow \infty$, akkor egy diffúz priorhoz jutunk. Ugyanis ahogy növekszik B , úgy laposodik el a normális eloszlás sűrűségfüggvénye. Határértékben a prior sűrűségfüggvény egy egyenessé (több dimenzió esetén hipersíkká) laposodik, azaz β paraméter egyforma valószínűséggel vehet fel tetszőleges valós értéket. Ennek megfelelően a nem informatív prior ilyen esetben:

$$f(\beta) \propto 1 \quad (11)$$

formába írható. A (11) prior egyben példa az *improper* priorokra.²⁴ Ezek olyan priorok, melyek nem valódi sűrűségfüggvényekkel definiáltak, mivel (11) esetén $\int f(\beta) d\beta \neq 1$.

Fontos megjegyezni, hogy a kalibrálást is tekinthetjük egyfajta prior specifikációnak, mely a diffúz priorok ellentéte: a valószínűségeloszlás egy pontban összpontosul, tehát valójában ekkor eleve nincs bizonytalanság a paraméterekben.

1.2.2. Lineáris regressziós modell nem informatív priorral

Az előző példa módosításaként bemutatom, hogy miként változik a lineáris regressziós modell poszterior eloszlása, amennyiben a β paramétervektorra is egy nem informatív priort tételezünk fel. Egyezően (1)-gyel legyen a lineáris modellünk:

$$y = X\beta + \varepsilon, \quad (12)$$

továbbra is független azonos normális eloszlású hibataggal.

Ekkor a modell likelihood függvénye:

$$f(y|\beta, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^N \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} (y - X\beta)' (y - X\beta) \right). \quad (13)$$

²³Erről bővebben lásd Poirier (1995, 318-331. o.), Zellner (1971, 41-53. o.) vagy Koop (2003) 12. fejezetét.

²⁴Az angol terminológiát nem lehet jól visszaadni magyarul. Bár az *improper* szó a prior nem megfelelőségére utal, ez részben félrevezető, hiszen a modellparaméterek poszterior eloszlásának kiszámítását nem gátolja. Egyedül egy modell-összehasonlító statisztika kiszámítását teheti problémássá, melyre a későbbiekben még visszatérek.

A nem informatív priorok legyenek a következők:²⁵

$$f(\sigma^2) \propto \sigma^{-2}$$

$$f(\beta) \propto 1.$$

A β és σ^2 paraméterek poszterior eloszlása a Bayes-tételből:

$$\begin{aligned} f(\beta, \sigma^2 | y) &\propto f(y | \beta, \sigma^2) f(\beta) f(\sigma^2) \propto \\ &\propto \sigma^{-(N+2)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (y - X\beta)' (y - X\beta)\right). \end{aligned} \quad (14)$$

A β paraméterek peremsűrűségfüggvénye:

$$\begin{aligned} f(\beta | y) &= \int_0^\infty f(\beta, \sigma^2 | y) d\sigma^2 \propto \\ &\propto \int_0^\infty \sigma^{-(N+2)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (y - X\beta)' (y - X\beta)\right) d\sigma^2. \end{aligned}$$

Használva a gamma-2 inverz lépést adódik:

$$\int_0^\infty \sigma^{-(N+2)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (y - X\beta)' (y - X\beta)\right) d\sigma^2 \propto (y - X\beta)' (y - X\beta)^{-\frac{N}{2}}. \quad (15)$$

A (3) dekompozíciós szabály alkalmazásával kapjuk:

$$f(\beta | y) \propto \left[(y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta}) + (\beta - \hat{\beta})' X' X (\beta - \hat{\beta}) \right]^{-\frac{N}{2}}, \quad (16)$$

ahol $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$. Elosztva a (16) kifejezést $\hat{\sigma}^2 = (y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta}) / (N - k)$ -val kapjuk:

$$f(\beta | y) \propto \left((N - k) + \frac{(\beta - \hat{\beta})' X' X (\beta - \hat{\beta})}{(y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta}) / (N - k)} \right)^{-\frac{N}{2}},$$

ami a függelék A.2.1 pontja alapján egy k dimenziós t -eloszlás sűrűségfüggvénye $\hat{\beta}$ lokációs paraméterrel, $\hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1}$ skála paraméterrel és $N - k$ szabadságfokkal. Így tehát a β paraméter t -eloszlást követ az előzőekben felsorolt paraméterekkel.

²⁵A β paraméterre vonatkozó nem informatív prior kernel-sűrűségfüggvénye úgy tekinthető, mint egy végtelen varianciájú normális eloszlás sűrűségfüggvénye. Lásd a (11) formulát.

σ^2 peremsűrűségfüggvénye definíció szerint:

$$\begin{aligned}
f(\sigma^2|y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta, \sigma^2|y) d\beta \propto \\
&\propto \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^{-(N+2)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (y - X\beta)' (y - X\beta)\right) d\beta \propto \\
&\propto \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^{-(N+2)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta}) + (\beta - \hat{\beta})' X'X (\beta - \hat{\beta})\right]\right) d\beta \propto \\
&\propto \sigma^{-(N+2)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta})\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (\beta - \hat{\beta})' X'X (\beta - \hat{\beta})\right) d\beta,
\end{aligned}$$

ahol a dekompozíciós szabályt alkalmaztam. Kihasználva, hogy az utolsó tag integrálja arányos $|\sigma^2 (X'X)^{-1}|^{-\frac{1}{2}} = \sigma^{-k} |(X'X)^{-1}|^{-\frac{1}{2}}$ -val, így az integrálandó kifejezés normális eloszlás sűrűségfüggvényére hasonlított, amiből kapjuk:

$$f(\sigma^2|y) \propto \sigma^{-(N-k+2)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta})\right),$$

ami egy inverz gamma-2 eloszlás sűrűségfüggvénye $(y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta})$ lokációs paraméterrel és $N - k$ szabadságfokkal.

Összehasonlítva a nem informatív priorokkal készített poszterior paraméter eloszlásokat a klasszikus ökonometria (legkisebb négyzetek módszerével történő) becslésével teljes analógiát fedezhetünk fel. Észre kell vennünk azt is (lásd függelék A.3.5. pontja), hogy ha σ^2 inverz gamma-2 eloszlást követ $(y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta})$ lokációs paraméterrel és $N - k$ szabadságfokkal, akkor $\frac{(y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta})}{\sigma^2}$ egy $N - k$ szabadságfokú χ^2 eloszlást követ. A β paraméter poszterior várható értéke megegyezik a klasszikus módszer pontbecslésével. A bevezetett $\hat{\sigma}^2$ megegyezik az eltérésváltozó varianciájának torzítatlan becslésével. Nemcsak e kitüntetett értékek egyeznek meg a két eltérő megközelítésben, hanem a paraméterek eloszlásai is. A klasszikus ökonometriában β paraméter becslése szintén $N - k$ szabadságfokú t eloszlást követ $\hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1}$ varianciával, illetve a klasszikus ökonometriában $\frac{(y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta})}{\sigma^2}$ szintén $N - k$ szabadságfokú χ^2 eloszlást követ. A nem informatív priorok tehát mintegy hidat képeznek a Bayes-i és a klasszikus megközelítés között.

1. példa. Az alábbi példán keresztül bemutatom, hogy a klasszikus ökonometriában széleskörűen használt eszközt, a Hodrick-Prescott-féle filtert (Hodrick-Prescott 1980, 1997), miképpen lehet Bayes-i eszközökkel elővezetni.

Emlékeztetőül Hodrick-Prescott a következőképpen definiálja a szűrőt (HP szűrő) egy y_t idősorhoz $t = 1, \dots, T$:

$$\min_{y_t^{hp}} \sum_{i=1}^T \left(y_t - y_t^{hp}\right)^2 + \lambda \sum_{i=2}^{T-1} \left(\left(y_{t+1}^{hp} - y_t^{hp}\right) - \left(y_t^{hp} - y_{t-1}^{hp}\right)\right)^2,$$

ahol λ paraméter kontrollálja a HP-szűrő y_t^{hp} idősor simaságát. Ha $\lambda \rightarrow 0$, akkor $y_t^{hp} \rightarrow y_t$, illetve, ha $\lambda \rightarrow \infty$, akkor a y_t^{hp} idősor egy lineáris trendhez fog tartani. Érdemes észrevenni, hogy a λ paraméter priorokhoz hasonló információt testesít meg,

mert ennek értékét – még akkor is, ha vannak rá általánosan elfogadott értékek²⁶ – az elemzést végző választja meg. Az eredményül kapott HP-szűrt idősor a klasszikus ökonometriai megközelítésből adódóan egy pontbecslés, melynek bizonytalanságát mester-séges minták generálásával lehet meghatározni. A Bayes-i elemzésnél a bizonytalanság megjelenítése nem problémás, sőt analitikusan is megadható a HP-szűrésnek megfelelő idősor együttes eloszlása.

A Bayes-i elemzéshez tekintjük az alábbi modellt:

$$y_t = \beta_t + \varepsilon_t, \quad (17)$$

ahol ε_t független azonos normális eloszlású hibatag ($\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$). Ez nem más mint egy időben változó paraméteres modell. Bevezetve az $y = \{y_1, \dots, y_T\}'$, $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_T\}$ és a $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T\}$ jelöléseket a (17) modell így is írható:

$$y = I\beta + \varepsilon,$$

ahol I egy $T \times T$ típusú egységmátrix. Ennek a modellnek a likelihoodja, hasonlóan (2)-hez:

$$f(y|\beta, \sigma^2) \propto \sigma^{-T} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (y - I\beta)' (y - I\beta)\right). \quad (18)$$

A β paraméterre vonatkozó prior felírásánál azt az előzetes információt fogalmazzuk meg, hogy a β_t az időben csak fokozatosan, egy sima görbe mentén változik. Ezt az információt Shiller (1973) tanulmányát követve a következőképpen formalizáljuk.

Definiáljuk u vektort, mint a q -ad rendű differenciáját a β vektornak:

$$u = R_q \beta,$$

ahol R_q egy $T - q \times T$ típusú q -ad rendű differencia mátrix, $T - q$ ranggal.²⁷

Az u prior eloszlásról feltesszük, hogy független azonos eloszlású normális változó 0 várható értékkel és σ^2/k varianciával, így a $p(\beta|\sigma^2, k)$ prior sűrűségfüggvény az alábbi formában írható:

$$f(\beta|\sigma^2, k) \propto (\sigma/\sqrt{k})^{-(T-q)} \exp\left(-\frac{k}{2\sigma^2} \beta' R_q' R_q \beta\right). \quad (19)$$

A fenti formájú priorral kapcsolatban érdemes megemlíteni, hogy ha $q = 1$ és k nagy, akkor a prior azokhoz a görbékhez rendel nagyobb valószínűséget, amelyek csak lassan térnek el egy konstanstól, a legnagyobb valószínűséget a vízszintes vonalakhoz, míg a

²⁶Éves adatoknál $\lambda = 100$, negyedéveseknél $\lambda = 1600$, haviaknál $\lambda = 14400$. Ezeket a paraméterválasztásokat többen kritizálják, mint például Ravn-Uhlig (2002).

²⁷Például egy $T = 5$ elemű vektor másodrendű ($q = 2$) differencia mátrixa:

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

legkisebb valószínűséget a cikk-cakk formákhoz rendeli.

Ha $q = 2$ és k nagy, akkor a prior azokhoz a görbékhez rendel nagyobb valószínűséget, amelyeknek a meredeksége csak lassan változik, a legnagyobb valószínűséget az egyenes vonalakhoz rendeli, míg a legkisebb valószínűséget ismét a cikk-cakk formákhoz rendeli. Általánosan elmondható, hogy a q -ad rendű simasági prior a legnagyobb valószínűséget a $q - 1$ -ed fokú polinomokhoz rendeli, míg a legkisebb valószínűséget mindig a cikk-cakk formákhoz.

σ^2 prior eloszlására tegyünk fel egy nem informatív priort:

$$f(\sigma^2) \propto \sigma^{-2}. \quad (20)$$

Használva a Bayes-szabályt és feltételezve, hogy k adott, a poszterior a következőképpen írható:

$$f(\beta, \sigma^2 | y, k) \propto \sigma^{-T-(T-q)-2} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} (y - I\beta)' (y - I\beta) - \frac{k}{2\sigma^2} \beta' R_q' R_q \beta \right). \quad (21)$$

Kihasználva, hogy $(y - I\beta)' (y - I\beta) + k\beta' R_q' R_q \beta$ összevonható $(W - V\beta)' (W - V\beta)$ alakra, ahol:

$$W = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} I \\ \sqrt{k} R_q \end{pmatrix}.$$

A bevezetett jelöléssel (21) átírható:

$$f(\beta, \sigma^2 | y, k) \propto \sigma^{-(2T-q+2)} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} (W - V\beta)' (W - V\beta) \right), \quad (22)$$

ami típusát tekintve megegyezik a lineáris regresszió (7) poszteriorjával. Így β poszterior peremeloszlása $T - q$ szabadságfokú t -eloszlást követ, $\hat{\beta} = (I + kR_q' R_q)^{-1} y$ lokációs (várható) értékkel és $\hat{\sigma}^2 (I + kR_q' R_q)^{-1}$ skála paraméterrel, ahol:

$$\hat{\sigma}^2 = (W - V\hat{\beta})' (W - V\hat{\beta}) / T.$$

Belátható, hogy a Bayes-i becslésnél β paraméter poszterior várható értéke $q = 2$ választás mellett megegyezik a HP-szűrő ugyanolyan k érték mellett adott pontbecslésével ($\beta_t = y_t^{hp}$)²⁸. A Bayes-i paraméterbecslés előnye, hogy a becslést HP-trend (β paraméterek) bizonytalansága, eloszlása egzaktul kalkulálható.

1.3. A Bayes-i elemzés eredményeinek bemutatása, értelmezése

A paraméterek Bayes-i ökonometriai elemzése elméletileg mindig a prior eloszlások specifikálásával kezdődik. Ha ugyanis a priort az adatok megfigyelése/feldolgozása után definiálnánk, akkor a prior megfogalmazásakor már befolyásolhatnák minket az adatok, ami az adatok (prioron és likelihoodon keresztüli) kétszeres figyelembevételéhez vezetne. A kutató által definiált priorok és az elemzett

²⁸A HP-szűrő mátrixalgebrai felírása megtalálható például Mohr (2005) tanulmányában.

modell likelihoodjának kombinálásával áll elő a poszterior eloszlás. A prior és a poszterior eloszlás különbsége mutatja az adatokban meglévő információt, vagy másképpen azt, hogy mit "tanultunk" az adatokból. Ha a prior és a poszterior eloszlása között kicsi a különbség, akkor a vizsgált adatokban szinte nincs olyan információ, amelyet a feltételezett priorunk ne tartalmazott volna. Ez közelebből megnézve két dolgot jelenthet. (1) A priorunk a valósághoz igen közeli volt, ezért az adatok ezt csak megerősítik. (2) Az adatokban a vizsgált kérdésre nézve nincs információ. A két esetet a *prior-érzékenységi vizsgálat*tal lehet elkülöníteni. Amennyiben egy más priort feltételezve a poszterior nem, vagy csak alig változik, akkor az első esettel állunk szemben, amennyiben pedig a prior változtatásával a poszterior is "egy az egyben" változik, akkor az utóbbival.

A Bayes-i becslések ismertetésekor a poszterior mellett a felhasznált prior bemutatása is elengedhetetlen, hiszen a felhasznált prior jelentősen befolyásolhatja a poszteriórt. A poszterior kernel-sűrűségfüggvény a paraméterek poszterior eloszlásáról ugyan minden információt tartalmaz, mégis könnyebben értelmezhető, ha a paraméterek egyes momentumait is kiszámítjuk, ezért a paraméterek poszterior (és prior) várható értékét, móduszát vagy mediánját is meghatározzuk, kiegészítve a paraméterek poszterior (és prior) varianciáival vagy különböző kvantilis értékeivel.²⁹

2. példa. Az alábbiakban bemutatom, hogy egy Bayes-i elemzés eredményeit miként lehet közölni. A példában az USA negyedéves növekedési ütemét (y_t) magyarázom az alábbi modellel:

$$y_t = \beta + \varepsilon_t,$$

amelyben felteszem, hogy ε_t független azonos normális eloszlást követ 0 várható értékkel és ismert $\sigma^2 = 0,468$ varianciával. A β -ra vonatkozó priorra kétféle specifikációt is használunk. Az elsőben egy természetes konjugált priort:

$$\beta \sim N(b, \sigma^2 B),$$

a másodikban egy diffúz priort:

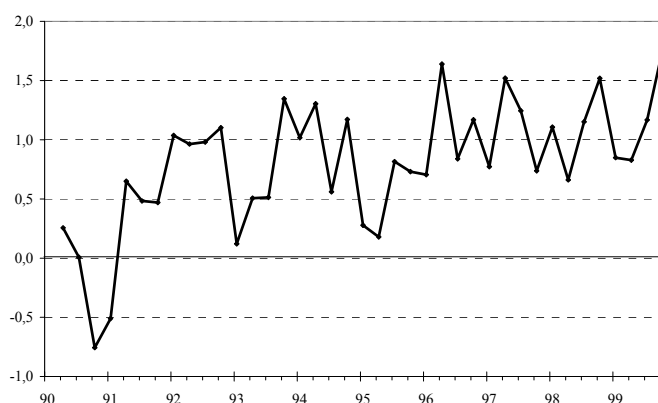
$$f(\beta) \propto 1.$$

A (10) formula alapján tudjuk, hogy az első prior feltevés mellett $p(\beta|y)$ poszterior Student-féle t-eloszlást követ $\hat{\beta} = (X'X + B^{-1})^{-1}(X'y + B^{-1}b)$ lokációs paraméterrel és $\sigma^2(X'X + B^{-1})^{-1}$ skálaparaméterrel, a második prior feltevés esetén $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$ lokációs paraméterrel és $\sigma^2(X'X)^{-1}$ skálaparaméterrel. Az ezek alapján számolt β paraméterre vonatkozó főbb poszterior eredmények az 1. táblázatban találhatók. Az eredményekből két tendencia rajzolódik ki. (1) Minél kisebb a prior varianciája (B), annál kisebb lesz a poszterior varianciája, (2) a kis varianciájú prior jelentősen befolyásolja β poszterior értékét, míg nagy variancia esetén csupán csekély mértékben, a β poszterior értéke ekkor a diffúz prior melletti várható értékhez közeli.

A 4. ábrán kétféle prior-feltevés mellett ($b = 1, B = 0.1$ és $b = 1, B = 0.01$) bemu-

²⁹A vizsgált összefüggéstől és a kutató veszteségfüggvényétől függ, hogy melyik statisztikait mutatószámot célszerű közölni.

3. ábra. Az USA GDP-jének negyedéves növekedési üteme 1990. II. – 1999. IV. n.é. között



1. táblázat. A β paraméterre vonatkozó prior feltevések és poszterior jellemzők

b	B	$E[\beta y]$	$Var[\beta y]$
0,00	0,01	0,2224	0,0038
0,50	0,01	0,5821	0,0038
1,00	0,01	0,9418	0,0038
0,00	0,10	0,6308	0,0108
0,50	0,10	0,7329	0,0108
1,00	0,10	0,8349	0,0108
0,00	1,00	0,7728	0,0132
0,50	1,00	0,7853	0,0132
1,00	1,00	0,7978	0,0132
diffúz prior		0,7926	0,0135

tatom a β prior és poszterior sűrűségfüggvényeit, illetve a modell likelihood függvényét, melyből kitűnik, hogy kis prior variancia esetén a poszterior a priorhoz áll közel, míg nagy variancia esetén a likelihoodhoz.

1.4. Bayes-i előrejelzések

Az ökonometria modelleknek kitüntetett szerepük van a gazdasági folyamatok előrejelzésében. Tegyük fel, hogy adott megfigyelések mellett $y = (y_1, \dots, y_N)'$ y_{N+1} -re kívánunk előrejelzést készíteni. A klasszikus megközelítésben az y_{N+1} sűrűségfüggvénye adott θ paraméterbecslés mellett a következő:

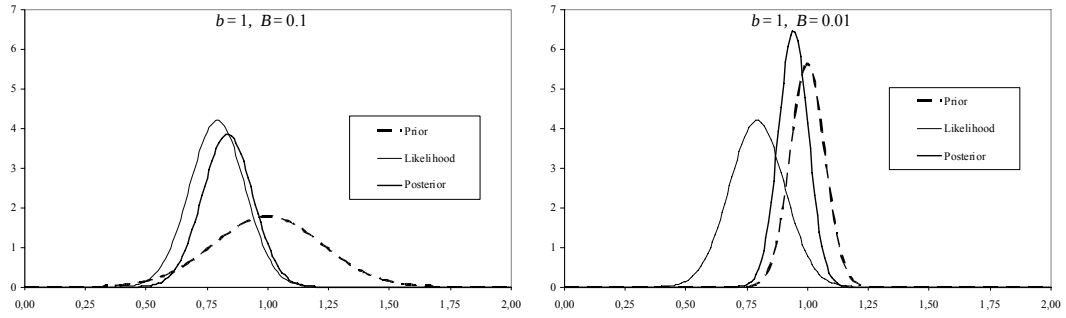
$$f(y_{N+1}|\theta). \quad (23)$$

A klasszikus megközelítésben θ -t helyettesítik a pontbecslés $\hat{\theta}$ értékével, majd kiszámolják a (23) függvény várható értékét, varianciáját.

A Bayes-i filozófiában a paraméterbecslés nem egy adott értéket eredményez, hanem egy teljes (poszterior) eloszlást:

$$f(\theta|y).$$

4. ábra. A likelihood valamint a β prior és poszterior sűrűségfüggvényei különféle prior paraméterek mellett



A fentiek miatt a Bayes-i megközelítéssel összhangban az y_{N+1} -re vonatkozó előrejelzés sem egy pontbecslés, hanem egy eloszlás. Ennek megfelelően az y_{N+1} -re vonatkozó előrejelzés poszterior sűrűségfüggvénye a következő:

$$f(y_{N+1}|y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_{N+1}|\theta) f(\theta|y) d\theta. \quad (24)$$

A Bayes-i megközelítésben ezen előrejelzésnek is a várható értékét és varianciáját szokás közölni (vagy az előrejelzés teljes poszterior eloszlását).

Láthatjuk, hogy a két megközelítés között jelentős különbség van. A klasszikus megközelítéssel szemben a Bayes-i előrejelzés figyelembe veszi a paraméterbecslés bizonytalanságait is.

3. példa. Tekintsük ismét a lineáris regressziós modellt:

$$y_i = x_i\beta + \varepsilon_i,$$

melyben $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ és $i = 1, \dots, N$. y_{N+1} sűrűségfüggvénye adott x_{N+1} és β , σ^2 paraméterek mellett:

$$f(y_{N+1}|x_{N+1}, \beta, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (y_{N+1} - x_{N+1}\beta)^2\right).$$

A előrejelzés poszterior sűrűségfüggvénye:

$$f(y_{N+1}|x_{N+1}, y) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(y_{N+1}|x_{N+1}, y) f(\beta, \sigma^2|y) d\beta d\sigma^2,$$

ahol $f(\beta, \sigma^2|y)$ a poszterior sűrűségfüggvény, adott y mellett.

Ha nem informatív priorokat feltételezünk ($f(\beta) \propto 1$ és $f(\sigma^2) \propto \sigma^{-2}$), akkor (14)

alapján:

$$\begin{aligned}
& f(y_{N+1} | x_{N+1}, y) \propto \\
& \propto \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (y_{N+1} - x_{N+1}\beta)^2\right) \sigma^{-(N+2)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (y - X\beta)' (y - X\beta)\right) d\beta d\sigma^2 \propto \\
& \propto \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \sigma^{-(N+1+2)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} [(y_{N+1} - x_{N+1}\beta)' (y_{N+1} - x_{N+1}\beta) + (y - X\beta)' (y - X\beta)]\right) d\beta d\sigma^2.
\end{aligned}$$

Az integrálást analitikusan elvégezve és algebrai átalakítások sorozata után a poszterior sűrűségfüggvény:³⁰

$$\begin{aligned}
& f(y_{N+1} | x_{N+1}, y) \propto \\
& \propto \left((N-k) + \frac{(y_{N+1} - x_{N+1}\hat{\beta})' (1 + x'_{N+1} (X'X)^{-1} x_{N+1}) (y_{N+1} - x_{N+1}\hat{\beta})}{(y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta}) / (N-k)} \right)^{-\frac{N-k+1}{2}},
\end{aligned}$$

ami $N-k$ szabadságfokú egydimenziós t -eloszlás sűrűségfüggvénye $\hat{\sigma}^2 (1 + x'_{N+1} (X'X)^{-1} x_{N+1})$ skála és $x_{N+1}\hat{\beta}$ lokációs paraméterrel.³¹

1.5. Bayes-i tesztek

A Bayes-i ökonometriában nem alkalmazhatók a klasszikus ökonometria tesztjei, illetve tesztkészítési elvei, mint például a t -teszt, F -teszt, LaGrange multiplikátor teszt, likelihood-arány teszt, vagy a Wald teszt. Ezek a tesztek ugyanis a klasszikus ökonometria ismételt mintavételén alapulnak.

A Bayes-i ökonometriában kétféle "teszt"-típus létezik :

1. Legnagyobb poszterior sűrűség intervallum (vagy régió) teszt, másnéven HPD-teszt³²;
2. Bayes-hányados³³ (poszterior odds-ok).

Szigorúan véve a Bayes-i ökonometriában nem beszélhetünk tesztekéről, hanem csak olyan információ-tömörítő eljárásokról, amelyek a paraméterbecslés bizonytalanságainak megjelenítését, illetve a modell-összehasonlítást teszik lehetővé. Ennek ellenére ezeket az információ-tömörítő eljárásokat teszteknek szokták nevezni, mivel felfedezhető analógia ezek és a klasszikus ökonometria tesztjei között, így a HPD-tesztet Bayes-i t vagy Bayes-i Wald tesztnek, a Bayes-faktorokat pedig Bayes-i likelihood-arány tesztnek szokták nevezni.

1.5.1. HPD-teszt

A teszt ismertetéséhez először vezessük be egy adott $f(\theta | y)$ poszterior eloszlás esetén az $(1 - \alpha)$ százalékkal valószínű intervallumot. Ez olyan, nem feltétlenül egybefüggő I intervallum, amelyre teljesül:

$$\Pr(\theta \in I) = \int_I f(\theta | y) d\theta = 1 - \alpha.$$

³⁰ A részleteket lásd Zellner (1971, 72-75. o.). A levezetéshez szükséges algebrai lépések számát Geweke-Whiteman (2004, 38. o.) is "tekintélyesnek" ítéli.

³¹ Ebben az esetben is megfigyelhető az analógia a klasszikus ökonometria eredményeivel.

³² A rövidítés a Híghest Posterior Density elnevezésből származik.

³³ Az angol terminológiában a Bayes-factor elnevezést használják.

Folytonos sűrűségfüggvény esetén általában végtelen sok $1 - \alpha$ valószínűségű intervallum létezik. Ezen lehetséges intervallumok közül a legkisebb intervallumot nevezzük HPD (legnagyobb poszterior sűrűségű) intervallumnak. Az elnevezés szemléletes: ez a legkisebb intervallum³⁴, melybe a poszterior eloszlásának a $1 - \alpha$ százaléka tömörül.

A HPD-teszt azt vizsgálja, hogy a tesztelni kívánt paraméterérték (a legtöbb esetben 0) az $1 - \alpha$ százalékos HPD intervallumba esik-e bele.

A HPD-teszt változtatások nélkül alkalmazható akkor is, ha θ nem skalár, hanem vektor (többváltozós eset). Ekkor az intervallum helyett régiókról beszélünk (például: legkisebb HPD régió). A HPD-teszt beágyazott modellek összehasonlítására alkalmas.

4. példa. Folytatva az USA negyedéves növekedési ütemével végzett elemzéseket, a korábbi eredmények a HPD intervallum közlésével egészíthetők ki (lásd 2. táblázat).

2. táblázat. A β paraméterre vonatkozó prior feltevések, poszterior jellemzők és a 95%-os HPD intervallumok

b	B	$E[\beta y]$	$Var[\beta y]$	95%-os HPD Intervallum	
0,00	0,01	0,2224	0,0038	0,0978	0,3469
0,50	0,01	0,5821	0,0038	0,4575	0,7066
1,00	0,01	0,9418	0,0038	0,8173	1,0664
0,00	0,10	0,6308	0,0108	0,4211	0,8406
0,50	0,10	0,7329	0,0108	0,5231	0,9426
1,00	0,10	0,8349	0,0108	0,6251	1,0447
0,00	1,00	0,7728	0,0132	0,5406	1,0049
0,50	1,00	0,7853	0,0132	0,5531	1,0174
1,00	1,00	0,7978	0,0132	0,5656	1,0299
diffúz prior		0,7926	0,0135	0,5574	1,0277

1.5.2. Bayes-hányados

A klasszikus ökonometriával szemben a Bayes-i ökonometriában az egyes modellekhez valószínűségek társíthatók, így közvetlenül össze lehet azokat vetni. Az összevetéshez nem szükséges, hogy a modellek beágyazottak legyenek. Az összevetés alapja a modellek $f(y)$ sűrűségfüggvénye, másként a perem likelihood. Az $f(y)$ tag a Bayes-tételnél is megjelent, azonban eddig csupán arányossági tényező volt, melytől a számítások során eltekinthettünk:

$$f(\theta|y) = \frac{f(y|\theta)f(\theta)}{f(y)} \propto f(y|\theta)f(\theta).$$

A perem likelihoodot az alábbi, teljes valószínűség tételnek³⁵ nevezett összefüggéssel lehet kiszámítani:

$$f(y) = \int_{\theta} f(y|\theta)f(\theta)d\theta, \quad (25)$$

tehát a likelihood és a prior szorzatának integrálásával.

³⁴A "legkisebb intervallumot" általában Euklideszi norma szerint értelmezzük.

³⁵A teljes valószínűség tételről részletesebben lásd például Reimann – Tóth (1994) 33. o.

Tegyük fel, hogy van két modellünk, melyeket A és B indexszel jelölünk. Ekkor a modellek perem likelihoodjainak hányadosát hívjuk Bayes-hányadosnak:

$$BF_{A|B} = \frac{f_A(y)}{f_B(y)},$$

ahol $f_A(y) = \int_{\theta} f_A(y|\theta_A) f_A(\theta) d\theta_A$ és $f_B(y) = \int_{\theta} f_B(y|\theta_B) f_B(\theta) d\theta_B$.

Amennyiben $BF_{A|B}$ nagyobb 1-nél, akkor az A modell *a posteriori* valószínűbb, mint a B modell, feltéve, hogy *a priori* mindkét modell egyforma valószínűségű.

A perem likelihoodok analitikus kiszámítása a (25) képlet alapján csak igen speciális esetekben végezhető el.³⁶ A prior nem lehet improper, annak olyan valódi sűrűségfüggvénynek kell lennie, amelyre $\int_{\theta} f(\theta) d\theta = 1$ teljesül. Emiatt például az előző példákban szereplő $f(\beta) \propto 1$ vagy $f(\sigma^2) \propto \sigma^{-2}$ nem informatív priorok esetén a perem likelihood nem értelmezett.

Amennyiben beágyazott modelleket szeretnénk összehasonlítani, akkor létezik egy egyszerűbb számítási mód a perem likelihoodra. Tételezzük fel ehhez, hogy van egy B modellünk, mely (θ_1, θ_2) paraméterektől függ és van egy másik A modellünk, mely a B modellből származtatható, a θ_2 paraméter θ_2^* értékre való korlátozásával. Ekkor az A modellt a B modell korlátozott változatának tekinthetjük, tehát az A modell a B modellbe ágyazott. Ebben az esetben, ha az A (beágyazott) modell priorjára teljesül:

$$f_A(\theta_1) = f_B(\theta_1|\theta_2)|_{\theta_2=\theta_2^*}, \quad (26)$$

azaz a két modellhez tartozó θ_1 prior megegyezik, ha θ_2 értékét θ_2^* -re rögzítjük, akkor a Bayes-hányados így is írható:³⁷

$$BF_{A|B} = \frac{f_B(\theta_2|y)|_{\theta_2=\theta_2^*}}{f_B(\theta_2)|_{\theta_2=\theta_2^*}}, \quad (27)$$

azaz $BF_{A|B}$ Bayes-hányados a θ_2 poszterior sűrűségfüggvényének és a θ_2 prior sűrűségfüggvényének a hányadosa a $\theta_2 = \theta_2^*$ pontban. A Bayes-hányados (27) alakú felírását Savage-Dickey sűrűségi hányadosnak nevezik. Ezen hányados kiszámítása annyival egyszerűbb, hogy csak a B modell poszteriorját kell kiszámítani.

Amennyiben analitikusan nem határozható meg a perem likelihoodok és a Savage-Dickey sűrűségi hányados sem alkalmazható a Bayes-hányados kiszámítására (például: nem beágyazott modellek vagy beágyazott modellek esetén a priorokra nem teljesül a (26) feltétel), akkor a Gelfand és Dey által kidolgozott szimulációs technikával (Gelfand-Dey, 1994) kiszámolható a perem likelihood. Két tetszőleges modell esetén meghatározható a Bayes-hányados az általuk kidolgozott módszerrel.

5. példa. Folytatva az USA negyedéves növekedési ütemével végzett elemzéseket, kiszámoltam a Bayes-hányadosokat kétféle $f(\beta_B)$ prior feltevés mellett néhány olyan $f(\beta_A)$ alternatív prior feltevésre, melynek során a növekedési paramétert adottnak tételeztem fel (bizonytalanság nélküli prior). A Bayes-hányadosok a 3. táblázatban láthatók.

³⁶Például egy speciális eset a lineáris modell természetes konjugált priorral. A levezetés megtalálható például Poirier (1995, 542-543. o.) vagy Zellner (1971, 72-75. o.) könyvében.

³⁷Az azonosság igazolása – beleértve azt az általánosabb esetet is, amikor a priorokra nem teljesül a (26) feltevés – megtalálható Verdinelli-Wasserman (1995) cikkében.

3. táblázat. Az alternatív modell-hipotézisek Bayes-hányadosai

$f(\beta_A)$	Bayes-hányados	$f(\beta_A)$	Bayes-hányados
0,0	0,000	0,0	0,000
0,1	0,000	0,1	0,000
0,2	0,000	0,2	0,000
0,3	0,000	0,3	0,002
0,4	0,003	0,4	0,048
0,5	0,058	0,5	0,586
0,6	0,522	0,6	3,360
0,7	2,052	0,7	9,104
0,8	3,519	0,8	11,664
0,9	2,632	0,9	7,066
1,0	0,859	1,0	2,024
$f(\beta_B) \sim N(1, 0.1)$		$f(\beta_B) \sim N(0, 1)$	

1.6. Szimulációs technikák

A Bayes-i ökonometriában a poszterior sűrűségfüggvény mind az előzetes, mind az adatokból kinyerhető információk teljességét magában foglalja, ennek ellenére az eredmények értékeléséhez elengedhetetlen, ha a poszterior sűrűségfüggvényből jól értelmezhető, tömörített információt tartalmazó olyan mutatók is kiszámíthatók, mint például a paraméterek poszterior várható értéke, mediánja, módusza, varianciája-kovarianciája, magasabbrendű momentumai, stb. Ezek a mutatók az eddig bemutatott modellekkel az esetek jelentős részében nem határozhatók meg analitikus módon a sűrűségfüggvényből. Bizonyos esetekben e problémák kezelésére elvben lehetőséget ad az integrál numerikus módszerekkel történő közelítése, azonban ez még a mai gyors számítógépekkel is igen számításigényes, különösen ha az integrál dimenziója nagy (sok paraméter szerepel a modellben).

A fentiek miatt a modern Bayes-i ökonometria az integrálok numerikus közelítése inkább szimulációs eljárásokat alkalmaz a poszterior sűrűségfüggvény elemzésére. A szimulációs eljárások közös ötlete az, hogy a poszterior eloszlásból generál mintát, melyet fel lehet használni a különböző statisztikák, így a már említett a poszterior várható értékek (de akár medián, módusz), poszterior variancia-kovarianciák, momentumok kiszámítására.

A Bayes-i ökonometria háromféle szimulációs technikát ismer:

1. Direkt mintavétel (Direct sampling);
2. Markov-láncon alapuló Monte Carlo eljárások, mint:
 - Gibbs-féle mintavétel
 - Metropolis–Hastings-féle eljárás
 - Rácsponos Gibbs-féle mintavétel
 - Adat kiegészítésen alapuló eljárás (Data augmentation)
 - Vegyes eljárások;
3. Fontossági mintavétel (Importance sampling).

A szimulációs eljárások közös vonása, hogy a poszterior többnyire ismeretlen eloszlása helyett ismert eloszlásokból generál véletlen vektort, melyet megfelelő módon kombinálnak.³⁸

A direkt mintavétel a legalapvetőbb eljárás, azonban nem minden esetben alkalmazható. Az utóbbi évtizedben a Markov-láncon alapuló Monte Carlo eljárások a legnépszerűbbek, köszönhetően széleskörű alkalmazhatóságuknak. Ezeket a szimulációs eljárásokat összefoglalóan MCMC eljárásoknak is nevezi az angol szakirodalom (Markov Chain Monte Carlo). Lényegében olyan Markov-láncot definiálnak (generálnak), amelynek határeloszlása éppen a poszterior eloszlás. A fontossági mintavétel mára már nem annyira népszerű, bizonyos modellek esetében azonban továbbra is használják.³⁹

A számítógépek számítási kapacitásának utóbbi években végbement ugrásszerű fejlődése lehetővé tette, hogy ezen, néhány évtizede elméletileg kidolgozott szimulációs technikák algoritmusai relatíve gyorsan lefuthassanak. A továbbiakban részletesen ismertetem a szimulációs eljárásokat.

1.6.1. Direkt mintavétel

A direkt mintavétel módszere a paraméterek – jelölje most $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ – poszterior együttes sűrűségfüggvénnyel ($f(\theta_1, \theta_2 | y)$) megadott poszterior eloszlásából generál mintát. Kiemelendő, hogy ez az eljárás nem a peremeloszlásokból generál mintát, mivel a peremeloszlások figyelmen kívül hagyják a paraméterek közötti korrelációt.

Gyakran nem lehetséges mintát venni a θ_1 és θ_2 paraméterek együttes poszterior eloszlásából, mivel azok együttes eloszlása nem ismert. Bizonyos esetekben azonban lehetséges, hogy a poszterior együttes eloszlást felbontsuk:

$$f(\theta_1, \theta_2 | y) = f(\theta_1 | \theta_2, y) f(\theta_2 | y),$$

és így először $f(\theta_2 | y)$ poszterior peremeloszlásból generálunk egy véletlen számot, majd ennek felhasználásával a $f(\theta_1 | \theta_2, y)$ poszterior feltételes eloszlásból.

6. példa. Tekintsük ismét a $y = X\beta + \varepsilon$ lineáris regressziós modellt, ahol β a k dimenziós paramétervektor és $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$. Diffúz prior specifikáció mellett ($f(\beta) \propto 1$ és $f(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2}$) a poszterior sűrűségfüggvény (lásd (14) képlet):

$$f(\beta, \sigma^2 | y) \propto \sigma^{-(N+2)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (y - X\beta)' (y - X\beta)\right).$$

A poszterior mutatószámok (várható érték, variancia, stb.) meghatározásához most ebből a poszterior eloszlásból veszünk mintát. Ehhez használjuk a (3) dekompozíciós szabályt:

$$f(\beta, \sigma^2 | y) \propto \sigma^{-(N+2)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left((y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta}) + (\beta - \hat{\beta})' X' X (\beta - \hat{\beta})\right)\right),$$

³⁸ Mivel általában még a matematikai programcsomagok is meglehetősen kevés eloszlásból képesek közvetlenül mintát generálni, ezért a függelék A.3. pontjában ismertetem, hogy normális eloszlású véletlenszám generátorral, miként lehet néhány további eloszlást előállítani.

³⁹ A fontossági mintavételezés módszertanáról leírás található Kloek–Van Dijk (1978) vagy Geweke (1989) tanulmányaiban.

ami alapján a poszterior sűrűségfüggvény felbontható:

$$f(\beta, \sigma^2 | y) = f(\beta | \sigma^2, y) f(\sigma^2 | y)$$

alakra, ahol:

$$f(\beta | \sigma^2, y) \propto |\sigma^2 (X'X)^{-1}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (\beta - \hat{\beta})' X'X (\beta - \hat{\beta})\right),$$

ami egy többváltozós normális eloszlás sűrűségfüggvénye $\hat{\beta}$ várható értékkel és $\sigma^2 (X'X)^{-1}$ kovariancia mátrixszal és:

$$f(\sigma^2 | y) \propto \sigma^{-(N-k+2)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta})\right),$$

ami egy $N-k$ szabadságfokú inverz gamma-2 eloszlás sűrűségfüggvénye $(y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta})$ skála paraméterrel.

A direkt mintavételnek megfelelő eljárás ebben az esetben a következő (példánkban most $\theta_1 = \beta$ és $\theta_2 = \sigma^2$):

1. Lépés: Legyen $m = 1$.
2. Lépés: Generáljuk $\sigma^{2(m)}$ -et az $IG2\left((y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta}), N - k\right)$ eloszlásból.
3. Lépés: Generáljuk $\beta^{(m)} | \sigma^{2(m)}$ -t az $N(\hat{\beta}, \sigma^{2(m)} (X'X)^{-1})$ eloszlásból.
4. Lépés: Legyen $m = m + 1$ és menjünk vissza a 2. lépéshez.

Az eljárás mind σ^2 -re, mind β -ra olyan sorozatot eredményez, amelyben a $(\beta^{(m)}, \sigma^{2(m)})$ párok eloszlása megegyezik a poszterior eloszlással. Emiatt a sorozat felhasználásával számolt mutatók a sorozat elemszámának növekedésével a poszterior eloszlás megfelelő mutatóihoz konvergálnak. Így például $\frac{\sum_{i=1}^n \beta^{(i)}}{n}$ tart a β poszterior várható értékéhez, ha $n \rightarrow \infty$. Fontos látni, hogy a poszterior eloszlás mutatószámai tetszőleges pontossággal határozhatók meg, ehhez csak a direkt mintavétel lépéseit kell megfelelően sokszor ismételni.

1.6.2. Gibbs-féle mintavétel

Legyen θ egy véletlen vektor, melyet fel lehet bontani d blokkra $(\theta_1, \dots, \theta_d)$ és melynek poszterior sűrűségfüggvénye $f(\theta | y) = f(\theta_1, \dots, \theta_d | y)$. A Gibbs-féle mintavétel menete a következő:⁴⁰

1. Lépés: Válasszunk megfelelő kezdeti értéket $\theta^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \dots, \theta_d^{(0)})$ és legyen $m = 0$.

⁴⁰ A Gibbs-féle mintavételről kiváló áttekintést ad Casella–George (1992).

2. Lépés: Generáljuk az alábbi véletlen vektorokat:

$$\begin{aligned}
&\theta_1^{(m+1)}\text{-t a } f\left(\theta_1|\theta_2^{(m)}, \theta_3^{(m)}, \dots, \theta_d^{(m)}, y\right) \text{ eloszlásból} \\
&\theta_2^{(m+1)}\text{-t a } f\left(\theta_2|\theta_1^{(m+1)}, \theta_3^{(m)}, \dots, \theta_d^{(m)}, y\right) \text{ eloszlásból} \\
&\theta_3^{(m+1)}\text{-t a } f\left(\theta_3|\theta_1^{(m+1)}, \theta_2^{(m+1)}, \theta_4^{(m)}, \dots, \theta_d^{(m)}, y\right) \text{ eloszlásból} \\
&\vdots \\
&\theta_d^{(m+1)}\text{-t a } f\left(\theta_d|\theta_1^{(m+1)}, \theta_2^{(m+1)}, \dots, \theta_{d-1}^{(m+1)}, y\right) \text{ eloszlásból.}
\end{aligned}$$

3. Lépés: Legyen $m = m + 1$ és menjünk vissza a 2. lépéshez.

Miután ez a Markov lánc konvergál, mondjuk $m = m^*$ lépés után, a generált $\theta^{(m)}$ értékek ($\theta^{(m)} : m \geq m^*$) használhatók, mint a poszterior együttes eloszlásból vett minta.⁴¹

Az eljárás igen hatékony abban az értelemben, hogy ha a megfelelő peremeloszlások léteznek, és zárt intervallumon értelmezettek, akkor a lánc a poszterior eloszláshoz konvergál.⁴²

A Gibbs-féle mintavételezéssel kapcsolatban meg kell jegyezni, hogy a szimulált vektorsorozat autokorrelált a Markov tulajdonság miatt. Az autokorreláció kiküszöbölésére a mintát "ritkítani" vagy más néven "vékonyítani" (thinning) szokták, tehát csak minden k -ik elemet használnak fel a számításokhoz.⁴³ A vékonyításhoz olyan k értéket célszerű választani, amely mellett az új, ritkított minta már jó közelítéssel nem autokorrelált.⁴⁴

A Markov-lánc konvergencia sebessége az autokorreláció mértékétől függ. Amennyiben erősen autokorrelált a lánc, a konvergencia lassú. Az autokorreláció jelenlétére a változók közti autokorrelációs függvény felrajzolásával következtethetünk, míg a konvergencia sebességére a rekurzív átlagok kirajzolásával. Az autokorreláció minimalizálása és a gyorsabb konvergencia érdekében célszerű egy lépésben minél több paramétert szimulálni, azaz θ paramétert a lehető legkevesebb számú d blokkra felosztani.

7. példa. Tegyük fel, hogy $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ véletlen vektor-sorozatot szeretnénk generálni egy kétváltozós normális eloszlásból $\theta \sim N(\mu, \Sigma)$, azzal a megkötéssel, hogy $\theta_1 < \theta_2$. Ezt megtehetnénk úgy is, hogy (θ_1, θ_2) -et egy többváltozós normális eloszlásból szimuláljuk és kihagyjuk azokat a húzásokat, amikor $\theta_1 \geq \theta_2$ (elfogadás/elvetés módszere). Ez azonban sok húzás elvetéséhez vezethet, különösen ha θ dimenziója nagy. Ennél hatékonyabb a Gibbs-féle mintavételi eljárás. Alkalmazásához egy további azonosság ismerete szükséges (lásd például Lütkepohl 1993, 481. o.), mely szerint ha $\theta \sim N(\mu, \Sigma)$, ahol $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)$ és Σ egy $p \times p$ méretű kovariancia mátrix, akkor:

$$\theta_j | \theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}, \dots, \theta_p$$

szintén normális eloszlást követ $m_j = \mu_j + \Sigma_{j,-j} (\Sigma_{-j,-j})^{-1} (\theta_{-1} - \mu_{-j})$ várható értékkel

⁴¹Például a Bayes-faktorhoz szükséges perem likelihood Gibbs-féle eljárással generált mintából történő kiszámítását Chib (1995) tárgyalja.

⁴²Amennyiben ez a szükséges feltétel sérül, akkor a lánc divergálhat. Ilyen esetet mutatok be a 8. példában.

⁴³Másik megoldás, hogy a további számításoknál explicit figyelembe vesszük az autokorrelációt.

⁴⁴A megfelelő k érték meghatározásához a θ_i sorozatok autokorrelációs függvényeinek felrajzolása ad támpontot.

és $s_j^2 = \Sigma_{jj} - \Sigma_{j,-j} (\Sigma_{-j,-j})^{-1} \Sigma_{-j,j}$ varianciával, ahol a $-j$ alsó index az összes sort (oszlopot) jelöli, kivéve a j -iket. Ennek figyelembe vételével a Gibbs-féle mintavétel 2. lépése a következő lesz:

$$\begin{aligned}\theta_1^{(m+1)} \Big| \theta_2^{(m)} &\sim N\left(m_1^{(m)}, s_1^{2(m)}\right) \times I\left(-\infty, \theta_2^{(m)}\right) \\ \theta_2^{(m+1)} \Big| \theta_1^{(m+1)} &\sim N\left(m_2^{(m)}, s_2^{2(m)}\right) \times I\left(\theta_1^{(m+1)}, \infty\right),\end{aligned}$$

ahol I az indikátor függvény. A csonkolt normális eloszlásból való mintavételre az inverz eloszlás technika alkalmazható.⁴⁵

8. példa. Tekintsük egy stationer elsőrendű autoregresszív AR(1) modellt:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (28)$$

ahol $|\beta_1| < 1$, $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ független azonos eloszlással, $t = 1, \dots, T$.

β_0 -ra nehéz megfelelő priort definiálni, mivel az nem reprezentálja y_t feltétel nélküli várható értékét, ezért a Bayes-i ökonometriában (28)-nak az alábbi átírását veszik alapul:

$$(y_t - \mu) = \rho (y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t, \quad (29)$$

ahol $\rho = \beta_1$ és $\mu = \frac{\beta_0}{1-\rho}$.

Amennyiben az első y_1 megfigyelésre kondicionálunk (tehát úgy tekintjük, mintha a sorozatot a $t = 1$ időpontban az y_1 pontból "indítottuk" volna el), akkor a likelihood függvény:

$$f(y|\rho, \mu, \sigma^2) = \prod_{t=2}^T \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (y_t - (1-\rho)\mu - \rho y_{t-1})^2\right).$$

Tételezzünk fel egy diffúz priort:

$$f(\mu, \rho, \sigma^2) \propto \sigma^{-2}.$$

Próbáljuk meg a Gibbs-féle mintavétel lépéseit előállítani. Adott ρ , μ és y mellett σ^2 a már ismert módon egy $T-1$ szabadságfokú, $\sum_{t=2}^T (y_t - (1-\rho)\mu - \rho y_{t-1})^2$ lokációs paraméterű inverz gamma-2 eloszlást követ.

μ mintavételéhez adott ρ , σ^2 és y mellett tekintsük (29) alábbi átírását:

$$y_t - \rho y_{t-1} = \mu(1-\rho) + \varepsilon_t,$$

ami μ -ben egy lineáris modell így μ feltételes poszterior eloszlása normális:

$$\mu \sim N\left(\left(\sum_{t=2}^T (1-\rho)^2\right)^{-1} \left(\sum_{t=2}^T (1-\rho) (y_t - \rho y_{t-1})\right), \sigma^2 \left(\sum_{t=2}^T (1-\rho)^2\right)^{-1}\right). \quad (30)$$

⁴⁵ Az inverz eloszlás technikát a függelék A.3.1. pontja ismerteti.

ρ mintavételéhez adott μ , σ^2 és y mellett tekintsük a modell (29) alakú felírását. Ekkor ρ -ban lineáris modellt kapunk, így ρ feltételes poszterior eloszlása normális:

$$\rho \sim N \left(\left(\sum_{t=2}^T (y_{t-1} - \mu)^2 \right)^{-1} \left(\sum_{t=2}^T (y_{t-1} - \mu) (y_t - \mu) \right), \sigma^2 \left(\sum_{t=2}^T (y_{t-1} - \mu)^2 \right)^{-1} \right).$$

A (30) eloszlás paramétereiből látható, hogy $\rho = 1$ mellett μ paraméter nem identifikált. Ez a Gibbs-féle mintavételezési eljárást is lehetetlenné teszi, mivel amennyiben 1-hez közeli ρ -t mintavételezzünk, akkor μ várható értéke a (30) kifejezésben igen nagy lesz, így a mintavétel μ re is várhatóan (abszolút értékben) nagy értéket eredményez. Nagy μ érték azonban 1-hez közeli ρ húzását eredményezi, mivel ρ várható értéke ekkor 1-hez tart. Az 1-hez közeli ρ ismét nagy μ -t eredményez, és így tovább. A Gibbs-féle mintavételezés "beragad" ebbe a paraméter kombinációba az identifikáció lokális hiánya miatt. Az identifikációs problémát az okozza, hogy a ρ paraméter csak nyílt és nem összefüggő intervallumon értelmezett. Ahhoz, hogy ρ zárt intervallumon legyen értelmezett, több út is lehetséges: (1) olyan prior definiálása μ -höz, amely megelőzi, hogy nagy értékeket mintavételezzünk, (2) egy felső határ tételezése ρ paraméterre ($f(\rho) \sim U[-0.9, 0.9]$) vagy (3) a likelihoodot nem kell kondicionálni az első y_1 megfigyelésre, hanem helyette y_1 értékét is bizonytalannak kell tekinteni és az alábbi módon, a feltétel nélküli várható értékéből kiindulva kell meghatározni az első megfigyelés likelihoodját:

$$(y_1 - \mu) = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \varepsilon_1, \quad (31)$$

ahol $\varepsilon_1 \sim N(0, \sigma^2)$. Ekkor a modell likelihood függvénye az alábbira módosul:

$$f(y|\rho, \mu, \sigma^2) = \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1 - \rho^2}{2\sigma^2} (y_1 - \mu)^2\right) \prod_{t=2}^T \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (y_t - (1 - \rho)\mu - \rho y_{t-1})^2\right). \quad (32)$$

Az első megfigyelés fenti módon történő beillesztése megoldja az identifikációs problémát. Megmutatható, hogy a μ paraméter feltételes poszterior peremeloszlása továbbra is normális, bár más várható értékkel és varianciával, azonban a ρ paraméter feltételes poszterior sűrűségfüggvényéhez nem rendelhető standard eloszlás, így a Gibbs-féle mintavétel közvetlenül nem alkalmazható, helyette más, az alábbiakban bemutatásra kerülő eljárásokkal lehet a paraméter momentumait meghatározni.

1.6.3. Metropolis–Hastings-féle eljárás

A Metropolis–Hastings-féle eljárás alkalmas arra, hogy tetszőleges, összefüggő intervallumon értelmezett, kernel-sűrűségfüggvénnyel adott eloszlásból generáljunk véletlen mintát. Legyen egy θ véletlen változó $f(\theta)$ sűrűségfüggvénnyel.⁴⁶ Legyen $g(\theta|\theta^{(m)})$ egy tetszőleges, úgynevezett jelölt-generáló (candidate generating) sűrűségfüggvény. Ekkor az $f(\theta)$ sűrűségfüggvénnyel adott elos-

⁴⁶Ez a sűrűségfüggvény lehet például a poszterior sűrűségfüggvény $f(\theta|y)$.

zlásból a következő eljárással lehet mintát generálni:

1. Lépés: Válasszunk egy $\theta^{(0)}$ kezdeti értéket és legyen $m = 0$.

2. Lépés: Húzzunk egy véletlen θ^* számot a $g(\theta|\theta^{(m)})$ sűrűségfüggvénnyel adott eloszlásból.

$\theta^{(m+1)}$ értékét α valószínűséggel válasszuk vagy θ^* -nak vagy $1 - \alpha$ valószínűséggel $\theta^{(m)}$ -nek, ahol:

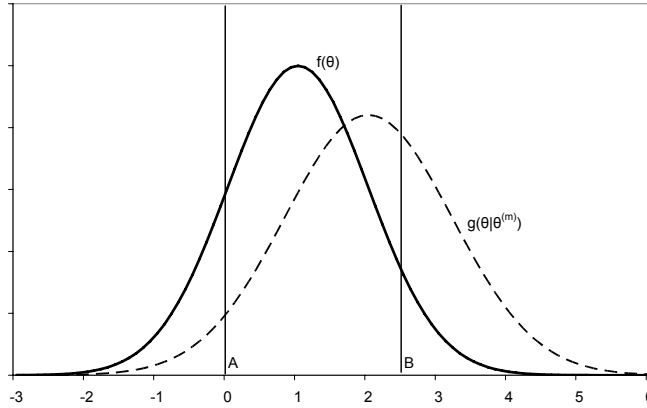
$$\alpha = \min \left(\frac{f(\theta^*) g(\theta^{(m)}|\theta^*)}{f(\theta^{(m)}) g(\theta^*|\theta^{(m)})}, 1 \right). \quad (33)$$

3. Lépés: Legyen $m = m + 1$ és térjünk vissza a második lépéshez.

Ez az eljárás is egy Markov-láncot eredményez. Miután a lánc m^* lépés után konvergál, az azt követő szimulált elemek ($\theta^{(m)} : m \geq m^*$) használhatók fel, mint a θ eloszlásból generált véletlen minta.

A Metropolis–Hastings-féle eljárás érdekessége, hogy egy tetszőleges eloszlásból való ismételt mintavétellel egy másik tetszőleges eloszlást lehet szimulálni ezen egyszerű algoritmus segítségével.⁴⁷ Az 5. ábrán szemléltetjük, hogy $f(\theta)$ sűrűségfüggvénnyel adott eloszlásból a $g(\theta|\theta^{(m)})$ jelölt-generáló sűrűségfüggvénnyel miként történik a szimuláció 2. lépése.

5. ábra. A Metropolis–Hastings-féle eljárás grafikus illusztrálása



Az (5) ábrán az A és a B pontok sorrendben a $\theta^{(m)} = 0$ és $\theta^{(m)} = 2.5$ értékeket jelölik. Ekkor valószínűbb a B pontból az A pontba való ugrás (α értéke nagy), mint fordítva, az A -ból B -be való ugrás (α értéke kicsi).

A gyakorlatban kétféle típusú $g(\theta|\theta^{(m)})$ jelölt-generáló sűrűségfüggvényt alkalmaznak.

(1) A *független jelölt-generáló sűrűségfüggvény*-családot az jellemzi, hogy a jelölt-generáló sűrűségfüggvény nem függ $\theta^{(m)}$ -től:

$$g(\theta|\theta^{(m)}) = g(\theta).$$

Ekkor az elfogadás valószínűsége (33) az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$\alpha = \min \left(\frac{f(\theta^*) g(\theta^{(m)}|\theta^*)}{f(\theta^{(m)}) g(\theta^*|\theta^{(m)})}, 1 \right) = \min \left(\frac{f(\theta^*) g(\theta^{(m)})}{f(\theta^{(m)}) g(\theta^*)}, 1 \right) = \min \left(\frac{\omega(\theta^*)}{\omega(\theta^{(m)})}, 1 \right),$$

⁴⁷A Metropolis–Hastings-féle eljárásról kitűnő bevezetőt ad Chib–Greenberg (1995). A módszerhez kapcsolódó bizonyítások Gilks–Richardson–Spiegelhalter (1996) és Tierney (1996) tanulmányaiban találhatók.

ahol $\omega(\theta^*) = f(\theta^*)/g(\theta^*)$. A $\omega(\theta^*)$ mennyiségeket fontossági súlynak is nevezik.

(2) A véletlen bolyongás jelölt-generáló sűrűségfüggvény-családban a jelölt-generáló sűrűségfüggvény függ $\theta^{(m)}$ -től.⁴⁸

$$g(\theta^* | \theta^{(m)}) = g(\theta^{(m)} | \theta^*).$$

Ekkor az elfogadás valószínűségét leíró (33) képlet az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$\alpha = \min \left(\frac{f(\theta^*) g(\theta^{(m)} | \theta^*)}{f(\theta^{(m)}) g(\theta^* | \theta^{(m)})}, 1 \right) = \min \left(\frac{f(\theta^*)}{f(\theta^{(m)})}, 1 \right). \quad (34)$$

9. példa . Tegyük fel, hogy mintát szeretnénk generálni az alábbi $f(\theta)$ sűrűségfüggvénnyel adott eloszlásból:

$$f(\theta) = \begin{cases} 1/3 & \theta = 0 \\ 2/3 & \theta = 1 \end{cases}$$

az alábbi $g(\theta)$ jelölt-generáló sűrűségfüggvénnyel:

$$g(\theta) = \begin{cases} 1/2 & \theta = 0 \\ 1/2 & \theta = 1 \end{cases}.$$

Az elfogadási valószínűségek α mátrixa a következő:

$$\begin{bmatrix} \min \left(\frac{f(0)g(0)}{f(0)g(0)}, 1 \right) & \min \left(\frac{f(1)g(0)}{f(0)g(1)}, 1 \right) \\ \min \left(\frac{f(0)g(1)}{f(1)g(0)}, 1 \right) & \min \left(\frac{f(1)g(1)}{f(1)g(1)}, 1 \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

aminek például bal felső eleme azt mutatja, hogy ha az előző húzás $\theta^{(m)} = 0$ volt és most a $g(\theta)$ alapján egy $\theta = 0$ értéket húztunk, akkor 1 valószínűséggel lesz $\theta^{(m+1)}$ értéke 0. Az átmenet valószínűségének mátrixa az elfogadási mátrixból származtatható:

$$\begin{bmatrix} T_{00} & T_{01} \\ T_{10} & T_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix},$$

aminek $T_{i,j}$ eleme annak valószínűségét jelöli, hogy $\theta^{(m)} = i$ helyzetből indulva milyen valószínűséggel lesz $\theta^{(m+1)} = j$. Ekkor igaz lesz, hogy:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}^M = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

ami intuitív módon is azt jelzi, hogy az átmeneti valószínűségeket sokszor "lejátszva" egymás után a $g(\theta)$ -ból generált véletlen számokon, olyan eloszlást kapunk, amely 1/3 valószínűséggel eredményez $\theta = 0$ és 2/3 valószínűséggel $\theta = 1$ értéket.

⁴⁸A véletlen bolyongás terminológia használatánál fel kell hívni a figyelmet arra, hogy a mintavétel során θ nem lesz véletlen bolyongás folyamat. A véletlen bolyongás jelző valójában θ^* -ra vonatkozik, és az is csak rögzített paraméterek mellett igaz, egy lépés (vagy visszalépés) erejéig.

10. példa. Tekintsük újra a (29) formában felírt AR(1) modellt nem informatív priorral és azzal a kiegészítéssel, hogy az első y_1 megfigyelést a (31) formával írjuk le. Amennyiben az első megfigyelést figyelmen kívül hagyjuk, akkor a korábbi példa nyomán a feltételes poszterior normál eloszlású lesz $\hat{\rho} = \left(\sum_{t=2}^T (y_{t-1} - \mu)^2 \right)^{-1} \left(\sum_{t=2}^T (y_{t-1} - \mu) (y_t - \mu) \right)$ várható értékkel és $\hat{s}^2 = \sigma^2 \left(\sum_{t=2}^T (y_{t-1} - \mu)^2 \right)^{-1}$ varianciával.

A ρ poszterior feltételes peremsűrűsége a (32) likelihood és a priorok alapján így írható:

$$f(\rho | \mu, \sigma^2, y) = \sqrt{1 - \rho^2} \exp \left(-\frac{1 - \rho^2}{2\sigma^2} (y_1 - \mu)^2 \right) \exp \left(-\frac{1}{2s^2} (\rho - \hat{\rho})^2 \right). \quad (35)$$

Ha például a jelölt-generáló sűrűségfüggvénynek $g(\rho) = \exp \left(-\frac{1}{2s^2} (\rho - \hat{\rho})^2 \right)$ független mintavételezött választjuk, akkor ρ^* véletlenszám-jelöltet egy $N(\hat{\rho}, \hat{s}^2)$ normális eloszlásból generáljuk. Definiáljuk $h(\rho) = \sqrt{1 - \rho^2} \exp \left(-\frac{1 - \rho^2}{2\sigma^2} (y_1 - \mu)^2 \right)$. Ekkor a ρ poszterior feltételes peremsűrűsége így is írható:

$$f(\rho | \mu, \sigma^2, y) = h(\rho)g(\rho).$$

Ennek felhasználásával az α elfogadási valószínűség:

$$\alpha = \min \left(\frac{h(\rho^*)g(\rho^*)g(\rho^{(m)})}{h(\rho^{(m)})g(\rho^{(m)})g(\rho^*)}, 1 \right) = \min \left(\frac{h(\rho^*)}{h(\rho^{(m)})}, 1 \right). \quad (36)$$

Amennyiben jelölt-generáló sűrűségfüggvénynek egy véletlen bolyongását választunk:

$$g(\rho^* | \rho^{(m)}) = g(\rho^{(m)} | \rho^*),$$

akkor szokás a t -eloszlás (vagy a normális eloszlás) sűrűségfüggvényét választani g -nek $\rho^{(m)}$ lokációs paraméterrel és megfelelő kovariancia mátrixszal. Általában kovariancia mátrixként egy, a sűrűségfüggvény második deriváltjával arányos mennyiséget választanak:

$$\gamma \left(- \frac{\partial^2 p(\rho | \mu, \sigma^2, y)}{\partial^2 \rho} \Big|_{\rho=\bar{\rho}} \right)^{-1},$$

ahol γ a finomhangolást segítő paraméter, $\bar{\rho}$ pedig $p(\rho | \mu, \sigma^2, y)$ módusza. Ekkor az α elfogadási valószínűség (34) alapján:

$$\alpha = \min \left(\frac{p(\rho^* | \mu^{(m)}, \sigma^{2(m)}, y)}{p(\rho^{(m)} | \mu^{(m)}, \sigma^{2(m)}, y)}, 1 \right).$$

t -eloszlás esetén kis szabadságfokot célszerű választani, ami biztosítja, hogy az eloszlás szélei is "kövérek" legyenek, azaz a várható értéktől távol eső intervallumokból is könnyen gyakran húzzunk véletlen számot. A γ paraméter értékének megválasztása során az a cél, hogy γ értéke olyan legyen, amely érték mellett az elutasítás valószínűsége a lehető legkisebb (α értéke 1-hez közeli), így a Markov-lánc autokorreláltsága is alacsonyabb marad.

A két különböző jelölt-generáló sűrűségfüggvény segítségével egy AR(1) modellt illesztettem a USA 1959. I. – 1999. IV. periódusra vonatkozó évesített negyedéves növekedési ütemére. Mindegyik megközelítéssel 110000 elemű Markov-láncot generáltam, melynek első 10000 elemét figyelmen kívül hagytam, hogy az eloszlások konvergálhassanak (burn-in), majd a megmaradó mintát tizedére ritkítottam (minden tizedik megfigyelést tartottam meg). A becült paraméterek poszterior eloszlásáról néhány főbb információt a 4. és 5. táblázatokba gyűjtöttem ki.

4. táblázat. USA negyedéves növekedési ütemének modellezése AR(1) folyamattal, független jelölt-generáló sűrűségfüggvénnyel

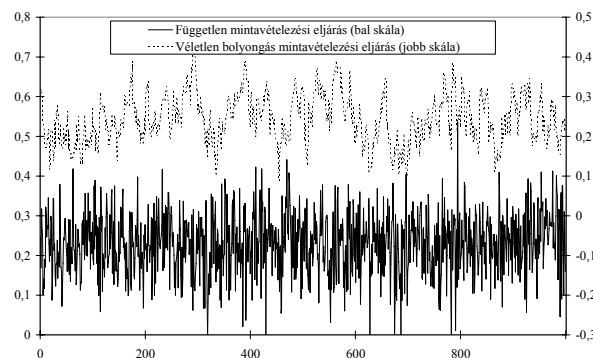
θ	$E[\theta y]$	$SD[\theta y]$	Medián	95%-os HPD intervallum
μ	0,676	0,118	0,675	0,454 – 0,914
ρ	0,229	0,078	0,229	0,074 – 0,380
σ^2	1,278	0,146	1,267	1,011 – 1,568

5. táblázat. USA negyedéves növekedési ütemének modellezése AR(1) folyamattal, véletlen bolyongás jelölt-generáló sűrűségfüggvénnyel

θ	$E[\theta y]$	$SD[\theta y]$	Medián	95%-os HPD intervallum
μ	0,675	0,116	0,675	0,454 – 0,908
ρ	0,230	0,078	0,229	0,082 – 0,384
σ^2	1,277	0,143	1,265	1,009 – 1,561

Látható, hogy mindkét megközelítés ugyanarra az eredményre vezet, minimális eltérések a minta mérete miatt jelentkezhetnek. Ugyanakkor, mint azt a 6. ábrán bemutatom, ρ kétféle mintavétele láthatóan eltérő autokorreláltságú folyamatot eredményez. Független jelölt generálónál a generált láncban alig vehető észre autokorreláció, míg a véletlen bolyongás jelölt generálónál ez szembetűnő.

6. ábra. 1000 egymás utáni $\rho^{(m)}$ húzás a független és a véletlen bolyongás jelölt generáló sűrűségfüggvénnyel



1.6.4. Rácsponos Gibbs-féle mintavétel

Amennyiben nem sikerül megfelelő jelölt-generáló sűrűségfüggvényt találni a Metropolis–Hastings eljáráshoz, egyváltozós esetben a rácsponos Gibbs-féle mintavétel alkalmazható (Griddy-Gibbs mintavétel). Ennek alapötlete, hogy az eloszlást numerikusan közelíti, azaz a sűrűségfüggvény értékét sok egymást követő pontban (rácspon) kiszámítja, majd numerikusan integrálja, az egymást követő pontok távolságát figyelembe véve.⁴⁹ Ezáltal tetszőleges eloszlást lehet közelíteni, melyből mintát (véletlenszámot) a függelék A.3.1. pontjában ismertetett inverz eloszlás technikával lehet generálni.

1.6.5. Adatkiegészítésen alapuló eljárás

Sok ökonometriai modell tartalmaz nem megfigyelhető változót, így például a korlátozott függő változós modellek (Probit, Tobit, Logit), az időben változó paraméterű modellek, állapot-tér modellek (például $y_t = X_t\beta_t + Z_t\alpha_t + \varepsilon_t$, ahol $\alpha_t = T_t\alpha_{t-1} + u_t$) stb. Ezen modellek esetén a likelihood függvény kellőképpen bonyolult, kiszámítása nagyon időigényes lehet. Amennyiben viszont a nem megfigyelt változót adottnak tételezzük, akkor a likelihood kiértékelése általában sokkal egyszerűbbé válik.

A probléma megértéséhez tegyük fel, hogy egy modell tartalmaz egy nem megfigyelhető z változót és a likelihood függvény az alábbi alakban írható:

$$f(y|\theta) = \int_z f(y|\theta, z)g(z|\theta)dz,$$

ahol $f(y|\theta, z)$ y sűrűségfüggvénye adott θ és z mellett, továbbá $g(z|\theta)$ a nem megfigyelhető változó sűrűségfüggvénye. Amennyiben feltételezzünk egy $f(\theta)$ priort, a poszterior sűrűségfüggvény a következő módon határozható meg:

$$f(\theta|y) \propto f(y|\theta)f(\theta) = \int_z f(y|\theta, z)g(z|\theta)f(\theta)dz.$$

A poszterior kiszámításához tehát ki kell értékelni a z szerinti integrált, ami igen bonyolult lehet. Ehelyett egyszerűbb, ha valamilyen MCMC technikával $f(\theta, z|y)$ együttes poszterior eloszlásból veszünk mintát z -re adott θ mellett. Ezt a megközelítést hívják adatkiegészítésen alapuló eljárásnak, mely nem megfigyelhető változót tartalmazó modelleknél sok esetben egyszerűsíti a poszteriorból történő mintavételt.

11. példa. Tekintsünk egy Probit modellt, ahol a két lehetséges megfigyelt kimenetet az alábbiak szerint modellezzük:⁵⁰

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{ha } z_i = x_i'\beta + \varepsilon_i > 0 \\ 0 & \text{ha } z_i = x_i'\beta + \varepsilon_i \leq 0, \end{cases}$$

ahol $\varepsilon_i \sim N(0, 1)$ és $i = 1, \dots, N$.

⁴⁹A módszerről bővebben lásd Koop (2003) 285.o. vagy Ritter – Tanner (1992).

⁵⁰Az adatkiegészítésen alapuló eljárás leírását és a szemléltető példát Paap (2002) tanulmányából vettem.

Annak a valószínűsége, hogy egy megfigyelt i egyed esetén $Y_i = 1$:

$$P(Y_i = 1 | x_i, \beta) = \int_0^\infty f(z_i | x_i, \beta) dz_i = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z_i - x'_i \beta)^2\right) dz_i.$$

Annak a valószínűsége, hogy egy megfigyelt i egyed esetén $Y_i = 0$:

$$P(Y_i = 0 | x_i, \beta) = 1 - P(Y_i = 1 | x_i, \beta)$$

Ezeknek felhasználásával a probit modell likelihoodfüggvénye:

$$f(y | \beta) = \prod_{i=1}^N P(Y_i = 1 | x_i, \beta)^{y_i} P(Y_i = 0 | x_i, \beta)^{1-y_i}.$$

A probit modell Bayes-i elemzéséhez első ránézésre szükséges a $P(Y_i = 1 | x_i, \beta)$ és $P(Y_i = 0 | x_i, \beta)$ tagokban szereplő integráltak meghatározása, mely nagyban bonyolítja a poszterior kiszámítását.

Az integrálok kiszámítása helyett kényelmesebb az adatkiegészítésen alapuló eljárás használata, azaz ha z_i -re is mintát generálunk adott β paraméterek mellett. Ehhez szükséges a kibővített likelihood felírása, mely y és z együttes sűrűségfüggvényén alapul adott β mellett:

$$\begin{aligned} f(y, z | x, \beta) &\propto \prod_{i=1}^N [I(z_i > 0) I(y_i = 1) + I(z_i \leq 0) I(y_i = 0)] f(z_i | x_i, \beta) \propto \\ &\propto \prod_{i=1}^N [I(z_i > 0) I(y_i = 1) + I(z_i \leq 0) I(y_i = 0)] \exp\left(-\frac{1}{2}(z_i - x'_i \beta)^2\right), \end{aligned} \quad (37)$$

ahol $I(\cdot)$ az indikátor függvény.

Diffúz $f(\beta) \propto 1$ priort feltételezve, az $f(\beta | x, y, z)$ poszterior a likelihood és a prior szorzataként szintén (37) alakú. A poszterior speciális alakja miatt a Gibbs-féle mintavételezés használható a $z_i | \beta, y$, ahol $i = 1, \dots, N$ és $\beta | z, y$ feltételes eloszlásokból való minta generálásra.

$z_i | \beta, y$ -ből való minta generáláshoz vegyük észre, hogy a poszterior függvény szerint z_i normális eloszlást követ, $x'_i \beta$ várható értékkel és 1 varianciával, ahol $z_i > 0$ ha $y_i = 1$ és $z_i \leq 0$ ha $y_i = 0$. Így z_i -t az y_i -től függő csonkolt normális eloszlásból generálhatjuk:

$$z_i \sim \begin{cases} N(x'_i \beta, 1) I(z_i > 0) & \text{ha } y_i = 1 \\ N(x'_i \beta, 1) I(z_i \leq 0) & \text{ha } y_i = 0. \end{cases}$$

$\beta | z, y$ -ből való minta generáláshoz vegyük észre, hogy adott z és y mellett egy egyszerű lineáris regressziós modellt kapunk :

$$z_i = x'_i \beta + \varepsilon_i,$$

ahol $\varepsilon_i \sim N(0, 1)$. Ekkor korábbi példák alapján tudjuk, hogy β normális eloszlást követ $\left(\sum_{i=1}^N x_i' x_i\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N x_i' z_i\right)$ várható értékkel és $\left(\sum_{i=1}^N x_i' x_i\right)^{-1}$ kovarianciával.

A fenti probit modellben az adatkiegészítés módszere egyszerűen alkalmazható volt. Időben változó paraméterű vagy állapot-tér modelleknél a nem megfigyelhető változó mintavételezése összetettebb. Az irodalomban Carter–Kohn (1994) és DeJong–Shephard (1995) módszerei jelenik meg leggyakrabban, melyek sok esetben az előzőnél hatékonyabbnak bizonyulnak.

1.6.6. Vegyes eljárások

A szimulációs eljárások kombinálhatók egymással, így gyakori, hogy a Gibbs-féle mintavételt a Metropolis–Hastings-féle eljárással kombinálják. Elképzelhető, hogy a Gibbs-féle eljárásban az egy vagy több feltételes sűrűségfüggvény eloszlása nem ismert. Ekkor az ismeretlen feltételes eloszlásokból egy Metropolis–Hastings-féle eljárással, az analitikusan is kezelhető feltételes eloszlásokból közvetlenül vesznek mintát.

A vegyes eljárások alkalmazásánál célszerű figyelembe venni, hogy a lehető legkevesebb paramétert generáljuk analitikusan nem levezethető poszterior eloszlásból. Ezzel elősegíthető a mintavételi stratégia hatékonysága, mellyel számítási időt takaríthatunk meg a szimulációk során.

1.6.7. Előrejelzések generálása szimulációs technikákkal

A Bayes-i megközelítés az előrejelzések készítésekor maximálisan figyelembe veszi a paraméterbecslés bizonytalanságait. Amennyiben szimulációs eljárással generálunk mintát a paraméterek poszterior eloszlásából, akkor a paraméterbecslés bizonytalanságait is figyelembe vevő előrejelzéseket úgy készíthetünk, hogy minden egyes generált paraméter-együttessel a modellt felhasználva előrejelzést készítsünk.

12. példa. Tegyük fel, hogy egy stationer AR(p) modellel szeretnénk előrejelzéseket készíteni:

$$y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i y_{t-i} + \varepsilon_t,$$

ahol független azonos eloszlást követ $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ és $t = 1, \dots, T$.

A (24) formula alapján a $T + 1$ időszakra készített előrejelzés sűrűségfüggvénye ($\theta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p, \sigma^2)$):

$$\begin{aligned} f(y_{T+1}|y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y_{T+1}|\theta) f(\theta|y) d\theta = \\ &= \int_0^{\infty} \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}^{p+1 \text{ darab}} f(y_{T+1}|\beta_0, \dots, \beta_p, \sigma^2) f(\beta_0, \dots, \beta_p, \sigma^2|y) d\beta_0 \dots d\beta_p d\sigma^2, \end{aligned} \quad (38)$$

ahol $f(\beta_0, \dots, \beta_p, \sigma^2|y)$ a poszterior sűrűségfüggvény, $f(y_{T+1}|\beta_0, \dots, \beta_p, \sigma^2)$ az y_{T+1} előrejelzés feltételes sűrűségfüggvénye, jelen esetben:

$$f(y_{T+1}|\beta_0, \dots, \beta_p, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(y_{T+1} - \beta_0 - \sum_{i=1}^p \beta_i y_{T+1-i}\right)^2\right).$$

A fenti formulák analitikus kezelése helyett egyszerűbb az y_{T+1} -re vonatkozó előrejelzéseket szimulációs technikával generálni. Ehhez szükséges $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p, \sigma^2$ paraméterekre poszterior eloszlásukból valamely szimulációs technikával történő mintavétel. Legyen az m -ik lépés nyomán generált paraméterkombináció $\beta_0^{(m)}, \beta_1^{(m)}, \dots, \beta_p^{(m)}, \sigma^{2(m)}$. Ekkor az y_{T+1} -t az alábbi módon lehet előrejelezni:

$$y_{T+1}^{(m)} = \beta_0^{(m)} + \sum_{i=1}^p \beta_i^{(m)} y_{T+1-i} + \varepsilon_{T+1}^{(m)},$$

ahol $\varepsilon_{T+1}^{(m)}$ egy normális eloszlásból húzott véletlen szám $\varepsilon_{T+1}^{(m)} \sim N(0, \sigma^{2(m)})$.⁵¹

Ezzel az eljárással kapunk egy $y_{T+1}^{(m)}$ sorozatot, melynek eloszlása konvergál a (38) képlettel megadott eloszláshoz.

1.6.8. A poszterior momentumok származtatása a generált mintákból

A szimulációs technikák mindegyike egy $\theta^{(m)}$ sorozatot szolgáltat ($m = 1, \dots, M$), melynek elemei – az MCMC módszereknél a konvergálás után (tehát az első m^* elemet elhagyva) – a poszterior eloszlását követik. Ennek köszönhetően a $\theta^{(m)}$ sorozat felhasználásával becsülhetők a Bayes-i elemzés megszokott (poszterior) mutatói, így például a legalapvetőbbek:

- Várható értékek⁵²:

$$\widehat{E}[\theta_j | y] = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \theta_j^{(m)}; \quad (39)$$

- Varianciák:

$$\widehat{Var}[\theta_j | y] = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left(\theta_j^{(m)} - E[\theta_j | y] \right)^2;$$

- Kovarianciák:

$$\widehat{Cov}[(\theta_j, \theta_k) | y] = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left(\theta_j^{(m)} - E[\theta_j | y] \right) \left(\theta_k^{(m)} - E[\theta_k | y] \right).$$

A poszterior mediánok, móduszok, momentumok stb. analógiával definiálhatók, illetve ezek a mutatók a szimulációs eljárásokkal készített előrejelzésekből is kiszámíthatók. Szintén analógiával származtathatók a HPD intervallumok is. (Amennyiben a poszterior eloszlása egycsúcsú, amiről a hisztogram felrajzolásával győződhetünk meg, akkor a szimulált $\theta_j^{(m)}$ elemek nagyság szerinti sorbarendezeésével csak azt a legkisebb intervallumot kell megkeresni, mely tartalmazza $1 - \alpha$ százalékát a szimulált értékeknek.) A Bayes-faktorhoz szükséges perem likelihood generált mintából történő

⁵¹ Ezzel az eljárással analóg módon készíthető előrejelzés például y_{T+2} -re is:

$$y_{T+2}^{(m)} = \beta_0^{(m)} + \beta_1 y_{T+1}^{(m)} + \sum_{i=2}^p \beta_i^{(m)} y_{T+2-i} + \varepsilon_{T+2}^{(m)},$$

ami folytatható tetszőleges számú periódusra előre vonatkozó előrejelzések készítésére.

⁵² Továbbá például egy AR(p) típusú modellnél ($y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i y_{t-i} + \varepsilon_t$) kiszámítható a folyamat feltétel nélküli várható értéke is:

$$E[y] = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{\beta_0^{(m)}}{1 - \sum_{i=1}^p \beta_i^{(m)}}.$$

kiszámításával több tanulmány is foglalkozik, így kiszámítására a Gibbs-féle mintavételezés esetén Chib (1995), a Metropolis–Hastings algoritmusnál Chib–Jeliazkov (2001) tanulmánya ad útmutatást.⁵³

A Gibbs-féle mintavételezésnél fontos, hogy a várható érték (39) szerinti becslésénél létezik egy kisebb varianciájú becslés is, amelyet Gelfand–Smith (1990) Rao–Blackwell-esítésnek (Rao–Blackwellization) nevez:

$$\hat{E}[\theta_j|y] = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M E[\theta_j|\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}, \dots, \theta_k, y],$$

ahol $E[\theta_j|\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}, \dots, \theta_k, y]$ a θ_j feltételes várható értékét jelöli. A Gibbs-féle mintavételezésnél ez ismert, hiszen $f(\theta_j|\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}, \dots, \theta_k, y)$ sűrűségfüggvény eloszlásának ismerete szükséges volt az eljárás alkalmazhatóságához. Ha pedig ismert az eloszlás, akkor ismert a várható érték is.

A poszterior eredmények származtatásával kapcsolatban ki kell emelni, hogy a poszterior eloszlás mutatószámai tetszőleges pontossággal határozhatók meg, ehhez csak a szimulációs technikával előállított sorozatok hosszát kell növelni.

⁵³További technikákat ismertet Gelfand–Dey (1994) és Verdinelli–Wasserman (1995).

2. Időben változó tört késleltetés modellje és alkalmazása az üzleti ciklusok szinkronizációjának mérésére

‘Semmi sem állandó, kivéve a változást’

Herakleitosz (Kr.e. kb. 540-480)

A közgazdasági idősorok empirikus elemzésekor a kutatók általában több, egymásnak részben ellentmondó elvárást fogalmaznak meg. Egyrészt azt, hogy az alkalmazott elemzési keret legyen kellően rugalmas az összefüggések leírására, a vizsgált minta legyen homogén, másrészt azt, hogy közben az elemzésekből levonható következtetések minél megbízhatóbbak legyenek. Az első elvárásnak általában több paraméter bevonásával felelhetünk meg, ez azonban a paraméterek szabadságfokát csökkenti, ami miatt a következtetések megbízhatósága is csökken. A második elvárás rövidebb mintaidőszakok vizsgálatát igényli, melyeken belül az összefüggések változatlanok, de a kisebb mintaelemszám miatt ez a megoldás is csökkenti a következtetések megbízhatóságát. A harmadik elvárás a lehető leghosszabb minta elemzésére ösztönöz, ami kompenzálhatja a rugalmas elemzési keret által igényelt több paraméter bevonása miatti nagyobb bizonytalanságot, ugyanakkor a homogén minta követelményével ellentétes.

Az ellentétes elvárások összebékítésére a közgazdaságtanban az utóbbi két évtizedben egyre népszerűbbé válnak azok az eszközök, amelyekkel az összefüggések időbeni változása megragadható. Ezen eszközök iránti igény természetes: éveken, évtizedeken, sőt néha gazdasági korszakokon is átívelő megfigyeléseknél magától értetődő természetességgel tehető fel, hogy a jelenségek közti összefüggések megváltozhatnak. Miért is maradnának állandóak, ha a gazdaság is állandóan változásban van: minőségi és mennyiségi változások hatják át, állandó innovációk, új információáramlási csatornák, változó termék- és tényezőpiacok, termelési és elosztó struktúrák, illetve az új kihívásokhoz való folyamatos alkalmazkodás jellemzi.

A közgazdasági összefüggésekben végbemenő változást az empirikus irodalom dummy- illetve trendváltozók bevonásával, részmintákra történő bontással vagy időben változó paraméteres modellek alkalmazásával ragadják meg. E megoldásokban közös, hogy a változók közötti hatások erősségének időbeni változását kísérlik megragadni.

Létezik azonban a változásoknak egy másik dimenziója is, melyet ezek a módszerek nem, vagy csak igen korlátozottan képesek kezelni. Általában ugyanis szükséges némi idő ahhoz, hogy egy változó megváltozása kifejthesse hatását egy másik, vele oksági kapcsolatban álló változóra. A kiváltó ok és a hatás megjelenése közti időeltolódást a továbbiakban *fáziskülönbség*nek vagy *reakcióidő*nek nevezem. A közgazdasági összefüggésekben nemcsak a változók közti hatások erőssége, hanem a köztük lévő fáziskülönbség is változhat az idő múlásával. Ez utóbbira példa, amikor egy változó megváltozása a múltban csak egyéves késéssel hatott egy másik változóra, míg ma ugyanez a hatás már egy negyedév elteltével jelentkezik.

Ebben a fejezetben az *időben változó tört késleltetés* műveletének bevezetésével olyan új elemzési eszközt mutatok be, mely két változó közti fáziskülönbség időbeni változását képes leírni. Az időben változó tört késleltetés az idősoelemzésben általánosan használt egész rendű késleltetés műveletének valós számú rendre történő kiterjesztésén alapszik. Az új elemzési eszköz alkalma-

zásaként egy *időben változó paraméterű és tört késleltetésű modellt* mutatok be, mellyel változók közötti kapcsolat változásának mindkét dimenziója (a hatás erősségének és a fáziskülönbségnek változása) egymástól elkülönítve mérhető. A modell becsléséhez a Shiller (1973) által formalizált simasági priorokat használok. A modell alkalmazhatóságát és hasznosságát mind mesterségesen generált, mind valós adatokon bemutatom. Megelőlegezve az eredményeket, vizsgálataim során azt találtam, hogy az időben változó paraméterű és változó tört késleltetésű modell mind a mintán belüli illeszkedést, mind a mintán kívüli előrejelzést tekintve felülmúlja a szóba jöhető alternatív modellek képességeit.⁵⁴

A fejezetben bemutatásra kerülő, az üzleti ciklusok szinkronizációját vizsgáló empirikus elemzés, az optimális valutaövezetek irodalmához kapcsolódik. Az optimális valutaövezetek irodalmát megteremtő Mundell (1961), McKinnon (1963) és Kenen(1969), nagyszámú elemzést inspiráltak, melyek különféle országcsoportok esetén vizsgálták, hogy azok optimális valutaövezeteket alkotnak-e. Többek között azt vizsgálták, hogy az adott gazdaságok a különféle sokkokra hasonlóan reagálnak-e, érik-e őket aszimmetrikus, országspecifikus sokkok, gazdasági aktivitásuk szoros együttmozgást mutat-e, stb.

Az időben változó paraméterű és tört késleltetésű modell különösen alkalmas az üzleti ciklusok szinkronizációjának vizsgálatára: az üzleti ciklusok szinkronizációjának egyik dimenziója éppen annak vizsgálata, hogy az országok gazdasági ciklusai egyre többször azonos fázisban vannak-e, üzleti ciklusaik trendfordulói egyre inkább azonos időpontban következnek-e be. A szinkronizáció vizsgálatának ez utóbbi dimenziója megfeleltethető a ciklusok közti fáziseltolódás időbeni változásának vizsgálatával.

Az üzleti ciklusok szinkronizációjának vizsgálata a Gazdasági és Monetáris Unió (GMU) létrehozása után továbbra is aktuális. Egyfelől ma már 13 tagállam közös fizetőeszköze az Euro, másfelől az Európai Unió 2004. évi bővítése során az új tagállamok vállalták, hogy később csatlakoznak a Gazdasági és Monetáris Unióhoz, vállalva a közös pénz, az Euro bevezetést. Ebben a fejezetben megvizsgálom, hogy az új és régi EU tagok, illetve néhány más ország üzleti ciklusa mennyire szorosan mozog együtt a GMU üzleti ciklusaival, továbbá, hogy ez az együttmozgás időben változott-e és a változás nyomán az együttmozgás csökkent vagy fokozódott.

Az együttmozgás mérésével az aábbi kérdések is megvizsgálhatók: (1) Az új EU tagállamok üzleti ciklusai hasonlóan szorosan mozognak-e együtt a GMU üzleti ciklusaival, mint a jelenlegi GMU tagok üzleti ciklusai? (2) A jelenlegi GMU tagok üzleti ciklusainak együttmozgása fokozódott-e a közös valuta megteremtése óta? (3) Változott-e az Európán kívüli országok üzleti ciklusainak a GMU üzleti ciklusaival való együttmozgása?

A vizsgált kérdésekre adott válaszok egyrészt támpontokat adhatnak a még nem GMU tagoknak a belépéshez vagy a távolmaradáshoz. Amennyiben üzleti ciklusaik nem mozognak olyan szorosan együtt a jelenlegi GMU tagállamokéval, akkor megfontolandó a távolmaradás. Ugyanakkor Frankel – Rose (1998) felvetette, hogy az optimális valutaövezeteknek lehet endogén, önbeteljesítő természetű, azaz a közös valuta hatására szorosabbá válhat az üzleti ciklusok együttmozgása. Emiatt,

⁵⁴A fejezetnek elméleti eredményei – az empirikus elemzések nélkül – Várpalotai (2006b) tanulmányban jelentek meg.

ha a jelenlegi GMU tagállamok üzleti ciklusait vizsgálva azt találjuk, hogy a közös pénz bevezetése óta fokozódott együttmozgásuk, akkor az a még nem GMU tagokat bátoríthatja a csatlakozásra abban az esetben is, ha üzleti ciklusaik együttmozgása még nem olyan szoros a már GMU-hoz csatlakozott államok üzleti ciklusaival. Másrészt, ha azt találjuk, hogy az Európán kívüli országok üzleti ciklusainak a GMU üzleti ciklusaival való együttmozgása erősödött, az újabb bizonyítékot szolgáltat azokhoz a tanulmányokhoz, amelyek a "világciklus" létezése mellett érvelnek (Kose – Otrók – Whiteman (2003), Canova – Ciccirelli – Ortega (2004)).

A fejezet felépítése a következő. Az első pontban bevezetem a széles körben ismert késleltetés operátor általánosítását először tetszőleges valós értékű időben változatlan rendre (*tört késleltetés*), majd időben változó rendre (*időben változó tört késleltetés*). A második pontban először az üzleti ciklusok szinkronizációját vizsgáló irodalomban alkalmazott módszereket sorolom fel, majd az üzleti ciklusok szinkronizációjának különböző dimenzióit definiálom. Ezt követően bemutatok egy, az időben változó tört késleltetésen alapuló modellt, mellyel lehetővé válik a szinkronizáció különféle dimenzióinak mérése, identifikációja. A harmadik pontban mesterséges adatokon összevetem, hogy az üzleti ciklusok szinkronizációját mérő megközelítések, köztük az általam javasolt időben változó tört késleltetésen alapuló modell, mennyire képes pontosan mérni az üzleti ciklusok szinkronizációját. A negyedik pont ismerteti az országok üzleti ciklusainak vizsgálatához felhasznált adatokat. Az ötödik pontban mutatom be a szinkronizáció-bebecslések eredményeit, végül a fejezetet a gazdaságpolitikai következtetések zárják. Az időben változó tört késleltetésen alapuló modellel történő elemzések lehetséges továbbfejlesztési irányait az értekezést összegző fejezetben vázolom.

2.1. A késleltetés operátor általánosítása

Az idősoros adatok elemzésének egyik alapvető eszköze a késleltetés operátor. Ebben a részben a késleltetés hagyományos definíciójának olyan új általánosítását vezetem be, amely már nemcsak az egész értékű rendre értelmezett, hanem minden valós rendre, ami ráadásul az időben változhat is.⁵⁵

A nem egész rendű késleltetés relevanciáját az adja, hogy a gazdaság működése időben folyamatos, azonban megfigyelésekkel csak diszkrét időpontokra vagy időintervallumokra rendelkezünk. A gazdaság reakcióinak ugyanakkor nem kell egybeesnie a megfigyelések időzítésével. Két, egymással ok-okozatban lévő, negyedéves megfigyelési gyakoriságú idősort példának véve, nulla valószínűségű az az esemény, hogy az egyikben bekövetkező változás a másik idősorban pont a megfigyelési gyakorisággal vagy annak többszörösével egyező időpontban indukál változást. Ehelyett valószínűbb, hogy a reakció a megfigyelési időpontok között vagy az időintervallumok valamelyik belső pontjában megy végbe. Többek között e probléma explicit kezelésére ad lehetőséget a következőkben bevezetésre kerülő nem egész rendű késleltetés (*tört késleltetés*) koncepciója.

Az egész értékű késleltetés általánosításhoz először idézzük fel egy y_t idősor késleltetettjének definícióját:

$$L(y_t) = y_{t-1}, \quad (40)$$

ahol $L(\cdot)$ a késleltetés operátor (*lag operator*), mely olyan idősort definiál, amely a t -ik időszak

⁵⁵Erre az általánosításra fog épülni az üzleti ciklusok szinkronizációjának mérésére javasolt modell.

értékéhez az y_t idősor $t - 1$ időszakához tartozó értéket rendeli.

A késleltetés műveletének $L^{-1}(\cdot)$ inverze értelemszerűen:

$$L^{-1}(y_t) = y_{t+1},$$

ami olyan idősort definiál, amely a t -ik időszak értékéhez az y_t idősor $t + 1$ időszakához tartozó értéket rendeli. Ennek a műveletnek nincs bevett magyar elnevezése, az angol *lead* terminológiát a siettetés vagy még inkább az *előrehozás* kifejezéssel lehetne visszaadni. Könnyű meggyőződni arról, hogy ez valóban a késleltetés műveletének inverze: $L^{-1}(L(y_t)) = L^{-1}(y_{t-1}) = y_t$ illetve felcserélve a sorrendet hasonlóképpen: $L(L^{-1}(y_t)) = L(y_{t+1}) = y_t$.⁵⁶

A késleltetés (vagy előrehozás) műveletét n -szer ismételve egy y_t idősorra, ahol n egész szám ($n \in \mathbb{Z}$) a következőképpen definiálható L^n :

$$L^n(y_t) = \overbrace{L(L(\dots L(y_t)))}^{n\text{-szer}} = y_{t-n}, \quad (41)$$

amit y_t idősor n -ik rendű késleltetettjének (előrehozásának) nevezünk, ha $n \in \mathbb{Z}^+$ ($n \in \mathbb{Z}^-$). Az előjeltől függő terminológia kiktűszöbölésére, a késleltetés és az előrehozás közös megnevezésként a továbbiakban az „iránysemleges” eltolás- (shift) operátor elnevezést is használom.

2.1.1. A tört késleltetés

A következőkben a késleltetés definícióját általánosítom tetszőleges i valós rendre.

1. definíció. (Tört késleltetés) Legyen egy y_t idősor i -ed rendű késleltettje tetszőleges i valós számra ($i \in \mathbb{R}$) a következő:

$$\Lambda^i(y_t) = [1 - (\phi(i) - i)] L^{\phi(i)}(y_t) + [(\phi(i) - i)] L^{\phi(i)-1}(y_t), \quad (42)$$

ahol Λ^i jelöli az általánosított i -ed rendű késleltetés operátort, $\phi(i)$ pedig az i -nél nem kisebb legkisebb egész számot.

A (42) kifejezésben $L^{\phi(i)}$ és $L^{\phi(i)-1}$ eltolás operátorok $\phi(i)$ és $\phi(i) - 1$ indexei egész értékűek, ezért a késleltetés (előrehozás) hagyományos definíciója szerint értelmezettek. A fenti definíció egyszerű koncepciót formalizál: egy y_t idősor i -ed (nem egész) rendű késleltetettje legyen a két legközelebbi egész rendű késleltetett konvex kombinációja. A jelölések egyszerűsítése érdekében a $\Lambda^i(y_t)$ jelölés mellett a továbbiakban az y_{t-i} jelölést is használom. Ha i negatív, akkor a művelet megnevezésére a késleltetés helyett az előrehozás kifejezést használom.

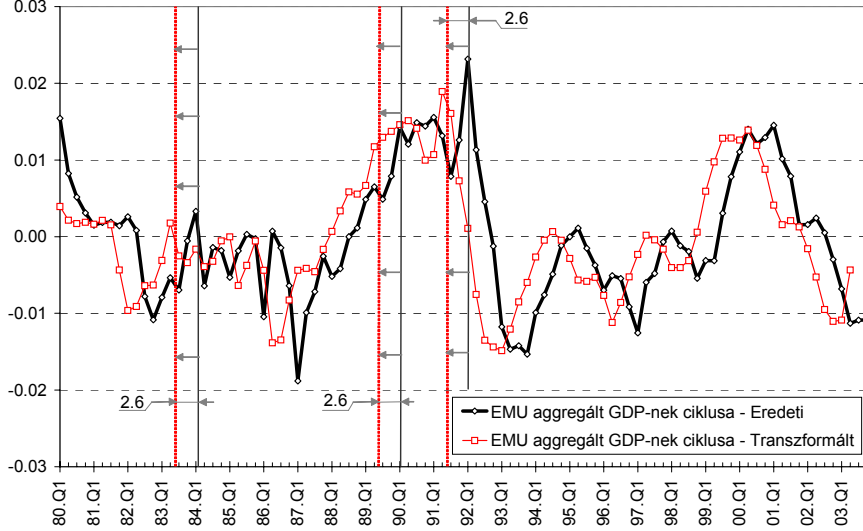
A tört késleltetés ábrázolva is szemléletes. A 7. ábrán fekete vonal jelöli az Európai Monetáris Unió aggregált negyedéves GDP-éből a Hodrick-Prescott szűrővel ($\lambda = 1600$) képzett ciklusok idősorát⁵⁷ és piros annak $i = -2.6$ -tal előrehozott transzformáltját (azaz $\Lambda^{-2.6}(y_t) = 0.6y_{t+3} +$

⁵⁶Mint az a gyakorlatban általános, ha véges számú megfigyelést tartalmaz az y_t idősor, akkor a késleltetés esetén az első, előrehozás esetén az utolsó megfigyeléshez tartozó periódusra nem lehet értékeket generálni, így a megfigyelésszám csökken. Ha ezt az elemszám csökkenést figyelembe vesszük, akkor a fenti azonosságok azon periódusokra állnak fenn, amelyek a műveletek elvégzésének eredményeképp értelmezhetők. Az eltolás műveletének mátrixalgebrai reprezentációjáról bővebben lásd Mohr (2005) tanulmányát.

⁵⁷A felhasznált adatokról részletesebb leírás az adatok ismertetésénél található.

$0.4y_{t+2}$). Az ábrán látható, hogy a tört késleltetés művelete – hasonlóan az egész rendű késleltetéshez – a vízszintes tengely mentén „eltolja” az idősort, ugyanakkor a konvex kombináció miatt némileg módosulnak a transzformált idősor értékei is.

7. ábra. Az EMU aggregált ciklusa és tört késleltettje ($i = -2.6$)



A tört késleltetés műveletét el kell különíteni az ökonometriában ismert tört integrálás (fractional integration) vagy differenciázás (fractional differencing) koncepciójától.⁵⁸ A tört differenciázás és annak inverze, a tört integrálás (fractional integration) – mint azt megalkotóik Granger–Joyeux [1980] és Hosking [1981] javasolják – „hosszú emlékezetű” idősorok modellezésére hasznosak, tehát ahol egy adott idősor jelenlegi értéke a folyamat nagyon sok késleltetettjétől függ. A tört differenciázás koncepciója a hagyományos, egész rendű differenciázás analógiájára épít, ahol a $\Delta^d = (1 - L)^d$ alakú tört differenciát $0 \leq d < \frac{1}{2}$ esetén az $(1 - L)^d$ kifejezés Taylor-sorba fejtesével definiálják.⁵⁹ Egy z skalárra legyen $f(z)$ a következő függvény:

$$f(z) = (1 - z)^d.$$

Ennek a függvénynek a Taylor sorral való közelítése $z = 0$ pont körül:

$$\begin{aligned} (1 - z)^d &= f(0) + \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{z=0} z + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial^2 z} \right|_{z=0} z^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial^3 z} \right|_{z=0} z^3 + \dots = \\ &= 1 - dz + (1/2!)(d+1)dz^2 - (1/3!)(d+2)(d+1)dz^3 + \dots \end{aligned}$$

Ennek analógiájára a $\Delta^d = (1 - L)^d$ operátort a következőképpen értelmezik:

$$\Delta^d = (1 - L)^d = 1 - dL + (1/2!)(d+1)dL^2 - (1/3!)(d+2)(d+1)dL^3 + \dots,$$

⁵⁸ A kapcsolatra Hunyadi László hívta fel a figyelmet, akinek ezúton is köszönöm észrevételét. A nem egész értékű integrálásról és differenciázásról Hamilton (1994) 15.5. fejezete ad áttekintést.

⁵⁹ A $d < \frac{1}{2}$ felsőkorlát ahhoz szükséges, hogy a végtelen sor együtthatóinak négyzetösszege véges legyen, azaz létezzen a folyamat mozgóátlagolású reprezentációja. A korlát az összehasonlítás szempontjából figyelmen kívül hagyható.

azaz a tört differenciázást az idősor egy végtelen autoregresszív reprezentációjával definiálják, mely a hagyományos egész rendű késleltetésekkel operál, azonban ehhez speciális együtttható-struktúrát társít. Ennek a végtelen sornak az együttthatói érdekesek, mivel az impulzus válaszfüggvény együttthatói nem geometrikusan, hanem annál csak lassabban csengenek le.⁶⁰ Másképpen fogalmazva, a tört integráltságú idősorok a stacionárius ARMA folyamatok és a nem stacionárius (egységgyök) ARIMA folyamatok közti átmenethez tartoznak. A tört differenciázást (és integrálást) olyan adatelemzést segítő technikának tekintik, amelynek révén a transzformált idősor egyszerűbb ARMA modellel is leírható.

A tört késleltetéssel a kapcsolat akkor válik nyilvánvalóvá, ha az L^d alakú „tört késleltetést” fejtjük a fentivel analóg módon Taylor-sorba. Ehhez, kiindulva a $\Delta = (1 - L)$, átrendezve $L = (1 - \Delta)$ azonosságokból, az $L^d = (1 - \Delta)^d$ kifejezést fejtjük Taylor-sorba. Ekkor a következőt kapjuk:

$$L^d = (1 - \Delta)^d = 1 - d\Delta + (1/2!)(d+1)d\Delta^2 - (1/3!)(d+2)(d+1)d\Delta^3 + \dots$$

Amennyiben csak az első két tagot tekintjük (lineáris közelítés esete), akkor a következőre egyszerűsödik a képlet:

$$L^d = 1 - d\Delta = 1 - d(1 - L) = (1 - d) + dL,$$

ami egyben a valós értékű rendekre értelmezett eltolás definíciója, ha $0 \leq d < 1$. Amennyiben $d < 0$ vagy $d > 1$, akkor a $L^d = L^{\phi(d)-1}L^{d-[\phi(d)-1]}$ felbontás alkalmazható, ahol $\phi(d)$ a d -nél nem kisebb legkisebb egész számot jelöli. Ekkor:

$$\begin{aligned} L^d &= L^{\phi(d)-1}L^{d-[\phi(d)-1]} = L^{\phi(d)-1}((d - [\phi(d) - 1])L + 1 - \{d - [\phi(d) - 1]\}) = \\ &= [1 - (\phi(d) - d)]L^{\phi(d)} + [\phi(d) - d]L^{\phi(d)-1}, \end{aligned}$$

azaz a lineáris közelítés ilyenkor is a valós értékű rendekre értelmezett eltolás definíciójával azonos.

Összegezve a tört differenciázás és a tört késleltetés viszonyát, az látható, hogy a tört differenciázás analógiájára definiált „tört késleltetés” lineáris közelítése megfeleltethető az általam definiált tört késleltetésnek. Ennek alapján tehát a bevezetett általánosított késleltetés művelet hasonlít az ökonometria irodalomban ismert tört differenciázásra és integrálásra, ugyanakkor mégis új, mivel eltérő probléma kezeléséhez biztosít elemzési keretet.

A következő állítás igazolásával bemutatom, hogy a tört késleltetés definíciója valójában a hagyományos, egész rendű késleltetés operátorának kiterjesztése:

1. állítás. *A tört késleltetés általánosítása a hagyományos késleltetés operátorának, azaz $\Lambda^i(y_t) = L^i(y_t)$ teljesül minden i egész számra ($i \in \mathbb{Z}$).*

Bizonyítás. A bizonyításhoz csak azt kell kihasználni, hogy ha i egész, akkor $\phi(\cdot)$ definíciója miatt $\phi(i) = i$, továbbá $\Lambda^i(y_t)$ definíciója miatt $\Lambda^i(y_t) = 1L^i(y_t) + 0L^{i-1}(y_t) = L^i(y_t)$ teljesül. ■

⁶⁰Például egy stacioner AR(1) folyamat ($y_t = \theta y_{t-1} + \varepsilon_t$, $|\theta| < 1$) impulzus válaszfüggvényének j -ik tagja θ^j . Egy d nem egész integráltságú folyamat impulzus válaszfüggvényének j -ik tagja megközelítőleg $(j+1)^{d-1}$.

A bevezetett Λ^i operátorra részben hasonló azonosságok teljesülnek, mint a hagyományos késleltetés operátorra, azonban vannak eltérések is, melyeket részletesen az alábbi állításokban sorolok fel.

2. állítás. *A tört késleltetésre az additív, skalárral való szorzás és null-elem tulajdonságok érvényesülnek:*

$$\Lambda^i(y_t + x_t) = \Lambda^i(y_t) + \Lambda^i(x_t) \quad (43)$$

$$\Lambda^i(cy_t) = c\Lambda^i(y_t) \quad (44)$$

$$\Lambda^0(y_t) = y_t, \quad (45)$$

ahol x_t és y_t tetszőleges idősorok, c pedig tetszőleges (konstans) valós szám.

Bizonyítás. A (43) tulajdonság igazolásához alkalmazzuk Λ^i definícióját:

$$\begin{aligned} \Lambda^i(y_t + x_t) &= [1 - (\phi(i) - i)] L^{\phi(i)}(y_t + x_t) + [(\phi(i) - i)] L^{\phi(i)-1}(y_t + x_t) = \\ &= [1 - (\phi(i) - i)] \left\{ L^{\phi(i)}(y_t) + L^{\phi(i)}(x_t) \right\} + [(\phi(i) - i)] \left\{ L^{\phi(i)-1}(y_t) + L^{\phi(i)-1}(x_t) \right\} = \\ &= \left\{ [1 - (\phi(i) - i)] L^{\phi(i)}(y_t) + [(\phi(i) - i)] L^{\phi(i)-1}(y_t) \right\} + \dots \\ &\dots + \left\{ [1 - (\phi(i) - i)] L^{\phi(i)}(x_t) + [(\phi(i) - i)] L^{\phi(i)-1}(x_t) \right\} = \\ &= \Lambda^i(y_t) + \Lambda^i(x_t), \end{aligned}$$

ahol első lépésben a hagyományos késleltetés additív tulajdonságát használtam ki.

A (44) tulajdonság igazolása hasonlóképpen:

$$\begin{aligned} \Lambda^i(cy_t) &= [1 - (\phi(i) - i)] L^{\phi(i)}(cy_t) + [(\phi(i) - i)] L^{\phi(i)-1}(cy_t) = \\ &= c[1 - (\phi(i) - i)] L^{\phi(i)}(y_t) + c[(\phi(i) - i)] L^{\phi(i)-1}(y_t) = \\ &= c\Lambda^i(y_t), \end{aligned}$$

ahol első lépésben a hagyományos késleltetés asszociatív tulajdonságát használtam ki.

A (45) igazolása Λ^i definíciójából és a korábbi állításból adódik:

$$\Lambda^0(y_t) = L^0(y_t) = y_t$$

■

3. állítás. *A tört késleltetésre nem érvényesülnek a következő tulajdonságok:*

$$\Lambda^a(\Lambda^b(y_t)) \neq \Lambda^{a+b}(y_t) \quad (46)$$

$$\Lambda^a(\Lambda^{-a}(y_t)) \neq y_t, \quad (47)$$

feltéve, hogy a és b nem egész számok.

Bizonyítás. (46) belátásához, vegyünk az $y_t = -1^t$ idősort és legyen $a = b = 0.5$. Ekkor definíció szerint $\Lambda^{0.5}(y_t) = 0.5 \cdot (-1^{t-1}) + 0.5 \cdot (-1^t) = (-1 + 1) \cdot 0.5 \cdot (-1^t) = 0$ minden t -re, ezért $\Lambda^{0.5}(\Lambda^{0.5}(y_t)) = 0$ minden t -re. Definíció szerint azonban $\Lambda^1(y_t) = -1^{t-1}$, azaz $\Lambda^{0.5}(\Lambda^{0.5}(y_t)) \neq \Lambda^1(y_t)$.

A (47) egyenlőtlenséggel kimondott inverz művelet nem létezésének igazolásához legyen $y_t = -1^t$ idősort és legyen $a = 0.5$. Ekkor $\Lambda^{-0.5}(y_t) = 0$ minden t -re, ezért $\Lambda^{0.5}(\Lambda^{-0.5}(y_t)) = 0$ minden t -re. Definíció szerint viszont $\Lambda^0(y_t) = y_t = -1^t$, azaz $\Lambda^{0.5}(\Lambda^{-0.5}(y_t)) \neq \Lambda^0(y_t)$. ■

4. állítás. A Λ^i operátorra érvényesülnek a következő tulajdonságok:

$$\begin{aligned}\Lambda^a(\Lambda^b(y_t)) &= \Lambda^{a+b}(y_t) \\ \Lambda^a(\Lambda^{-a}(y_t)) &= y_t,\end{aligned}$$

feltéve, hogy a és b egész számok.

Bizonyítás. Az állítások igazolásánál kihasználom, hogy ha a és b egész számok, akkor $\Lambda^a(y_t) = L(y_t)$, így

$$\Lambda^a(\Lambda^b(y_t)) = L^a(L^b(y_t)) = L^{a+b}(y_t) = \Lambda^{a+b}(y_t)$$

ahol már csak a hagyományos késleltetés tulajdonságait használtam ki. ■

2.1.2. Időben változó tört késleltetés

A késleltetés műveletének valós rendre való kiterjesztése után következő lépésként az időben változó tört késleltetés operátorát definiálok, ahol megengedem, hogy a tört késleltetés változzon az időben.

Az időben változó tört késleltetés relevanciáját, hasonlóan a(z időben nem változó) tört késleltetéshez az adja, hogy a változók egymásra hatása időpontonként más és más időeltolódással érvényesülhet, a bekövetkező változások (sokkok) eltérő természetének, információtartalmának, az éppen aktuális gazdasági környezetnek köszönhetően. Ennek magyarázata az lehet, hogy a gazdaság szereplőire ható különféle változások felismerése is eltérő időt vehet igénybe (például tanulhatnak múltbeli tapasztalataikból, változhat alkalmazkodóképességük, jobban odafigyelhetnek bizonyos változásokra stb.), illetve a változások számukra eltérő információt hordozhatnak: az egyik változás gyors reakciót kíván (vagy a szereplők képesek gyors választ adni rá), míg egy másikra lehetséges elhalasztott, későbbi válasz (vagy nem képesek gyors választ adni). Összegezve, nemcsak annak megengedése lényeges, hogy megengedjük, hogy egy reakció ne csak a megfigyelési gyakorisággal nem egyező, időben változatlan időeltolódással következhesse be (tört késleltetés esete), hanem az is, hogy a reakció időben más és más időeltolódással következhesse be (időben változó tört késleltetés).

2. definíció. (Időben változó tört késleltetés) Legyen egy y_t idősor i_t -ed rendű időben változó késleltettje, ahol i_t egy valós számokból álló idősor, a következő elemekből álló idősor:

$$\{\Lambda^{i_t}(y_t)\}_j = \{1 - (\phi(i_t) - i_t)\}_j \left\{ L^{\phi(i_t)}(y_t) \right\}_j - \{\phi(i_t) - i_t\}_j \left\{ L^{\phi(i_t)-1}(y_t) \right\}_j, \quad (48)$$

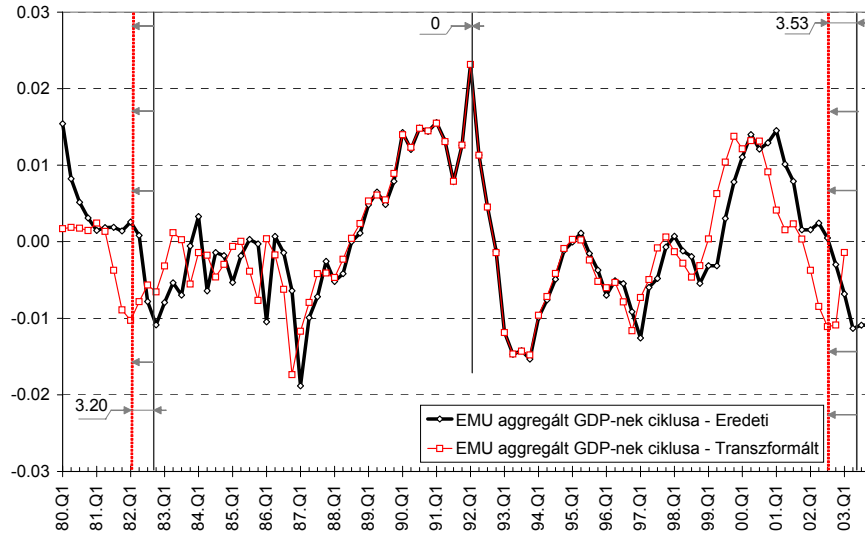
ahol $\Lambda^{i_t}(y_t)$ jelöli az időben változó tört késleltetés operátorát, $\{.\}_j$ egy tetszőleges idősor j -ik

elemét, $\phi(i_t)$ pedig olyan egész számokból álló idősor, melyben a t -ik elem értéke az i_t idősor t -ik eleménél nem kisebb legkisebb egész szám.

A definíció szemléletesen a következő: az időben változó tört késleltett idősor j -ik eleme az y_t idősor $\{i_t\}_j$ -ed rendű tört késleltetettjének j -ik elemével egyezik meg. Hasonlóan a korábbi jelöléshez, a következőkben $\Lambda^{i_t}(y_t)$ jelölés mellett az y_{t-i_t} jelölést is használom.

Az időben változó tört késleltetés műveletét a 8. ábra szemlélteti. Az ábrán a fekete vonal ismét az Európai Monetáris Unió aggregált negyedéves GDP-éből Hodrick-Prescott szűrővel ($\lambda = 1600$) képzett ciklusok idősorát jelöli, a piros vonal pedig ennek egy időben változó tört késleltetettjét, ahol az i_t idősor a példa kedvéért $i_t = 0.002(t - 49)^2$ -nek választottam.⁶¹ Az ábrából kitűnik, hogy ahol i_t értékei közel vannak 0-hoz, vagyis 1992. I. negyedéve körül, ott a transzformált idősor szinte azonos az eredeti idősorral. Távolodva 1992. I. negyedétől a mintaidőszak eleje felé, i_t értékei növekszenek, azaz egyre növekszik a késleltetés mértéke, mely a periódusok között eltelt időt látszólag egyre növeli, így a transzformált idősor olyan, mintha az eredeti idősor "kinyújtottuk" volna. Távolodva 1992. I. negyedétől a mintaidőszak vége felé, i_t értékei az alkalmazott kvadratikus függvényforma miatt itt is növekednek, ami a periódusok között eltelt időt rövidíti le, így végül a transzformált idősor olyan, mintha az eredeti idősor "összenyomtuk" volna.

8. ábra. Az EMU aggregált ciklusa és időben változó tört késleltetettje. (Az időben változó tört késleltetés i_t idősorát $i_t = 0.002(t - 49)^2$ -nek választottam.)



Az időben változó tört késleltetés belátható módon ugyanolyan tulajdonságokkal rendelkezik, mint az időben nem változó tört késleltetés. Az időben változó tört késleltetéssel előálló idősorok minden egyes eleme ugyanis – időben változó mértékű – tört késleltetéssel áll elő. Emiatt az időben változó tört késleltetéssel transzformált idősor minden egyes eleme öröklí a tört késleltetés tulajdonságait, így maga a teljes idősor is.⁶²

⁶¹Az i_t fenti meghatározásakor 1980. I. negyedét választottam $t = 0$ -nak, II. negyedét $t = 1$ -nek, és így tovább. Így a $t = 49$ -es periódus 1992. I. negyedét jelöli.

⁶²Például $\Lambda^{i_t}(y_t + x_t) = \Lambda^{i_t}(y_t) + \Lambda^{i_t}(x_t)$ fennállásának belátásához tekintsük az alábbi átalakításokat:

$$\{\Lambda^{i_t}(y_t + x_t)\}_j = \{\Lambda^{\{i_t\}_j}(y_t + x_t)\}_j = \{\Lambda^{\{i_t\}_j}(y_t) + \Lambda^{\{i_t\}_j}(x_t)\}_j = \{\Lambda^{\{i_t\}_j}(y_t)\}_j + \{\Lambda^{\{i_t\}_j}(x_t)\}_j,$$

Az időben változó tört késleltetés operátor igen "rugalmas" transzformáció, mellyel az idő-sorokat tetszés szerint lehet késleltetni vagy előrehozni, illetve "kinyújtani" vagy "összenyomni", így alkalmazásával rendkívül flexibilis idősor-elemzési vizsgálatok végezhetők.

2.2. Modell az üzleti ciklusok szinkronizációjának mérésére

Az üzleti ciklusokkal foglalkozó irodalomban számos megközelítés létezik arra, hogy miként definiáljuk és hogyan mérjük az üzleti ciklusokat, illetve az üzleti ciklusok együttmozgását.

Általános tapasztalat, hogy az egyes országok gazdasági teljesítménye, melyet általában a GDP-vel mérnek, változékony: esetenként gyorsabban nő, mint az elmúlt évek átlaga, esetenként viszont a növekedés rendkívül lecsökken, vagy akár vissza is eshet. A legegyszerűbb megközelítésben az üzleti ciklusok nem mások, mint a gazdaság növekedési ütemének ingadozásai, ennek megfelelően a ciklusokat a gazdaság havi, negyedéves vagy éves növekedési ütemével azonosítják.

Egy másik megközelítés a gazdaság hosszabb távú, átlagos teljesítménye körüli ingadozását tekinti üzleti ciklusnak. Pontosabban azokat a kilengéseket tekinti üzleti ciklusnak, melyek nem túl rövidek, azaz nem egyedi véletlenszerű hatások dominálják, és nem is túl hosszúak, melyeket esetleg már a gazdaság struktúrájában bekövetkező lényeges hosszú távú változások indukálnak.⁶³ Ezen megközelítés hívei a trendektől "megtisztított" gazdasági mutatókat tekintik üzleti ciklusoknak. A gazdasági idősorok trendektől való megtisztítására többféle eljárás használatos, melyeket összefoglalóan trendszűrésnek neveznek. A legismertebb eljárások a Hodrick – Prescott-féle szűrő (Hodrick – Prescott, 1980), a Band-Pass szűrő (Baxter – King, 1999), Butterworth szűrő (Harvey – Timbur, 2003), Beveridge – Nelson-féle dekompozíció (Beveridge – Nelson, 1981), illetve különféle polinomiális trendek illesztése révén előálló reziduumok.⁶⁴

Egy harmadik megközelítés szintén a kilengésekből kiindulva csak a trendfordulókra összpontosít, tehát arra, hogy mikor fordul át a gazdasági fellendülés leszállóágba és viszont (peaks-throughs analízis). A trendfordulók meghatározására többféle algoritmus is létezik, mint például Bry–Boschan (1971), Artis–Kontolemis – Osborn (1997), Artis – Marcellino – Proietti (2003).⁶⁵

Az üzleti ciklusok lehetséges értelmezései után bemutatom, hogy az irodalomban miként mérik a ciklusok együttmozgását. Az egyik legelterjedtebb, egyben legegyszerűbb megközelítés az együttmozgást a ciklusok közötti egyidejű lineáris korrelációként értelmezi.⁶⁶ Ennek a korrelációs

ami az idősorok minden elemére teljesül, így az egész idősorra is. A többi azonosság is hasonló gondolatmenettel látható be.

⁶³Némileg önkényesen Baxter – King (1999) azokat a kilengéseket tekintik üzleti ciklusnak, amelyek periodicitása 6 és 32 negyedév közé esik.

⁶⁴Mint azt több tanulmány is bemutatta, az egyes trendszűrés eljárások különféle eredményeket adhatnak és néha félrevezető következtetéseket eredményezhetnek. Lásd például Baxter – Stockman (1989), Baxter (1991), King – Rebello (1993), Harvey – Jaeger (1993), Canova (1998) és Cogley – Nason (1995) tanulmányait. Az eltérő megközelítéseket viszont védelmébe veszi Craig (1998), aki szerint a problémák arra vezethetők vissza, hogy az elméletben nem tisztázott az üzleti ciklus fogalma, ezért természetesek az esetlegesen eltérő következtetések. A trendszűréssel foglalkozó irodalomnak létezik olyan irányzata is, amely a különféle trendszűrés eljárásokat igyekszik összehangolni, lásd például Ravn – Uhlig (2002) és Marcat – Ravn (2004).

⁶⁵Közös ezekben a trendfordulókat azonosítani célzó megközelítésekben, hogy a gazdaságot két állapotban képzelik el: egy fellendülő és egy leszálló állapotban. E két, többé-kevésbé szimmetrikusnak tekinthető állapot leírása helyett McQueen – Thorley (1993) az aszimmetrikus állapotok mellett érvel, rámutatva, hogy a gazdaságot éles, ám rövid ideig tartó mélypontok és viszonylag sima, elnyújtott fellendülések jellemzik. Ehhez hasonlóan Sichel (1994) arra talált bizonyítékokat, hogy az üzleti ciklusokat nem kettő, hanem valójában három állapot jellemzi: egy mélypont, melyet egy gyors fellendülő szakasz követ, ami alatt a gazdaság eléri korábbi trendkibocsátási szintjét, majd egy lassabb, a hosszútávú ütemnek megfelelő növekedési szakasz.

⁶⁶Mindazok a tanulmányok, melyek nem trendfordulóként értelmezik az üzleti ciklusokat, elvégzik a korrelációs elemzést, így a vonatkozó terület alapművei is, mint Hodrick – Prescott (1980, 1997), Backus – Kehoe – Kydland

típusú megközelítésnek elterjedt egy finomítása is, mely figyelembe veszi a ciklusok közötti esetleges fáziskülönbséget is: az egyik ciklus megelőzheti a másikat és viszont. Ekkor az együttmozgásnak két dimenziója lesz: a fáziseltolódás és a korreláció. A gyakorlatban a két mérték kölcsönösen határozza meg egymást: a fáziseltolódás azon értékét keresik meg, amely mellett a korreláció maximális.⁶⁷

Az az együttmozgás definíció is korrelációs típusú, amely az üzleti ciklusokat kiváltó sokkok egybeesését veszi alapul. A számításokhoz szükséges sokkokat általában strukturális vektor-autoregresszív (SVAR) modellekkel határozzák meg.⁶⁸ Ezzel rokon megközelítések a ciklusok perzisztenciájának hasonlóságát, vagy különféle (vektor-autoregresszív) modellekből származtatott impulzusválaszfüggvények hasonlóságát tekintik a ciklusok együttmozgásának fő ismérveként.⁶⁹

Az együttmozgást kétféleképpen értelmezik azok a megközelítések, amelyek a ciklusokat a trendfordulókhoz kötik, vagyis azokhoz az időpontokhoz, amikor a ciklus a tető- illetve mélypontjára jut. Az egyik ilyen megközelítés szerint az üzleti ciklusok együttmozgása annál szorosabb, minél inkább szabályos a két ciklus trendfordulónak egymáshoz viszonyított bekövetkezése.⁷⁰ Lehetne ugyan a trendfordulós pontokon a ciklusok egymáshoz viszonyított relatív nagyságát is korrelációs típusú mérőszámként használni, de ez nem jellemző. Ehelyett ez a megközelítés inkább a ciklusok közti fáziseltolódásra fókuszál, és kisebb figyelmet szentel a ciklusok trendfordulós pontján kívüli pályára. A másik, igen elterjedt, trendfordulós elemzésen alapuló együttmozgás definíció, a mintán belül azokat az időintervallumokat keresi meg, ahol a két ciklus azonos fázisban van, és ezek relatív hosszaként értelmezi az együttmozgást (konkordancia index).⁷¹

Az eddig bemutatott megközelítésekben közös, hogy valamennyi időtartományos elemzés. Léteznek azonban frekvenciatartományos elemzéshez kötődő együttmozgási definíciók is. Ezek általában az idősor spektrumának hasonlóságát értik együttmozgás alatt.⁷²

A felsorolt megközelítések mindegyikében az együttmozgás definíciója és mérése nagyon szorosan kapcsolódik egymáshoz. A definícióhoz társított mérőszámok mindazonáltal statikusak abban az értelemben, hogy csak meghatározott részmintákra számíthatók ki, egyedi időpontokra nem, és konstrukciójuknál fogva a mérendő tulajdonságok mintában való állandóságán alapulnak. Az üzleti ciklusok közti szinkronizáció fogalma viszont éppen az együttmozgás dinamikus tulajdonságát írja le: egy szisztematikus változást, ahol a ciklusok közti együttmozgás egyre szorosabb lesz.⁷³ Amint

(1992, 1993), Stock – Watson (1999), de például a hazai szerzők közül Darvas – Szapáry (2004) vagy Benczúr – Rátvai (2005) is.

⁶⁷Bár sok tanulmány implicit elvégzi ezt az elemzést azáltal, hogy különböző eltolásokra kiszámolja és közli a keresztkorrelációkat, néhány, mint például Artis – Zhang (1997) vagy Darvas – Szapáry (2004), azonban külön is közli a maximális keresztkorrelációkat és a hozzá tartozó késleltetési (előrehozási) értékeket.

⁶⁸Lásd például Blanchard – Quah (1989), Karras (1994), Bergman (1996), Bayoumi – Eichengreen (1993), Fidrmuc – Korhonen (2001), Stock – Watson (2003), Frenkel – Nickel (2002) Babetski – Boone – Maurel (2002) vagy Csajbók – Csermely (2002).

⁶⁹Ilyen elemzést végez el például Darvas – Szapáry (2004) vagy Csajbók – Csermely (2002) is.

⁷⁰Lásd például Artis – Kontolemis – Osborn (1997).

⁷¹Ezt a mutatót veszi alapul például McDermott – Scott (2000), Helbling – Bayoumi (2003), Sichel (1994), Artis – Marcellino – Proietti (2003) vagy Altissimo és szerzőtársai (2001).

⁷²Lásd például Camacho – Perez-Quiros – Saiz (2005) vagy Forni és szerzőtársai (2001) tanulmányait, amely a fáziseltolódásokat is ismerteti.

⁷³Az irodalomban is jól dokumentált, hogy a ciklusok együttmozgása változik. Gerlach (1988) az Európai Monetáris Rendszerben résztvevő államokat vizsgálva azt találta, hogy 1973 után a vizsgált országok ciklusainak együttmozgása erősödött. McAdam (2003) hasonló következtetésre jut az USA, Japán és az Euro-övezet vizsgálva. Kaufmann (2003) Az Európai Monetáris Unió államainak ciklusainál mutatott ki szinkronizálódást. Darvas – Szapáry (2004) szintén jelentős változást mutatott ki az Európai Unió tagállamainál 1980 óta. Különféle országokat és mintaperiódusokat összevetve szintén változást mutatott ki például Lumsdaine – Prasad (1997), Boreiko (2002), Stock – Watson (2003), Artis – Zhang (1997) és Canova – Ciccarelli – Ortega (2004).

az üzleti ciklusok együttmozgása sokféleképpen értelmezhető, úgy az üzleti ciklusok szinkronizációját is sokféleképpen definiálják. Minden egyes statikus együttmozgás definíciónak tulajdonképpen megfeleltethető egy dinamikus szemlélet, mely szerint a szinkronizáció az együttmozgás intenzitásának növekedését jelenti az időben.

Az üzleti ciklusok szinkronizációjával foglalkozó irodalom statikus mérőszámok alkalmazásával próbálja megragadni a fokozatos változást, így például a teljes minta részmintákra történő bontásával, vagy ehhez hasonlóan, gördülő minták alkalmazásával, ahol minden egyes részmintára külön-külön kiszámolják ezeket a mérőszámokat. Ezek a megoldások azonban – mint azt rövidesen mesterséges és valós adatokon is bemutatom – további problémákat vetnek fel: a mérőszámok részmintán belül a statisztikai tulajdonságok változatlanságát továbbra is feltételezik, pedig ezek nem feltétlenül állandók; az ebből az ellentmondásból fakadó torzítás kellően rövid részminták alkalmazásával egyre kisebb jelentőségű lehet, viszont ismert módon minél kisebb a minta, annál nagyobb a belőlük számított statisztikák bizonytalansága.

Kiindulva a legegyszerűbb együttmozgási megközelítésből, a továbbiakban két változó közti szinkronizációt két dimenzióban értelmezem: (I.) a két ciklusváltozó amplitúdója közelít egymáshoz, (II.) a két ciklusváltozó közti fáziskülönbség csökken.⁷⁴ Fontos látni, hogy az első dimenzió a korrelációs típusú mérőszámok helyett inkább a kovariancia típusú mérőszámokhoz hasonlít. A szinkronizáció két dimenziója egymástól független, így a szinkronizációnak négy típusa különböztethető meg: (1) a két ciklusváltozó amplitúdója nem közelít egymáshoz és a fáziskülönbség sem csökken (szinkronizáció hiánya), (2) a két ciklusváltozó amplitúdója közelít egymáshoz, de a fáziskülönbség megmarad (I. típusú szinkronizáció), (3) a két ciklusváltozó amplitúdója nem közelít egymáshoz, de a fáziskülönbség csökken (II. típusú szinkronizáció), (4) a két ciklusváltozó amplitúdója közelít egymáshoz és a fáziskülönbség is csökken (I.+II. típusú szinkronizáció, teljes szinkronizáció). A lehetséges eseteket a 9. ábra szemlélteti.

Összhangban a szinkronizáció fenti definíciójával, két üzleti ciklus idősor (jelölje y_t és x_t) közti szinkronizáció méréséhez az alábbi időben változó paraméterű és tört késleltetésű modellt javasolom:

$$y_t = \alpha_t + \beta_t x_{t-i_t} + \varepsilon_t, \quad (49)$$

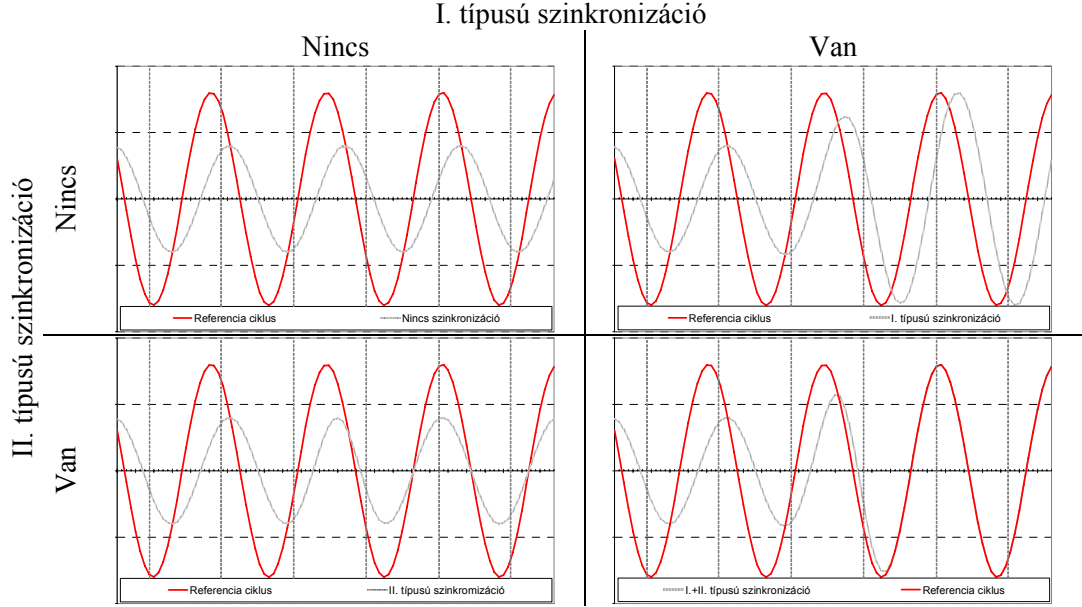
ahol α_t és β_t időben változó paraméterek, i_t időben változó tört késleltetés rendjét mérő időben változó paraméter és ε_t a hibatag.⁷⁵

A (49) modellben β_t -t úgy lehet interpretálni, mint az I. típusú szinkronizáció mérőszámát, vagyis, ha az idő előrehaladtával β_t értéke tart az 1-hez, akkor a ciklusok amplitúdóinak nagysága egymáshoz konvergál. i_t -t mint a II. típusú szinkronizáció mérőszámaként lehet értelmezni, azaz ha i_t értéke tart 0-hoz, akkor a ciklusok közti fáziseltolódás megszűnik.

⁷⁴Egy ciklikus változó időbeni alakulását három jellemző írja le: amplitúdó, kezdeti fázisszög és frekvencia. Az üzleti ciklusok szinkronizációjának definiálásakor a frekvencia dimenziót két ok miatt nem használok: (1) elméletileg két különböző frekvenciájú ciklus között nincs értelme együttmozgásról beszélni; (2) gyakorlatilag pedig a második dimenzió, a változó fáziskülönbség, önmagában is képes két különböző frekvenciájú ciklus közti, időben folyamatosan változó fázis különbség megragadására.

⁷⁵Gudmundsson (1998) definiál egy változó (osztott) késleltetéses modell-családot konstans együtthatókkal, de a feltett struktúra miatt nem lehet a modellben külön interpretálni az együttmozgás erősségét és a fáziseltolódást. Mindazonáltal ismereteim szerint korábban egyedül Gudmundsson (1998) tanulmányában fogalmazódott meg a változó késleltetés problémája és explicit kezelésének szándéka.

9. ábra. A szinkronizáció különböző lehetséges esetei



A (49) modellben T megfigyelés felhasználásával $3 \times T$ számú paramétert kell megbecsülni, ezért a szinkronizáció időbeli alakulásáról *a priori* feltevéseket alkalmazok, aminek következtében az együttható becslések Bayes-i eszközökkel elvégezhetők. Így a szinkronizáció folyamatáról fokozatosságot tételezek fel: egyik periódusról a másikra nem változik jelentősen egyik dimenzióban sem, azaz α_t , β_t és i_t együtthatók csak fokozatosan változnak az időben. E feltevés mögött azok a megfontolások állnak, amelyek szerint az üzleti ciklusok szinkronizációját elősegítő tényezők (mint például a gazdaságok közötti integráció, a horizontális és vertikális termelési kapcsolatok, a termékek bekapcsolódása az országok közötti kereskedelembe, szabályozási környezet hasonlósága, stb) maguk is fokozatosan alakulnak ki.⁷⁶

Az időben változó paraméterek alakulásáról tett feltevés formalizálását követően előállítható a szinkronizáció mérésére javasolt (49) modell ismeretlen paramétereinek poszterior eloszlása. Ennek bemutatásához először bevezetek néhány jelölést. Legyen $x = \{x_1, x_2, \dots, x_T\}'$, $y = \{y_1, y_2, \dots, y_T\}'$, $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_T\}'$, $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_T\}'$, $i = \{i_1, i_2, \dots, i_T\}'$, $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T\}'$ és a már ismert jelölésekkel $\Lambda^i(x) = \{x_{1-i_1}, x_{2-i_2}, \dots, x_{T-i_T}\}'$. A továbbiakban felteszem, hogy ε független $\Lambda^i(x)$ -től és független azonos eloszlású normál eloszlást követ 0 várható értékkel és σ^2 varianciával. Ekkor y együttes sűrűségfüggvénye, azaz a *likelihood* függvény:

$$f(y|x, \alpha, \beta, i, \sigma^2) \propto \sigma^{-T} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} (y - \alpha - \Lambda^i(x)\beta)' (y - \alpha - \Lambda^i(x)\beta) \right). \quad (50)$$

A szinkronizáció fokozatosságát leíró q_α , q_β , q_i fokú simasági priorokhoz – Shiller (1973) tanulmányát követve – először definiálom u_α , u_β és u_i -t, mint a q_α , q_β , q_i rendű differenciáit sorrendben

⁷⁶ Relatív kevés elméleti munka vizsgálja azokat a tényezőket, amelyek a szinkronizációt elősegíthetik, mint például Baxter (1995) tanulmánya, ugyanakkor nagyobb számban vannak azok a munkák, amelyek empirikus vizsgálatokkal mutatnak ki összefüggéseket a nemzetközi pénzügyi piacok növekvő befolyása, a szabadabb tőkeáramlás, az iparon belüli kereskedelem élénkítése és a szinkronizáció előrehaladottsága között. E témában lásd Fidrmuc (2004), Kose – Prasad – Terrones (2003), Bowden – Martin (1995) és Imbs (2003).

α , β és i vektoroknak:

$$u_\alpha = R_{q_\alpha} \alpha \quad u_\beta = R_{q_\beta} \beta \quad u_i = R_{q_i} i,$$

ahol R_{q_α} , R_{q_β} és R_{q_i} sorrendben $(T - q_\alpha \times T)$, $(T - q_\beta \times T)$ és $(T - q_i \times T)$ méretű q_α , q_β , q_i rendű differencia mátrixok $T - q_\alpha$, $T - q_\beta$ és $T - q_i$ ranggal.

Az u_α , u_β és u_i prior eloszlásokról felteszem, hogy független azonos eloszlású normális változók 0 várható értékkel és σ^2/k_α , σ^2/k_β és σ^2/k_i varianciákkal, így sűrűségfüggvényük:

$$f(\alpha|\sigma^2, k_\alpha) \propto \left(\sigma/\sqrt{k_\alpha}\right)^{-(T-q_\alpha)} \exp\left(-\frac{k_\alpha}{2\sigma^2} \alpha' R_{q_\alpha}' R_{q_\alpha} \alpha\right) \quad (51)$$

$$f(\beta|\sigma^2, k_\beta) \propto \left(\sigma/\sqrt{k_\beta}\right)^{-(T-q_\beta)} \exp\left(-\frac{k_\beta}{2\sigma^2} \beta' R_{q_\beta}' R_{q_\beta} \beta\right) \quad (52)$$

$$f(i|\sigma^2, k_i) \propto \left(\sigma/\sqrt{k_i}\right)^{-(T-q_i)} \exp\left(-\frac{k_i}{2\sigma^2} i' R_{q_i}' R_{q_i} i\right). \quad (53)$$

Utolsó priorként az ε hibatag σ^2 varianciájának eloszlására teszek fel egy nem informatív priort:

$$f(\sigma^2) \propto \sigma^{-2}. \quad (54)$$

Felhasználva a Bayes-tételt és feltételezve, hogy k_α , k_β és k_i értékei ismertek, a poszterior a likelihood és a priorok szorzatával lesz arányos:

$$f(\alpha, \beta, i, \sigma^2 | y, x, k_\alpha, k_\beta, k_i) \propto f(y|x, \alpha, \beta, i, \sigma^2) f(\alpha|\sigma^2, k_\alpha) f(\beta|\sigma^2, k_\beta) f(i|\sigma^2, k_i) f(\sigma^2) \propto \quad (55)$$

$$\propto \sigma^{-(4T-q_\alpha-q_\beta-q_i-2)}.$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(y - \alpha - \Lambda^i(x)\beta)'(y - \alpha - \Lambda^i(x)\beta) + k_\alpha \alpha' R_{q_\alpha}' R_{q_\alpha} \alpha + k_\beta \beta' R_{q_\beta}' R_{q_\beta} \beta + k_i i' R_{q_i}' R_{q_i} i\right]\right).$$

Az (55) együttes sűrűségfüggvény eloszlása nem ismert, ezért az ismeretlen együtthatók poszterior momentumainak meghatározásához egy vegyes Markov-lánc Monte Carló mintavételi technikát használok: az (55) sűrűségfüggvényből α , β és σ^2 feltételes eloszlásai analitikusan meghatározhatók, és ismert eloszlásokat követnek, ezért ezekre a paraméterekre Gibbs-féle mintavételt, míg a nem ismert eloszlást követő i paramétervektorra, pontosabban annak minden egyes elemére a rácspontos-Gibbs-féle mintavételt használom.⁷⁷

A következőkben meghatározom α , β és σ^2 feltételes eloszlásait.

Az α paramétervektor feltételes sűrűségfüggvénye az (55) együttes sűrűségfüggvényből rögzített β , i , σ^2 , y , x , k_α , k_β és k_i mellett:

$$f(\alpha|\beta, i, \sigma^2, y, x, k_\alpha, k_\beta, k_i) \propto$$

$$\propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(y - \alpha - \Lambda^i(x)\beta)'(y - \alpha - \Lambda^i(x)\beta) + k_\alpha \alpha' R_{q_\alpha}' R_{q_\alpha} \alpha\right]\right), \quad (56)$$

ahol kihasználtam, hogy a paraméterek rögzítettsége miatt:

$$\sigma^{-(4T-q_\alpha-q_\beta-q_i-2)} \quad \text{és} \quad \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[k_\beta \beta' R_{q_\beta}' R_{q_\beta} \beta + k_i i' R_{q_i}' R_{q_i} i\right]\right)$$

⁷⁷Ezeket a mintavételezési eljárásokat az értekezés 1.6.2 és 1.6.4 pontjában ismertettem részletesen.

nem valószínűségi változók. Bevezetve az alábbi jelöléseket:

$$v = \begin{bmatrix} y - \Lambda^i(x)\beta \\ \mathbf{0}_{T-q_\alpha} \end{bmatrix} \text{ és } V = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_T \\ \sqrt{k_\alpha} R_{q_\alpha} \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{0}_{T-q_\alpha}$ a $T - q_\alpha$ sorú nullvektort jelöli, $\mathbf{I}_T$ a $T \times T$ méretű egységmátrix. v és V segítségével az (56) feltételes sűrűségfüggvény tömörebben is felírható:

$$f(\alpha|\beta, i, \sigma^2, y, x, k_\alpha, k_\beta, k_i) \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} [(v - V\alpha)'(v - V\alpha)]\right).$$

Használva a dekompozíciós szabályt kapjuk:

$$f(\alpha|\beta, i, \sigma^2, y, x, k_\alpha, k_\beta, k_i) \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} [(v - V\hat{\alpha})'(v - V\hat{\alpha}) + (\alpha - \hat{\alpha})' V' V (\alpha - \hat{\alpha})]\right), \quad (57)$$

ahol $\hat{\alpha} = [V'V]^{-1} V'v$, ami egyben megegyezik az OLS becslőfüggvénnyel.⁷⁸ Bővítve a (57) kifejezést $|\sigma^2 [V'V]^{-1}|^{-\frac{1}{2}}$ szorzattal és kihasználva, hogy $\hat{\alpha}$ nem valószínűségi változó, kapjuk:

$$f(\alpha|\beta, i, \sigma^2, y, x, k_\alpha, k_\beta, k_i) \propto |\sigma^2 [V'V]^{-1}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (\alpha - \hat{\alpha})' V' V (\alpha - \hat{\alpha})\right), \quad (58)$$

ami egy többváltozós normál eloszlás sűrűségfüggvénye, így α feltételes poszterior eloszlása normális $\hat{\alpha}$ várható vektorral és $\sigma^2 [V'V]^{-1}$ kovariancia mátrixszal.

A β paramétervektor feltételes sűrűségfüggvénye rögzített $\alpha, i, \sigma^2, y, x, k_\alpha, k_\beta$ és k_i mellett hasonlóképpen határozható meg:

$$f(\beta|\alpha, i, \sigma^2, y, x, k_\alpha, k_\beta, k_i) \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} [(y - \alpha - \Lambda^i(x)\beta)'(y - \alpha - \Lambda^i(x)\beta) + k_\beta \beta' R'_{q_\beta} R_{q_\beta} \beta]\right), \quad (59)$$

ahol kihasználtam, hogy a paraméterek rögzítettsége miatt:

$$\sigma^{-(4T-q_\alpha-q_\beta-q_i-2)} \text{ és } \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} [k_\alpha \alpha' R'_{q_\alpha} R_{q_\alpha} \alpha + k_i i' R'_{q_i} R_{q_i} i]\right)$$

nem valószínűségi változók. Bevezetve az alábbi jelöléseket:

$$w = \begin{bmatrix} y - \alpha \\ \mathbf{0}_{T-q_\beta} \end{bmatrix} \text{ és } W = \begin{bmatrix} \langle \Lambda^i(x) \rangle \\ \sqrt{k_\beta} R_{q_\beta} \end{bmatrix},$$

ahol $\langle \cdot \rangle$ vektorból generált diagonális mátrixot jelöl. Az (59) feltételes sűrűségfüggvény w és W segítségével tömörebben is felírható:

$$f(\beta|\alpha, i, \sigma^2, y, x, k_\alpha, k_\beta, k_i) \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} [(w - W\beta)'(w - W\beta)]\right).$$

⁷⁸ $[V'V]$ invertálhatóságát a függelék B.1. pontjában bizonyítom.

Használva ismét a dekompozíciós szabályt kapjuk:

$$f(\beta|\alpha, i, \sigma^2, y, x, k_\alpha, k_\beta, k_i) \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(w - W\hat{\beta})' (w - W\hat{\beta}) + (\beta - \hat{\beta})' W'W (\beta - \hat{\beta}) \right]\right), \quad (60)$$

ahol $\hat{\beta} = [W'W]^{-1} W'w$, ami egyben itt is az OLS becslőfüggvény.⁷⁹ Bővítve a (60) kifejezést $|\sigma^2 [W'W]^{-1}|^{-\frac{1}{2}}$ szorzattal és kihasználva, hogy $\hat{\beta}$ nem valószínűségi változó, kapjuk:

$$f(\beta|\alpha, i, \sigma^2, y, x, k_\alpha, k_\beta, k_i) \propto |\sigma^2 [W'W]^{-1}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (\beta - \hat{\beta})' W'W (\beta - \hat{\beta})\right), \quad (61)$$

ami egy többváltozós normál eloszlás sűrűségfüggvénye, így β feltételes poszterior eloszlása normális $\hat{\beta}$ várható vektorral és $\sigma^2 [W'W]^{-1}$ kovariancia mátrixszal.

A σ^2 feltételes sűrűségfüggvénye rögzített $\alpha, \beta, i, y, x, k_\alpha, k_\beta$ és k_i mellett:

$$\begin{aligned} f(\sigma^2|\alpha, \beta, i, y, x, k_\alpha, k_\beta, k_i) &\propto \\ &\propto \sigma^{-(4T - q_\alpha - q_\beta - q_i - 2)} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(y - \alpha - \Lambda^i(x)\beta)' (y - \alpha - \Lambda^i(x)\beta) + k_\alpha \alpha' R'_{q_\alpha} R_{q_\alpha} \alpha + k_\beta \beta' R'_{q_\beta} R_{q_\beta} \beta + k_i i' R'_{q_i} R_{q_i} i \right]\right), \end{aligned}$$

ami egy $4T - q_\alpha - q_\beta - q_i$ szabadságfokú és $(y - \alpha - \Lambda^i(x)\beta)' (y - \alpha - \Lambda^i(x)\beta) + k_\alpha \alpha' R'_{q_\alpha} R_{q_\alpha} \alpha + k_\beta \beta' R'_{q_\beta} R_{q_\beta} \beta + k_i i' R'_{q_i} R_{q_i} i$ – ami most nem valószínűségi változó – lokációs paraméterű Inverz-Gamma eloszlást sűrűségfüggvénye.

Az i paramétervektor feltételes sűrűségfüggvénye rögzített $\alpha, \beta, \sigma^2, y, x, k_\alpha, k_\beta$ és k_i értékek mellett:

$$\begin{aligned} f(i|\alpha, \beta, \sigma^2, y, x, k_\alpha, k_\beta, k_i) &\propto \\ &\propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(y - \alpha - \Lambda^i(x)\beta)' (y - \alpha - \Lambda^i(x)\beta) + k_i i' R'_{q_i} R_{q_i} i \right]\right), \end{aligned} \quad (62)$$

ahol kihasználtam, hogy a paraméterek rögzítettsége miatt:

$$\sigma^{-(4T - q_\alpha - q_\beta - q_i - 2)} \quad \text{és} \quad \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[k_\alpha \alpha' R'_{q_\alpha} R_{q_\alpha} \alpha + k_\beta \beta' R'_{q_\beta} R_{q_\beta} \beta \right]\right)$$

nem valószínűségi változók.

Mivel a (62) sűrűségfüggvény eloszlása nem ismert, ezért rácspontos-Gibbs-féle mintavételt használok az i vektor feltételes eloszlásának szimulálására. Ehhez az i paramétervektort felbontom elemeire, majd a rácspontos-Gibbs-féle mintavételt külön-külön alkalmazva az i vektor elemeire

⁷⁹ $[W'W]$ invertálhatóságát a függelék B.2. pontjában bizonyítom.

véletlenszámokat generálok:

$$i_1^{(m+1)} \propto f\left(i_1 | \alpha^{(m+1)}, \beta^{(m+1)}, i_2^{(m)}, i_3^{(m)}, \dots, i_T^{(m)}, \sigma^{2(m+1)}, y, x, k_\alpha, k_\beta, k_i\right) \quad (63)$$

$$i_2^{(m+1)} \propto f\left(i_2 | \alpha^{(m+1)}, \beta^{(m+1)}, i_1^{(m+1)}, i_3^{(m)}, \dots, i_T^{(m)}, \sigma^{2(m+1)}, y, x, k_\alpha, k_\beta, k_i\right) \quad (64)$$

$$i_3^{(m+1)} \propto f\left(i_3 | \alpha^{(m+1)}, \beta^{(m+1)}, i_1^{(m+1)}, i_2^{(m+1)}, i_4^{(m)}, \dots, i_T^{(m)}, \sigma^{2(m+1)}, y, x, k_\alpha, k_\beta, k_i\right) \quad (65)$$

$$\vdots$$

$$i_T^{(m+1)} \propto f\left(i_T | \alpha^{(m+1)}, \beta^{(m+1)}, i_1^{(m+1)}, i_2^{(m+1)}, \dots, i_{T-1}^{(m+1)}, \sigma^{2(m+1)}, y, x, k_\alpha, k_\beta, k_i\right) \quad (66)$$

feltételes sűrűségfüggvényekkel adott eloszlásokból.⁸⁰

Összefoglalva, a bevezetett jelölésekkel a mintavételi stratégia a következő:

1. lépés: Megfelelő kezdeti értéket választok $\alpha^{(0)}$, $\beta^{(0)}$, $i^{(0)}$, $\sigma^{2(0)}$ -ra és legyen $m = 0$ és
$$V = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_T \\ \sqrt{k_\alpha} R_{q_\alpha} \end{bmatrix}.$$
2. lépés: Generálok az alábbi véletlen vektorokat:

$$\sigma^{2(m+1)} \sim IG2(\tau, 4T - q_\alpha - q_\beta - q_i),$$

$$\text{ahol } \tau = \begin{bmatrix} \left(y - \alpha^{(m)} - \Lambda^{i^{(m)}}(x)\beta^{(m)}\right)' \left(y - \alpha^{(m)} - \Lambda^{i^{(m)}}(x)\beta^{(m)}\right) + k_\alpha \alpha^{(m)'} R_{q_\alpha}' R_{q_\alpha} \alpha^{(m)} + \dots \\ \dots + k_\beta \beta^{(m)'} R_{q_\beta}' R_{q_\beta} \beta^{(m)} + k_i i^{(m)'} R_{q_i}' R_{q_i} i^{(m)} \end{bmatrix};$$

$$\alpha^{(m+1)} \sim N\left([V'V]^{-1} V'v^{(m)}, \sigma^2 [V'V]^{-1}\right),$$

$$\text{ahol } v^{(m)} = \begin{bmatrix} y - \Lambda^{i^{(m)}}(x)\beta^{(m)} \\ \mathbf{0}_{T-q_\alpha \times 1} \end{bmatrix};$$

$$\beta^{(m+1)} \sim N\left([W^{(m)'} W^{(m)}]^{-1} W^{(m)'} w^{(m+1)}, \sigma^2 [W^{(m)'} W^{(m)}]^{-1}\right),$$

$$\text{ahol } w^{(m+1)} = \begin{bmatrix} y - \alpha^{(m+1)} \\ \mathbf{0}_{T-q_\beta \times 1} \end{bmatrix} \text{ és } W^{(m)} = \begin{bmatrix} \langle \Lambda^{i^{(m)}}(x) \rangle \\ \sqrt{k_\beta} R_{q_\beta} \end{bmatrix}.$$

3. lépés: A (63)-(66) sűrűségfüggvények numerikus integrálásával kapott eloszlásfüggvényekből az inverz-eloszlás technikával generálok mintát.

4. lépés: legyen $m = m + 1$ és menjünk vissza a 2. lépéshez.

Miután ez a Markov lánc konvergál (mondjuk $m = m^*$ ciklus után), a szimulált vektorok $\{\alpha^{(m)}, \beta^{(m)}, i^{(m)}, \sigma^{2(m)}, m \geq m^*\}$ sorozata használható, mint az $f(\alpha, \beta, i, \sigma^2 | y, x, k_\alpha, k_\beta, k_i)$ együttes sűrűségfüggvénnyel megadott poszterior eloszlásból vett véletlen minta.

⁸⁰A függelékben B.3. pontjában bemutatom, hogy q_i különböző megválasztása mellett milyen formát öltenek az egyedi sűrűségfüggvények.

2.3. Az üzleti ciklusok szinkronizációját mérő modellek összevetése mesterséges adatokon

Az alábbiakban mesterséges adatokon megvizsgálom, hogy az üzleti ciklusok szinkronizációjának kimutatására általában használt eszközök és az általam javasolt időben változó tört késleltetésen alapuló modell milyen eredményességgel nyeri ki az adatokból az üzleti ciklusok szinkronizációjára vonatkozó információkat.

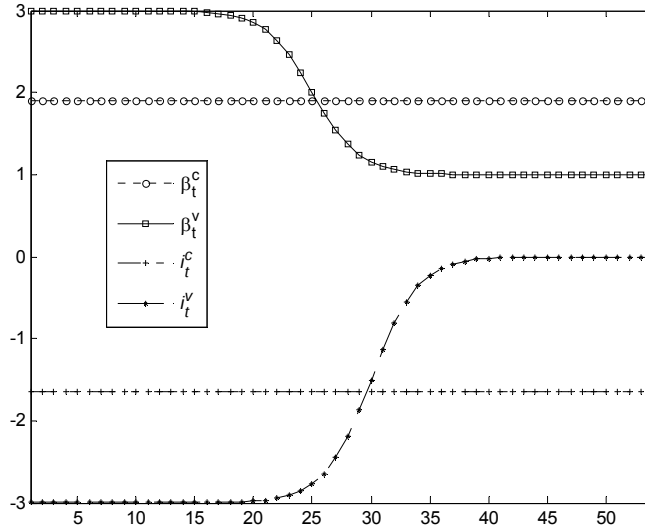
Az összevetés alapjául négy – a szinkronizáció négy ideáltípusának megfelelő – mesterséges idősort generáltam. Ehhez az $y_t = \alpha_t + \beta_t x_{t-i_t} + \varepsilon_t$ modellben $\alpha_t = 0$ választottam, x_t változóul az Európai Monetáris Unió aggregált negyedéves GDP-éből Hodrick-Prescott szűrővel ($\lambda = 1600$) képzett ciklusok 1987. III. – 2000. IV. negyedéve közötti idősorát vettem. ε_t változóul egy független azonos normális eloszlású idősort generáltam 0 várható értékkel és $0.05 \times \text{Var}(x_t)$ varianciával.⁸¹ β_t és i_t változóul két-két variánst generáltam:

$$\beta_t^v = \frac{2}{1+e^{0.5(t-25)}} + 1 \text{ és } \beta_t^c = \overline{\beta_t^v}$$

$$i_t^v = -\frac{3}{1+e^{0.5(t-30)}}i \text{ és } i_t^c = \overline{i_t^v},$$

ahol a $t = 25$ időpont 1993. I. negyedévét, a $t = 30$ időpont 1994. II. negyedévét jelöli, β_t^c és i_t^c pedig sorrendben β_t^v és i_t^v átlaga a mintaidőszakban. A 10. ábra mutatja a generált β_t^c , β_t^v , i_t^c és i_t^v együtthatókat.

10. ábra. Mesterségesen generált idősorokhoz felhasznált β_t^c , β_t^v , i_t^c és i_t^v idősorok



A fenti β_t^c , β_t^v , i_t^c és i_t^v (időben változó) paraméterek kombinálásával négyféle mesterséges idősort

⁸¹Mivel $\text{Var}(x_t) = 8.4 \times 10^{-5}$, így $\text{Var}(\varepsilon_t) = 4.2 \times 10^{-6}$. A választott érték a valós adatokon becsült modellek reziduumainak átlagos varianciájával nagyjából megegyező nagyságrendű.

generáltam:

$$y_t^1 = \alpha_t + \beta_t^c x_{t-i_t^c} + \varepsilon_t \quad (67)$$

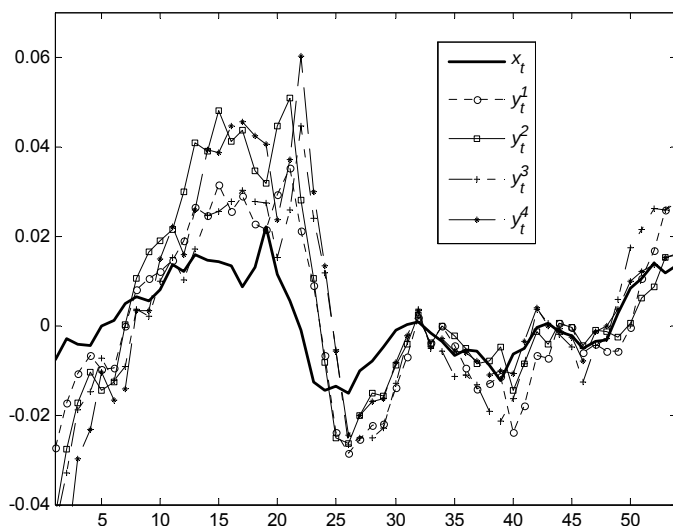
$$y_t^2 = \alpha_t + \beta_t^v x_{t-i_t^v} + \varepsilon_t \quad (68)$$

$$y_t^3 = \alpha_t + \beta_t^c x_{t-i_t^v} + \varepsilon_t \quad (69)$$

$$y_t^4 = \alpha_t + \beta_t^v x_{t-i_t^v} + \varepsilon_t, \quad (70)$$

azaz (67)-ben a két ciklusváltozó (y_t és x_t) amplitúdója nem közelít egymáshoz és a fáziskülönbség sem csökken (szinkronizáció hiánya), (68) a két ciklusváltozó amplitúdója közelít egymáshoz, azonban a fáziskülönbség megmarad (I. típusú szinkronizáció), (69) a két ciklusváltozó amplitúdója nem közelít egymáshoz, de a fáziskülönbség csökken (II. típusú szinkronizáció), (70) a két ciklusváltozó amplitúdója közelít egymáshoz és a fáziskülönbség is csökken (I.+II. típusú szinkronizáció, teljes szinkronizáció). A 11. ábra mutatja az együttthatók által generált y_t^1 , y_t^2 , y_t^3 , y_t^4 és x_t idősorokat, melyekre a továbbiakban a sorszámuknak megfelelő mintaként is hivatkozom.

11. ábra. Eredeti x_t és mesterségesen generált y_t^1 , y_t^2 , y_t^3 és y_t^4 idősorok



A fenti négy szinkronizációs típust megtestesítő idősor mindegyikével megvizsgáltam, hogy az idősorokban az üzleti ciklusok szinkronizációjára vonatkozó információk milyen pontosan nyerhetők vissza az üzleti ciklusok szinkronizációját mérni kívánó különféle megközelítésekkel. Az összevetéshez két, az irodalomban általánosan használt módszert, továbbá az általam javasolt időben változó tört késleltetésen alapuló modellt alkalmaztam. A módszerek részletesen az alábbiak voltak:

1. $y_t = \alpha + \beta x_{t-l} + \varepsilon_t$ modell gördülő mintás becslése, ahol minden egyes részmintára megkerestem az l eltolásnak azt a mértékét, amely mellett a két üzleti ciklus közti korreláció maximális volt.⁸² Az ablak mérete 20 negyedév, azaz 5 év volt, ami megegyezik az irodalomban használt

⁸²A késleltetés és az előrehozás maximális mértékét 4, illetve -4 közé korlátoztam a vizsgálat során.

mértékkel;

2. $y_t = \alpha_t + \beta_t x_{t-l} + \varepsilon_t$ időben változó paraméterű modell becslése a teljes mintaidőszakra, ahol az l eltolásnak azt a mértékét használtam, mely esetben a modell likelihoodja maximális volt;
3. $y_t = \alpha_t + \beta_t x_{t-l_t} + \varepsilon_t$ időben változó paraméterű és tört késleltetési modell becslése az előző pontban ismertetett Bayes-i eljárással.

A gördülő mintás becslés eredményeit (1. módszer) a függelék 15 ábráján mutatom be, ahol a becslött értékeket mindig az éppen használt részminta közepének megfelelő periódusnál tüntettem fel. Az ábra oszlopaiban balról jobbra sorrendben az α -kat, β -kat, i -ket és a ρ lineáris korrelációs együtthatókat tüntettem fel vastag fekete vonalakkal, mindegyiket kiegészítve 95%-os konfidencia-intervallumukkal (vékony fekete vonalak) és tényleges értékükkel (piros vonalak).⁸³ A becslött β_t és i_t idősorokra összpontosítva a következőket látjuk: időben változatlan együttható és időben változatlan tört késleltetés esetén (1. minta) a gördülő mintás becslés képes jól visszaadni a valós paramétereket. Időben változó együtthatójú, de időben változatlan tört késleltetés esetén (2. minta) a gördülő mintás becslés jelzi a β együttható megváltozását, ugyanakkor a késleltetés mérése bizonytalanabb, ami jelzés arra, hogy a tényleges késleltetés a két egész érték között van. Időben változó tört késleltetést használva (3. és 4. minta), a gördülő mintás becslés a késleltetés megváltozását csak késleltetve jelzi. Látható, hogy bár a 3. és 4. mintánál a minták elején és végén a gördülő mintás becslés a késleltetés értékét pontosan becsli, ami annak köszönhető, hogy a generált mintában ezek egész számok. A becslött β együtthatókról elmondható, hogy ha a valós β_t időben változatlan (1. és 3. minta), akkor a becslések lefelé torzítanak a nem egész késleltetés miatt, ha pedig időben változik β_t (2. és 4. minta), akkor a becslések egyrészt "kivasalják" a változást, tehát a minta elején a becslések lefelé torzítanak, míg a minta végén felfelé, másrészt ugyanezen ok miatt a változást csak késleltetve jelzik. A lineáris korrelációs mutatók sem képesek jól megragadni a β_t -ben vagy i_t -ben végbemenő változást, mivel általában a változásokat csökkenő együttmozgásként érzékelik még abban az esetben is, ha azok a szinkronizáció irányába mutatnak.

Az időben változó paraméterű modellből származó β_t becsléseket (2. módszer) a függelék 16 ábráján mutatom be, melyen vastag fekete vonal a Kalman-simító eljárással becslött β_t idősort, vékony fekete vonalak a 95%-os konfidencia-intervallum határait, piros vonalak pedig a β_t tényleges értékeit jelölik.⁸⁴ Időben változatlan együttható és időben változatlan tört késleltetés esetén (1. minta) ez a módszer csupán nagyobb bizonytalansággal képes visszaadni a valós paramétereket. Ha csak β_t változik (2. minta), akkor a módszer a változás irányát jelzi, de mértékét tekintve nagy hibával. Ha csak i_t változik (3. minta), a módszer akkor is β_t szignifikáns változását jelzi. Ha mind β_t és i_t változik az időben (4. minta), akkor ez a módszer nem jelez szignifikáns változást β_t -ben, helyette mindvégig a mintaátlagnak megfelelő, változatlan β_t értéket ad. Úgy tűnik tehát, hogy az időben változó paraméteres modell sem képes a változásokat megragadni, mivel, vagy pontatlan becslés mellett találja el a változás irányát (2. minta), vagy tévesen jelez változást, tehát jelez

⁸³Ez utóbbi a lineáris korreláció esetén nem értelmezett így, ott nem szerepeltetem.

⁸⁴A modell becslésekor a legnagyobb likelihood értéket eredményező késleltetést szerepeltettem (1. és 2. mintán $l = 2$, 3. és 4. mintán $l = 1$).

változást annak hiánya esetén (3. minta), illetőleg nem jelez változást annak bekövetkezése esetén (4. minta).

Az időben változó paraméterű és tört késleltetésű modell becsléseit (3. módszer) a függelék 17-a-17-b ábráin két blokkban mutatom be, melyben a felső (alsó) blokkban a becstilt β_t (i_t) együtthatók szerepelnek, oszloponként más-más, az ábrák fejlécében megadott $k_\beta = k_i$ értékek mellett.⁸⁵ A $k_\beta = k_i$ feltevést azért alkalmaztam, mivel β_t és i_t változékonyságában előzetesen nem tettem különbséget. A becslés során a simasági priorok foka $q_\alpha = q_\beta = q_i = 1$ volt, α_t relatív varianciája pedig $k_\alpha = 1000$. A mintavétel kezdeti értékei $\alpha_t^0 = 0$, $\beta_t^0 = 0$ és $i_t = 0$ voltak, a mintavételt 1100-szor ismételttem, melyből az első 100 elemet elhagytam, biztosítva a poszterior megfelelő konvergenciáját, így az ábrákon a maradék 1000 elemű mintából számolt értékek szerepelnek. Az ábrák támpontot adnak k_β és k_i megválasztásához. k_β és k_i értékeit széles tartományon végigfuttatva (0.00001, 0.0001, 0.001, 0.01, 0.1, 1) az látható, hogy $k_\beta = k_i = 0.0001$ kombinációk mellett kapjuk a legjobb becsléseket minden időben változó paraméteres esetben esetben, ezért a továbbiakban ezzel a kombinációval számolt eredményeket értékelem.⁸⁶ Szembetűnő, hogy az időben változó paraméterű és tört késleltetésű modellel készített becslések mind a négy mintán jól visszaadják a tényleges β_t és i_t értékeket, ráadásul viszonylag kis bizonytalansággal.

Összevettem a három modell mintán belüli illeszkedését és mintán kívüli előrejelző képességét is. A gördülő mintás becslésnél minden egyes részmintára átlagoltam a reziduális szórást, a 2. és 3. modellnél rekurzív becslésekre számoltam ki a reziduális szórást. A mintán kívüli előrejelzéseket hasonlóan számoltam ki: minden egyes részmintából előrejelzéseket készítettem 1-4 negyedévre előre, majd ezeket az előrejelzéseket felhasználva kiszámoltam 1-4 negyedéves horizonton az előrejelzési hibák átlagos négyzetösszegét (RMSE). Az összehasonlíthatóság kedvéért normáltam az 1. és 2. modell mutatószámait a 3. modell megfelelő mutatószámaival. Az így kapott eredményeket a függelék 8. táblázatában mutatom be, ahol 1-nél nagyobb (kisebb) értékek a 3. modellhez képest rosszabb (jobb) illeszkedést/előrejelzési képességet jeleznek. Láthatjuk, hogy az illeszkedés tekintetében az időben változó paraméterű és tört késleltetésű modell minden esetben jobb, mint az 1. és 2. modell. Ugyanezt a következtetést vonhatjuk le az előrejelzések pontosságára vonatkozóan is, tehát az 1. és 2. modell csak abban az esetben képes a 3. modellnél jobb vagy hasonló előrejelzési pontosságot eredményezni, amennyiben a paraméterek nem változnak.

Összegezve a különböző modellekkel kapott becslések tulajdonságait, megállapítható, hogy a szinkronizáció mérésére használt hagyományos elemzési eszközök (1. és 2. modell) igen korlátozottan – néhol torzítottan vagy késleltetve, néhol félrevezetően – képesek a ciklusok közötti szinkronizáció változásának megragadására. Ezzel szemben az időben változó paraméterű és tört késleltetésű modell képes a változásokat megbízhatóan elkülöníteni az időben állandó jellemzőktől és képes meggyőző pontossággal becsülni a paramétereket.

⁸⁵ Külön nem mutatom be α_t becslésének eredményeit, mivel azok mindegyike igen közel volt a tényleges, időben nem változó 0 értékéhez.

⁸⁶ Ha időben nem változnak a paraméterek, akkor a priorok konstrukciójából következően annál pontosabb becslést kapunk, minél nagyobb k_β és k_i .

2.4. A szinkronizáció méréséhez felhasznált valós adatok

A mesterségesen generált adatok vizsgálatát követően a valós ország-adatokat ismertetem, melyek segítségével ezen országok üzleti ciklusainak együttmozgását vizsgálom. A vizsgálat tárgyát képezi továbbá, hogy az idő előrehaladtával fokozódott-e az üzleti ciklusok együttmozgása, vagyis szinkronizálódtak-e.

Darvas – Szapáry (2004) tanulmányához hasonlóan a vizsgálatba bevont országokat három csoportba osztottam: KKE (Közép-Kelet Európai országok): Csehország, Észtország, Lengyelország, Lettország, Litvánia, Magyarország, Szlovákia, Szlovénia; GMU (Gazdasági és Monetáris Unió): Ausztria, Belgium, Franciaország, Finnország, Görögország, Hollandia, Németország, Olaszország, Portugália, Spanyolország; és végül a vegyes kontrollcsoport, melyben szerepelnek nem-GMU tag EU államok, mint Dánia, Svédország és Egyesült Királyság, további európai államok, mint Norvégia és Svájc, illetve USA és Japán, melyek a világ másik két gazdasági övezetét reprezentálják. Referencia "országként" a GMU aggregátumot tekintettem.

Valamennyi ország esetében a változatlan áras, negyedéves GDP-t (GMU esetében a tagállamok változatlan áron számított aggregált GDP-jét) vettem alapul. Az adatok fő forrása az OECD szezonálisan igazított adatokat tartalmazó adatbázisa volt. A GMU aggregált GDP időszaka az Európai Központi Bank publikációjából származik. Az adatok maximális elérhetősége 1980. I. negyedétől 2004. IV. negyedéig terjedt, kivéve a KKE országokat, melyekre adatok csak 1993. I. negyedétől álltak rendelkezésre⁸⁷. A KKE országok negyedéves adatai szezonálisak, ezért azokat a Tramo-Seats szezonális igazító eljárással igazítottam. Az üzleti ciklus adatokat végül a szezonálisan igazított, logaritmált negyedéves adatokból képeztem a Hodrick-Prescott féle szűrő segítségével ($\lambda = 1600$). Az adatokról további részletes leírás a függelék B.4 pontjában található.

2.5. Eredmények

Az egyes országok üzleti ciklusait a 18. ábra első oszlopában található grafikonok mutatják be, fekete vonallal jelölve az adott országot, míg pirossal a GMU ciklusait, ami alapján számos tendencia észrevehető. A GMU országainak ciklusai és a GMU aggregátum között általában igen szoros az együttmozgás (Ausztria, Belgium, Franciaország, Hollandia, Németország, Olaszország, Portugália, Spanyolország), bár Finnország esetében már jelentős eltérések vannak. A KKE országok is két csoportba sorolhatók: Lengyelország, Magyarország és Szlovénia ciklusai, úgy tűnik, hogy szorosan együttmozognak a GMU ciklusával, míg a Balti államok (Észtország, Lettország és Litvánia), Csehország és Szlovákia esetében az ábrák alapján kevésbé nyilvánvaló az együttmozgás.⁸⁸ A kontrollcsoportba sorolt országok közül az EU-tag Egyesült Királyság, Dánia és Svédország, továbbá Svájc ciklusainak együttmozgása szembevetendő, míg Norvégia, USA és Japán esetében nem tűnik ilyen szorosnak az együttmozgás.

A következő lépésben 2.3. pontban alkalmazott mindhárom modellel megvizsgáltam az üzleti

⁸⁷Néhány ország esetében 1993 előtti időkre is elérhetők negyedéves adatok, de a transzformációs visszaesés miatt ezeket az adatokat figyelmen kívül hagytam. Csehország, Magyarország és Lengyelország esetében a negyedéves GDP visszaszámítását a korai 90-es évekre Várpalotai (2002, 2003) módszerével végeztem.

⁸⁸A kilencvenes években a KKE régióban az üzleti ciklusokat erősen befolyásolta a transzformációs átmenet, reformok ütemezése, így az itt bemutatott következtetések is ezekkel a fenntartásokkal érvényesek.

ciklusok szinkronizációját.⁸⁹ Az 1. modell gördülő mintás becsléséből származó eredményeket a függelék 18. ábrájának 2-4. oszlopában található grafikonok mutatják. A második oszlopban található grafikonon látható a becslt β , a harmadikban a becslt i késleltetés, végül a negyedikben a ρ korrelációs együttható, mindegyik vastag vonallal. Mindhárom oszlopban a becslt értékek mellett vékony vonallal szerepelnek a 95%-os konfidencia-intervallumok.

A KKE országok eredményeit tekintve némileg eltérő kép rajzolódik ki, mint az üzleti ciklusok grafikonjainak egyszerű összevetéséből. Lengyelország, Magyarország és Szlovénia mellett Csehország ciklusainak relatív amplitúdója (β) is közelít 1-hez. Az i fáziskülönbségeket tekintve egyedül Magyarország esetében látszik konvergencia, míg a többi ország ciklusainál jelentősek a fáziskülönbségek. A ρ korrelációs együtthatók hasonló képet adnak, mint a relatív amplitúdó: Csehország, Lengyelország, Magyarország és Szlovénia esetében az együttható értéke közelít 1-hez. A többi ország esetében azonban nem látni számottevő együttmozgást az GMU ciklusával.

A GMU országok többségének ciklusai igen szorosan együttmozognak az aggregált GMU ciklussal. Ausztria, Belgium, Franciaország, Hollandia, Németország és Olaszország esetében mind a relatív amplitúdók közel vannak 1-hez, mind a fáziskülönbség 0 közeli. Finnország, Portugália és Spanyolország ciklusai már nem ilyen mértékben szinkronizáltak, mivel vagy relatív amplitúdójuk tér el jelentősen 1-től, vagy a fáziskülönbség 0-tól. A korrelációs együtthatók – Finnország kivételével – igen szoros együttmozgásról tanúskodnak. Kevés kivétellel minden GMU országnál megfigyelhető, hogy 1996–1998. közötti periódusokban az együttmozgás a GMU aggregált ciklusával átmenetileg csökkent.

A kontrollcsoport országai heterogén képet mutatnak. Dánia, Egyesült Királyság, Svédország és Svájc ciklusai jelentős mértékben szinkronizáltak a GMU aggregált ciklussal, mind a relatív amplitúdókat, mind a fáziskülönbségeket tekintve. Az Egyesült Királyság ciklusainak együttmozgása ciklikus, esetenként felerősödik, esetenként meggyengül. Norvégia ciklusa nem mutat szoros együttmozgást, ugyanakkor jelentős fáziskülönbséget sem. Az USA ciklusaira vonatkozóan azt mondhatjuk, hogy a relatív amplitúdók közelítenek 1-hez, és a korrelációs együttható is erőteljes együttmozgásra utal. A fáziskülönbség azonban 1990. óta 2-4 negyedév között állandósult. Japán üzleti ciklusa korábban szorosabb együttmozgást mutatott a GMU aggregált ciklusával, ez a 90-es évtizedben meggyengült, de az utóbbi időben újra erősödni látszik.

Az ábrákat a mesterségesen generált adatokból levont tanulságok perspektívájából értékelve számos olyan jelenség kimutatható, mely a mesterségesen generált minta elemzésekor tapasztalható volt: β , i és ρ többnyire markánsan változik az időben, máshol i hektikusan ugrál egyes késleltetések között (például: Belgium, Finnország, Olaszország, Portugália, Spanyolország, Norvégia, Svájc, USA, stb.). Ezek a jelek arra utalnak, hogy β és i valóban változnak az időben, másrészt i értékei nem egészek. A mesterségesen generált minták tapasztalatai alapján ezekben az esetekben megbízhatóbbnak és pontosabbnak tűnnek az időben változó paraméteres és változó késleltetési (49) modellel készített becslések.

Az időben változó paraméterű és tört késleltetési modellel kapott β_t és i_t becsléseket ország-

⁸⁹ Az időben változó paraméteres modellel (2. modell) készített elemzéseket részletesen nem mutatom be, mivel a mesterségesen generált mintán is tapasztalható volt, hogy ez a módszer sokszor megbízhatatlan becsléseket eredményez.

csoportonként mutatom be a függelék 19-a.–19-c. ábráin, ahol a felső panel β_t , míg az alsó panel i_t poszterior várható értékeit mutatja. A becslésekhez – hasonlóan a mesterségesen generált mintával végzett becslésekhez – $q_\alpha = q_\beta = q_i = 1$ és $k_\beta = k_i = 0.0001$ értékeket használtam, a kezdeti értékek minden esetben $\alpha_t^0 = 0$, $\beta_t^0 = 0$ és $i_t = 0$ voltak, a mintavételt 1100-szor ismételtam, melyből az első 100 elemet elhagytam, így az ábrákon a maradék 1000 elemű mintából számolt értékek szerepelnek.

A KKE országok eredményei két kivételtől eltekintve nem mutatnak szinkronizációt (19-a. ábra). Magyarország és Szlovénia esetében igen szoros szinkronizáció mutatkozott, mind a relatív amplitúdót, mind a fáziskülönbséget tekintve. Csehország, Észtország, Litvánia Lengyelország és Szlovákia relatív amplitúdója távol esik az 1-es értéktől. A fáziskülönbségek vonatkozásában azt tapasztalhatjuk, hogy Észtország, Lettország, Lengyelország és Szlovákia ciklusai nemcsak nem szinkronizálódnak a GMU ciklusaival, hanem divergál attól.

A GMU országok ciklusai – Finnország és Portugália kivételével – nagyfokú szinkronizációt mutatnak, tehát a 2000-es évekre a relatív amplitúdók 1-hez közelítenek, a fáziskülönbségek pedig 0-hoz (19-b. ábra). Az 1980-as évekhez képest az utóbbi évtizedben Franciaország, Németország és Olaszország ciklusai tűnnek számottevően szinkronizáltabbaknak.

A kontroll csoport országai közül az EU tagállamok mindegyike (Dánia, Egyesült Királyság és Svédország) nagyfokú szinkronizáltságot mutat, hasonlóan Svájcra (19-c. ábra). Norvégia ciklusainak együttmozgása sokat változott, az utóbbi időben itt is a szinkronizáció dominál. Az USA üzleti ciklusai is igen szinkronizáltak a GMU-ével, mivel a relatív amplitúdók 1-hez közelítenek, ugyanakkor a fáziseltolódást vizsgálva, határozott növekvő előidejűség mutatkozik USA javára. Ez azt jelenti, hogy a GMU ciklusai az ezredfordulóra közelítőleg két negyedéves késéssel követik az USA ciklusait.⁹⁰ Ez az előidejűség azonban az elmúlt években kb. egy periódusra látszik csökkenni. Japán esetében nem beszélhetünk szinkronizációról, épp ellenkezőleg, mind az üzleti ciklusok ellenkező fázisa, mind a köztük lévő növekvő fáziskülönbség is a divergáló képet erősíti.

Az eredmények megbízhatóságának értékeléséhez a valós adatokon is megvizsgáltam a három modell mintán belüli illeszkedését és mintán kívüli előrejelző képességeit. A vizsgálat módszertana azonos volt a mesterségesen generált mintán elvégzett számításokkal, továbbá az összehasonlíthatóság kedvéért itt is normáltam az 1. és 2. modell mutatószámait a 3. modell megfelelő mutatószámaival. Az így kapott eredményeket a függelék 9. táblázatában mutatom be. A táblázatot tanulmányozva látható, hogy alig fordul elő 1-nél kisebb szám (mintán belüli illeszkedést tekintve Lengyelország, Szlovénia és Portugália esetében, míg a mintán kívüli előrejelzéseket tekintve Magyarország és Szlovénia esetében), azaz az időben változó paraméterű és tört késleltetésű modell az esetek túlnyomó többségében vélhetően pontosabb képet ad az üzleti ciklusok szinkronizációjáról.

A fentieket összegezve az látszik, hogy az üzleti ciklusok együttmozgásai a vizsgált időszak alatt változtak, amit már korábbi tanulmányok is kimutattak.⁹¹ Elemzésem újdonsága abban rejlik, hogy az időben változó paraméterű és tört késleltetésű modellel az együttmozgás változását az elterjedt módszerekhez képest pontosabban lehet megragadni.

⁹⁰ Az USA és a GMU üzleti ciklusai közötti növekvő szinkronizáció más szemszögből azokat az eredményeket erősíti, amelyek egy "világ ciklus" létezésére találnak bizonyítékokat. Lásd például Kose - Otrok - Whiteman (2003).

⁹¹ Lásd a korábbi hivatkozásokat a szinkronizáció irodalmáról.

2.6. Következtetések

Az elemzésbe bevont országok üzleti ciklusainak együttmozgását megvizsgálva néhány óvatos gazdaságpolitikai következtetés vonható le. A közelmúltban csatlakozott EU tagállamok üzleti ciklusai sokkal kevésbé szinkronizáltak a GMU ciklusaival, mint a GMU tagállamok ciklusai. Sőt, talán Magyarországot és Szlovéniát kivéve, az újonnan csatlakozott országok üzleti ciklusainak jelenlegi együttmozgása a GMU ciklusaival még azt szintet sem éri el, amely a GMU létrehozásakor a GMU-ba belépő tagállamok üzleti ciklusai között volt. Ebből a szempontból az újonnan csatlakozott országok messze állnak a GMU csatlakozástól. Kedvező hír számukra az lehet, hogy a jelenlegi GMU tagállamok üzleti ciklusainak együttmozgása fokozódott a közös pénz bevezetése óta, tehát ha a közelmúltban csatlakozott EU tagállamok a GMU tagjává válnának, elképzelhető lenne, hogy üzleti ciklusaik együttmozgása az Euro átvételével erősödne, ami növelhetné a közös monetáris politikából származó előnyöket.

Más szempontból nézve az eredményeket az EU számára kedvezőtlen hír lehet, hogy világgazdasági vezető szerepet – legalábbis az üzleti ciklusokat tekintve – nem játszik egyelőre, mivel az elemzésekből a következtetés vonható le, hogy gazdasági fordulópontjait az Atlanti-óceán túlsó partjának gazdasági fordulópontjai befolyásolják.

3. Dezaggregált, költségbegyűrűződéses, Bayes-i ökonometriai infláció-előrejelző modell

2001. júniusától a Magyar Nemzeti Bank átállt az inflációs célkitűzés monetáris rendszerére. E rendszer központi eleme leegyszerűsítve, hogy a jegybank a jövőre vonatkozó inflációs célt hirdet meg, melyet összevet a saját, jelenben rendelkezésére álló információkon alapuló fogyasztói árindex (CPI) előrejelzésével, majd a meghirdetett célja és előrejelzése között esetleg fennálló különbség megszüntetése érdekében monetáris eszköztárában (melynek egyik alapvető eleme a jegybanki alapkamat) változtatásokat hajt végre. Az új monetáris rezsimre történő átállás miatt kiemelkedően fontossá vált az, hogy a jegybankban a fogyasztói árindex előrejelzése megbízható legyen. Az előrejelzések megbízhatósága növelésének egyik lehetséges útja, hogy a már meglévő előrejelző eszközök mellett újabb modellek is készülnek, melyek által csökkenthető az előrejelzésekben meglévő bizonytalanság. E feladat jegyében született a most bemutatásra kerülő modell is, mely egyenrangú szerepet tölt be a jegybankban korábban készült infláció-előrejelző modellekkel.^{92,93}

A modell egyesíteni kívánja mindazokat az előnyösnek tartott tulajdonságokat, amelyek külön-külön már megvoltak a korábbi modellekben.⁹⁴ Ez a modell *dezaggregált, ökonometriai becsléseken alapszik*, melyeket *szakértői feltevések* egészítenek ki. A dezaggregáltság segít nyomon követni az egyedi hatásokat, mint például egyes termékek ÁFA kulcsának megváltozását. Az ökonometriai becslés alkalmas arra, hogy az árak múltbeli viselkedését a lehető legjobban felmérjük, végül a szakértői feltevések strukturálják és kiegészítik az adatokból nyerhető információkat. Az infláció-előrejelző modell az úgy nevezett háromszög modellek családjába tartozik, a modell közgazdasági-ökonometriai érdekessége a lassú költség-ár begyűrűződési folyamatnak Bayes-i eszközökkel történő becslése.

A modell a fogyasztói kosárban szereplő azon jóságok árának alakulását kívánja előrejelezni, amelyek piaci meghatározottságúak. E jóságok árainak változását – az előrejelzési horizonton – költségösszetevőik változásával magyarázza, tehát azt a folyamatot modellezi, ahogy *a költségek fokozatosan begyűrűződnek a fogyasztói árakba*. A költségek begyűrűződése a modellben egyben a költségek *tovagyűrűződésének* nyomonkövetését is jelenti, mivel egyes fogyasztói árak – amelyekbe begyűrűződnek a költségek –, maguk is másik jóság költségéit képezik.⁹⁵

A modell parciális, tehát egyes költségelemek – legnagyobb súllyal az árfolyam és a bérek – exogének, vagyis előrejelzésükhöz más eszközökre van szükség. A modell ezeket adottnak tételezi fel, melyek a valóságban természetesen kölcsönhatásban vannak az árakkal. A keresleti és kínálati sokkok, illetve monetáris és fiskális politika fogyasztói árindexre gyakorolt hatását csak ezen adottnak vett költségelemek megváltoztatásával tudjuk szimulálni. A modell ugyanis nélkülözi azokat a szimultán mechanizmusokat, amelyek azt biztosítják, hogy hosszú távon a fő költségelemek, a valutaárfolyam és a bérek az árakkal együtt mozognak és végső közös meghatározójuk a monetáris

⁹² A jegybankban korábban készített és alkalmazott inflációs modellek teljes dokumentációját lásd Hornok–Jakab–Reppa–Villányi (2002) leírásában. Közép–Kelet Európa jegybankjainak infláció-előrejelzési technikájáról, menetéről ad nemzetközi áttekintést Hornok–Jakab (2002) tanulmánya.

⁹³ A modellnek létezik egy nem teljesen Bayes-i verziója is (Várpalotai, 2003c, 2006c).

⁹⁴ Természetesen ebből nem következik, hogy modellünk az előrejelzéseknél jobban teljesítsen, mint a korábbi modellek.

⁹⁵ Ennek illusztrálására szolgál az 1. ábra az 87. oldalon.

politika. A modell valójában tehát két kérdés megválaszolását segíti: (1) hogyan változnak az árak az egyes költségelemek különböző mértékű változásának hatására, (2) mi történik az alatt az átmeneti időszak alatt, amíg a költségek és árak változása szétválik (a kettő különbsége a profit, ahol a változások először csapódnak le). Ezt az átmeneti időszakot nevezem a költségek „begyűrűződése” időszakának. A modell azonban nem ad választ arra, hogy az árak és a költségek miért és milyen mértékben válnak szét a keresleti és kínálati sokkok (és a monetáris politika) hatására.

Az ismertetés menete a következő. Az első pontban a makroökonómiában használt inflációs egyenletek története kerül bemutatásra, mely egyben a fejezetben szereplő modell irodalomba való elhelyezésére is hivatott. A második pontban bemutatom az előrejelző modell struktúráját, továbbá azokat a megfontolásokat, melyek a begyűrűződési profilok speciális Bayes-i becslését indokolták. A harmadik pontban részletesen ismertetem az inflációs előrejelző modell rövid távú dinamikáját leíró egyenleteinek simasági priorokon, összeg- és előjel-megkötéseken alapuló Bayes-i becslését, ami egyben Shiller (1973) tanulmányának továbbfejlesztése egyszerre három irányban. A negyedik pont a felhasznált adatokat, az ötödik pont pedig a modell paraméterezését és a becslés eredményeit ismerteti. A hatodik pontban elemzem a modell előrejelző képességeit. A modell értékelése és a lehetséges modell-fejlesztési irányok felvázolása az értekezést összegző fejezetben található. A becslési eljárásokhoz kapcsolódó állítások bizonyításai a függelék C. pontjában találhatók.

3.1. Az inflációs egyenletek vázlatos története

3.1.1. A kezdetek

Az inflációs egyenletek története Phillips (1958) tanulmányával kezdődött, aki elsőként dokumentálta a nominális bérek és a munkanélküliség közti korrelációt az Egyesült Királyságban. Samuelson-Solow (1960) a *Phillips-görbének* nevezett kapcsolatot megváltoztatták, mivel az Egyesült Államokban az infláció és a munkanélküliség között sikerült korrelációt kimutatniuk. Samuelson és Solow tudatában voltak annak, hogy ez a korreláció egy empirikus szabályszerűség, melynek elméleti háttere gyenge, ennek ellenére a Keynes-i politika hívei úgy tekintettek a Phillips-görbére, mint amely kihasználható átváltást biztosít az infláció és a munkanélküliség között.

A Phillips-görbét megalapozó eméletet Phelps (1967) és Friedman (1968) kritizálta, rámutatva, hogy a bérek meghatározódása és árazás folyamata nem kellően tisztázott. Friedman az árazási hiányosságok kiküszöbölésére azt tette fel, hogy a munkavállalók különbséget tudnak tenni a reál- és nominálbér között, ezért a munkavállalók elsősorban a reálbérekről, pontosabban a várt reálbérről alkudoznak. Emiatt, ha a bérmegállapodás után váratlanul megemelkednek az árak, akkor a reálbér lecsökken, ami a foglalkoztatást emeli. Azonban, ha az árak emelkedése előre ismert, akkor annak nem lesz semmilyen foglalkoztatottsági hatása, mivel a munkavállalók nominális bérigényébe teljesen beépül. Így az a gazdaságpolitikus, aki az inflációs ráta tartós megemelésével kívánja növelni a foglalkoztatottságot csalódni fog: amint a munkavállalók várakozásaiba beépül a magasabb infláció, nominális bérigényeiket is ehhez igazítják, ezzel megszüntetve minden kezdeti reálhatást. Amikor ez megtörténik, a munkanélküliség visszaáll "természetes" szintjére, melyet a munka- és termékpiacok struktúrája határoz meg. A fentiek miatt az infláció és a munkanélküliség

közti átváltás helyes formája $\pi_t = \gamma U_t$ helyett a *várakozásokkal bővített Phillips-görbének* nevezett forma:

$$\pi_t = \gamma (U_t - U^*) + \pi_t^e,$$

ahol az infláció (π_t) negatívan korrelál a munkanélküliség természetes rátájától (U^*) vett különbséggel, és ahol az összefüggés egy az egyben eltolódik a szereplők t időszakra várt inflációs rátának (π_t^e) megváltozásával.

A Friedman és Phelps által javasolt megközelítésben nincs tartós átváltási lehetőség az infláció szintje és a munkanélküliségi ráta között: hosszú távon $\pi_t^e = \pi_t$, azaz a Phillips-görbe függőleges az $U_t = U^*$ pontban. Amennyiben a szereplők várakozásai csak lassan igazodnak, a gazdaságpolitika az inflációs ráta folyamatos emelésével képes a munkanélküliséget egyensúlyi szintje alatt tartani. E tulajdonság miatt Friedman és Phelps infláció alakulását leíró modellje "*akcelerációs hipotézisként*" is ismert, mivel modelljük szerint csak az árak egyre gyorsuló emelkedése eredményezhet az egyensúlyi munkanélküliségnél tartósan alacsonyabb munkanélküliséget.

3.1.2. A Sargent-Lucas kritika

A Friedman és Phelps által javasolt megközelítés azon a feltevésen nyugodott, hogy az inflációs várakozások alakulását a múltban tapasztalt inflációs ráták határozzák meg, vagyis *adaptív* inflációs várakozásokat feltételeztek.⁹⁶ Az akcelerációs hipotézis ökonometria tesztjeiben ezért az inflációs várakozásokat (π_t^e) a múltbeli infláció osztott késleltetettjeivel közelítették. Így az ökonométerek gyakran azt tesztelték, hogy az alábbi

$$\pi_t = \alpha + \gamma U_t + \rho \sum_{i=1}^N \beta_i \pi_{t-i} + \varepsilon_t \quad (71)$$

regresszióban, ahol β_i összegét 1-re korlátozzák, ρ értéke egységnyi-e, amit egyszerre tekintettek az akcelerációs hipotézist alátámasztó és a természetes munkanélküliségi ráta létezését bizonyító tesztnek.

Ezt a tesztelési stratégiát kritizálta Sargent (1971) és Lucas (1972) – elindítva a racionális várakozások forradalmát a makroökonómiában – amellet érvelve, hogy az inflációs ráta (az Egyesült Államokban abban az időben) stacionárius, így a gazdasági szereplők akkor járnak el ésszerűen, ha az inflációs ráta várható értékéhez történő visszatérésére számítanak. Így a (71) egyenletben az infláció osztott késleltetettjeinek összegének 1-re korlátozása inkonzisztens a racionális várakozásokkal. Másképpen, még akkor is 1-nél kisebb ρ -t kapunk a becsléskor, ha az akcelerációs hipotézis igaz. A kritika másik érve az volt, hogy hiába kisebb ρ 1-nél, ez nem jelent valódi átváltási lehetőséget az infláció és a munkanélküliség között, mivel egy ilyen átváltást célzó, inflációs rátát emelő gazdaságpolitikához tartozó infláció-munkanélküliség egyenletnek már más paraméterei lesznek.

3.1.3. A háromszög modell

A 70-es évek végére, Lucas és Sargent kritikája ellenére egyre elfogadottabbá vált az akcelerációs hipotézis, melynek több oka is volt: (1) letisztult a mögötte lévő elmélet; (2) nyilvánvaló vált, hogy

⁹⁶Phelps (1967) kifejezetten használja az adaptív várakozások fogalmát. Friedman (1968) külön nem említi az adaptív várakozások fogalmát, helyette fokozatos igazodást említ.

a 70-es évek közepén a Phillips-görbe által implikált rövid távú infláció-munkanélküliség átváltás eltolódott; (3) egyre gyakrabban mutatták ki, hogy a Phillips görbében szereplő inflációs tagok együttthatóinak összege 1. Ráadásként a 70-es évek elejétől az inflációs rátát emelő kínálati sokkok (élelmiszer, energia) explicit módon megjelentek az inflációt elemző empirikus tanulmányokban. Ezek eredményeként az infláció leírására általános lett az alábbi ökonometriai modell:

$$\pi_t = \alpha + \gamma U_t + B(L)\pi_{t-1} + \lambda z_t + \varepsilon_t,$$

ahol $B(1)$ összegét 1-re korlátozzák és z_t jelöli a kínálati sokkok vektorát. Ebben a specifikációban az infláció dinamikáját három tényező határozza meg – a *háromszög modell* elnevezés is innen ered –: reálgazdaság (hatásai a munkanélküliségi rátába tömörítve), kínálati sokkok és inflációs inercia.

A háromszög modellt általánosan használták makroközgazdászok, akik ebből a modellből kiindulva definiálták a NAIRU-t, vagyis azt a munkanélküliségi rátát, amely változatlan inflációs rátával konzisztens, amennyiben nincsenek kínálati sokkok.⁹⁷

3.1.4. Az új-Keynes-i Phillips-görbe

A Lucas és Sargent által bevezetett racionális várakozások az inflációs folyamatok modellezésében is megjelentek. A legnépszerűbb új-Keynes-i Phillips-görbe Calvo (1983) árazási modelljén alapszik. Ez a modell feltételezi, hogy minden periódusban a vállalatok véletlenszerűen kiválasztott $(1 - \theta)$ hányada árazza át termékeit, míg a többi cég árai változatlanok. Így az árak (logaritmusának) alakulását a

$$p_t = \theta p_{t-1} + (1 - \theta)s_t \quad (72)$$

egyenlet adja, ahol s_t az adott periódusban átárazó vállalatok árait jelöli. Monopolisztikus versenyt feltételezve, az átárazó vállalatok optimális ára:

$$s_t = \mu + (1 - \theta\beta) \sum_{k=0}^{\infty} (\theta\beta)^k E_t [\widetilde{mc}_{t+k}], \quad (73)$$

ahol μ az árragadósság nélküli optimális felár, β a vállalatok diszkont-tényezője és $\widetilde{mc}$ a nominális határkölség. Behelyettesítve (73)-t a (72) kifejezésbe kapjuk az *új-Keynes-i Phillips görbét*:

$$\pi_t = \beta E_t [\pi_{t+1}] + \frac{(1 - \theta)(1 - \theta\beta)}{\theta} (mc_t + \mu),$$

mely a mostani inflációt a következő periódusra várt inflációval és az aktuális reál határkölség a ragadósság nélküli optimális szinttől való eltéréseivel ($mc_t = \widetilde{mc}_t - p_t$) magyarázza. Általános esetben a reál határkölség arányos az akutális és a potenciális kibocsátás közti réssel (y_t), így az új-Keynes-i Phillips-görbe

$$\pi_t = \beta E_t [\pi_{t+1}] + \gamma y_t$$

alakra egyszerűsödik.

⁹⁷Például a fenti egyenletben a NAIRU értéke konstans: $U^* = \frac{-\alpha}{\gamma}$. Az irodalom újabb vonulata időben változó NAIRU-t vizsgál, mint például Staiger-Stock-Watson (1997), Gordon (1998) és Ball-Mankiw (2002).

3.1.5. A hibrid új-Keynes-i Phillips-görbe

Az új-Keynes-i Phillips-görbe vonzó elméleti megalapozottsága ellenére nem képes az inflációs adatok perzisztenciáját megmagyarázni, ezért Galí–Gertler (1999) módosították az eredeti új-Keynes-i Phillips-görbét beillesztve az infláció késleltetett értékét:

$$\pi_t = \gamma_f E_t [\pi_{t+1}] + \gamma_b \pi_{t-1} + \gamma y_t,$$

amit a *hibrid új-Keynes-i Phillips-görbének* neveznek.

Ez a módosítás, mint azt Galí–Gertler (1999) és Galí–Gertler–Lopez-Salido (2005) dokumentálják, sokat javít a modell adatleíró képességén, miközben a modellben az előretekintő tag együttműködője nagyobb, mint a visszatekintő tagé. A sikeres adatleíró képessége miatt általánossá vált, hogy az infláció alakulását ezzel a hibrid új-Keynes-i Phillips-görbével írják le.

3.1.6. Három szögmodell vs Hibrid új-Keynes-i Phillips-görbe: érvek és ellenérvek

A következő pontban bemutatásra kerülő modell a háromszög modellek családjába tartozik. Mivel a háromszög modellekhez képest a hibrid új-Keynes-i Phillips-görbék elméletileg megalapozottabbnak tűnnek, érdemes felsorakoztatni azokat az érveket, amelyek mégis a háromszög modellek alkalmazása mellett szólnak.

A hibrid új-Keynes-i Phillips-görbét a mikroökonómiai alapokon nyugvó elmélet és az adatleíró képesség sikeres ötvözetének tekintik. Azonban Rudd–Whelan (2005) meggyőzően érvelnek amellett, hogy a hibrid új-Keynes-i Phillips-görbe sem elméleti megalapozottságát, sem adatleíró képességét tekintve sem kielégítő.⁹⁸

Rudd és Whelan szerint a π_{t-1} modellbe illesztése mellett szóló érvek elméleti szempontból ingatagok. Galí–Gertler (1999) például feltételezik, hogy a vállalatok egy része egyszerű hüvelykujj-szabályt követ, és árait a múltban tapasztalt inflációval indexálja, míg a vállalatok másik része a Calvo-féle árazást követi. Nem tisztázott azonban, hogy a vállalatok miért viselkednének ennyire különbözően.⁹⁹ Christiano–Eichenbaum–Evans (2005) a Calvo-féle árazást úgy módosítja, hogy a vállalatok egy véletlen hányada optimálisan áraz át, míg a többi a múltbeli inflációval indexálja árait. Ezzel azonban megszüntetik a számos mikroökonómiai elemzés által jó dokumentáltan létező árragadóságot, mivel feltevésük szerint minden vállalat minden egyes periódusban átárazza termékeit.

A hibrid új-Keynes-i Phillips-görbék a munkajövedelem-hányadot használják a reál határköltség proxijaként, mivel a hagyományos kibocsátási rés használatával rossz előjelű γ együttthatót becsülnének. Azonban Rudd és Whelan rámutatnak arra, hogy a munkajövedelem-hányad kontraciklikus, tehát csak kimondottan egy az üzleti ciklusokkal szemben mozgó változó használatával kapunk megfelelő előjelet a modellben.¹⁰⁰

A hibrid új-Keynes-i Phillips-görbék adatleíró képességét vizsgálva Rudd és Whelan arra ju-

⁹⁸ A különféle inflációs modellek a monetáris politika számára más és más üzenetet hordoznak, ennek elemzése értekezésemnek nem tárgya.

⁹⁹ A hüvelykujj-szabályt követő fogyasztók megkülönböztetését a likviditás-korlát létezése megfelelően indokolja. Lásd Campbell–Mankiw (1989).

¹⁰⁰ A szerzők megismételték Galí–Gertler (1999) becslését az azóta felülvizsgált adatokkal: a munkajövedelem hányadra pozitív, de inszignifikáns előjelet kaptak.

tott, hogy egyrészt az általános eredmény, mely szerint az előrettekintő tag együttthatója (γ_f) nagyobb mint a visszatekintő tagé (γ_b), az alkalmazott becslés következménye, nem pedig bizonyíték az előrettekintő tag fontosságára. Másrészt a modell másik változója, a munkajövedelem-hányad, csupán elhanyagolható mértékben javít egy pusztán visszatekintő inflációs tagot tartalmazó modell magyarázó erején.

Rudd és Whelan megvizsgálták a háromszög modell adatleíró képességeit is. Azt találták, hogy noha a Lucas és Sargent-féle kritika kétség kívül jogos, a háromszög modell, mely tekinthető az infláció alakulását leíró redukált modellnek, együttthatói az időben rendkívül stabilak, továbbá a modell előrejelző képessége is rendkívül jó.

Összefoglalva, Rudd és Whelan eredményei arra mutatnak rá, hogy a hibrid új-Keynes-i Phillips-görbe előrejelző képessége igen korlátos, ellenben az egyszerű háromszög modellel, mely nemcsak jó előrejelző képességű, hanem gyakorlati szempontból többé-kevésbé kiállja a Lucas és Sargent-féle kritikát is. Ezek miatt az infáció modellezésére a háromszög modellek továbbra is hasznosnak tűnnek.

3.2. A dezaggregált költségbejűződéses modell alapváza

A modell a fogyasztói kosárban szereplő jóságok árának változását az adott jóság előállításához szükséges költségek változásával magyarázza, tehát a modell szerint az árakat végső soron a költségek határozzák meg. Ez a megközelítés azon termékek és szolgáltatások árindexeinek előrejelzésére használható, amelynek árait a *piaci verseny* határozza meg (piaci áras jóságok). Ebben a jóságkörben feltételezhető ugyanis, hogy a piaci versenyben a termelőknek árait elsődlegesen a költségekhez kell igazítaniuk, mivel ha ettől jelentősen eltérnének, akkor mások jutnának piachoz, vagy a költségeket nem fedezné az eladási ár.¹⁰¹

A modellezésből emiatt kizárom azokat a jóságokat, amelyek árait nem a piaci verseny határozza meg, hanem a központi kormányzat vagy valamely helyi önkormányzat egyedi döntése.

A piaci áras jóságok költségalapú modellezésénél hibakorrekciós megközelítést alkalmaztam. Ennek megfelelően elkülönítettem a hosszú távú, egyensúlyi költségűlyok meghatározásának problémáját az ehhez az egyensúlyhoz elvezető dinamikus (rövid távú) költségbejűződéses alkalmazkodási pálya meghatározásától.

3.2.1. A költségűlyok meghatározása (Hosszú táv)

A fogyasztói kosárban szereplő piaci áras jóságcsoporthok fogyasztói ára tekintetében abból indultam ki, hogy azt különféle költségelemek határozzák meg, mint például munkaköltségek, energia, nyersanyagok, mezőgazdasági nyers termények, külföldi import, valamint olyan költségek, amelyek egyben maguk is fogyasztói kosárban szereplő jóságok, mint például a kenyér esetében a liszt, ruhánál a szövet stb. További előfeltevés, hogy a költségrugalmasságok konstansok, ezért az árak hosszú távon az alábbi Cobb-Douglas költségfüggvény szerint alakulnak:

$$P_{i,t} = \Lambda_{i,t} C_{i,1,t}^{\gamma_{i,1}} C_{i,2,t}^{\gamma_{i,2}} \cdot \dots \cdot C_{i,n_i-1,t}^{\gamma_{i,n_i-1}} C_{i,n_i,t}^{(1-\gamma_{i,1}-\gamma_{i,2}-\dots-\gamma_{i,n_i-1})} \Xi_{i,t}, \quad (74)$$

¹⁰¹ Az eladási áraknak természetesen fedezniük kell a kereskedők nyereségét is.

ahol $P_{i,t}$ az i -ik jószág(csoport) fogyasztói árindexe t időpontban, $C_{i,j,t}$ az i -ik jószág(csoport) j -ik költségelemének árindexe t időpontban, $\gamma_{i,j}$ a költségrugalmasságok együtthatói. $\Lambda_{i,t}$ a költséghatékonyság (időben változó) mérőszáma, mely egyrészt az összköltségarányos haszonkulcsot, másrészt az adott jószág előállításában vagy szolgáltatás nyújtásában elért hatékonyságjavulást, harmadrészt a költségindexeket árindexekké transzformáló normáló tényezőt tartalmazza. A költségelemek árindexét nem egy eladott termék- vagy szolgáltatásegységre vetítem, hanem annak „természetes mértékegységben” vett árindexére (pl.: havi átlagbér árindexe, 1 kWh elektromos áram árindexe, liszt árindexe stb.). Bár a $\Lambda_{i,t}$ tényező három, egymástól el nem különíthető hatást is magában foglal, mégis a priori az valószínűsíthető, hogy értéke időben csökken, mivel ha van termelékenységjavulás, akkor a költségárindexek által indokoltnál kisebb lehet az adott jószág árának emelkedése. Ugyanakkor az időben növekvő $\Lambda_{i,t}$ sem megmagyarázhatatlan: ekkor olyan jószágról lehet szó, amelyet növekvő haszonkulccsal lehet értékesíteni.¹⁰² A fenti modellben $\Xi_{i,t}$ multiplikatív hibatagot jelöl, mely többféle hatást foglalhat magában: a kihagyott költségelemek hatását, a valós helyzettől eltérő költségrugalmasságok miatti hatásokat, az adott termék átmeneti akcióit (árengedmények), egy költségtényező árváltozásának még nem teljesen átgyűrűződött hatásait, továbbá mindazokat az árazási magatartásokat, amelyek túl rövid ideig tartanak ahhoz, hogy hosszú távú hatékonyságjavulásként legyenek elkönnyvelhetők.

A modellben megengedem, hogy az egyes i jószág(csoportok) árait más és más költségtényezők határozzák meg. A modellben a költségrugalmasságok ($\gamma_{i,j}$) összegét 1-re korlátoztam minden i jószágcsoporthoz esetén ($\sum_{j=1}^{n_i} \gamma_{i,j} = 1$), annak érdekében, hogy amennyiben egy jószágcsoporthoz minden egyes költsége 1%-kal megnő, akkor hosszú távon – változatlanul tekintett költséghatékonyság mellett – a szóban forgó jószág ára is 1%-kal emelkedjék (ár-homogenitás). A költségrugalmasság paramétereinek pozitívnak kell lenniük.

A hosszú távú költségűlyok és az egyéb paraméterek ökonometriaire becsléséhez a fenti (74) költségfüggvény logaritmizált alakját használtam:

$$p_{i,t} = \lambda_{i,t} + \gamma_{i,1}c_{i,1,t} + \gamma_{i,2}c_{i,2,t} + \dots + \gamma_{i,n_i-1}c_{i,n_i-1,t} + (1 - \gamma_{i,1} - \gamma_{i,2} - \dots - \gamma_{i,n_i-1})c_{i,n_i,t} + \varepsilon_{i,t}, \quad (75)$$

ahol a kisbetűk a változók és az árindexek logaritmusát jelölik, $\varepsilon_{i,t}$ a hibatag.

3.2.2. A költség-begyűrűződések meghatározása (Rövid távú dinamika)

A hibakorrekciós megközelítésnek megfelelően a hosszú távú egyensúly definiálása után, a hosszú távval konzisztens rövid távú dinamika a következőképpen írható:

$$\begin{aligned} \Delta p_{i,t} = & \mu_{i,t} + \gamma_{i,1}B_{i,1}(L) \Delta c_{i,1,t} + \gamma_{i,2}B_{i,2}(L) \Delta c_{i,2,t} + \dots + \gamma_{i,n_i-1}B_{i,n_i-1}(L) \Delta c_{i,n_i-1,t} + \\ & + (1 - \gamma_{i,1} - \gamma_{i,2} - \dots - \gamma_{i,n_i-1})B_{i,n_i}(L) \Delta c_{i,n_i,t} - \phi_i \varepsilon_{i,t-1} + \xi_{i,t}, \end{aligned} \quad (76)$$

¹⁰² Az időben növekvő értékek utalhatnak egyrészt arra, hogy a költségűlyok nem megfelelők (azok a költségelemek kaptak relatív nagyobb súlyt, amelyeknek az ára csak lassabban emelkedett), másrészt, hogy releváns költségelemek maradtak ki a modellből.

ahol Δ a differencia, L a késleltetési operátor, $\varepsilon_{i,t}$ az i -dik hosszú távú egyenlet reziduuma, ξ_i pedig a rövid távú egyenlet hibatagja, $\mu_{i,t}$ az időben változó konstans¹⁰³, $\gamma_{i,j}$ a hosszú távú egyenlet költségugalmasságai. A $B_{i,j}(L)$ polinomok $B_{i,j}(L) = b_{i,j,0} + b_{i,j,1}L + b_{i,j,2}L^2 + \dots + b_{i,j,q_{i,j}}L^{q_{i,j}}$ alakúak, ahol a polinom foka (késleltetés hossza) $q_{i,j}$ és ahol a paraméterek összege 1 ($\sum_{k=0}^{q_{i,j}} b_{i,j,k} = 1$). A $B_{i,j}(L)$ polinomok testesítik meg a költség-begyűrűződés dinamikáját.

A (76)-beli megközelítés adaptációja a költség-begyűrűződési folyamat becslésére azonban nem lehet mechanikus. A költség-begyűrűződés folyamatának ugyanis (legalább) négy olyan jellemzője van, mely a (76) egyenlet szokásos ökonometriaai becslíhetőségét megkérdőjelezheti. A négy jellemző a következő:

1. az árakba a költségek csak lassan gyűrűződnek be;
2. a különféle költségtényezők begyűrűződési sebessége eltérő;
3. a késleltetett költségváltozások együtthatói kizárólag nem negatívak lehetnek;
4. a késleltetett költségváltozások együtthatói nem függetlenek egymástól.

Ad (1). A költség-begyűrűződés lassú és fokozatos folyamat, a piaci verseny nem képes azonnali árigazodást kikényszeríteni. Ez azzal magyarázható, hogy a termelőknek, az eladóknak vagy a szolgáltatóknak, és maguknak a vásárlóknak is először fel kell ismerniük a bekövetkezett költségváltozást (és azt elég tartósnak kell gondolniuk ahhoz), hogy maguk is változtassanak áraikon, illetve fogyasztói magatartásukon. Ráadásul az érvényben lévő szerződések, az árfelülvizsgálat nem állandó volta miatt ezek a szándékok és kényszerek még lassabban tudatosulhatnak. További fékező hatása van annak, ha egy költségváltozás olyan termékeknél és szolgáltatásoknál jelentkezik, melyek önmaguk is alapanyagul, inputként szolgálnak más termékek, szolgáltatások előállításához. Ekkor előbb az inputként szolgáló jószág árában kell megjelennie a költségváltozásnak, majd ezen árváltozás hatására következhet be az inputot felhasználó jószág árában változás (költség-továbbgyűrűződése). A fenti okok miatt a költség-begyűrűződés akár több éves folyamat is lehet, melynek kezdeti időszakában lehetséges, hogy még nem is érzékelhető semmiféle árhatás.

Ad (2). Okkal tehetjük fel, hogy bizonyos költségek változásai gyorsabban jelennek meg a fogyasztói árakban, míg a többi lassabban. Például az üzemanyag árában a kőolaj árváltozása akár egy-két hét leforgása alatt is érzékelhető, viszont a szállítás ára, melynek egyik költségelem az üzemanyag, vélhetőleg sokkal hosszabb ideig nem reagál a kőolaj árának megváltozására. Az eltérő begyűrűződési sebességek mögött eltérő piaci struktúrák állhatnak: a monopolisztikus piacokon az árakban vélhetőleg hamarabb lehet érvényesíteni a költségnövekedést, vagy az egyes piacokon alkalmazott árfelülvizsgálati gyakoriság és a szerződések horizontja is a begyűrűződés sebességét befolyásoló tényező lehet.

Ad (3). A $B_i(L)$ polinomok együtthatóinak nem negativitása a költség-begyűrűződés jelenségéből származtatható. A költség-begyűrűződés olyan árváltozási pályának tekinthető, amely a többi ráfordítás árának változatlanlansága mellett egy költségelem árának egyszeri megváltozásakor lenne megfigyelhető. Erről a pályáról felteszem, hogy az egyszeri költségnövekedés(csökkenés)

¹⁰³Hosszú távval teljesen konzisztens rövid távú dinamika esetén a $\mu_{i,t} = \Delta\lambda_{i,t}$ azonosságnak is kell teljesítenie.

fokozatos áremelkedést(csökkenést) okoz, melyet nem szakítanak meg esetleges árcsökkenések(-növekedések). Ez azt jelenti, hogy például a t periódusban bekövetkező költségnövekedés $t + j$ periódusban árcsökkenést vált ki. Egy-egy ilyen negatív paramétert túllendüléssel is lehetne magyarázni, azonban a szinte tetszőleges helyen és alkalommal való felbukkanásuk megkérdőjelezi ezt a magyarázatot.

Ad (4). A költségbegyűrűződés a priori *fokozatos*. Ez azt jelenti, hogy ha egy periódusban a költségváltozás által indukált árváltozás csekély, akkor a következő periódusban nem valószínű, hogy hirtelen naggyá válik. Másképpen fogalmazva, a $B_i(L)$ polinom egymást követő együtthatói nem függetlenek egymástól: ha például az egyik periódusban csak elhanyagolható mértékű a begyűrűződés mértéke, akkor a rákövetkező periódusban is csekély lesz; ha egy adott periódusban viszonylag nagy, akkor az azt követő periódusban is nagy marad. Tehát a begyűrűződési polinom együtthatói csak fokozatosan változnak, a késleltetés függvényében ábrázolva azokat, sima görbét kapnánk. A továbbiakban az osztott késleltetések együtthatóinak a késleltetés függvényében való ábrázolása révén kapott alakzatot *begyűrűződési profil*nak nevezem.

A négy jellemző miatt az alábbi problémák fordulhatnak elő a becslésekben. Egyrészt a begyűrűződés lassú volta rendkívül sok késleltetett paraméter becslését igényli.¹⁰⁴ Másrészt nehéz értelmezni a hosszú késleltetések becslésénél megjelenő sok ellenkező előjelű paramétert, illetve a késleltetések együtthatóinak egyik késleltetési periódusról a másikra való jelentős, véletlen ingadozásait. A hibakorrekció ϕ_i paramétere esetlegesen részben képes kezelni ezeket a problémákat, mivel ha kellően kicsi, akkor a modellben minden egyes költségelem esetében egyforma, fokozatos és lassú lesz a begyűrűződés (valójában geometrikus osztott késleltetési struktúrával), és a hosszú késleltetések helyett elegendő a késleltetett költségváltozásoknak csak az első egy-két, elfogadható nagyságú, nem negatív becslült együtthatójú tagját szerepeltetni. Ez azonban nem elfogadható kompromisszum, mivel a korábbiakban mondtak miatt a költségbegyűrűződések sebessége eltérő lehet, illetve a hibakorrekciós modell által implikált geometrikus osztott késleltetés azt eredményezi, hogy a költségváltozás az első periódusokban mutatja a legnagyobb hatást, ami a priori nem szükségeszerű.

A megoldandó nehézséget tehát a begyűrűződési profilok akkénti becslése jelenti, hogy az osztott késleltetés együtthatói nem negatívak és ábrázolva őket kellőképpen simák legyenek, tehát ne legyenek bennük véletlenszerű "cikk-cakkok" vagy „ugrálások”, de ugyanakkor a becslés változatos formájú begyűrűződési profilokat is eredményezhessen. Ezeket az elvárásokat teljesítő becslési eljárást a következő pontban mutatom be.

3.3. Osztott késleltetés Bayes-i becslése simasági priorral, összeg- és előjelmegkötésekkel

A begyűrűződési profilok alakjainak paraméterekkel rugalmasan változtatható függvényformával történő leírása csak igen sok paraméterrel lehetséges, mivel ezen profilok alakjai változatosak lehet-

¹⁰⁴Kétéves begyűrűződési horizontot feltételezve 5 költségelem esetén – eltekintve a többi paramétertől – ez $5 \cdot 24 - 5 = 115$ paraméter becslését jelenti. Tehát megbízható becsléshez még havi megfigyelési gyakoriság esetén is több évtizednyi adat szükséges.

nek.¹⁰⁵ Ezért a változatos begyűrűződési profilok becslhetősége érdekében azt az előfeltevést alkalmazom, hogy az osztott késleltetés együtthatói csak fokozatosan változnak, ábrázolva azokat, sima görbét követnek. Shiller (1973) tanulmánya ugyanilyen feltevessel élt, de csak egy magyarázó változó esetén, előjel- és összegmegkötések nélkül vezette le a poszterior eloszlásokat. Az alábbiakban a Shiller-féle megközelítést több magyarázó változóra, mégpedig előjel- és összegmegkötések figyelembe vételével általánosítom.¹⁰⁶

A priorok definiálása előtt először vezessünk be néhány jelölést:

$$\begin{aligned} \Delta p_i &= \{\Delta p_{i,1}, \Delta p_{i,2}, \dots, \Delta p_{i,T}\}' & \mu_i &= \{\mu_{i,1}, \mu_{i,2}, \dots, \mu_{i,T}\}' \\ \Delta c_{i,j} &= \{\Delta c_{i,j,1}, \Delta c_{i,j,2}, \dots, \Delta c_{i,j,T}\}' & \varepsilon_i &= \{\varepsilon_{i,0}, \varepsilon_{i,1}, \dots, \varepsilon_{i,T-1}\}' \\ \xi_i &= \{\xi_{i,1}, \xi_{i,2}, \dots, \xi_{i,T}\}' & \beta_{i,j} &= \{\gamma_{i,j} b_{i,j,0}, \gamma_{i,j} b_{i,j,1}, \dots, \gamma_{i,j} b_{i,j,q_{i,j}}\}' \end{aligned}.$$

$\Delta c_{i,j}$ vektorok segítségével definiáljuk a következő mátrixokat:

$$\Delta C_{i,j} = \{L^0(\Delta c_{i,j}), L^1(\Delta c_{i,j}), \dots, L^{q_{i,j}}(\Delta c_{i,j})\},$$

ahol L az eltolás operátor. A bevezetett jelölésekkel írjuk át (76)-et mátrixegyenletként, ahol a jelölések egyszerűsítése érdekében az i indexet elhagyom:

$$\Delta p = \mu + \sum_{j=1}^n \Delta C_j \beta_j + \phi \varepsilon + \xi. \quad (77)$$

Felteszem, hogy a ξ hibatag független azonos normális eloszlást követ 0 várható értékkel és σ^2 varianciával.

Az együtthatókra tett megkötések miatt β_j elemeinek összege γ_j kell legyen ($\sum_{k=0}^{q_j} \beta_{j,k} = \gamma_j$). Ezeket a megkötéseket úgy veszem figyelembe, hogy (77)-ben $\beta_{j,0}$ helyére a $\gamma_j - \sum_{k=1}^{q_j} \beta_{j,k}$ kifejezést írom. A szükséges átalakítások a következők:

$$\begin{aligned} \Delta p_t &= \mu_t + \sum_{j=1}^n \Delta C_{j,t} \beta_j + \phi \varepsilon_t + \xi_t \\ \Delta p_t &= \mu_t + \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{q_j} \Delta c_{j,t-k} \beta_{j,k} + \phi \varepsilon_t + \xi_t \\ \Delta p_t &= \mu_t + \sum_{j=1}^n \left[\left(\gamma_j - \sum_{k=1}^{q_j} \beta_{j,k} \right) \Delta c_{j,t} + \sum_{k=1}^{q_j} \Delta c_{j,t-k} \beta_{j,k} \right] + \phi \varepsilon_t + \xi_t \\ \Delta p_t &= \mu_t + \sum_{j=1}^n \left[\gamma_j \Delta c_{j,t} + \sum_{k=1}^{q_j} (\Delta c_{j,t-k} - \Delta c_{j,t}) \beta_{j,k} \right] + \phi \varepsilon_t + \xi_t. \end{aligned}$$

Vezessük be a $\widetilde{\Delta p}_t = \Delta p_t - \sum_{j=1}^n \gamma_j \Delta c_{j,t}$ és $\widetilde{\Delta c}_{t-k} = (\Delta c_{j,t-k} - \Delta c_{j,t})$ jelöléseket, ekkor folytatva

¹⁰⁵ Ami ráadásul sok a simaságra tett a priori feltételezéssel ellentétes begyűrűződési profilt is megenged. Shiller erről szóló érvelését az értekezés 4 oldalán ismertettem.

¹⁰⁶ Shiller (1975) kísérletet tett az előjelmegkötések kezelésére, azonban nem a teljes poszterior eloszlást vezette le, hanem iteratív módon csak egy pontbecslést adott. A Bayes-i ökonometria által azóta kidolgozott eljárásokkal a probléma ma már kezelhető, így meghatározható a teljes poszterior eloszlás.

az átalakításokat kapjuk:

$$\widetilde{\Delta p}_t = \mu_t + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{q_j} \widetilde{\Delta c}_{j,t-k} \beta_{j,k} + \phi \varepsilon_t + \xi_t.$$

Ha az i indexeket továbbra is elhagyva bevezetjük a:

$$\widetilde{\Delta p} = \{\widetilde{\Delta p}_1, \widetilde{\Delta p}_2, \dots, \widetilde{\Delta p}_T\}' \quad \widetilde{\Delta c}_j = \{\widetilde{\Delta c}_{j,1}, \widetilde{\Delta c}_{j,2}, \dots, \widetilde{\Delta c}_{j,T}\}' \quad \widetilde{\beta}_j = \{\gamma_j b_{j,1}, \dots, \gamma_j b_{j,q_j}\}'$$

vektorokat és $\widetilde{\Delta C}_j = \{L^0(\widetilde{\Delta c}_j), L^1(\widetilde{\Delta c}_j), \dots, L^{q_j}(\widetilde{\Delta c}_j)\}$ mátrixokat, akkor az (77) egyenlethez igen hasonló formát kapunk:

$$\widetilde{\Delta p} = \mu + \sum_{j=1}^n \widetilde{\Delta C}_j \widetilde{\beta}_j + \phi \varepsilon + \xi, \quad (78)$$

aminek likelihoodja a hibatagról tett feltevések miatt:

$$\begin{aligned} f(\widetilde{\Delta p} | \mu, \widetilde{\Delta C}_1, \widetilde{\Delta C}_2, \dots, \widetilde{\Delta C}_n, \widetilde{\beta}_j, \phi, \varepsilon, \sigma^2) &\propto \\ &\propto \sigma^{-T} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\widetilde{\Delta p} - \mu - \sum_{j=1}^n \widetilde{\Delta C}_j \widetilde{\beta}_j - \phi \varepsilon \right)' \left(\widetilde{\Delta p} - \mu - \sum_{j=1}^n \widetilde{\Delta C}_j \widetilde{\beta}_j - \phi \varepsilon \right) \right). \end{aligned}$$

A β_j osztott késleltetés paramétereiről felteszem, hogy az egyik késleltetésről a másira csak fokozatosan változnak. E feltevés formalizálásához definiálok u_j -t, mint a $\widetilde{\beta}_j$ vektor r_j -ed rendű differenciáját:

$$u_j = R_{r_j} \widetilde{\beta}_j,$$

ahol R_{r_j} a $q_j - r_j + 1 \times q_j$ méretű r_j -ed rendű és $q_j - r_j$ rangú differenciamátrix. A dinamikus modell felírásakor elegendő számú késleltetést szerepeltetnek ahhoz, hogy az osztott késleltetés utolsó késleltetettjeihez tartozó együtthatók már nullához közelítsenek, illetve, hogy az utolsó r_j utáni késleltetések együtthatói már nullák legyenek. E feltevéseket R_{r_j} módosításával, pontosabban r_j számú új sorral való bővítésével formalizálom.¹⁰⁷

Shiller (1973) eredeti változatánál nem szerepelt paramétermegkötés, ezért a paraméterek differenciáinak eloszlásáról feltette, hogy független azonos normális eloszlást követ 0 várható értékkel és σ^2/k_j varianciával, ahol k_j adott. Másképpen fogalmazva, a differenciák varianciája a (78) egyenlet hibatagjának varianciájával arányos.

¹⁰⁷ Amennyiben nem lenne paraméterkorlátozás, akkor $q_j = 5$ és $r_j = 2$ esetben:

$$R_{r_j} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

mivel ekkor $q_j + 1$ eleme lesz β_j -nek. A paraméterkorlátozás miatt $\widetilde{\beta}_j$ -nek eggyel kevesebb eleme van (csak q_j), ezért az oszlopok száma is eggyel csökken, viszont a sorok száma változatlan marad, ugyanis az eliminált $\widetilde{\beta}_{j,0}$ elemet továbbra is úgy kell kezelni, hogy érvényes legyen rá a simasági prior, azaz a rákövetkező elemek ($\widetilde{\beta}_{j,1}, \widetilde{\beta}_{j,2}$, stb.) is fokozatosan simuljanak $\widetilde{\beta}_{j,0}$ -hez. Így az R mátrix a következő:

$$R_{r_j} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A paraméter-korlátozás miatt a paraméterek differenciáinak varianciái változatlanok, azonban az $u_j = R_{r_j} \tilde{\beta}_j$ differencia várható értéke már nem nulla, mint a paraméter-korlátozás nélküli esetben, hanem $\eta_j = [-\gamma_j, 0, 0, \dots, 0]'$. Ezért a simasági priorok eloszlása a következő:

$$f(\tilde{\beta}_j | \sigma^2, k_j) \propto (\sigma / \sqrt{k_j})^{-(q_j+1)} \exp\left(-\frac{k_j}{2\sigma^2} (\eta_j - R_{r_j} \tilde{\beta}_j)' (\eta_j - R_{r_j} \tilde{\beta}_j)\right). \quad (79)$$

A költségbegyűrűződés rövid távú dinamikáját leíró részben az előjelmegkötések fontosságát is hangsúlyoztam. Eszerint a paraméterek nem negatívak, és összegük nem nagyobb mint az összehkorlátozás, ami biztosítja az eliminált $\beta_{j,0}$ paraméterek nem negativitását is. Ezt a következő priorral formalizálom:

$$f(\tilde{\beta}_j) \propto I(0 \leq \tilde{\beta}_j, \mathbf{1}' \tilde{\beta}_j \leq \gamma_j), \quad (80)$$

ahol $\mathbf{1}$ az egységvektor és $I(\cdot)$ az indikátorfüggvény, mely 1 értéket vesz fel, ha a kifejezés igaz, egyébként 0-át.

A hibakorrekció ϕ paraméteréről – összhangban a hibakorrekciós modellekkel – felteszem, hogy az nem pozitív:

$$f(\phi) \propto I(\phi \leq 0),$$

tehát, ha a hosszú távú egyensúlyinál nagyobb (kisebb) egy termék ára, akkor az ár növekedése a költségtényezők által indokoltnál mindaddig lassabb (gyorsabb) lesz, amíg el nem éri a hosszú távnak megfelelő egyensúlyi értéket.

μ időbeli alakulása az előfeltevés szerint sima görbét követ, melyet ismét egy simasági priorral reprezentálunk. Ehhez definiáljuk u_μ -t, mint r_μ -ed rendű differenciáját μ -nek:

$$u_\mu = R_{r_\mu} \mu,$$

ahol R_{r_μ} a $T - r_\mu \times T$ méretű, r_μ -ed rendű és $T - r_\mu$ rangú differenciamátrix. Tegyük fel, hogy az u_μ differenciák eloszlása független azonos normális eloszlást követ 0 várható értékkel és σ^2/k_μ varianciával, ahol k_μ adott. Így a prior eloszlása:

$$f(\mu | \sigma^2, k_\mu) \propto (\sigma / \sqrt{k_\mu})^{-(T-r_\mu)} \exp\left(-\frac{k_\mu}{2\sigma^2} (0_{T-r_\mu} - R_{r_\mu} \mu)' (0_{T-r_\mu} - R_{r_\mu} \mu)\right),$$

ahol 0_{T-r_μ} a $T - r_\mu$ elemű nulla oszlopvektort jelöli.

Végül σ^2 prior eloszlására egy nem informatív (konjugált) prior eloszlást feltételezek:

$$f(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2}.$$

Végül az utolsó együtttható utáni együttthatók nulla voltát biztosító két új sor:

$$R = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Belátható, hogy az újabb sorok a mátrix rangját nem befolyásolják.

A poszterior sűrűségfüggvény – a Bayes-szabály szerint – a likelihood és a prior valószínűségek szorzatával arányos:

$$f(\mu, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_n, \phi, \sigma^2 | \tilde{\Delta p}, \tilde{\Delta C}_1, \tilde{\Delta C}_2, \dots, \tilde{\Delta C}_n, \varepsilon, k_\mu, k_1, k_2, \dots, k_n) \propto \\ \propto f(\tilde{\Delta p} | \mu, \tilde{\Delta C}_1, \tilde{\Delta C}_2, \dots, \tilde{\Delta C}_n, \tilde{\beta}_j, \phi, \varepsilon, \sigma^2) f(\mu | \sigma^2, k_\mu) \prod_{j=1}^n f(\tilde{\beta}_j | \sigma^2, k_j) \prod_{j=1}^n f(\tilde{\beta}_j) f(\phi) f(\sigma^2).$$

Behelyettesítve a megfelelő sűrűségfüggvényeket, az alábbi képletet kapjuk:

$$f(\mu, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_n, \phi, \sigma^2 | \tilde{\Delta p}, \tilde{\Delta C}_1, \tilde{\Delta C}_2, \dots, \tilde{\Delta C}_n, \varepsilon, k_\mu, k_1, k_2, \dots, k_n) \propto \\ \propto \sigma^{-T} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\tilde{\Delta p} - \mu - \sum_{j=1}^n \tilde{\Delta C}_j \tilde{\beta}_j - \phi \varepsilon \right)' \left(\tilde{\Delta p} - \mu - \sum_{j=1}^n \tilde{\Delta C}_j \tilde{\beta}_j - \phi \varepsilon \right) \right) \cdot \\ \cdot \left(\sigma / \sqrt{k_\mu} \right)^{-(T-r_\mu)} \exp \left(-\frac{k_\mu}{2\sigma^2} (0_{T-r_\mu} - R_{r_\mu} \mu)' (0_{T-r_\mu} - R_{r_\mu} \mu) \right) \cdot \\ \cdot \prod_{j=1}^n \left(\sigma / \sqrt{k_j} \right)^{-(q_j+1)} \exp \left(-\frac{k_j}{2\sigma^2} (\eta_j - R_{r_j} \tilde{\beta}_j)' (\eta_j - R_{r_j} \tilde{\beta}_j) \right) \cdot \\ \cdot \prod_{j=1}^n I(0 \leq \tilde{\beta}_j, \mathbf{1}' \tilde{\beta}_j \leq \gamma_j) I(\phi \leq 0) \frac{1}{\sigma^2}. \quad (81)$$

A következő jelölésekkel:

$$v = \begin{bmatrix} \tilde{\Delta p} \\ 0_{T-r_\mu} \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} I_T & \tilde{\Delta C}_1 & \tilde{\Delta C}_2 & \dots & \tilde{\Delta C}_n & \varepsilon \\ \sqrt{k_\mu} R_{r_\mu} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{k_1} R_{r_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{k_2} R_{r_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{k_n} R_{r_n} & 0 \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} \mu \\ \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\beta}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\beta}_n \\ \phi \end{bmatrix},$$

ahol v és θ vektoroknak sorrendben $T + T - r_\mu + \sum_{j=1}^n (q_j + 1)$ és $T + \sum_{j=1}^n q_j + 1$ soruk van, míg a V mátrix $\left(T + T - r_\mu + \sum_{j=1}^n (q_j + 1) \right) \times \left(T + \sum_{j=1}^n q_j + 1 \right)$ méretű, a (81) poszteriort rövidebben is felírhatjuk:

$$f(\mu, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_n, \phi, \sigma^2 | \tilde{\Delta p}, \tilde{\Delta C}_1, \tilde{\Delta C}_2, \dots, \tilde{\Delta C}_n, \varepsilon, k_\mu, k_1, k_2, \dots, k_n) \propto \\ \propto \sigma^{-(T+T-r_\mu+2+\sum_{j=1}^n (q_j+1))} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} (v - V\theta)' (v - V\theta) \right) \prod_{j=1}^n I(0 \leq \tilde{\beta}_j, \mathbf{1}' \tilde{\beta}_j \leq \gamma_j) I(\phi \leq 0). \quad (82)$$

Ha nem lennének előjelmegkötések, ebből a poszterior sűrűségfüggvényből analitikusan is meghatározhatók lennének a paraméterek poszterior momentumai. Az előjelmegkötések miatt azonban a paraméterek poszterior momentumainak meghatározásához a Gibbs-féle mintavételt alkalmazom.

A Gibbs-féle mintavételhez a következő feltételes sűrűségfüggvényekhez tartozó eloszlásokat kell

meghatározni:

$$\begin{aligned}
& f\left(\sigma^2|\mu, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_n, \phi, \tilde{\Delta}p, \widetilde{\Delta C}_1, \widetilde{\Delta C}_2, \dots, \widetilde{\Delta C}_n, \varepsilon, k_\mu, k_1, k_2, \dots, k_n\right) \\
& f\left(\mu|\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_n, \phi, \sigma^2, \tilde{\Delta}p, \widetilde{\Delta C}_1, \widetilde{\Delta C}_2, \dots, \widetilde{\Delta C}_n, \varepsilon, k_\mu, k_1, k_2, \dots, k_n\right) \\
& f\left(\phi|\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_n, \mu, \sigma^2, \tilde{\Delta}p, \widetilde{\Delta C}_1, \widetilde{\Delta C}_2, \dots, \widetilde{\Delta C}_n, \varepsilon, k_\mu, k_1, k_2, \dots, k_n\right) \\
& f\left(\tilde{\beta}_1|\phi, \tilde{\beta}_{-1}, \mu, \sigma^2, \tilde{\Delta}p, \widetilde{\Delta C}_1, \widetilde{\Delta C}_2, \dots, \widetilde{\Delta C}_n, \varepsilon, k_\mu, k_1, k_2, \dots, k_n\right) \\
& f\left(\tilde{\beta}_2|\phi, \tilde{\beta}_{-2}, \mu, \sigma^2, \tilde{\Delta}p, \widetilde{\Delta C}_1, \widetilde{\Delta C}_2, \dots, \widetilde{\Delta C}_n, \varepsilon, k_\mu, k_1, k_2, \dots, k_n\right) \\
& \vdots \\
& f\left(\tilde{\beta}_n|\phi, \tilde{\beta}_{-n}, \mu, \sigma^2, \tilde{\Delta}p, \widetilde{\Delta C}_1, \widetilde{\Delta C}_2, \dots, \widetilde{\Delta C}_n, \varepsilon, k_\mu, k_1, k_2, \dots, k_n\right),
\end{aligned}$$

ahol $\tilde{\beta}_{-j}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) felírásban a $-j$ index a j -ik $\tilde{\beta}_j$ vektor kivételével az összes többi $\tilde{\beta}$ vektort tartalmazó halmazt. Bár a μ , ϕ , és $\tilde{\beta}_j$ feltételes eloszlások meghatározása, lépéseiket tekintve nagymértékben hasonlítanak egymásra, mégis érdemes mindegyiket külön-külön bemutatni, mivel a meghatározás részleteiben jelentős eltérések vannak.

A σ^2 feltételes sűrűségfüggvénye rögzített $\mu, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_n, \phi$ mellett, vagy másképpen, rögzített v , V és θ mellett:

$$\begin{aligned}
& f\left(\sigma^2|\mu, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_n, \phi, \tilde{\Delta}p, \widetilde{\Delta C}_1, \widetilde{\Delta C}_2, \dots, \widetilde{\Delta C}_n, \varepsilon, k_\mu, k_1, k_2, \dots, k_n\right) \propto \\
& \propto \sigma^{-(T+T-r_\mu+2+\sum_{j=1}^n(q_j+1))} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(v-V\theta)'(v-V\theta)\right), \tag{83}
\end{aligned}$$

ami a függelék A.2.2. pontja alapján $T+T-r_\mu+\sum_{j=1}^n(q_j+1)$ szabadságfokú és $(v-V\theta)'(v-V\theta)$ – ez jelen esetben nem valószínűségi változó – lokációs paraméterű inverz gamma-2 eloszlás sűrűségfüggvénye.¹⁰⁸ Így tehát σ^2 inverz gamma-2 eloszlást követ a felsorolt paraméterekkel.

A μ feltételes sűrűségfüggvényének meghatározásához használjuk ki, hogy amennyiben $\sigma^2, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_n, \phi$ rögzített, (82) az alábbi alakra egyszerűsíthető:

$$\begin{aligned}
& f\left(\mu|\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_n, \phi, \sigma^2, \tilde{\Delta}p, \widetilde{\Delta C}_1, \widetilde{\Delta C}_2, \dots, \widetilde{\Delta C}_n, \varepsilon, k_\mu, k_1, k_2, \dots, k_n\right) \propto \\
& \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\tilde{\Delta}p - \mu - \sum_{j=1}^n \widetilde{\Delta C}_j \tilde{\beta}_j - \phi\varepsilon\right)' \left(\tilde{\Delta}p - \mu - \sum_{j=1}^n \widetilde{\Delta C}_j \tilde{\beta}_j - \phi\varepsilon\right)\right) \cdot \\
& \cdot \exp\left(-\frac{k_\mu}{2\sigma^2}(0_{T-r_\mu} - R_{r_\mu}\mu)'(0_{T-r_\mu} - R_{r_\mu}\mu)\right).
\end{aligned}$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$z_\mu = \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}p - \sum_{j=1}^n \widetilde{\Delta C}_j \tilde{\beta}_j - \phi\varepsilon \\ 0_{T-r_\mu} \end{bmatrix} \quad Z_\mu = \begin{bmatrix} I_T \\ \sqrt{k_\mu} R_{r_\mu} \end{bmatrix}$$

¹⁰⁸Minden egyes indikátor függvény értéke 1 a feltételes poszteriorban, ha a feltételben szereplő paraméterekre teljesülnek az egyenlőtlenségi megkötések, ezért itt külön nem szerepeltetem. Kiindulva egy lehetséges (előjelmegkötéseknek megfelelő) paraméterkombinációból, a mintvételezési eljárás biztosítja, hogy a paraméterek mindvégig az egyenlőtlenségi megkötéseknek megfelelőek legyenek.

E jelölésekkel μ feltételes sűrűségfüggvénye:

$$f\left(\mu|\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_n, \phi, \sigma^2, \tilde{\Delta}p, \widetilde{\Delta C}_1, \widetilde{\Delta C}_2, \dots, \widetilde{\Delta C}_n, \varepsilon, k_\mu, k_1, k_2, \dots, k_n\right) \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(z_\mu - Z_\mu\mu)'(z_\mu - Z_\mu\mu)\right).$$

Felhasználva a (3) dekompozíciós szabályt, kapjuk:

$$\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(z_\mu - Z_\mu\mu)'(z_\mu - Z_\mu\mu)\right) \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}[(z_\mu - Z_\mu\hat{\mu})'(z_\mu - Z_\mu\hat{\mu}) + (\mu - \hat{\mu})'Z_\mu'Z_\mu(\mu - \hat{\mu})]\right), \quad (84)$$

ahol $\hat{\mu} = [Z_\mu'Z_\mu]^{-1}Z_\mu z_\mu$, ami egyben az OLS becslőfüggvény.¹⁰⁹ Bővítve a (84) kifejezést $|\sigma^2[Z_\mu'Z_\mu]^{-1}|^{-\frac{1}{2}}$ szorzattal, és kihasználva, hogy $\hat{\mu}$ nem valószínűségi változó, kapjuk:

$$f\left(\mu|\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_n, \phi, \sigma^2, \tilde{\Delta}p, \widetilde{\Delta C}_1, \widetilde{\Delta C}_2, \dots, \widetilde{\Delta C}_n, \varepsilon, k_\mu, k_1, k_2, \dots, k_n\right) \propto |\sigma^2[Z_\mu'Z_\mu]^{-1}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}[(\mu - \hat{\mu})'Z_\mu'Z_\mu(\mu - \hat{\mu})]\right), \quad (85)$$

ami egy többváltozós normális eloszlás sűrűségfüggvénye $\hat{\mu}$ várható vektorral és $\sigma^2[Z_\mu'Z_\mu]^{-1}$ kovariancia mátrixszal.

A $\tilde{\beta}_j$ feltételes sűrűségfüggvényének meghatározásához használjuk ki, hogy amennyiben $\sigma^2, \mu, \tilde{\beta}_{-j}, \phi$ rögzített, (82) az alábbi alakra egyszerűsíthető:

$$f\left(\tilde{\beta}_j|\phi, \tilde{\beta}_{-j}, \mu, \sigma^2, \tilde{\Delta}p, \widetilde{\Delta C}_1, \widetilde{\Delta C}_2, \dots, \widetilde{\Delta C}_n, \varepsilon, k_\mu, k_1, k_2, \dots, k_n\right) \propto \sigma^{-T} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\tilde{\Delta}p - \mu - \sum_{l=1}^n \widetilde{\Delta C}_l \tilde{\beta}_l - \phi\varepsilon\right)' \left(\tilde{\Delta}p - \mu - \sum_{l=1}^n \widetilde{\Delta C}_l \tilde{\beta}_l - \phi\varepsilon\right)\right) \cdot \left(\sigma/\sqrt{k_j}\right)^{-(q_j+1)} \exp\left(-\frac{k_j}{2\sigma^2}(\eta_j - R_{r_j}\tilde{\beta}_j)'(\eta_j - R_{r_j}\tilde{\beta}_j)\right) I(0 \leq \tilde{\beta}_j, \mathbf{1}'\tilde{\beta}_j \leq \gamma_j). \quad (86)$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$z_j = \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}p - \mu - \sum_{l=-j}^n \widetilde{\Delta C}_l \tilde{\beta}_l - \phi\varepsilon \\ \eta_j \end{bmatrix} \quad Z_j = \begin{bmatrix} \widetilde{\Delta C}_j \\ \sqrt{k_j}R_{r_j} \end{bmatrix}.$$

E jelölésekkel $\tilde{\beta}_j$ feltételes sűrűségfüggvénye:

$$f\left(\tilde{\beta}_j|\phi, \tilde{\beta}_{-j}, \mu, \sigma^2, \tilde{\Delta}p, \widetilde{\Delta C}_1, \widetilde{\Delta C}_2, \dots, \widetilde{\Delta C}_n, \varepsilon, k_\mu, k_1, k_2, \dots, k_n\right) \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(z_j - Z_j\tilde{\beta}_j)'(z_j - Z_j\tilde{\beta}_j)\right) I(0 \leq \tilde{\beta}_j, \mathbf{1}'\tilde{\beta}_j \leq \gamma_j).$$

¹⁰⁹ $Z_\mu'Z_\mu$ invertálhatóságát a függelékben bizonyítom.

Felhasználva ismét a (3) dekompozíciós szabályt, kapjuk:

$$\begin{aligned} & \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(z_j - Z_j \tilde{\beta}_j \right)' \left(z_j - Z_j \tilde{\beta}_j \right) \right) \propto \\ & \propto \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\left(z_j - Z_j \hat{\beta}_j \right)' \left(z_j - Z_j \hat{\beta}_j \right) + \left(\tilde{\beta}_j - \hat{\beta}_j \right)' Z_j' Z_j \left(\tilde{\beta}_j - \hat{\beta}_j \right) \right] \right), \end{aligned} \quad (87)$$

ahol $\hat{\beta}_j = [Z_j' Z_j]^{-1} Z_j z_j$, amely az OLS becslőfüggvény.¹¹⁰ Bővítve a (87) kifejezést $\left| \sigma^2 [Z_j' Z_j]^{-1} \right|^{-\frac{1}{2}}$ szorzattal és kihasználva, hogy $\hat{\beta}_j$ nem valószínűségi változó, kapjuk:

$$\begin{aligned} & f \left(\tilde{\beta}_j | \phi, \tilde{\beta}_{-j}, \mu, \sigma^2, \tilde{\Delta} p, \tilde{\Delta} C_1, \tilde{\Delta} C_2, \dots, \tilde{\Delta} C_n, \varepsilon, k_\mu, k_1, k_2, \dots, k_n \right) \propto \\ & \propto \left| \sigma^2 [Z_j' Z_j]^{-1} \right|^{-\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\left(\tilde{\beta}_j - \hat{\beta}_j \right)' Z_j' Z_j \left(\tilde{\beta}_j - \hat{\beta}_j \right) \right] \right) I \left(0 \leq \tilde{\beta}_j, \mathbf{1}' \tilde{\beta}_j \leq \gamma_j \right), \end{aligned} \quad (88)$$

ami egy csonkolt többváltozós normális eloszlás sűrűségfüggvénye $\hat{\beta}_j$ lokációs vektorral és $\sigma^2 [Z_j' Z_j]^{-1}$ kovariancia mátrixszal.

Ugyan a nem negativitási korlátok miatt az együttes eloszlásból közvetlenül nem lehet mintát generálni, viszont az értekezés 1.6.2. oldalán ismertetett módszerrel $\tilde{\beta}_j$ minden egyes elemére mintát lehet generálni a Gibbs-mintavételi és az inverz eloszlásból való mintavétel technikájával.

Végül ϕ feltételes sűrűségfüggvényének meghatározásához használjuk ki, hogy amennyiben $\sigma^2, \mu, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_n$ rögzített, (82) az alábbi alakra egyszerűsíthető:

$$\begin{aligned} & f \left(\phi | \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_n, \mu, \sigma^2, \tilde{\Delta} p, \tilde{\Delta} C_1, \tilde{\Delta} C_2, \dots, \tilde{\Delta} C_n, \varepsilon, k_\mu, k_1, k_2, \dots, k_n \right) \propto \\ & \propto \sigma^{-T} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\tilde{\Delta} p - \mu - \sum_{j=1}^n \tilde{\Delta} C_j \tilde{\beta}_j - \phi \varepsilon \right)' \left(\tilde{\Delta} p - \mu - \sum_{j=1}^n \tilde{\Delta} C_j \tilde{\beta}_j - \phi \varepsilon \right) \right) I \left(\phi \leq 0 \right). \end{aligned}$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$z_\phi = \left[\tilde{\Delta} p - \mu - \sum_{j=1}^n \tilde{\Delta} C_j \tilde{\beta}_j \right] \quad Z_\phi = [\varepsilon].$$

E jelölésekkel ϕ feltételes sűrűségfüggvénye:

$$\begin{aligned} & f \left(\phi | \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_n, \mu, \sigma^2, \tilde{\Delta} p, \tilde{\Delta} C_1, \tilde{\Delta} C_2, \dots, \tilde{\Delta} C_n, \varepsilon, k_\mu, k_1, k_2, \dots, k_n \right) \propto \\ & \propto \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} (z_\phi - Z_\phi \phi)' (z_\phi - Z_\phi \phi) \right) I \left(\phi \leq 0 \right). \end{aligned}$$

Felhasználva a (3) dekompozíciós szabályt, kapjuk:

$$\begin{aligned} & \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} (z_\phi - Z_\phi \phi)' (z_\phi - Z_\phi \phi) \right) \propto \\ & \propto \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\left(z_\phi - Z_\phi \hat{\phi} \right)' \left(z_\phi - Z_\phi \hat{\phi} \right) + \left(\phi - \hat{\phi} \right)' Z_\phi' Z_\phi \left(\phi - \hat{\phi} \right) \right] \right), \end{aligned} \quad (89)$$

¹¹⁰ $Z_j' Z_j$ invertálhatóságát a függelékben bizonyítom.

ahol $\hat{\phi} = \left[Z'_{\phi} Z_{\phi} \right]^{-1} Z_{\phi} z_{\phi}$, ami egyben az OLS becslőfüggvény.¹¹¹ Bővítve a (89) kifejezést $\left| \sigma^2 \left[Z'_{\phi} Z_{\phi} \right]^{-1} \right|^{-\frac{1}{2}}$ szorzattal és kihasználva, hogy $\hat{\phi}$ nem valószínűségi változó kapjuk:

$$f\left(\phi | \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_n, \mu, \sigma^2, \tilde{\Delta}p, \tilde{\Delta}C_1, \tilde{\Delta}C_2, \dots, \tilde{\Delta}C_n, \varepsilon, k_{\mu}, k_1, k_2, \dots, k_n\right) \propto \left| \sigma^2 \left[Z'_{\phi} Z_{\phi} \right]^{-1} \right|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\left(\phi - \hat{\phi}\right)' Z'_{\phi} Z_{\phi} \left(\phi - \hat{\phi}\right) \right]\right) I(\phi \leq 0), \quad (90)$$

ami egy egyváltozós csonkolt normális eloszlás sűrűségfüggvénye $\hat{\phi}$ lokációs paraméterrel és $\sigma^2 \left[Z'_{\phi} Z_{\phi} \right]^{-1}$ varianciával. Ebből az eloszlásból véletlen számok az inverz eloszlás technikával generálhatók.

3.4. Felhasznált adatok

A modell kiinduló alapadatai a KSH által 160 csoportos bontásban közölt havi fogyasztói árindexek az 1992. január – 2005. december periódusra. A fogyasztói árakat meghatározó költségek árindexeinek forrása az MNB (árfolyamindexek), Európai Központi Bank (külföldi árak árindexe), KSH (havi átlagbérek nemzetgazdasági ágazatok szerinti megbontásban), illetve jogszabályok (benzin tételes adói, ÁFA törvények, bérekre rakódó terhek).

A fogyasztói árindex kosárban szereplő termékeket, szolgáltatásokat általános forgalmi adó terheli (más és más ÁFA kulcs alá tartozóan), azonban a modellben a nettó, azaz az ÁFA (változás) hatásait figyelmen kívül hagyó árindexeket alkalmazom. Az ÁFA kulcsok és besorolások az utóbbi években többször is változtak, így ez az adóféleség nem tekinthető a model $\lambda_{i,t}$ tagja által magába foglalt fix „költséghányadnak”. A nettó árak használata továbbá jobban összhangban van a költségbegyűrűződéses modell koncepciójával, mivel a hatályos szabályozás szerint a költségelemek ÁFA-ja visszaigényelhető, ezért változásukat a végső nettó árak (elvileg) nem tükrözik.¹¹²

Jövedéki termékek esetén (szeszes italok, dohány, kávé, járműüzemanyag) az árak jövedéki adó tartalma jelentős, melynek adótételei az utóbbi években is többször változtak.¹¹³ A jövedéki adó-változás fogyasztóra történő átháríthatósága a mikroökonómiában ismert módon a termék keresletének és kínálatának árugalmasságától függ. Amennyiben a kereslet rugalmatlan (például járműüzemanyag esetében), akkor az árakban akár teljes mértékben is megjelenhetnek az adóváltozások. Ezért a fogyasztói kosár járműüzemanyag sorát „megtisztítottam” az adóktól (ÁFA-tól és a tételes adóktól), és az így nyert nettó árakat tekintettem piaci áraknak.¹¹⁴ A szeszes italok, a dohány és a kávé esetében is hasonló módszerrel lehetne élni, azonban e jöszágok piaca feltehetően árérzékenyebb, tehát a jövedéki adóváltozások valószínűsíthetően nem teljesen háríthatók át a fogyasztókra, így e jöszágok körénél a jövedéki adó-változás hatásait nem szűrtem ki.

¹¹¹ $Z'_{\phi} Z_{\phi}$ invertálhatóságát a függelékben bizonyítom.

¹¹² A végső fogyasztókat terhelő ÁFA kulcs megváltozásának is lehet olyan hatása, mely a nettó árak kialakítását is befolyásolja: például ÁFA emelés (csökkentés) nem teljes áthárítása (átadása) a fogyasztókra a nettó ár megfelelő csökkentésével (emelésével). Gábrriel-Reiff (2006) az ÁFA kulcsok változását vizsgálva ki mutatott ilyen (aszimmetrikus) hatásokat. Másrészt az ÁFA késve igényelhető vissza, így valójában egy likviditási korlátot jelent, így ha változik az ÁFA kulcs, akkor ez a likviditási korlát is változik. Ezeket a hatásokat a modell figyelmen kívül hagyja.

¹¹³ 2005. decemberében például a járműüzemanyag esetében az ÁFA-val növelt jövedéki adótartalom a végső fogyasztói ár mintegy 46%-a volt

¹¹⁴ Abban az esetben, ha az üzemanyag költségtényezőként szerepelt, a jövedéki adót is tartalmazó bruttó árat használtam. Az egyéb szolgáltatások körében ez a hatályos szabályokkal egyezik, mivel az üzemanyag ÁFA-ja nem vonható le. A fuvarozók visszaigényelhetik az üzemanyag ÁFA-ját, ezért ilyen esetekben elvileg a tételes adókat tartalmazó nettó áraknak kellene szerepelniük a bruttó árak helyett.

A fogyasztói árindex 160 csoportjából a szabályozott árak alakulását nem modellezem, mivel a költségbeigazításos modell csak a (verseny)piaccal rendelkező termékek árát magyarázza. 17 jószágcsoporthoz tekintetem szabályozottnak: a csatorna díj, az óvodai és iskolai étkeztetés, a vezetékes gáz, a gyógyszerek, a helyi tömegközlekedés, a lakbér, a munkába és iskolába történő utazás költségei, a postai díjak, a személyszállítás, a szerencsejátékok, a központi és távfűtés, a távolsági tömegközlekedés, a telefon, a TV előfizetés¹¹⁵, az elektromos áram díja és a vízdíj. E szolgáltatások és termékek 2005-ben a fogyasztói kosár 20,3%-át tették ki.

A fennmaradó 143 jószágcsoporthoz nettó árakat szezonális igazítás után 43 csoportba aggregáltam. A cél az volt, hogy a hasonló költség szerkezetű és hasonló felhasználásra irányuló termékek ár alakulását egy egyenlet írja le, biztosítva, a modellegyenletek számának kellő áttekinthetőségét. Az aggregálásnál a KSH 2005. évi súlyozását vettem alapul. A függelék 10-a.–10-b. táblázataiban részletesen ismertetem az aggregáláshoz használt besorolást.¹¹⁶

3.5. A modell paraméterezése és becslési eredményei

A költségbeigazításos modell becsléséhez mindenekelőtt meg kellett határozni, hogy az egyes jószágcsoporthoz mely főbb költségelemekből tevődnek össze. A jószágcsoporthoz túlnyomó többségénél azt feltételeztem, hogy a költségelemek között szerepel a szállítás, az elektromos energia, a vezetékes gáz, illetve a bérköltség.¹¹⁷ E költségelemek szerepeltetése magától értetődő: az árukat áruházakba kell szállítani, az üzleteket világítani és fűteni kell, az üzletekben az alkalmazottaknak, illetve a szolgáltatást nyújtóknak munkabért kell fizetni.

A hasonló külföldi termékek forintosított árakat is költségtényezőként tekintetem azoknál a jószágcsoporthoz, amelyek termékeinek, alapanyagainak jelentős hányada külföldről származik. A forintosított árindexeket szintben az árfolyamindex és a külföldi ár szorzataként állítottam elő.¹¹⁸ Technikailag külön költségtényezőként kezeltem az árfolyamot és a külföldi árindexeket, azonban azonos $\gamma_{i,j}$ együtthatókat rendeltem hozzájuk, lehetővé téve, hogy a külföldi árak és az árfolyam megváltozása eltérő sebességgel gyűrűzzön be a fogyasztói árakba. Külföldi árindexnek az eurózóna tagállamainak súlyozott fogyasztói árindexeit, azon belül is az adott hazai jószágcsoporthoz hasonló, vagy azzal azonos elemek, jószágcsoporthoz árindexeit választottam, árfolyamnak pedig ebből következően az EURHUF árfolyamot. Kivételt képez ez alól a benzin alapanyagául szolgáló Brent kőolaj ára, melynek Londonban dollárban jegyzett árakat vettem alapul, amit az USDHUF árfolyammal váltottam át forintra.

Továbbá egyes jószágcsoporthoz további költségelemeket is szerepeltettem: az élelmiszerek esetében a megfelelő mezőgazdasági felvásárlási árakat, illetve azokat a termékeket, melyek önmagukban is a fogyasztói árindex részét képezik, de egyben más, a fogyasztói kosárban szereplő jószág

¹¹⁵ A kötelezően fizetendő TV üzemeltetési díjat 2002. májusában törölték el.

¹¹⁶ A KSH által közölt „saját tulajdonú lakás” árindexe – mely a fogyasztói kosár jelentős, 5,869%-át teszi ki – már önmagában is kompozit árindex, mert fele részben a „lakásjavító, -karbantartó cikkek”, fele részben a „lakásjavítás, -karbantartás” árindexekből képzik, ezért a „saját tulajdonú lakás árindexét” felosztottam összetevői között, megnövelve 2,9345% ponttal a „lakásjavító, -karbantartó cikkek” és a „lakásjavítás, -karbantartás” fogyasztói árindexben szereplő súlyait.

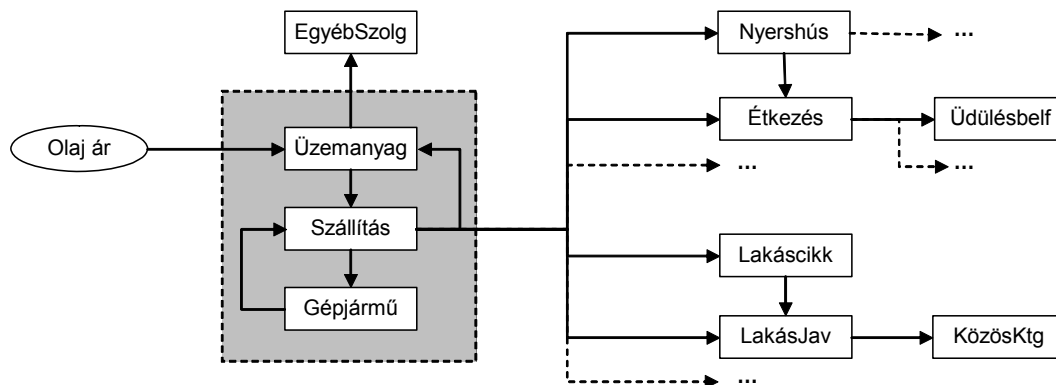
¹¹⁷ A szállítás, elektromos energia, vezetékes gáz maguk is egyben a fogyasztói árindex részei. Valójában ezek termelői áraira lenne szükség, de mivel ilyen adatok nem állnak rendelkezésre, azzal az implicit feltételezéssel éltem, hogy a termelői és a fogyasztói árak *változásai* azonosak.

¹¹⁸ A logaritimizált változóknál a logaritmált forintosított árindex a logaritmált árfolyamindex és a logaritmált külföldi árindex összegeként áll elő.

„inputjai” is, mint például a kenyér esetében a liszt, az édességeknél a cukor, a tartósított élelmiszereknek a friss zöldség, gyümölcs, az étkeztetésnél a nyershús, a pékáru és a tartósított élelmiszer, a ruházati termékeknek a szövet stb.¹¹⁹

A sokrétű be- és továbbgyűrűződésről ad áttekintést a 12. ábra, melyen az olajár megváltozása által kiváltott árváltozások sora nyomomonkövethető.¹²⁰

12. ábra. Az olaj árának begyűrűződése a fogyasztói árakba



Az ábrán a szürke terület jelöli azt a jószágcsoporthatározó blokkot, amelynek árai szimultán módon határozódnak meg. A nyilak a begyűrűződés irányait jelölik.

Az empirikus elemzés áttekinthetőségét segítve, a továbbiakban a nyershúst minden lépésnél külön is kiemelem. A nyershús árát meghatározó költségelemként a szállítás, a villamos energia, a vezetékes gáz, a kereskedelemben foglalkoztatottak bérköltsége és a vágósertés felvásárlási ára szerepel.

A jószágcsoporthatározó költségelemeinek meghatározását követően, a (75) modellegyenletekben szereplő $\gamma_{i,j}$ együtthatókat és $\lambda_{i,t}$ időben változó paramétereket határoztam meg. A $\gamma_{i,j}$ együtthatók értékeinél szakértői becslésekre támaszkodtam: egyrészt felhasználtam az ágazati kapcsolatok mérlegét, másrészt a Magyar Nemzeti Bank inflációs szakértőinek előrejelzési tapasztalatait.¹²¹ A kalibrálás során egyforma súlyt adtam az olyan költségelemeknek, melyek majdnem minden jószágcsoporthatározónál szerepelnek (szállítás, villany, gáz), amennyiben szakértői megfontolás nem adott egyéb javaslatot.

A következő lépésben a (75) egyenlet időben változó $\lambda_{i,t}$ paramétereit határoztam meg. Ehhez azzal az előfeltevéssel éltem, hogy $\lambda_{i,t}$ időben csak fokozatosan változik. E feltevés mögött az áll, hogy fokozatosan alakulnak ki azok a tényezők, amelyek befolyásolhatják $\lambda_{i,t}$ -t. Feltehetően a technológiai javulás is fokozatos, nincsenek benne nagy ugrások (korszakalkotó találmányok, jelentős gyártástechnológiai innovációk stb.), másrészt a piaci versenyhelyzet is csak lassan változik (új

¹¹⁹ A költségtényezőként szerepeltetett jószágoknál is a termelői árakra lett volna szükség.

¹²⁰ Az áttekintés nem lehet teljes, mert a szállítás árváltozása szinte minden jószágcsoporthatározó árába begyűrűződik, melyek közül egyes jószágcsoporthatározók újabb és újabb csoportok áraiba gyűrűződnek be, és így tovább...

¹²¹ Ehelyett is szeretnék köszönetet mondani Gyenes Zoltánnak és Villányi Katalinnak a nélkülözhetetlen konzultációkért.

kereskedők megtelepedése, termékek piacra vezetése). Összhangban a fokozatosságról tett feltevés-sel, $\lambda_{i,t}$ paramétereket a következőképpen határoztam meg. Adottnak vettem a $\gamma_{i,j}$ (kalibrált) együtthatókat a (75) egyenletben, aminek segítségével kiszámoltam a

$$\lambda_{i,t} + \varepsilon_{i,t} = p_{i,t} - [\gamma_{i,1}c_{i,1,t} + \gamma_{i,2}c_{i,2,t} + \dots + \gamma_{i,n_i-1}c_{i,n_i-1,t} + (1 - \gamma_{i,1} - \gamma_{i,2} - \dots - \gamma_{i,n_i-1})c_{i,n_i,t}] \quad (91)$$

maradékokat ($\lambda_{i,t} + \varepsilon_{i,t}$) az 1996. januártól 2005. decemberéig terjedő intervallumra, majd Hodrick–Prescott-féle szűrő segítségével (Hodrick–Prescott 1980, 1997) állítottam elő a $\lambda_{i,t}$ idősort. A Hodrick–Prescott-féle szűrő alkalmazásánál olyan értéket választottam, amely kellően sima $\lambda_{i,t}$ pályákat állít elő.¹²²

A modellben az egyes jószágcsoportoknál használt költségelemeket és a hozzájuk tartozó szá-kértői alapon meghatározott $\gamma_{i,j}$ költségrugalmassági együtthatókat a melléklet 11-a.–11-d. táblá-zataiban ismertetem részletesen.

A nyershúst illetően a szállítás a priori költségűsúlyát 5%-nak, a villamos energiáét 2.5%-nak, a vezetékes gázét 2.5%-nak, a kereskedelembe foglalkoztatottak bérköltségét 15%-nak végül a vágósertés felvásárlási költségét 75%-nak választottam.

A hosszú távú egyenletek illeszkedését bemutató 20-a.–20-d. ábrákból látszik, hogy a költségele-mek árindexeivel jól közelíthetők a fogyasztói árak alakulása. Az ábrák alapján az is egyértelmű, hogy legpontosabban a szolgáltatások árai magyarázhatók, kb $\pm 2\%$ -os hibahatárral. Az átlagos volatilitású termékek körénél a hibahatár $\pm 5\%$ körüli. A volatilisabb árú termékeknél, mint például a feldolgozatlan élelmiszerek, vagy az üzemanyagok az eltérések is nagyobbak, azonban átlagosan $\pm 10\%$ -os hibahatáron belül maradnak.

A nyershús költségtényezőinek alakulása jól tükröződik a nyershús fogyasztói árában. Az is látható, hogy főleg a vágósertés felvásárlási árának változása miatti ciklusok a nyershús fogyasztói árában csak tompítottan jelennek meg, ennek következtében a modell által feltett költség és a tényleges fogyasztói ár közötti rés (az egyensúlyi markup-tól való eltérés) $\pm 10\%$ -os sávban in-gadozik.

A hosszú távú egyenlet reziduumainak előállítását követően a rövid távú egyenletek paraméterei-nek poszterior eloszlását állítottam elő az előző pontban bemutatott mintavételi eljárással. A simasági priorok relatív varianciái a következők voltak. Az időben változó konstanshoz tartozó re-latív varianciára $k_{i,\mu} = 14400$ értéket alkalmaztam, mely egyben a havi adatokra javasolt Hodrick–Prescott filter paraméterének az értéke. Az osztott késleltetés paramétereinek simasági priorjához a $k_{i,j} = 1/\gamma_{i,j}$ értéket választottam, biztosítva ezáltal, hogy az osztott késleltetések relatív vál-tozékonyasága a priori egyforma legyen, tehát ne függjön az adott változóhoz tartozó költségrugal-masság értékétől (az osztott késleltetés paramétereinek összege). Ezzel a választással az osztott késleltetések megfelelő simasága biztosítható volt. Az egyes költségelemeknél feltételezett osztott késleltetés maximális hosszát ($q_{i,j}$) a melléklet 11-a.–11-d. táblázataiban ismertetem.

A nyershúsnál a szállítás osztott késleltetéseinek hossza 6 hónap, a villamos energiáé 12 hónap,

¹²²Több λ értéket is megvizsgálva a $\lambda = 1600^2$ érték mellett döntöttem, mivel ennél a modell jól illeszkedik a mintán belül, és jó előrejelzéseket ad a mintán kívül is, ugyanakkor a λ paraméter még több nagyságrendet is elérő megváltoztatása sem befolyásolja jelentősen a filterezett idősort. Erről a későbbiekben bővebben lesz szó.

a vezetékes gázé 12 hónap, a kereskedelembe foglalkoztatottak bérköltségéé 36 hónap, végül a vágósertés felvásárlási árát 24 hónap.

A mintavétel során 11000 elemű mintát generáltam, amiből – mintavétel konvergenciáját biztosítandó – az első 1000 elemet elhagytam,¹²³ majd a megmaradó 10000-es mintából számítottam ki a paraméterek poszterior várható értékét. A várható értékek mellett kiszámoltam a 95%-os legnagyobb poszterior sűrűségű intervallumot is (HPD intervallum). Azt tapasztaltam, hogy ezek mindegyike igen szűk, ezért a poszterior várható érték önmagában is elegendő információt szolgáltat. Az osztott késleltetés paramétereinek poszterior várható értékeit a melléklet 21-a.–21-d. ábráin mutatom be.

Az ábrákon látszik, hogy a különféle típusú költségelemek begyűrűződési sebessége eltérő. Általában igaz, hogy az alapanyagok árváltozásai igen gyorsan begyűrűződnek a fogyasztói árakba (például feldolgozatlan élelmiszereknél és üzemanyagoknál). A bérköltségek majdnem minden csoport esetén a leglassabban begyűrűződő költségelemek közé tartoznak, mivel a begyűrűződés felezési ideje általában egy-másfél év. Egyes nemzetközi termékforgalomban résztvevő termékeknek a külföldi ár és az árfolyam megváltozása néha igen eltérő sebességgel gyűrűződik be az árakba.

A nyershús esetében az energiaköltségek változása igen gyorsan, 3-4 hónap elteltével megjelenik, hasonlóan a vágósertés felvásárlási árának változásához, a bérköltségek megváltozása azonban rendkívül lassan, 20 hónap elteltével jelenik meg az árakban.

A mellékletben szereplő 11-a.–11-d. táblázatokban feltüntettem a rövid távú egyenletek poszterior várható paraméterértékekkel számolt illeszkedését (R^2) is. A Δ_1 oszlopban a fogyasztói árindex havi változásához, míg a Δ_{12} oszlopban a tizenkéthavi változáshoz tartozó illeszkedési mutatókat ismertetem. Néhány kivételtől eltekintve (halak, friss zöldség és gyümölcs, kávé és tea) a rövid távú egyenletek tizenkéthavi illeszkedése határozottan jobb, mint az egyhavi. Ennek valószínű oka, hogy a költségbegyűrűződéses modell azon előrejelzési horizonton tudja a legjobb előrejelzési pontosságot biztosítani, ahol az árak alakulását a költségek alakulása már ténylegesen befolyásolhatja. Így nagyon rövid távon, például egy hónapra előre, más árazási megfontolások is befolyásolhatják az árak változását. Az előrejelzések pontosságát értékelve, a legpontosabb előrejelzéseket mutató értékeket ismét a kevésbé volatilis tételeknél találjuk (főként a szolgáltatások).

A nyershús árára adott előrejelzéseket vizsgálva is levonható az a következtetés, hogy egy éves horizonton pontosabb előrejelzéseket generál a modell ($R^2 = 0.89$), mint egy hónapra előre ($R^2 = 0.64$), ami szintén azt jelzi, hogy a hosszabb távú, költségváltozások által már inkább befolyásolt időhorizonton az árak előrejelzésében a költségalapú modell sikeresebb, mint a rövid távú áringadozások előrejelzésében.

¹²³ A konvergencia láthatóan már korábban bekövetkezett, kb az első 100 mintavétel után.

3.6. A dezaggregált költségbegyűjtődéses modell előrejelző képessége

A modell előrejelző képességének felmérésére ex-post előrejelzéseket készítettem.¹²⁴ Az előrejelzések során mindvégig adotttnak vettem az összes, exogén változóként kezelt költségárindexet (például bérköltségek, külföldi árak, árfolyam, mezőgazdasági nyersanyagárak, olajár, stb.). A modellt hosszabbodó mintán becsültem meg először az 1996. január - 2000. decemberéig tartó időszakra, melyet negyedéves lépésközlőként bővítettem egészen 2005. szeptemberéig. Ezt követően az exogén változók felhasználásával minden egyes becsült modellel előrejelzést készítettem a becsléséhez felhasznált minta utáni időszakra, egészen 2005. decemberéig. Az így kapott előrejelzések felhasználásával kiszámoltam, hogy 1, 2, 3, 6, 9, 12, 18 és 24 hónappal előre átlagosan milyen tulajdonságú előrejelzéseket ad a modell. Mérőszámként a tizenkéthavi árváltozásokból származtatott átlagos négyzetes hiba négyzetgyökét (RMSE), átlagos abszolút hibát (MABE), átlagos hibát (MAVE) és a Theil-féle U statisztikát (Theil-U) használtam. Az MNB csoportosításnak megfelelő statisztikákat és az ex-post éves árindex előrejelzések lefutásait a melléklet ?? táblázata és 22-a. – 22-b. ábrái tartalmazzák.

Az átlagos négyzetes hiba mutatók összevetéséből az rajzolódik ki, hogy hasonlóan a becslések illeszkedéséhez, a kevésbé volatilis tételekre jobb előrejelzéseket ad a modell. Így a szolgáltatások előrejelzése összességében igen pontos, vagy például a feldogozott élelmiszerek előrejelzése kisebb hibát tartalmaz, mint a volatilisabb feldolgozatlan élelmiszereké. A számokból az is látszik, hogy az aggregálással az egyedi előrejelzési hibák részben "kioltódnak". Ez leginkább az ipari termékeknél szembeűnő: az (aggregált) ipari termékek árindexének előrejelzése pontosabb, mint két alkotójáé (ipari tartós és nem tartós javak). Ugyanez igaz a fogyasztói árindex egészére is: az egyedi RMSE-k súlyozott átlagánál sokkal kisebb a fogyasztói árindex RMSE mutatója.

Az átlagos abszolút hiba mutatók az RMSE mutatók monoton transzformáltjai, így belőlük is hasonló következtetések olvashatók ki.

Az átlagos hiba mutatók alapján az egyes csoportok nem mutatnak jelentős torzítást egyik irányban sem. Az 22-a. – 22-b. ábrákat szemlélve viszont kűtűnik, hogy ez inkább két, eltérő irányban torzított periódus eredménye. 2002. közepétől 2004. közepéig a modell szisztematikusan alacsonyabb előrejelzést ad a fogyasztói árindexekre, míg 2004. közepétől magasabbat. Ezek alapján úgy látszik, hogy a modell az infláció fordulópontjai körül nagyobb bizonytalansággal jelez előre.

A modell előrejelzőképességét összevettem a Reuter's gazdasági hírűgynökség által összegűűjtött inflációs előrejelzésekkel. A Reuter's havonta kérdez meg piaci elemzőket, intézményeket – többek között – a következő hónapra, az év végére és következő év végére várt éves 12 havi inflációról.¹²⁵ Ez a felmérés igen széles információbázison alapul, mivel minden egyes válasz széles szakértői tudást, és különféle modellek által szolgáltatott előrejelzéseket tükröz. A várakozások

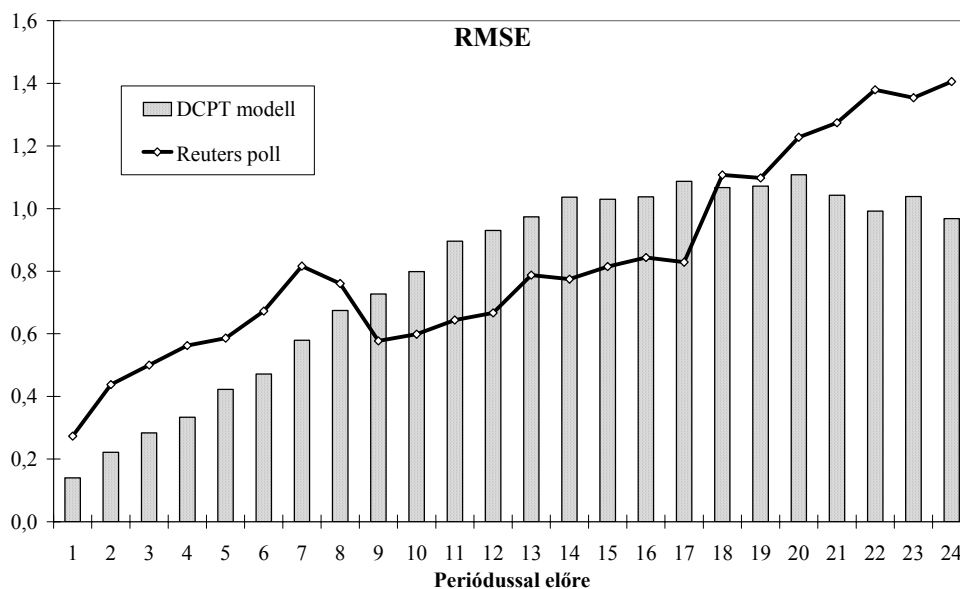
¹²⁴ Az előrejelzések készítésénél a paraméterek poszterior várható értékét használtam, mivel nem állt rendelkezés olyan szoftver, amellyel az egyes poszterior eloszlásból húzott paraméterkombinációk mellett ismételtén tudtam volna előrejelzéseket készíteni a szimultán modellel. Ezzel valójában figyelmen kívül hagytam a paraméterekben meglévő bizonytalanságokat, melyek éppen a Bayes-i előrejelzések előnyös tulajdonságai. Ugyanakkor a kapott előrejelzések várható értékben nagyjából megegyeznek a korrekt módon készített Bayes-i előrejelzések poszterior várható értékével.

¹²⁵ Általában havonta 10-20 között van a válaszadók száma. A felmérést részletesen elemzi Krekó – Vonnák (2003).

átlagát alapul véve kiszámítottam a Reuter's előrejelzések RMSE mutatóit a 2001. januártól 2005 decemberéig tartó időszakra. Mivel a következő havi infláción kívül, az elemzők csak az év végére adnak előrejelzést, ezért az egy hónapon túli előrejelzéseket az év végi előrejelzésekből állítottam elő. Ez egyrészt éven belül mindössze 4, két éven belül 3 megfigyelést eredményez, másrészt ezek mindegyike decemberre vonatkozik.¹²⁶

A 13. ábra a dezaggregált költségbegyűrűződéses modell és a Reuter's féle felmérés várakozásainak átlagából számolt RMSE mutatókat veti össze. Rövid és hosszú távon a dezaggregált költségbegyűrűződéses modell ad pontosabb előrejelzéseket, egyedül középtávon pontosabb a Reuter's felmérés.¹²⁷ Ez igen biztató, mert ugyan hosszabb távon az exogén változók szerepeltetése miatt a dezaggregált költségbegyűrűződéses modell előnyben van, de rövid távon, ez nem valódi előny a lassú költségbegyűrűződés miatt, amikor még az előrejelzés készítése előtti folyamatok dominálnak.

13. ábra. A dezaggregált költségbegyűrűződéses modell és a Reuter's felmérés előrejelzési képessége az RMSE mutató alapján



A modell rekurzív mintán történő újrabecslésével az előrejelző képességen túl a modell stabilitása is tesztelhető volt. A minta hosszabbodásával a becsült begyűrűződési profilok (osztott késleltetés paraméterei) igen stabilak voltak: a kezdeti minta-időszakra kapott 95% HPD intervallumok nagyrészt tartalmazták a hosszabbodó minta poszterior várható értékeit. Egyedül az árfolyam és a külföldi árak paraméterei változtak az időben némely esetben jelentősen, aminek magyarázata lehet a minta-időszakban történt monetáris politika váltás (átállás a szűk sávós, előre bejelentett csúszó leértékelésről az inflációs célkövetés rendszerére, szélesebb árfolyamsáv mellett).

¹²⁶További problémát jelent az adóváltozások (főleg ÁFA) kezelése. Az előrejelzők a bruttó árindexekre adnak előrejelzéseket, így a várható rendelkezések információ tartalmának beépülése és ennek időzítése jelentősen befolyásolja a felmérésben résztvevők előrejelzéseit. Mindazonáltal ettől a problémától, mely főleg az éven túli várakozásokat befolyásolja, eltekintettem.

¹²⁷A Reuter's 8-tól 17 hónapig előre vonatkozó előrejelzései pontosabbak, mint a 7-hónappal előre vonatkozóak.

4. Összegzés és a jövőbeli fejlesztések lehetséges irányai

4.1. A modern Bayes-i ökonometriai eszközök ismertetése

Az értekezés I. fejezetében a modern Bayes-i ökonometria alapvető elemzési eszközeit ismertettem, köztük a szimulációs eljárásokat, melyek az utóbbi két évtizedben forradalmian megújították a Bayes-i elemzéseket. Ezek a szimulációs eszközök a magyar ökonometriai-statisztikai irodalomban kevésbé ismertek, ezért ez a fejezet – miközben a tézis többi fejezetében alkalmazott módszereket is felöleli – egyben hiánypótló ismeretterjesztést is célul tűzött ki. A fejezet felépítése alkalmas arra, hogy egy feléves bevezető Bayes-i ökonometria kurzus ismeretanyagául szolgáljon.

4.2. Időben változó paraméterű és tört késleltetési modell

Az értekezés II. fejezetében a hagyományos, egész értékű rendre értelmezett késleltetés operátor időben változó tört késleltetésekre való kiterjesztésével rendkívül rugalmas idősorelemzési eszközt mutattam be, melynek felhasználásával az idősorelemzésekben az időben változó késleltetési struktúrát is modellezni lehet. A tört késleltetés felhasználásával olyan modellkeretet vázoltam, amelyben az időben változó paraméterek külön-külön mérik a változók együttmozgását illetve fáziskésését. A modell együtthatóit simasági priorok felhasználásával, Bayes-i technikával becsültem meg.

4.2.1. Üzleti ciklusok szinkronizációjának vizsgálata 24+1 ország adatain

A modell alkalmazásaként az üzleti ciklusok közti szinkronizációt vizsgáltam, egyfelől mesterségesen generált adatokon, másfelől 24+1 ország valós GDP adatain. A vizsgálatba bevont országok a következők voltak: Kelet-Közép Európai országok: Csehország, Észtország, Lengyelország, Lettország, Litvánia, Magyarország, Szlovákia, Szlovénia; Gazdasági és Monetáris Unió országai: Ausztria, Belgium, Franciaország, Finnország, Görögország, Hollandia, Németország, Olaszország, Portugália, Spanyolország; és végül a vegyes Kontrollcsoport, amelyben szerepelnek nem-GMU tag EU államok, mint Dánia, Svédország és Egyesült Királyság; további európai államok, mint Norvégia és Svájc; illetve USA és Japán, melyek a világ másik két gazdasági övezetét reprezentálják, továbbá +1, "referencia országgént" a Gazdasági és Monetáris Unió országainak aggregátuma.

A mesterséges minták tapasztalatai arra mutattak rá, hogy az időben változó paraméteres és változó késleltetési modell sokkal inkább képes mind a mintán belül megragadni, mind mintán kívül előrejelezni a folyamatokat, mint az üzleti ciklusok szinkronizációjának mérésére hagyományosan alkalmazott eljárás. A mesterséges mintán tapasztalt jelenségek a valós adatokon végzett hagyományos szinkronizációs vizsgálatoknál is visszaköszöttek, alátámasztva a rugalmasabb modellezési eszközök alkalmazásának szükségességét.

Az időben változó paraméterű és tört késleltetési modellel kimutattam, hogy a vizsgált országok Gazdasági és Monetáris Unió (aggregált) üzleti ciklusához való szinkronizációja igen eltérő. Az újonnan csatlakozott Európai Unió tagállamok közül kizárólag Magyarország és Szlovénia tekintetében találtam szoros együttmozgást, míg a többi csatlakozó állam esetében az üzleti ciklusok még messze nem szinkronizáltak a Gazdasági és Monetáris Unió üzleti ciklusával.

A Gazdasági és Monetáris Unió tagállamainak ciklusai – Finnország és Portugália – kivételével

igen szinkronizáltak mind a ciklusok relatív amplitúdóját, mind a fáziseltolódást tekintve. Dánia, Egyesült Királyság és Svédország esetében is nagyfokú a szinkronizáltság, hasonlóan Svájchoz, megelőzve Norvégia szinkronizáltságát. Az USA üzleti ciklusai is igen szinkronizáltak a Gazdasági és Monetáris Unió ciklusaival, ugyanakkor egy határozott előidejűség mutatkozik az USA javára, vagyis a Gazdasági és Monetáris Unió ciklusai követik az USA ciklusait. Japán és a Gazdasági és Monetáris Unió üzleti ciklusai között nem találtam jelentős szinkronizációt.

4.2.2. A vizsgálat gazdaságpolitikai következményei

Az eredmények alapján néhány óvatos gazdaságpolitikai következtetés vonható le. Az optimális valutaövezetek egyik kritériumának az abban résztvevő országok gazdaságának szoros együttmozgását szokták tekinteni. Ezt a kritériumot a Gazdasági és Monetáris Unió tagállamai, kivéve Finnországot és Portugáliát, egyértelműen teljesítik. Az újonnan csatlakozott Európai Unió tagállamok túlnyomó többségének gazdasága még nincs szoros együttmozgásban a Gazdasági és Monetáris Unió üzleti ciklusaival, ezért számukra nagyobb kockázatot jelenthet a csatlakozási szerződésükben vállalt jövőbeni Monetáris Unió tagságukkal együtt járó közös monetáris politika. Ez alól kivételt képez Magyarország és Szlovénia, ahol a szinkronizáltság a Gazdasági és Monetáris Unió jelenlegi tagállamaival egyező mértékű. A már régebbi Európai Unió, de a Gazdasági és Monetáris Unióban részt nem vevő tagállamok üzleti ciklusainak együttmozgása igen szoros a Gazdasági és Monetáris Unió aggregátummal, ami számukra az Euro-övezetben való részvétel lehetőségét erősíti.

4.2.3. Jövőbeli fejlesztési irányok

Az időben változó paraméterű és tört késleltetési modellben az együtthatók időbeni sima lefutását meghatározó prior paramétereket (k_α , k_β és k_i) mesterséges adaton végzett elemzések összehasonlításával kalibráltam. Mivel ezek a prior paraméterek befolyásolják az eredményeket, ezért célszerű lenne a jövőben ezeket a paramétereket is becsülni. A becslésükhöz két út kínálkozik: (1) a k_α , k_β és k_i paramétereket ugyanolyan valószínűségi változónak tekinteni, mint a modell többi együtthatóját, így priorokat rendelni hozzájuk és ennek figyelembevételével módosítani a posztterior paraméterbecsléseket. (2) A k_α , k_β és k_i paramétereknek megkeresni azt a kombinációját, amely a legnagyobb perem-likelihood értéket eredményezi. Ez utóbbi megoldás *empirikus Bayes* módszerként ismert. Bár mindkét megoldás egyszerűnek tűnik, megvalósításuk kihívás. Az első megoldásnál a k_α , k_β és k_i paraméterekhez kell priorokat hozzárendelni, azonban ilyen priorok megválasztásához nincsenek használható támpontok. A második megoldás ezt a problémát ugyan kikerüli, azonban a perem-likelihood meghatározása nem lineáris modelleknél, ilyen az időben változó paraméterű és tört késleltetési modell is, további eszközök alkalmazását igényli.¹²⁸

4.3. Költségbegyűrűződésen alapuló inflációs előrejelző modell

Az értekezés III. fejezetében egy infláció előrejelzésére alkalmas modellt mutattam be, mely a fogyasztói árakat az adott jószág költségtényezőinek megváltozásával magyarázza. A modell dezaggregált, a KSH fogyasztói kosarába tartozó 160 termék piaci árait 43 különböző jószágcsoportban modellezi. A modell az árváltozások dinamikáját hosszú osztott késleltetésekkel írja le,

¹²⁸A perem-likelihood kiszámítására esetünkben Chib (1995) vagy Chib–Jeliazkov (2001) módszerét lehet alkalmazni.

melyeknek becslését simasági priorokon alapuló, (paraméter) összeg- és előjelmegkötéseket is tartalmazó Bayes-i megközelítéssel végeztem.

A bemutatott becslési eljárás egyben Shiller (1973) módszerének továbbfejlesztése több irányban: (1) a simasági prior alkalmazása többváltozós modellnél, (2) paraméter-korlátozások figyelembe vétele a simasági prior felírásánál, (3) előjelmegkötések figyelembe vétele a becsléseknél.

4.3.1. Eltérő költségbegyűrűződési sebességek

A költségbegyűrűzések becslése számos tanulsággal szolgált. Általános tapasztalat volt, hogy a bérköltségek viszonylag hosszú, legalább fél-egy éves késleltetéssel kezdenek begyűrűződni az árakba. Másik általános jellemzője volt a begyűrűződési profiloknak, hogy a külföldi árváltozások általában hamarabb jelennek meg az árakban, mint az árfolyam változása. A modell részmintákon elvégzett becslésekor azt tapasztaltam, hogy a becsült profilok általában igen stabilak voltak. Kizárólag az árfolyam és a külföldi árak paraméterei változtak, némely esetben jelentősen, aminek magyarázata lehet, hogy a vizsgált minta időszakban a magyar monetáris politika a szűksávós csúszóléértékelésről áttért az inflációs célkitűzés rendszerére.

4.3.2. Kiemelkedő előrejelző képesség

A dezaggregált költségbegyűrűződéses modell előrejelző képessége kiemelkedő. Összevetve a Reuter's piaci elemzők által adott előrejelzések átlagával, azt találtam, hogy – jóllehet a közvetlen összevetést több tényező is nehezíti, így például az előre bejelentett ÁFA változás, illetve az eltérő információbázis, mely a dezaggregált költségbegyűrűződéses modell és a piaci elemzők előrejelzései mögött vannak – a dezaggregált költségbegyűrűződéses modell mind rövid, mind hosszú távon pontosabb előrejelzéseket eredményez.

4.3.3. Jövőbeli fejlesztési irányok

A modellel végzett elemzések tapasztalatai módot adnak rá, hogy néhány jövőbeli fejlesztési irányt is felvázolható legyen:

1. Alapadatok felhasználhatóságának javítása. A KSH által közölt részletes fogyasztói bázisár-index-adatok némelyike (pl.: fel nem sorolt szolgáltatások) szembetűnően törésekkel terhelt. Ennek okául a megfigyelési körből ki vagy az oda bekerült jóságok által okozott hatásokat vélelmezem. Ennek kiszűrése indokolt lenne, mivel torzíthatja a becsléseket.
2. A fogyasztói árak megtisztítása a jövedéki adóktól, tételes adóváltozásoktól. Célszerű lenne az üzemanyagok mintájára néhány egyéb termék (dohány, szeszes italok) esetében is az adó nélküli ár modellezésére áttérni.
3. ÁFA kulcs változások explicit modellezése. Az utóbbi néhány évben többször változtak az ÁFA kulcsok, melyek befolyásolhatták az árazási magatartásokat (Gábrriel–Reiff, 2006). Az ÁFA kulcs változás megfelelő figyelembe vétele javíthatja a bruttó fogyasztói árak előrejelzését.
4. Újabb költségelemek bevonása. A modell hosszú távú egyenleteinek becslésekor néhány jószágcsoport árának alakulása eltérő volt az általam definiált költségek alakulásától. Ennek

oka lehet a nem megfelelő költségelemek használata az adott jószágcsoporthoz tartozó árának magyarázatára.¹²⁹

5. Keresleti változó beépítése. A hosszú távú költségegyenletek becslésekor azt tapasztaltam, hogy az egyenletek reziduumaival – melyeket a hosszú távú haszonkulcsból való eltérésként is értelmezhetünk – ciklikusak. Emiatt ígéretes lehet annak megvizsgálása, hogy ezen ciklusok együttmozognak-e például a háztartások fogyasztási kiadásának ciklusaival.

A modell lehetséges fejlesztési irányainak számbavételekor végül megemlítem azokat az „éles”, azaz a piaci szereplőkkel azonos információs bázison alapuló ex-ante előrejelzésekből majd a jövőben levonható tapasztalatokat, amelyek rávilágíthatnak, hogy a modell egyenletei egyformán jól jelzik-e előre az inflációt, illetve hogy az egyes exogénnek tekintett költségtenyezők előrejelzési bizonytalansága mennyiben járul hozzá a modell előrejelzéseinek pontosságához.

4.4. Értekezésben bemutatott módszertani újítások

Az értekezés eredményeinek összefoglalása után röviden áttekintem, hogy az egyes fejezetekben alkalmazott módszerek, illetve bevezetett módszertani újítások miként viszonyulnak a simasági priorok meglévő irodalmához.

Shiller (1973) tanulmányában kétváltozós, egy függő és egy magyarázó változót tartalmazó osztott késleltetésű modellre alkalmazta a simasági priort. Kitért arra az esetre is, amikor a késleltetésekhez zero végfeltétel társul, tehát az osztott késleltetés modellben szereplő utolsó késleltetést követő késleltetések együtthatói mind nullák. Shiller (1975) tanulmánya abban lép túl ezeken a kereteken, hogy előjelmegkötéseket is tesz az együtthatókra. A mai modern Bayes-i eszköztár híján azonban nem tudta a teljes poszterior eloszlást meghatározni, hanem csak egy pontbecslési eljárást adott.

Hodrick–Prescott (1980, 1997) tanulmánya az együtthatók időbeni változásának megragadására használta a simasági priort, ráadásul nem is Bayes-i eszköztárral, amiből adódóan csak pontbecslést eredményező eljárásuk.¹³⁰

Lütkepohl–Herwartz (1996) tanulmánya szintén az együtthatók időbeni változását jellemezte a simasági priorról, különös tekintettel a szezonális időbeni fokozatos változására egy autoregresszív modellben. Ez a tanulmány is a klasszikus ökonometria keretein belül marad, és Shiller munkájára nem hivatkozik.¹³¹

Az irodalomban fellelhető módszertani megközelítéseket a következő irányban fejlesztettem tovább. Az értekezés II. fejezetében bevezetett időben változó valószínűségi késleltetés becslésére alkalmaztam simasági priort. A III. fejezetben kiterjesztettem az osztott késleltetés modelljét többváltozós esetre, továbbá bemutattam, hogy miként lehet előjelmegkötéseket, kezdeti és végfeltételeket, továbbá paraméter-restrikciókat egyidejűleg figyelembe venni a simasági priorok használatakor.

¹²⁹ Erre példa lehet a „növényi zsír”, melynél vélhetőleg a napraforgó árutözsdei ára jelentős költségtenyező.

¹³⁰ Araujo–Areosa–Neto (2003) észreveszik ugyan, hogy a Hodrick–Prescott szűrőt lehet általánosítani tetszőleges rendű differenciára, de ők is megmaradnak a klasszikus statisztika keretei között, és ők sem hivatkoznak Shiller eredeti tanulmányára.

¹³¹ Hivatkozik egy a simasági priorokhoz gondolatilag erőteljesen kötődő „flexibilis legkisebb négyzet” módszerre, melyet Kalaba–Tsfatsion (1989) dolgoztak ki. Úgy tűnik tehát, hogy a simasági priort Kalaba és Tsfatsion 1989-ben ismételtelen „újrafeltalálták”...

Az előjelkikötéseket tartalmazó esetekhez tartozó poszterior eloszlások megadásával Shiller (1975) tanulmányát is kiegészítettem.

A 6. táblázatban összefoglalom, hogy korábbi tanulmányok milyen módszertani elemzést végeztek és ezekhez képest milyen újdonságot tartalmaznak az értekezés fejezetei.

6. táblázat. Simasági priorokat alkalmazó tanulmányok és az értekezés egyes fejezeteinek összehasonlítása az alkalmazott módszertan szempontjából

Tanulmány	Bayes-i megközelítés	Keresztmetszeti simasági prior	Időbeni simasági prior	Előjel-megkötés	Paraméter-restrikció	Zéró kezdeti- vagy végfeltétel	Többváltozós modell	Megjegyzés
Shiller (1973)	+	+	-	-	-	+	-	Csak végfeltétel
Shiller (1975)	+	+	-	+	-	+	-	Csak pontbecslés
Hodrick–Prescott (1980, 1997)	-	-	+	-	-	-	-	
Lütkepohl–Herwartz (1996)	-	-	+	-	-	-	-	Változó szezonális
II. Fejezet	+	-	+	-	-	-	+	Időben változó tört késleltetés
III. Fejezet	+	+	+	+	+	+	+	Az időbeli és a keresztmetszeti simasági priorok más-más változóra vonatkoznak

4.5. Záró gondolat

Záró gondolatként ismételten feleleveníttem az értekezés bevezetőjében a Bayes-i ökonometria előnyeiről írottakat. A Bayes-i ökonometria igen egyszerű valószínűségi összefüggésre épül, nevezetesen a Bayes-szabályra, mely az együtthatók poszterior (együttes) valószínűségében ötvözi a vizsgált ökonometriai modell és annak együtthatóiról rendelkezésre álló előzetes információkat az adatokban lévő információval. A Bayes-i ökonometria modern eszköztára csupán arra szolgál, hogy az elemző számára könnyebben értelmezhető mutatószámokat (együtthatók várható értékei, variancia-kovariancia mátrixa, stb.) állítson elő az együtthatók általában egyszerűen meghatározható, azonban közvetlenül nehezen értelmezhető poszterior együttes sűrűségfüggvényből. A Bayes-i elemzés előnye a klasszikus ökonometriával szemben, hogy a paraméterek poszterior eloszlása mindig előáll, így nincs szükség arra, hogy a paraméterek eloszlásának meghatározásakor a mintanagyság növelésére építő aszimptotikus eredményekre, vagy a feltételezett adatgeneráló folyamatból származó fiktív adatok felhasználásával előálló eloszlásokra hagyatkozzunk. Az előny kiaknázásához szükséges ugyan a Bayes-i elemzési módszerek elsajátítása, azonban ez a "befektetés" bőven megtérül, mivel a módszerek univerzálisan alkalmazhatók. Arnold Zellner mindezt így fogalmazta meg tömören:

"It pays to go Bayes!"

Hivatkozások

- ALMON, S. (1965), 'The Distributed Lag between Capital Appropriations and Expenditures', *Econometrica*, 33. évf., 178-196. o.
- ALTISSIMO, F. – BASSANETTI, A. – CRISTADORO, R. – FORNI, M. – LIPPI, M. – REICHLIN, L. – VERONESE, G. (2001), 'EuroCOIN: a Real Time Coincident Indicator of the Euro Area Business Cycle', CEPR Discussion Paper 3108. sz.
- ARAUJO, F. – AREOSA, M. B. M. – NETO, J. A. R. (2003), 'r-filters: a Hodrick Prescott Filter Generalization', Banco Central do Brasil Working Paper Series, 69. sz.
- ARTIS, M. J. – MARCELLINO, M. – PROIETTI, T. (2003), 'Dating the Euro Area Business Cycle', CEPR Discussion Paper 3696. sz.
- ARTIS, M. J. – MARCELLINO, M. – PROIETTI, T. (2004), 'Dating Business Cycles: A Methodological Contribution with an Application to the Euro Area', *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 66. évf., 4. sz., 537-65. o.
- ARTIS, M. J. – KONTOLEMIS, Z. G. – OSBORN, D. R. (1997), 'Business Cycles for G7 and European Countries', *The Journal of Business*, 70. évf., 2. sz., 249-279. o.
- ARTIS, M. J. – ZHANG, W. (1997), 'International Business Cycles and the ERM: Is There a European Business Cycles?', *International Journal of Finance Economics*, 2. évf., 1-16. o.
- ARTIS, M. J. – ZHANG, W. (1998), 'Membership of EMU: a Fuzzy Clustering Analysis of Alternative Criteria', European University Institute (EUI), Robert Schuman Centre of Advanced Studies (RSCAS), EUI-RSCAS Working Papers 98/52. sz.
- BABETSKI, J. – BOONE, L. – MAUREL, M. (2002), 'Exchange Rate Regimes and Supply Shocks Asymmetry: The Case of the Accession Countries', CEPR Discussion Paper, 3408. sz.
- BACKUS, D. K. – KEHOE, P. J. – KYDLAND, F. E. (1992), 'International Real Business Cycles', *The Journal of Political Economy*, 100. évf., 4. sz., 745-775. o.
- BACKUS, D. K. – KEHOE, P. J. – KYDLAND, F. E. (1993), 'International Business Cycles: Theory vs. Evidence', *Quarterly Review*, Federal Reserve Bank of Minneapolis, 1993. ősz.
- BAXTER, M. (1991), 'Business Cycles, Stylized Facts, and the Exchange Rate Regime: Evidence from the United States', *Journal of International Money and Finance*, 10. évf., 71-88. o.
- BAXTER, M. (1995), 'International Trade and Business Cycles', NBER Working Paper 5025. sz.
- BAXTER, M. – STOCKMAN, A. (1989), 'Business Cycles and Exchange Rate Regimes: Some International Evidence', *Journal of Monetary Economics*, 23. évf., 377-400. o.
- BAXTER, M. – KING, R. G. (1999), 'Measuring Business Cycles: Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series', *The review of Economics and Statistics*, 81. évf., 4. sz., 575-593. o.

- BAYOUMI, T. – EICHENGREEN, B. (1993): 'Shocking Aspects of European Monetary Integration', in: Adjustment and Growth in European Monetary Union, szerk. Torres, G. – Giavazzi, F., Cambridge University Press, 193-229. o.
- BENCZÚR P. – RÁTFAI A. (2005), 'Gazdasági fluktuációk Közép-Kelet-Európában - A tények', National Bank of Hungary Working Paper 2005/2. sz.
- BERGMAN, M. (1996), 'International Evidence on the Sources of Macroeconomic Fluctuations', European Economic Review, 40. sz, 1237-1258. o.
- BEVERIDGE, S. – NELSON, C. R. (1981), 'A New Approach to Decomposition of Economic Time Series into Permanent and Transitory Components with Particular Attention to Measurement of the Business Cycle', Journal of Monetary Economics, 7. évf., 151-174. o.
- BEYER, A. – MESTRE, R. (2005), 'Estimating an Open Economy SDGE Model for the Euro Area', Computing in Economics and Finance, 317. sz.
- BLANCHARD, O. – QUAH, D. (1989), 'The Dynamic Effects of Aggregate Demand and Supply Disturbances', The American Economic Review, 79. évf., 4. sz., 655-673. o.
- BOREIKO, D. (2002), 'EMU and Accession Countries: Fuzzy Cluster Analysis of Membership', Working Papers Central Bank of Chile 189. sz.
- BOUAKEZ, H. – REBEL, N. (2005), 'Has Exchange Rate Pass-Through Really Declined in Canada?', Bank of Canada Working Paper 2005-29. sz.
- BOWDEN, R. J. – MARTIN, V. L. (1995), 'International Business Cycles and Financial Integration' The Review of Economics and Statistics, 77. évf., 2. sz., 305-320. o.
- BRY, G. – BOSCHAN, CH. (1971), 'Cyclical Analysis of Time Series: Selected Procedures and Computer Program. Columbia University Press. New York.
- BURNSIDE, C. (1998), 'Detrending and Business Cycle Facts: A Comment', Journal of Monetary Economics, 41. évf., 513-532. o.
- CALVO, G. (1983), 'Staggered Prices in a Utility Maximizing Framework', Journal of Monetary Economics, 12.évf., 383-398. o.
- CAMACHO, M. – PEREZ-QUIROS, G. – SAIZ, L. (2005), 'Are European Business Cycles Close Enough to be just One?', CEPR Discussion Papers 4824. sz.
- CANOVA, F. (1998), 'Detrending and Business Cycle Facts', Journal of Monetary Economics, 41. évf., 475-512. o.
- CANOVA, F. (2002), 'G-7 inflation Forecast', CEPR Discussion Paper 3283. sz.
- CANOVA, F. – CICARRELLI, M. – ORTEGA, E. (2004), 'Similarities and Convergence in G-7 Cycles', ECB Working Paper 312. sz.

- CARTER, CH. – KOHN, R. (1994), 'On Gibbs Sampling for State Space Models', *Biometrika*, 81. évf., 541-553. o.
- CASELLA, G. – GEORGE, E. I. (1992), 'Explaining the Gibbs Sampler', *The American Statistician*, 46. évf., 3. sz., 167-174. o.
- CHIB, S. (1995), 'Marginal Likelihood From the Gibbs Output', *Journal of the American Statistical Association*, 90. évf., 1313-1321. o.
- CHIB, S. – GREENBERG, E. (1995), 'Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm', *The American Statistician*, 49. évf., 4. sz., 327-335. o.
- CHIB, S. – JELIAZKOV, I. (2001), 'Marginal Likelihood From the Metropolis-Hastings Output', *Journal of the American Statistical Association*, 96. évf., 270-281. o.
- CHRISTIANO, L. – EICHENBAUM, M. – EVANS, CH. (2005) 'Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy', *Journal of Political Economy*, 113. évf., 1-45. o.
- COGLEY, T. – NASON, J. (1995), 'Effects of the HP Filter on Integrated Series', *Journal of Economic Dynamics and Control*, 19. évf., 253-278. o.
- CSAJBÓK A. – CSERMELY Á. (2002), 'Adopting the Euro in Hungary: Expected Cost, Benefits and Timing', *National Bank of Hungary Occasional Paper* 24. sz.
- DARVAS ZS. (2001), 'Exchange Rate Pass-Through and Real Exchange Rate in EU Candidate Countries', *Deutsche Bundesbank Discussion Paper* 10/2001. sz.
- DARVAS ZS. – SZAPÁRY GY. (2004), 'Konjunktúraciklusok együttmozgása a régi és új EU-tagországokban', *Közgazdasági Szemle*, 51. évf., május, 415. - 448. o.
- DEJONG, D. – SHEPHARD, N. (1995), 'The Simulation Smoother for Time Series Models', *Biometrika*, 82. évf., 339-350. o.
- FIDRMUC, J. (2004), 'The Endogeneity of the Optimum Currency Area Criteria, Intra-Industry Trade, and EMU Enlargement', *Contemporary Economic Policy*, 22. évf., 1. sz., 1-12. o.
- FIDRMUC, J. – KORHONEN, I. (2001), 'Similarity of Supply and Demand Shocks Between the Euro Area and the CEECs', *BOFIT Discussion Papers* 14. sz.
- FRANKEL, J. A. – ROSE, A. K. (1998), 'The Endogeneity of the Optimum Currency Area Criteria', *The Economic Journal*, 108. sz., 1009-1025. o.
- FRENKEL, M. – NICKEL, CH. – SCHMIDT, G. (1999), 'Some Shocking Aspects of EMU Enlargement', *Deutsche Bundesbank Research Note* RN-99-4. sz.
- FRENKEL, M. – NICKEL, CH. (2002), 'How Symmetric are the Shocks and the Shock Adjustment Dynamics between the Euro Area and Central and Eastern European Countries?', *IMF Working Paper* 02/222. sz.

- FRIEDMAN, M. (1968), 'The Role of Monetary Policy', *American Economic Review*, 58. évf., 1-17. o.
- FORNI, M. – HALLIN, M. – LIPPI, M. – REICHLIN, L. (2000), 'The Generalized Dynamic-Factor Model: Identification and Estimation', *The Review of Economics and Statistics*, 82. évf., 4. sz., 540-554. o.
- FORNI, M. – HALLIN, M. – LIPPI, M. – REICHLIN, L. (2001), 'Coincident and Leading Indicator for the Euro Area', *The Economic Journal*, 111. évf., 62-85. o.
- GÁBRIEL P. – REIFF Á. (2006), 'Inflation effect of VAT changes', MNB kézirat.
- GÁL P. (1998), 'Halandósági táblák becslése bayesi módszerekkel', Rajk László Szakkolégium Working Paper, 3. sz.
- GALÍ, J. – GERTLER, M. (1999), 'Inflation Dynamics: A Structural Econometric Analysis', *Journal of Monetary Economics*, 44. évf., 195-222. o.
- GALÍ, J. – GERTLER, M. – LOPEZ-SALIDO, D. (2005), 'Robustness of Estimates of the Hybrid New Keynesian Phillips Curve', *Journal of Monetary Economics*, 52. évf., 1107-1118. o.
- GARNIER, J. (2003), 'Has the Similarity of Business Cycles in Europe Increased with the Monetary Integration Process? A Use of Classical Business Cycles', European University Institute Working Paper 2003/12.
- GELFAND, A. E. – DEY, D. K. (1994), 'Bayesian Model Choice: Asymptotics and Exact Calculations', *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 56. évf., 3. sz., 501-514. o.
- GERLACH, S. H. M. (1988), 'World Business Cycles under Fixed and Flexible Exchange Rates', *Journal of Money, Credit and Banking*, 20. évf., 4. sz., 621-632. o.
- GEWEKE, J. F. (1989), 'Bayesian Inference in Econometric Models Using Monte Carlo Integration', *Econometrica*, 57. évf., 1317-1340. o.
- GEWEKE, J. F. (1999), 'Using Simulation Methods for Bayesian Econometric Models: Inference, Development, and Communication (with discussion and rejoinder)', *Econometric Reviews*, 18. évf., 1-126. o.
- GEWEKE, J. F. – WHITEMAN, CH. (2004), 'Bayesian Forecasting', in: *The Handbook of Economic Forecasting*, szerk. Graham Elliott, Clive W. J. Granger és Allan Timmerman, North-Holland, Amsterdam. Megjelenés alatt.
- GILKS, W. – RICHARDSON, S. – SPIEGELHALTER, D. J. (1996), 'Markov Chain Monte Carlo in Practice', Chapman & Hall, London.
- GRANGER, C. W. – JOYEUX, R. (1980), 'An Introduction to Long Memory Time Series Models and Fractional Differencing', *Journal of Econometrics*, 14. évf., 227-238. o.

- GUDMUNDSSON, G. (1998), 'A model of inflation with variable time lags', Central Bank of Iceland Working Paper, 2. sz.
- HAMILTON, J. D. (1994), 'Time Series Analysis', Princeton University Press, Princetone.
- HARDING, D. – PAGAN, A. R. (2003), 'A Comparison of Two Business Cycle Dating Methods', Journal of Economic Dynamics and Control, 27. évf., 1681-1690. o.
- HARVEY, A. C. – JAEGER, A. (1993), 'Detrending, Stylized Facts and the Business Cycles', Journal of Applied Econometrics, 8. évf., 3. sz., 231-247. o.
- HARVEY, A. C. – TIMBUR, TH. M. (2003), 'General Model-Based Filters for Extracting Cycles and Trends in Economic Time Series', The Review of Economics and Statistics, 85. évf., 2. sz., 244-255. o.
- HELBLING, TH. – BAYOUMI, T. (2003), 'Are They in the Same Boat? The 2000-2001 Growth Slowdown and the G-7 Business Cycle Linkages', IMF Working Paper 2003/46.
- HODRICK, R. J. – PRESCOTT, E. C. (1980), 'Post-War U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation', Working Paper, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, PA.
- HODRICK, R. J. – PRESCOTT, E. C. (1997), 'Post-War U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation', Journal of Money, Credit and Banking, 29. évf, 1. sz., 1-16. o.
- HORNOK C. – JAKAB Z. (2002), 'Forecasting Inflation: A Case Study on the Czech, Hungarian, Polish, Slovakian and Slovenian Central Banks', MNB Background Studies 2002/3.
- HORNOK C. – JAKAB Z. – REPPA Z. – VILLÁNYI K. (2002), 'Inflation Forecasting at the National Bank of Hungary', MNB kézirat.
- HORVÁTH J. (2001), 'A Bayes-statisztika és alkalmazása', In: BGF Tudományos Évkönyv 2001.
- HORVÁTH J. (2003), 'Matematikai-statisztikai eljárások alkalmazása az agrárpiaci döntéshozatalban', Ph.D. Értekezés.
- HOSKING, J. R. M. (1981), 'Fractional Differencing', Biometrika, 68. évf., 165-176. o.
- HUNYADI L. (1980), 'Reestimation of the Foreign Trade Equations of the Bologna Model Using Shiller's Method', SZÁMKI Tanulmányok, 6. sz.
- HUNYADI L. (1985), 'Osztott késleltetésű modellek elmélete és gyakorlata', kandidátusi értekezés.
- HUNYADI L. (2001), 'Statisztikai következtetéselemélet közgazdászoknak', KSH, Budapest.
- IMBS, J. (2003), 'Trade, Finance, Specialization and Synchronization', CEPR Discussion Paper, 3779. sz.
- JAGRIC, T. – OVIN, R. (2004), 'Method of Analyzing Business Cycles in a Transition Economy: The Case of Slovenia, Developing Economies', 42. évf., 1. sz., 42-62. o.

- JAKAB M. Z. – VÁRPALOTAI V. – VONNÁK B. (2006), 'Hogyan hat a monetáris politika az aggregált keresletre Magyarországon? Becslések három makromodellel', MNB Working Paper 2006/4.
- JORGENSON, D. (1966), 'Rational Distributed Lag Functions', *Econometrica*, 34. évf., 135-149. o.
- KAUFMANN, S. (2003), 'The Business Cycle of European Countries Bayesian Clustering of Country Individual IP Growth Series', OeNB Working Paper, 83. sz.
- KALABA, R. – TESFATSION, L. (1989), 'Time-varying Linear Regression via Flexible Least Squares', *Computers and Mathematics with Applications*, 17. évf., 1215-1245. o.
- KARRAS, G. (1994), 'Sources of Business Cycles in Europe: 1960-1988. Evidence from France, Germany and the United Kingdom', *European Economic Review*, 38. évf., 1763-1778. o.
- KENEN, P. B. (1969), 'The Optimum Currency Area: An Eclectic View', in R. A. Mundell and A. Swoboda, eds., *Monetary Problems of the International Economy*, Chicago: University of Chicago Press.
- KING, R. – REBELLO, S. (1993), 'Low Filtering and the Business Cycles', *Journal of Economic Dynamics and Control*, 17. évf., 207-231. o.
- KLOEK, T. – VAN DIJK, H. K. (1978), 'Bayesian Estimates of Equation System Parameters: An Application of Integration by Monte Carlo', *Econometrica*, 46. évf., 1. sz., 1-19. o.
- KMENTA, J. (1986), 'Elements of Econometrics', Macmillan, New York.
- KOMÁROMI GY. (2002), 'A hatékony piacok elméletének elméleti és gyakorlati relevanciája', *Közgazdasági Szemle*, 69. évf., május, 377-395. o.
- KOOP, G. (2003), 'Bayesian Econometrics', John Wiley and Sons, New York.
- KORHONEN, I. (2003), 'Some Empirical Tests On the Integration of Economic Activity Between the Euro Area and the Accession Countries', *Economics of Transition*, 11. évf., 1. sz., 177-196. o.
- KOSE, A. M. – OTROK, CH. – WHITEMAN, H. CH. (2003), 'International Business Cycles: World, Region and Country-Specific Factors', *American Economic Review*, 93. évf., 4. sz., 1216-1239.o.
- KOSE, A. M. – PRASAD, E. S. – TERRONES, M. E. (2003), 'How Does Globalization Affect the Synchronization of Business Cycles?', *The American Economic Review*, 93. évf., 2. sz., 57-62. o.
- KOYCK, L. M. (1954), 'Distributed Lags and Investment Analysis', North Holland, Amsterdam.
- KÖRÖSI G. – MÁTYÁS L. – SZÉKELY I. (1990), 'Gyakorlati Ökonometria', Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

- KREKÓ J. – VONNÁK B. (2003), 'Makroelemzők inflációs várakozásai Magyarországon' MNB Háttér tanulmány 2003/1.
- KRISTÓF T. – VIRÁG M. (2005), 'Az első hazai csődmódel újraszámítása neurális hálók segítségével', *Közgazdasági Szemle*, 52. évf., 2. sz., 144-162. o.
- LANCASTER, T. (2004), 'An Introduction to Modern Bayesian Econometrics', Blackwell publishing, London.
- LUCAS, R. (1972), 'Econometric Testing of the Natural Rate Hypothesis', in: *The Econometrics of Price Determination Conference*, szerk.: Eckstein, O., MIT Press, Cambridge.
- LUMSDAINE, R. L. – PRASAD, E. S. (1997), 'Identifying the Common Component in International Economic Fluctuations', NBER Working Paper, 5984. sz.
- LÜTKEPOHL, H. (1993), 'Introduction to Multiple Time Series Analysis', 2. kiadás, Springer Verlag, Berlin.
- LÜTKEPOHL, H. – HERWARTZ, H. (1996), 'Specification of Varying Coefficient Time Series Models via Generalized Flexible Least Squares', *Journal of Econometrics*, 70. évf., 261-290. o.
- MARCET, A. – RAVN, M. O. (2004), 'The HP-Filter in Cross-Country Comparisons', CEPR Discussion Paper, 4244. sz.
- MCADAM, P. (2003), 'US, Japan and the Euro Area: Comparing Business-Cycle Features', ECB Working Paper, 283. sz.
- MCDERMOTT, J. C. – SCOTT, A. (2000), 'Concordance in Business Cycles', IMF Working Paper 2000/37.
- MCKINNON, R. (1963), 'Optimum Currency Areas', *American Economic Review*, 53. évf., 4. sz., 717-725. o.
- MCQUEEN, G. – THORLEY, S. (1993), 'Asymmetric Business Cycle Turning Points', *Journal of Monetary Economics*, 31. évf., 341-362. o.
- MOHR, M. (2005), 'A Trend-Cycle(-Season) Filter', ECB Working Paper, 499. sz.
- MUNDELL, R. A. (1961), 'A Theory of Optimum Currency Areas', *American Economic Review*, 51. évf., 4. sz., 657-665. o.
- ORAVECZ B. (2001), 'Hunyadi László: Statisztikai következtetéselemélet közgazdászoknak', *Statisztikai Szemle*, 79. évf., 8. sz., 715-717. o.
- PAAP, R. (2002), 'What are the Advantages of MCMC Based Inference in Latent Variable Models', *Statistica Neerlandica*, 56. évf., 2-22. o.
- PAAP, R. (2005), 'Bayesian Econometrics', Előadásvázlatok.
- PHELPS, E. (1967), 'Phillips Curve, Expectations of Inflation and Optimal Inflation Over Time', *Economica*, 34. évf., 254-281. o.

- PHILLIPS, A.W. (1958), 'The Relation between Unemployment and the Rate of Change of Money Wage Rates in the United Kingdom, 1861-1957', *Economica*, 25. évf., 283-299. o.
- POIRIER, D. J. (1995), 'Intermediate Statistics and Econometrics: A Comparative Approach', MIT Press, Cambridge.
- RAVN, M. O. – UHLIG, H. (2002), 'Notes on Adjusting the Hodrick-Prescott Filter for the Frequency of Observation', *The Review of Economics and Statistics*, 84(2), pp. 371-380.
- REIMANN J. – TÓTH J. (1994), 'Valószínűsés számítás és matematikai statisztika', Nemzeti Tankönyvkiadó, 6. kiadás, Budapest.
- RITTER, C. – TANNER, M. (1992), 'Facilitating the Gibbs Sampler: The Gibbs Stopper and the Griddy-Gibbs Smapler', *Journal of the American Statistical Association*, 48. évf., 276-279. o.
- RUDD, J. – WHELAN, K. (2005), 'Modelling Inflation Dynamics: A Critical Review of Recent Research', *Finance and Economics Discussion Series*, 2005-66.
- SAMUELSON, P. – SOLOW, R. (1960), 'Analytical Aspects of Anti-Inflation Policy', *American Economic Review*, 50. évf., 177-194. o.
- SARGENT, T. (1971), 'A Note on the <Accelerationist> Controversy', *Journal of Money, Credit, and Banking*, 3. évf., 721-725. o.
- SHILLER, R. (1973), 'A Distributed Lag Estimator Derived from Smoothness Priors', *Econometrica*, 41. évf., 775-788. o.
- SHILLER, R. (1975), 'Alternative Prior Representations of Smoothness for Distributed Lag Estimation', NBER Working Paper, 89. sz.
- SICHEL, D. E. (1994), 'Inventories and the Three Phases of the Business Cycles', *Journal of Business and Economic Statistics*, 12. évf., 3. sz., 269-277. o.
- SMETS, F. – WOUTERS, R. (2003), 'An estimated stochastic dynamic general equilibrium model of the euro area', *Journal of European Economic Association*, 1. évf., 5. sz., 1123-1175. o.
- SOLOW, R. M. (1960), 'On a Family of Lag Distributions', *Econometrica*, 28. évf, 393-406. o.
- STIGLER, S. M. (1978), 'Mathematical Statistics in the Early States', *Annals of Statistics*, 6. évf, 239-265. o.
- STOCK, J. H. – WATSON, M. W. (1999), 'Business Cycle Fluctuations in US Macroeconomic Time Series', In: Taylor, J. – Woodford, M. szerk.: *Handbook of Macroeconomics*. Elseiver Science B.V., 1. kötet, 3-64. o.
- STOCK, J. H. – WATSON, M. W. (2003), 'Understanding Changes in International Business Cycle Dynamics', NBER Working Paper, 9859. sz.

- SZATMÁRI A. (1996), 'Aukciók, avagy a képbe kerül, ha a Louvre a képbe kerül?', *Közgazdasági Szemle*, 43. évf., 4. sz., 303-314. o.
- TAYLOR, W. E. (1974), 'Smoothness Priors and Stochastic Prior Restrictions in Distributed Lag Estimation', *International Economic Review*, 15. évf., 3. sz., 803-804. o.
- THEISS E. (1971), 'A Bayes-módszertan és a statisztikai döntésmélet alkalmazásai a gazdaság-politikai modellekben', *Statisztikai Szemle*, 49. évf., 11. sz., 1087-1104. o.
- TIERNEY, L. (1996), 'Markov Chains for Exploring Posterior Distributions', *Annals of Statistics*, 22. évf., 4. sz., 1701-1728. o.
- VALENTINYI Á. (2005), 'Jegybanki bejelentések és makroökonómiai stabilitás', *Közgazdasági Szemle*, 52. évf., 11. sz., 811-824. o.
- VÁRPALOTAI V. (2002), 'Numerikus módszer gazdasági adatok visszabecslésére', *Statisztikai Szemle*, 80. évf., 9. sz., 813-824. o.
- VÁRPALOTAI V. (2003a), 'Numerical Method for Estimating GDP Data for Hungary', *National Bank of Hungary Working Paper*, 2003/2.
- VÁRPALOTAI V., (2003b), 'Dezinflációs számítások dezaggregált kibocsátási résekre alapozó makro-modellel', *MNB Munkafüzet*, 2003/3.
- VÁRPALOTAI, V. (2003c): 'Dezaggregált költségbeigazítás-alapú ökonometria infláció-előrejelző modell', *MNB Munkafüzet*, 2003/4.
- VÁRPALOTAI V. (2003d), 'Dezinflációs számítások dezaggregált kibocsátási résekre alapozó makro-modellel', *Közgazdasági Szemle*, 50. évf., 4. sz., 287-314. o.
- VÁRPALOTAI, V. (2006a), 'Dezaggregált Bayes-i költségbeigazítás-alapú ökonometria infláció-előrejelző modell', *MNB kézirat*.
- VÁRPALOTAI, V. (2006b), 'Időben változó valószínű eltolás és becslése', *Statisztikai Szemle*, 84. évf., 10-11. sz., 966-995. o.
- VÁRPALOTAI, V. (2006c), 'Disaggregated Cost Pass-Through Based Inflation Forecasting Model for Hungary', In: *Exchange Rates and Macroeconomics Dynamics*. szerk.: Karadeloglou, P. és Terraza, V., Palgrave Macmillan, megjelenés alatt.
- VERDINELLI, I. – WASSERMAN, L. A. (1995), 'Computing Bayes Factors Using a Generalization of the Savage-Dickey Density Ratio', *Journal of the American Statistical Association*, 90. évf., 614-618. o.
- WHITTAKER, E. T. (1923), 'On a New Method of Graduations', *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 41. évf., 63-75. o.
- ZELLNER, A. (1971), 'An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics', John Wiley and Sons, New York.

Függelék

A. Függelék az 1. fejezethez

A.1. Dekompozíciós szabály igazolása

A (3) dekompozíciós szabály igazolásához írjuk át a $(y - X\beta)'(y - X\beta)$ kifejezést úgy, hogy megjelenjen benne a $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$ tag is:

$$\begin{aligned}(y - X\beta)'(y - X\beta) &= (y - X\hat{\beta} + X\hat{\beta} - X\beta)'(y - X\hat{\beta} + X\hat{\beta} - X\beta) = \\ &= \left((y - X\hat{\beta}) - X(\beta - \hat{\beta}) \right)' \left((y - X\hat{\beta}) - X(\beta - \hat{\beta}) \right).\end{aligned}$$

Ekkor kifejtve a szorzatot kapjuk:

$$\begin{aligned}&\left((y - X\hat{\beta}) - X(\beta - \hat{\beta}) \right)' \left((y - X\hat{\beta}) - X(\beta - \hat{\beta}) \right) = \\ &= (y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta}) - 2(y - X\hat{\beta})'X(\beta - \hat{\beta}) + (\beta - \hat{\beta})'X'X(\beta - \hat{\beta}).\end{aligned}$$

A fenti kifejtésben $2(y - X\hat{\beta})'X(\beta - \hat{\beta}) = 0$, aminek belátásához tekintsük az alábbi átalakításokat:

$$(y - X\hat{\beta})'X = (y - X(X'X)^{-1}X'y)'X = \left((I - X(X'X)^{-1}X')y \right)'X = y'(I - X(X'X)^{-1}X')X,$$

ahol I a megfelelő méretű egységmátrix, és ahol kihasználtuk, hogy $(X'X)^{-1}$ szimmetrikus, így $(X'X)^{-1} = \left[(X'X)^{-1} \right]'$. Folytatva az átalakításokat kapjuk:

$$y'(I - X(X'X)^{-1}X')X = y'(X - X(X'X)^{-1}X'X) = y'(X - X) = 0,$$

így $(y - X\hat{\beta})'X = 0$, amiből következik, hogy $2(y - X\hat{\beta})'X(\beta - \hat{\beta}) = 0$. Ezzel igazoltuk a (3) dekompozíciós szabályt.

A.2. Az értekezésben használt nem elemi eloszlások

A.2.1. Student féle t-eloszlás

Egy k dimenziós y valószínűségi vektor ν szabadságfokú ($\nu \in \mathbb{N}^+$) k dimenziós Student-féle t -eloszlást követ μ lokációs paraméterrel ($\mu \in \mathbb{R}^k$) és S $k \times k$ méretű szimmetrikus pozitív definit skála mátrixszal ($y \sim t(\nu, \mu, S)$), ha sűrűségfüggvénye az alábbi alakban adott:

$$f(y|\nu, \mu, S) = c^{-1} |S|^{-\frac{1}{2}} \left[\nu + (y - \mu)'S^{-1}(y - \mu) \right]^{-\frac{\nu+k}{2}}, \quad (92)$$

ahol:

$$c = \frac{\pi^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\nu^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu+k}{2}\right)}.$$

Egy $t(\nu, \mu, S)$ eloszlást követő y véletlen változó várható értéke $E[y] = \mu$, ha $\nu > 1$, kovariancia mátrixa $E[(y - E[y])'(y - E[y])] = \frac{\nu}{\nu-2}S$, ha $\nu > 2$.

A.2.2. Inverz gamma-2 eloszlás

Egy y valószínűségi változóvektor ν szabadságfokú ($\nu \in \mathbb{N}^+$) μ lokációs paraméterű ($\mu \in \mathbb{R}^+$) inverz gamma-2 eloszlást követ ($y \sim IG2(\nu, \mu)$), ha sűrűségfüggvénye az alábbi alakban adott:

$$f(y|\nu, \mu) = c^{-1} y^{-\frac{\nu+2}{2}} \exp\left(-\frac{\mu}{2y}\right), \quad (93)$$

ahol:

$$c = \left(\frac{2}{\mu}\right)^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right).$$

Egy $IG2(\nu, \mu)$ eloszlást követő y véletlen változó várható értéke $E[y] = \frac{\mu}{\nu-2}$, ha $\nu > 2$, variáciája $Var[y] = \frac{2}{\nu-4} (E[y])^2$, ha $\nu > 4$.

A.3. Mintavételezés különböző eloszlásokból

A tárgyalás során a fő részben már bemutattam két hasznos azonosságot, a (3) dekompozíciós szabályt és az (8) inverz Gamma-2 lépést, illetve a többváltozós normális eloszlás feltételes eloszlását (lásd 30. o.). Az alábbiakban ismertetek néhány további azonosságot, amelyekkel a fenti példákban előforduló (többváltozós) eloszlásokból véletlen számot tudunk generálni.

A.3.1. Inverz eloszlásfüggvény technika

Legyen adva egy tetszőleges eloszlás az $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Ebből az $F(x)$ eloszlásból való mintavételezéshez generáljunk egy u véletlen változót az $(0, 1)$ intervallumon értelmezett egyenletes eloszlásból. Ekkor a:

$$z = F^{-1}(u) \quad (94)$$

módon generált z véletlen változó $F(x)$ eloszlást követ, ahol $F^{-1}(\cdot)$ az $F(x)$ eloszlás inverz függvénye, ugyanis:

$$\Pr(z \leq x) = \Pr(F^{-1}(u) \leq x) = \Pr(u \leq F(x)) = F(x),$$

azaz annak a valószínűsége, hogy z nem nagyobb x -nél éppen $F(x)$.

13. példa. Az inverz eloszlás technikával bemutatom, miként generálhatunk véletlen számot egy csonkolt normális eloszlásból, pontosabban például egy standard normális eloszlásból $b_l < z < b_u$ korlátok mellett.¹³² Jelölje $\Phi(z)$ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét. Ekkor a csonkolt eloszlás eloszlásfüggvénye: $F(z) = \frac{\Phi(z) - \Phi(b_l)}{\Phi(b_u) - \Phi(b_l)}$. Így a megfelelő tulajdonságú véletlen számhoz először generáljunk u -t egy $U(0, 1)$ egyenletes eloszlásból, majd oldjuk meg z -re az $F(z) = u$ egyenletet, amiből $z = \Phi^{-1}(\Phi(b_l) + u[\Phi(b_u) - \Phi(b_l)])$. Amennyiben egy $N(\mu, \sigma^2)$ normális eloszlásból kívánunk a fenti korlátok figyelembevételével mintát vételezni, akkor a standard normális eloszláshoz hasonlóan a következőképpen tehető meg: $z = \mu + \sigma \Phi^{-1}\left(\Phi\left(\frac{b_l - \mu}{\sigma}\right) + u\left[\Phi\left(\frac{b_u - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{b_l - \mu}{\sigma}\right)\right]\right)$.

¹³²Ez a probléma előkerült a 7. példánál is.

A.3.2. Többváltozós normális eloszlás

Legyen adva egy k dimenziós normális eloszlás μ várható értékkel és Σ kovariancia mátrixszal. Definiáljuk L -t mint Σ Cholesky dekompozícióját, azaz $\Sigma = L'L$, ahol L egy alsó háromszög mátrix. Ekkor generáljunk egy k dimenziós $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_k)'$ vektort egy független azonos standard normális eloszlásból, azaz $\omega_i \sim N(0, 1)$. Ekkor a:

$$z = \mu + L\omega \quad (95)$$

módon generált k dimenziós véletlen változó vektor normális eloszlást követ μ várható értékkel és Σ kovariancia mátrixszal:

$$\begin{aligned} E[z] &= E[\mu + L\omega] = \mu + LE[\omega] = \mu \\ Cov[z] &= E[(z - E[z])'(z - E[z])] = E[(L\omega)'(L\omega)] = L'E[\omega'\omega]L = L'L = \Sigma. \end{aligned}$$

A.3.3. χ^2 eloszlás

Egy k dimenziós χ^2 eloszlásból való mintavételezéshez generáljunk egy k dimenziós $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)'$ vektort egy független azonos standard normális eloszlásból, azaz $\eta_i \sim N(0, 1)$. Ekkor a:

$$z = \eta'\eta \quad (96)$$

módon generált z véletlen változó $\chi^2(k)$ eloszlást követ.

A.3.4. Többváltozós t -eloszlás

Egy k dimenziós ν szabadságfokú μ lokációs és S skála paraméterű t -eloszlás ($t(\nu, \mu, S)$) szimulálásához kihasználjuk, hogy:

$$\frac{N(\mu, S)}{\chi^2(\nu)} = t(\nu, \mu, S),$$

azaz egy normális és egy tőle független χ^2 típusú eloszlás hányadosaként állítható elő. Így a $t(\nu, \mu, S)$ eloszlásból való mintavételhez először generálni kell egy k dimenziós $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_k)'$ és egy ν dimenziós $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_\nu)'$ vektort egy független azonos standard normális eloszlásból, azaz $\omega_i \sim N(0, 1)$ és $\eta_i \sim N(0, 1)$. Definiáljuk L -t mint S Cholesky dekompozícióját, azaz $S = L'L$, ahol L egy alsó háromszög mátrix. Ekkor a:

$$z = \frac{\mu + L\omega}{\eta'\eta} \quad (97)$$

módon generált z véletlen változó $t(\nu, \mu, S)$ eloszlást követ.

A.3.5. Inverz gamma-2 eloszlás

Egy ν szabadságfokú μ lokációs paraméterű inverz gamma-2 eloszlás ($IG2(\nu, \mu)$) szimulálásához kihasználjuk, hogy:

$$\frac{\mu}{\chi^2(\nu)} \sim IG2(\nu, \mu),$$

azaz a lokációs paraméter és egy ν szabadságfokú χ^2 típusú eloszlás hányadosaként állítható elő. Így az $IG2(\nu, \mu)$ eloszlásból való mintavételhez először generálni kell egy ν dimenziós $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_\nu)'$ vektort egy független azonos standard normális eloszlásból, azaz $\eta_i \sim N(0, 1)$. Ekkor a:

$$z = \frac{\mu}{\eta' \eta} \quad (98)$$

módon generált z véletlen változó $IG2(\nu, \mu)$ eloszlást követ.

A.4. Thomas Bayes portréja



14. ábra. Thomas Bayes tiszteletes (1702-1761)

B. Függelék a 2. fejezethez

B.1. $V'V$ invertálhatóságának bizonyítása

$V'V$ invertálhatóságának bizonyításához elegendő belátni, hogy a $2T - q_a \times T$ méretű $V = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_T \\ \sqrt{k_\alpha} R_{q_\alpha} \end{bmatrix}$ mátrix oszloprangja $\text{rang}(V) = T$. Tudjuk, hogy egy mátrix rangja nem lehet kisebb mint tetszőleges almatríxának rangja. V mátrix egyik almatríxa $\mathbf{I}_T$, ami a $T \times T$ dimenziós egység-mátrix, aminek rangja T , így $\text{rang}(V) \geq T$. Mivel V oszlopainak száma T , ezért oszloprangja, azaz lineárisan független oszlopainak száma nem lehet nagyobb, mint T . Ezekből következik, $\text{rang}(V) = T$, ami miatt $V'V$ invertálható.

B.2. $W'W$ invertálhatóságának bizonyítása

$W'W$ invertálhatóságának bizonyításához ismét elegendő belátni, hogy a $2T - q_\beta \times T$ méretű $W = \begin{bmatrix} \langle \Lambda^i(x) \rangle \\ \sqrt{k_\beta} R_{q_\beta} \end{bmatrix}$ mátrix oszloprangja $\text{rang}(W) = T$. Ehhez fel kell tennünk, hogy a T elemű $\Lambda^i(x)$ vektor elemei között van $q \geq q_\beta$ darab nem nulla elem. Ez gyakorlatilag nem megszorító feltevés, hiszen q_β értéke tipikusan 1, 2 vagy 3, míg $T \gg q_\beta$. Továbbá fel kell tenni, hogy $0 < k_\beta < \infty$, ami szintén nem megszorító, hiszen $k_\beta = 0$ esetén a β -hoz tartozó priorunk varianciája végtelen enne, míg $k_\beta = \infty$ esetén zéró.¹³³

R_{q_β} definíciója miatt egy $T - q_\beta \times T$ dimenziós mátrix $T - q_\beta$ ranggal, amelynek tetszőleges $b \geq q_\beta$ számú oszlopának elhagyásával előállt almatríx rangja $T - b$. Képezzük a W mátrixból azt az almatríxot, ami a $\langle \Lambda^i(x) \rangle$ mátrix nem zéró sorait tartalmazza – feltevésünk miatt q darab ilyen sor van – és $\sqrt{k_\beta} R_{q_\beta}$ nem nulla, véges elemeket tartalmazó mátrixot. Azok az oszlopok, ahová a $\langle \Lambda^i(x) \rangle$ nem nulla elemei kerültek – feltevésünk miatt q darab ilyen oszlop van –, lineárisan függetlenek egymástól, rangjuk így q és egyben lineárisan függetlenek az almatríx többi oszlopától, aminek a rangja R_{q_β} definíciója miatt $T - q$. A teljes almatríx rangja ezért $q + T - q = T$, ezért $\text{rang}(W) \geq T$, de mivel W oszlopainak száma T , ezért oszloprangja, azaz lineárisan független oszlopainak száma nem lehet nagyobb, mint T . Ezekből következik, $\text{rang}(W) = T$, ami miatt $W'W$ invertálható.

B.3. Az i_t peremsűrűségfüggvényei

A főszövegben ismertett Griddy-Gibbs mintavételezési technikához szükséges peremsűrűségfüggvények $q_i = 1$ esetén a következők:

$$\begin{aligned} f\left(i_1^{(m+1)} \middle| \alpha^{(m+1)}, \beta^{(m+1)}, i_2^{(m)}, i_3^{(m)}, \dots, i_T^{(m)}, \sigma^{2(m+1)}, y, x, k_\alpha, k_\beta, k_i\right) &\propto \\ &\propto f\left(i_1^{(m+1)} \middle| \alpha^{(m+1)}, \beta^{(m+1)}, i_2^{(m)}, y, x, k_i\right) \propto \\ &\propto \exp\left(-\left[\left(y_1 - \alpha_1^{(m+1)} - x_{1-i_1^{(m+1)}}\beta_1^{(m+1)}\right)^2 + k_\alpha\left(i_2^{(m)} - i_1^{(m+1)}\right)^2\right]\right) \end{aligned}$$

¹³³Ezekkel a határesetekkel a főszövegben is foglalkoztunk.

$$\begin{aligned}
& f\left(i_2^{(m+1)} \middle| \alpha^{(m+1)}, \beta^{(m+1)}, i_1^{(m+1)}, i_3^{(m)}, \dots, i_T^{(m)}, \sigma^{2(m+1)}, y, x, k_\alpha, k_\beta, k_i\right) \propto \\
& \propto f\left(i_2^{(m+1)} \middle| \alpha^{(m+1)}, \beta^{(m+1)}, i_1^{(m+1)}, i_3^{(m)}, y, x, k_i\right) \propto \\
& \propto \exp\left(-\left[\left(y_2 - \alpha_2^{(m+1)} - x_{2-i_2^{(m+1)}}\beta_2^{(m+1)}\right)^2 + k_\alpha\left(\left(i_2^{(m+1)} - i_1^{(m+1)}\right)^2 + \left(i_3^{(m)} - i_2^{(m+1)}\right)^2\right)\right]\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f\left(i_3^{(m+1)} \middle| \alpha^{(m+1)}, \beta^{(m+1)}, i_1^{(m+1)}, i_2^{(m+1)}, i_4^{(m)}, \dots, i_T^{(m)}, \sigma^{2(m+1)}, y, x, k_\alpha, k_\beta, k_i\right) \propto \\
& \propto f\left(i_3^{(m+1)} \middle| \alpha^{(m+1)}, \beta^{(m+1)}, i_2^{(m+1)}, i_4^{(m)}, y, x, k_i\right) \propto \\
& \propto \exp\left(-\left[\left(y_3 - \alpha_3^{(m+1)} - x_{3-i_3^{(m+1)}}\beta_3^{(m+1)}\right)^2 + k_\alpha\left(\left(i_3^{(m+1)} - i_2^{(m+1)}\right)^2 + \left(i_4^{(m)} - i_3^{(m+1)}\right)^2\right)\right]\right) \\
& \vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f\left(i_T^{(m+1)} \middle| \alpha^{(m+1)}, \beta^{(m+1)}, i_1^{(m+1)}, i_2^{(m+1)}, \dots, i_{T-1}^{(m+1)}, \sigma^{2(m+1)}, y, x, k_\alpha, k_\beta, k_i\right) \propto \\
& \propto f\left(i_T^{(m+1)} \middle| \alpha^{(m+1)}, \beta^{(m+1)}, i_{T-1}^{(m+1)}, y, x, k_i\right) \propto \\
& \propto \exp\left(-\left[\left(y_T - \alpha_T^{(m+1)} - x_{T-i_T^{(m+1)}}\beta_T^{(m+1)}\right)^2 + k_\alpha\left(i_T^{(m+1)} - i_{T-1}^{(m+1)}\right)^2\right]\right).
\end{aligned}$$

A peremsűrűségfüggvények $q_i = 2$ esetén a következők:

$$\begin{aligned}
& f\left(i_1^{(m+1)} \middle| \alpha^{(m+1)}, \beta^{(m+1)}, i_2^{(m)}, i_3^{(m)}, \dots, i_T^{(m)}, \sigma^{2(m+1)}, y, x, k_\alpha, k_\beta, k_i\right) \propto \\
& \propto f\left(i_1^{(m+1)} \middle| \alpha^{(m+1)}, \beta^{(m+1)}, i_2^{(m)}, i_3^{(m)}, y, x, k_i\right) \propto \\
& \propto \exp\left(-\left[\left(y_1 - \alpha_1^{(m+1)} - x_{1-i_1^{(m+1)}}\beta_1^{(m+1)}\right)^2 + k_\alpha\left(i_3^{(m)} - 2i_2^{(m)} + i_1^{(m+1)}\right)^2\right]\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f\left(i_2^{(m+1)} \middle| \alpha^{(m+1)}, \beta^{(m+1)}, i_1^{(m+1)}, i_3^{(m)}, \dots, i_T^{(m)}, \sigma^{2(m+1)}, y, x, k_\alpha, k_\beta, k_i\right) \propto \\
& \propto f\left(i_2^{(m+1)} \middle| \alpha^{(m+1)}, \beta^{(m+1)}, i_1^{(m+1)}, i_3^{(m)}, i_4^{(m)}, y, x, k_i\right) \propto \\
& \propto \exp\left(-\left[\left(y_2 - \alpha_2^{(m+1)} - x_{2-i_2^{(m+1)}}\beta_2^{(m+1)}\right)^2 + k_\alpha\left(\left(i_4^{(m)} - 2i_3^{(m)} + i_2^{(m+1)}\right)^2 + \left(i_3^{(m)} - 2i_2^{(m+1)} + i_1^{(m+1)}\right)^2\right)\right]\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f\left(i_3^{(m+1)} \middle| \alpha^{(m+1)}, \beta^{(m+1)}, i_1^{(m+1)}, i_2^{(m+1)}, i_4^{(m)}, \dots, i_T^{(m)}, \sigma^{2(m+1)}, y, x, k_\alpha, k_\beta, k_i\right) \propto \\
& \propto f\left(i_3^{(m+1)} \middle| \alpha^{(m+1)}, \beta^{(m+1)}, i_1^{(m+1)}, i_2^{(m+1)}, i_4^{(m)}, i_5^{(m)}, y, x, k_i\right) \propto \\
& \propto \exp\left(-\left[\begin{aligned} & \left(y_3 - \alpha_3^{(m+1)} - x_{3-i_3^{(m+1)}}\beta_3^{(m+1)}\right)^2 + \dots \\ & \dots + k_\alpha \left(\left(i_5^{(m)} - 2i_4^{(m)} + i_3^{(m+1)}\right)^2 + \left(i_4^{(m)} - 2i_3^{(m+1)} + i_2^{(m+1)}\right)^2 + \left(i_3^{(m+1)} - 2i_2^{(m+1)} + i_1^{(m+1)}\right)^2\right) \end{aligned}\right]\right) \\
& \qquad \qquad \qquad \vdots \\
& f\left(i_{T-1}^{(m+1)} \middle| \alpha^{(m+1)}, \beta^{(m+1)}, i_1^{(m+1)}, \dots, i_{T-2}^{(m+1)}, i_T^{(m)}, \sigma^{2(m+1)}, y, x, k_\alpha, k_\beta, k_i\right) \propto \\
& \propto f\left(i_{T-1}^{(m+1)} \middle| \alpha^{(m+1)}, \beta^{(m+1)}, i_{T-3}^{(m+1)}, i_{T-2}^{(m+1)}, i_T^{(m)}, y, x, k_i\right) \propto \\
& \propto \exp\left(-\left[\begin{aligned} & \left(y_{T-1} - \alpha_{T-1}^{(m+1)} - x_{T-1-i_{T-1}^{(m+1)}}\beta_{T-1}^{(m+1)}\right)^2 + \dots \\ & \dots + k_\alpha \left(\left(i_T^{(m)} - 2i_{T-1}^{(m+1)} + i_{T-2}^{(m+1)}\right)^2 + \left(i_{T-1}^{(m+1)} - 2i_{T-2}^{(m+1)} + i_{T-3}^{(m+1)}\right)^2\right) \end{aligned}\right]\right) \\
& \\
& f\left(i_T^{(m+1)} \middle| \alpha^{(m+1)}, \beta^{(m+1)}, i_1^{(m+1)}, \dots, i_{T-1}^{(m+1)}, \sigma^{2(m+1)}, y, x, k_\alpha, k_\beta, k_i\right) \propto \\
& \propto f\left(i_T^{(m+1)} \middle| \alpha^{(m+1)}, \beta^{(m+1)}, i_{T-2}^{(m+1)}, i_{T-1}^{(m+1)}, y, x, k_i\right) \propto \\
& \propto \exp\left(-\left[\left(y_T - \alpha_T^{(m+1)} - x_{T-i_T^{(m+1)}}\beta_T^{(m+1)}\right)^2 + k_\alpha \left(i_T^{(m+1)} - 2i_{T-1}^{(m+1)} + i_{T-2}^{(m+1)}\right)^2\right]\right).
\end{aligned}$$

B.4. Felhasznált adatok

A felhasznált negyedéves GDP adatok két fő forrásból származnak: (1) nagy részük az IMF szerkesztette International Finance Statistic adatbázis 2006. januári kiadásából származik, (2) másrészt a főként az újonnan csatlakozott EU tagállamok 2003-as évet megelőző adatai Darvas – Szapáry (2004) tanulmányából származnak, melyeket szintén az IFS statisztika alapján hosszabbítottam meg 2004. negyedik negyedévéig.

A kelet-közép európai ország negyedéves GDP adatait Darvas – Szapáry (2004) tanulmánya több helyről gyűjtötte össze. Az alábbiakban csak azokat említem meg, melyeknek forrása nem az IFS adatbázis volt.:

Csehország: a nemzeti számlákról negyedéves kimutatás 1994 első negyedévével kezdve áll rendelkezésre. Az 1993-as GDP-adat Várpalotai (2002, 2003) módszerével került kiszámításra.

Magyarország: negyedéves GDP adatokat a Központi Statisztikai Hivatal 1995. I. negyedévével kezdve bocsát rendelkezésre. Az 1993-94-re vonatkozó adatok Várpalotai (2002, 2003) számításai.

Lettország: 1995. első negyedévével 2003. harmadik negyedévéig a GDP-adatok Lettország Központi Statisztikai Irodájától (CSBL) származnak. Az 1993-94-es GDP-adatot az IFS-ből vettem, melyet hozzáláncoltam a CSBL 1995-től kezdődő adataihoz.

Lengyelország: A negyedéves nemzeti számlaadatok az OECD adatai között szerepelnek 1995. első negyedévével kezdve 2002. második negyedévéig. 2002. harmadik és negyedik negyedévére (valamint 2003 bizonyos negyedéveire) vonatkozóan a dX Econdata of Emerging Market Economic Data Ltd. cégtől származnak. Az 1993-ra és 1994-re vonatkozó negyedéves adatok Várpalotai

(2002, 2003) módszerével kerültek kiszámításra.

Szlovákia: dX Econdata of Emerging Market Economic Data Ltd. (2004. januári kiadás).

Szlovénia: Szlovén Nemzeti Bank.

7. táblázat. Üzleti ciklusok elemzéséhez felhasznált negyedéves GDP adatok

Országnev	Országkód	Forrás	Első megfigyelés	Utolsó megfigyelés
Közép-kelet-európai országok				
Csehország	CZE	DSZ+IFS	1993. I.	2004. IV.
Észtország	EST	DSZ+IFS	1993. I.	2004. IV.
Magyarország	HUN	DSZ+IFS	1993. I.	2004. IV.
Lettország	LAT	DSZ+IFS	1993. I.	2004. IV.
Litvánia	LIT	DSZ+IFS	1993. I.	2004. IV.
Lengyelország	POL	DSZ+IFS	1993. I.	2004. IV.
Szlovákia	SLK	DSZ+IFS	1993. I.	2004. IV.
Szlovénia	SLO	DSZ+IFS	1993. I.	2004. IV.
Gazdasági és Monetáris Unió tagállamai				
GMU aggregátum	GMU	EKB+IFS	1980. I.	2004. IV.
Ausztria	AUT	IFS	1980. I.	2004. IV.
Belgium	BEL	IFS	1980. I.	2004. IV.
Franciaország	FRA	IFS	1980. I.	2004. IV.
Finnország	FIN	IFS	1980. I.	2004. IV.
Németország	GER	IFS	1980. I.	2004. IV.
Olaszország	ITA	IFS	1980. I.	2004. IV.
Hollandia	NED	IFS	1980. I.	2004. IV.
Portugália	POR	IFS	1980. I.	2004. IV.
Spanyolország	SPA	IFS	1980. I.	2004. IV.
Kontrollcsoport				
Dánia	DEN	IFS	1988. I.	2004. IV.
Svédország	SWE	IFS	1980. I.	2004. IV.
Egyesült Királyság	GBR	IFS	1980. I.	2004. IV.
Svájc	SWI	IFS	1980. I.	2004. IV.
Norvégia	NOR	IFS	1980. I.	2004. IV.
Egyesült Államok	USA	IFS	1980. I.	2004. IV.
Japán	JAP	IFS	1980. I.	2004. IV.

A forrásmegjelölésnél szereplő DSZ jelölés Darvas – Szapáry (2004) tanulmányára utal, EKB az Európai Központi

Bankra, az IFS az IMF adatbázisára.

B.5. Táblázatok a 2. fejezethez

8. táblázat. Üzleti ciklusok szinkronizációját vizsgáló modellek összehasonlítása mesterséges adatokon. A gördülő mintás becslés és az időben változó paraméteres modell (1. és 2. modell) mintán belüli illeszkedése és mintán kívüli előrejelzési pontossága az RMSE mutató alapján, normálva az időben változó paraméterű és tört késleltetésű modell (3. modell) megfelelő RMSE értékével

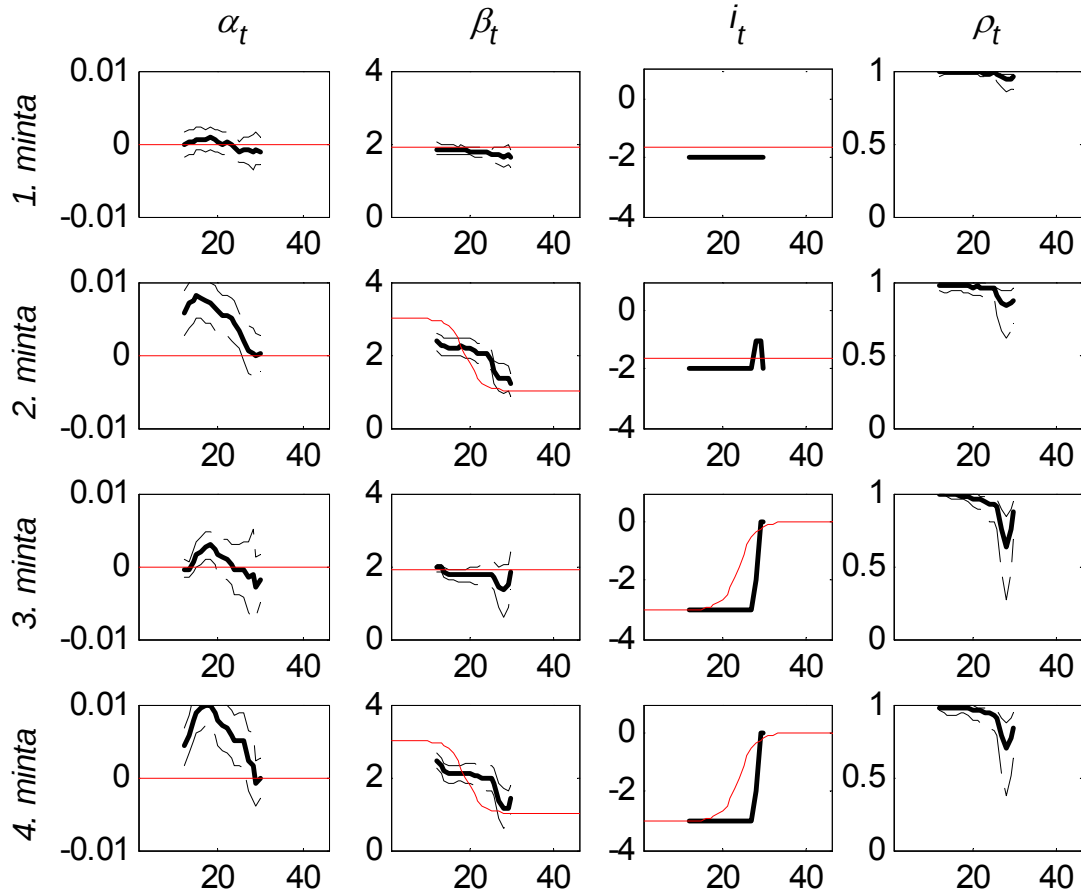
			Előrejelzés			
Illeszkedés			1	2	3	4
			periódusra előre			
1. minta	1. modell	1.2311	1.0265	0.9802	0.9985	0.8879
	2. modell	1.0978	1.6206	2.4526	3.0755	2.7000
2. minta	1. modell	1.5308	1.2373	1.1002	1.0119	0.9449
	2. modell	1.8193	1.1299	1.5045	1.6665	1.5018
3. minta	1. modell	2.1130	1.5648	1.5203	1.4397	1.4236
	2. modell	1.7653	2.4944	3.5514	3.8674	4.0601
4. minta	1. modell	1.9484	1.4410	1.3284	1.2435	1.1378
	2. modell	2.0601	2.2467	2.9972	3.1418	2.9743

9. táblázat. Üzleti ciklusok szinkronizációját vizsgáló modellek összehasonlítása valós adatokon. A gördülő mintás becslés és az időben változó paraméteres modell (1. és 2. modell) mintán belüli illeszkedése és mintán kívüli előrejelzési pontossága az RMSE mutató alapján, normálva az időben változó paraméterű és tört késleltetésű modell (3. modell) megfelelő RMSE értékével

			Előrejelzés						Előrejelzés					
Illeszkedés			1	2	3	4	Illeszkedés			1	2	3	4	
			periódusra előre						periódusra előre					
Közép-Kelet Európai országok														
CZE	1. modell	1.6779	1.3025	1.2250	1.1732	1.0456	LIT	1. modell	1.9322	1.2687	1.2811	1.2248	1.0610	
	2. modell	1.9687	1.4415	1.2286	1.2079	1.3438		2. modell	2.7349	1.7950	1.8329	2.0433	1.4266	
EST	1. modell	1.7126	1.7572	1.1902	1.0311	1.0157	POL	1. modell	0.8678	1.1923	1.3729	1.3577	1.2241	
	2. modell	2.0154	1.2771	1.2039	1.2702	1.0337		2. modell	0.8288	1.2173	1.1892	1.1720	1.0393	
HUN	1. modell	1.0836	1.0707	1.0322	0.9106	0.8653	SLK	1. modell	1.8803	1.7439	1.6746	1.5022	1.4066	
	2. modell	1.4927	1.7810	1.4397	1.3185	1.2167		2. modell	2.0296	1.4088	1.2131	1.1794	1.2242	
LAT	1. modell	1.5954	1.3459	1.2210	1.1402	1.0765	SLO	1. modell	1.0271	1.0326	1.1006	0.9993	0.9909	
	2. modell	2.2196	1.2709	1.3061	1.5514	1.0160		2. modell	0.9512	1.1374	1.1231	0.9216	1.1043	
Gazdasági és Monetáris Unió országai														
AUT	1. modell	1.2112	1.4554	1.4814	1.6017	1.7102	ITA	1. modell	1.8085	1.9013	1.8235	1.8232	1.7125	
	2. modell	1.4010	1.6118	2.0338	2.1430	2.3358		2. modell	2.0536	1.5468	1.6549	1.8426	2.2804	
BEL	1. modell	2.0428	1.8569	1.7971	1.6262	1.5825	NED	1. modell	1.1129	1.5461	1.4774	1.5252	1.4757	
	2. modell	2.2081	1.9587	2.2592	2.6837	2.8137		2. modell	1.7816	1.4727	1.2382	1.2735	1.3175	
FRA	1. modell	1.5092	2.1952	2.0973	1.9145	1.6526	POR	1. modell	0.9584	1.3947	1.3914	1.4069	1.3864	
	2. modell	2.2635	1.9791	2.9101	3.2536	2.8965		2. modell	1.4526	1.5176	1.3330	1.2412	1.1678	
FIN	1. modell	2.9090	1.4688	1.1641	1.1121	1.1039	SPA	1. modell	1.3791	1.4223	1.5123	1.5058	1.5537	
	2. modell	2.9053	1.3550	1.4182	1.4606	1.6961		2. modell	1.4407	1.3264	1.2607	1.1898	1.1201	
GER	1. modell	1.3902	1.2571	1.3523	1.2851	1.1766								
	2. modell	1.5784	1.3173	1.5792	1.5172	1.6970								
Kontrollcsoport országok														
DEN	1. modell	1.2124	1.0467	1.0010	1.0392	1.0313	NOR	1. modell	1.6450	1.3418	1.3819	1.2666	1.1606	
	2. modell	1.4140	1.6461	2.2783	2.9306	2.7979		2. modell	2.1345	2.0646	2.6669	2.5378	2.4524	
SWE	1. modell	1.4991	1.6314	1.4572	1.3635	1.2945	USA	1. modell	2.2852	1.1356	1.0766	1.1365	1.0446	
	2. modell	1.8621	1.9988	1.8613	2.2170	2.4171		2. modell	4.2869	1.5819	2.3765	2.8140	2.4925	
GBR	1. modell	1.8043	1.5329	1.4342	1.4034	1.2956	JAP	1. modell	1.8278	1.7048	1.6035	1.6000	1.5543	
	2. modell	2.8228	2.1672	2.3215	1.8508	2.2511		2. modell	1.8398	1.3716	1.5798	1.4955	1.4007	
SWI	1. modell	1.5301	1.0121	1.0968	1.2927	1.3144								
	2. modell	2.1515	1.5952	1.9999	2.2712	2.1683								

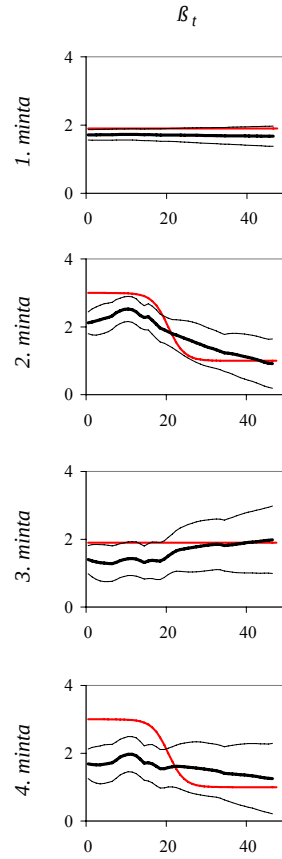
B.6. Ábrák a 2. fejezethez

15. ábra. Szinkronizáció becslése gördülő mintás megközelítésben (1. modell)



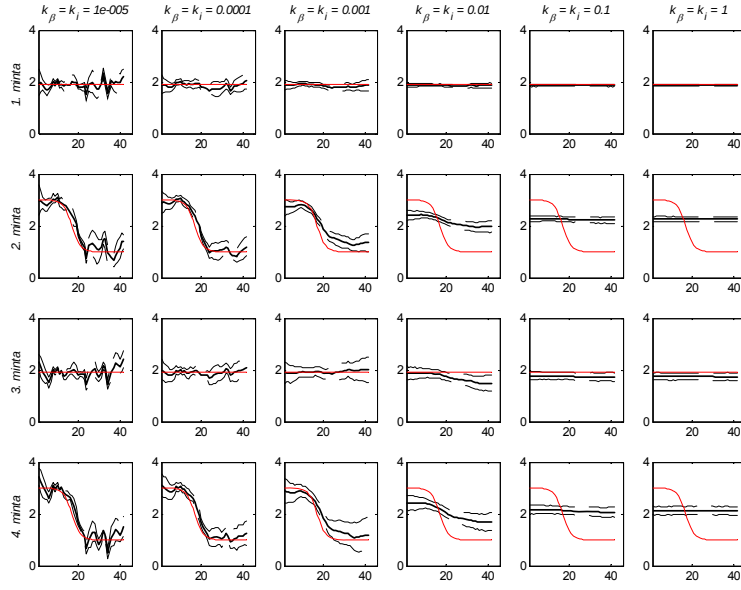
$y_t = \alpha + \beta x_{t-l} + \varepsilon_t$ modell gördülő mintás becslése, mozgó ablak mérete 20 negyedév, azaz 5 év. Minden egyes részmintában a legnagyobb korrelációt eredményező késleltetést szerepeltettem. A becült értékeket a részminta közepéhez tartozó időpontnál ábrázoltam. Az ábrákon piros vonalak jelzik a tényleges értékeket, vastag fekete vonalak a becült értékeket, vékony fekete vonalak pedig a becült értékek 95%-os konfidencia-intervallumait.

16. ábra. Szinkronizáció becslése időben változó paraméteres modellel (2. modell)

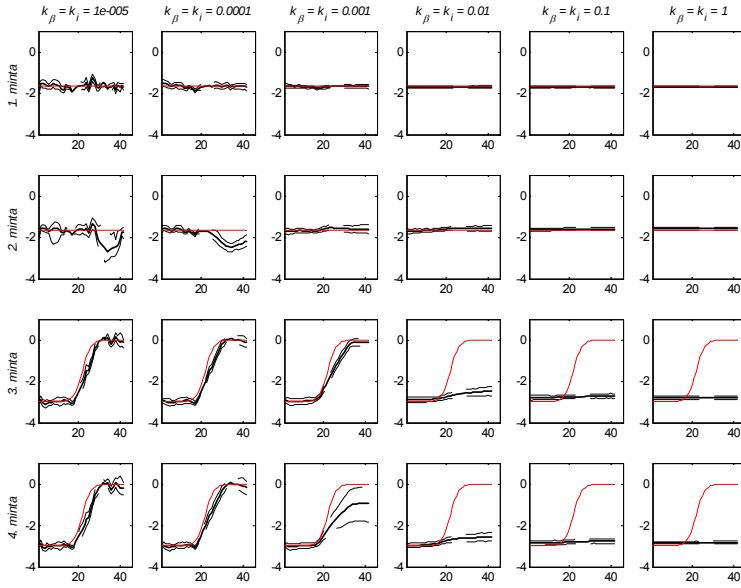


$y_t = \alpha_t + \beta_t x_{t-l} + \varepsilon_t$ modell becslésekor a legnagyobb likelihood értéket eredményező késleltetést szerepeltettem (1. és 2. mintán $l = 2$, 3. és 4. mintán $l = 1$). Az ábrákon piros vonalak jelzik a tényleges értékeket, vastag fekete vonalak a becsült értékeket, vékony fekete vonalak pedig a becsült értékek 95%-os konfidencia-intervallumait.

17-a. ábra. Szinkronizáció becslése időben változó paraméterű és tört késleltetési modellel (3. model) β_t paraméter



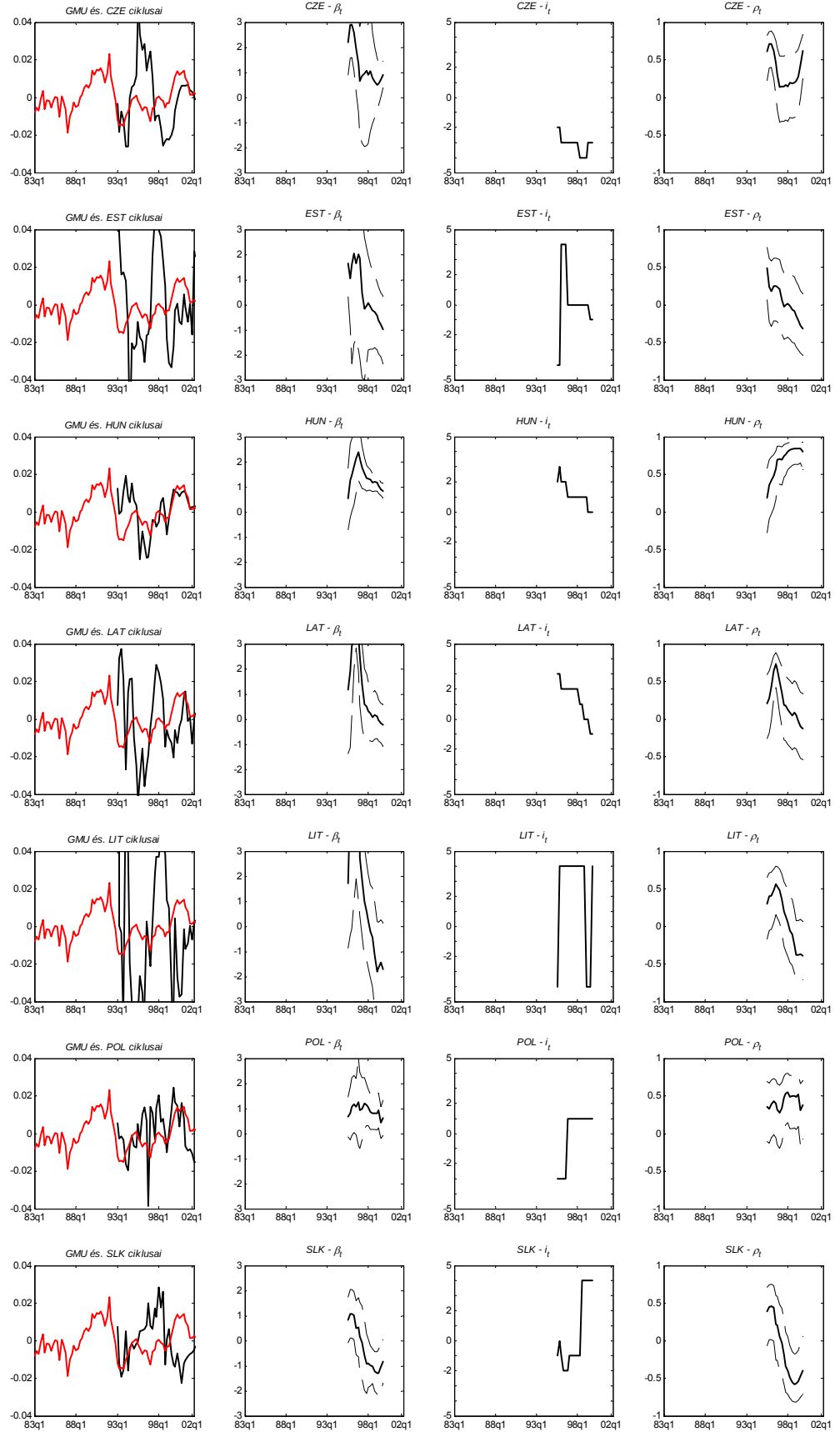
17-b. ábra. Szinkronizáció becslése időben változó paraméterű és tört késleltetési modellel (3. model) i_t paraméter

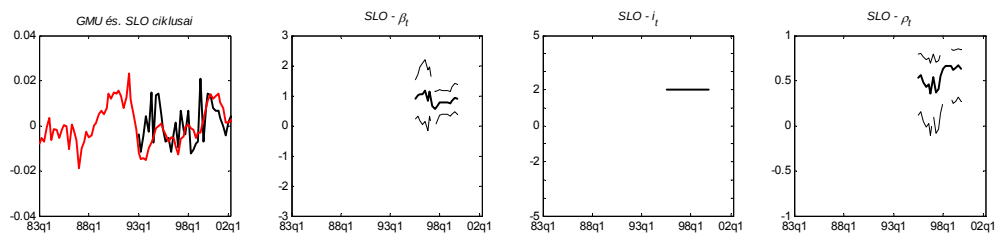


Az ábrákon piros vonalak jelzik a tényleges értékeket, vastag fekete vonalak a becsült értékeket, vékony fekete vonalak pedig a becsült értékek 95%-os legnagyobb valószínűségű intervallumokat.

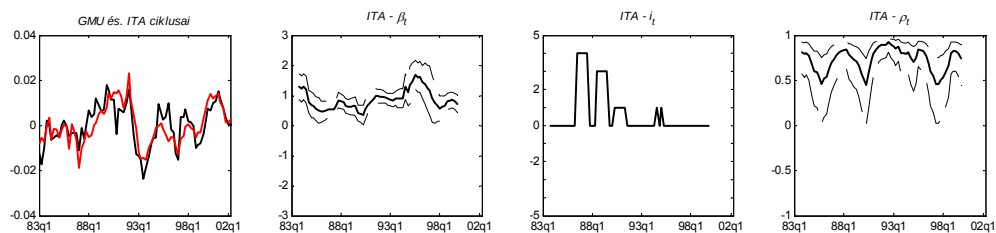
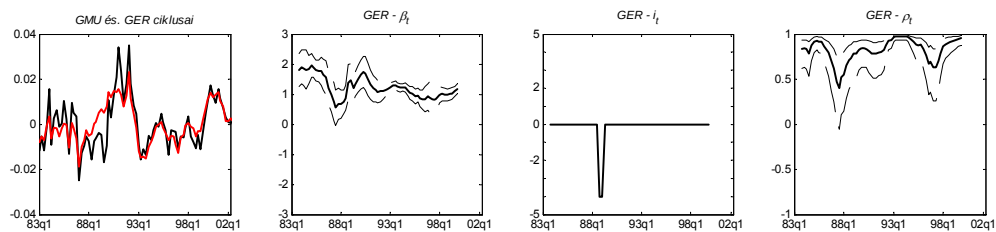
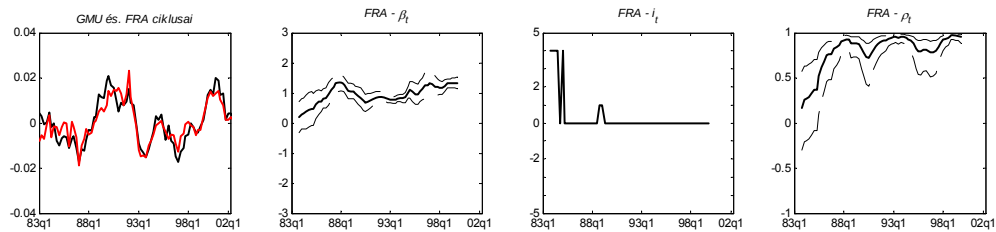
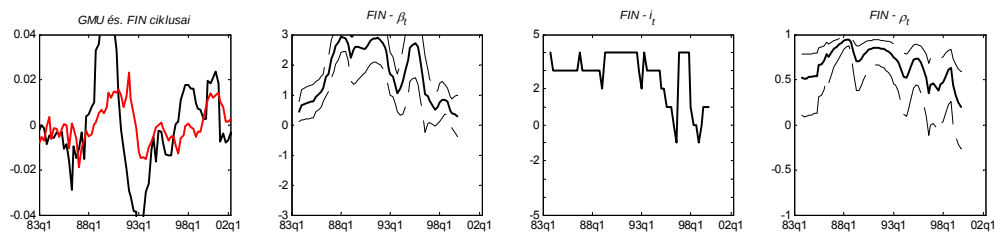
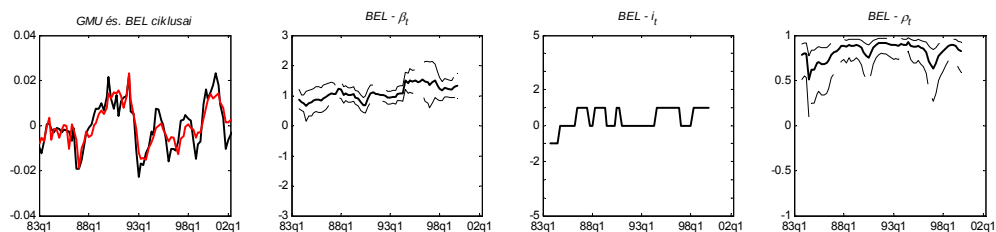
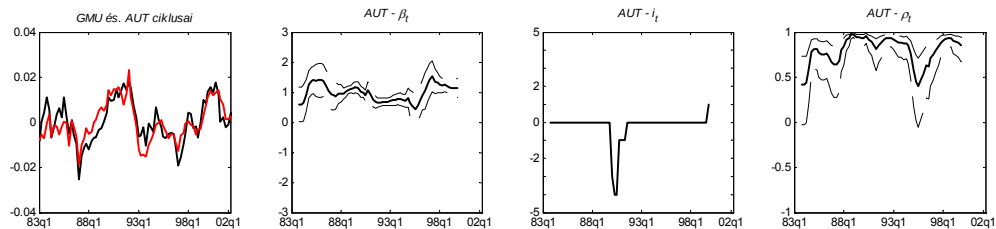
18. ábra. Szinkronizáció mozgóablakos megközelítésben: üzleti ciklusok, becstült β_t , i_t és ρ_t idősorok és 95%-os konfidencia-intervallumaik az egyes országokban 20 negyedéves (5 éves) mozgóablakkal.

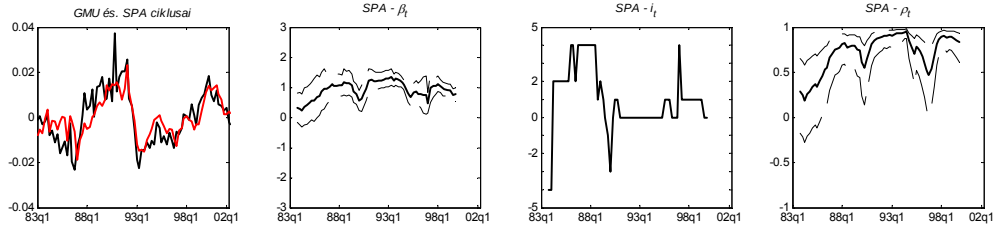
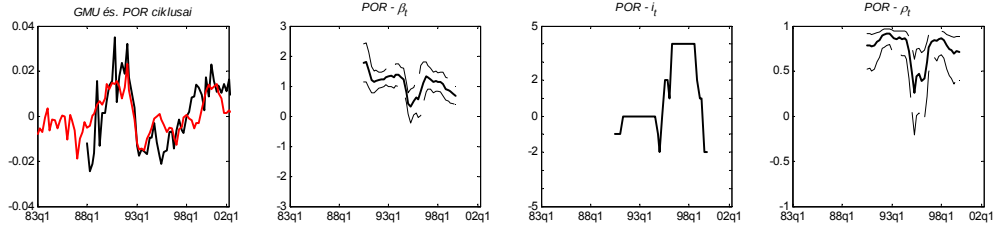
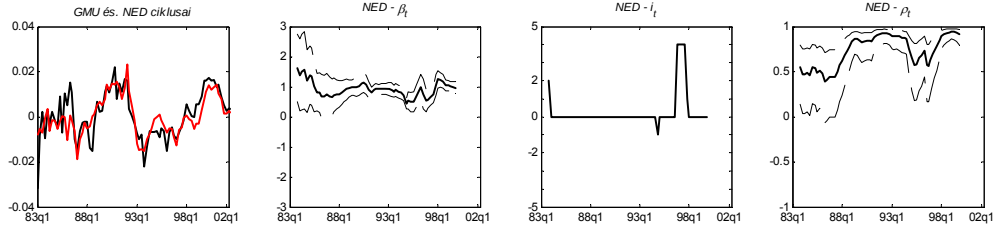
Közép-Kelet Európai országok



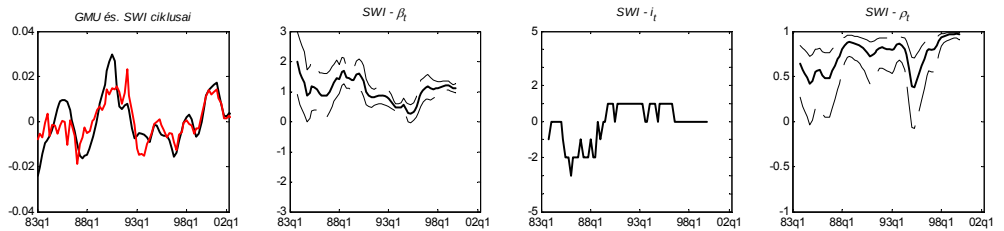
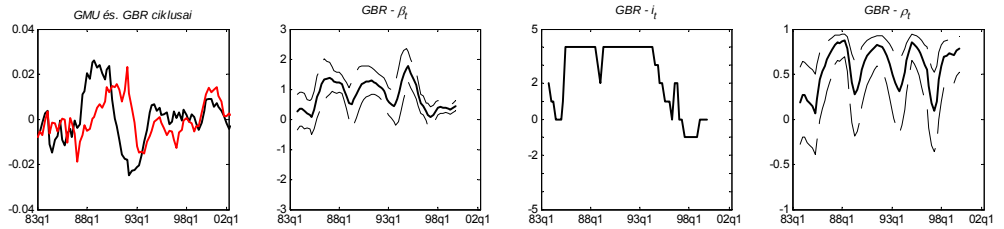
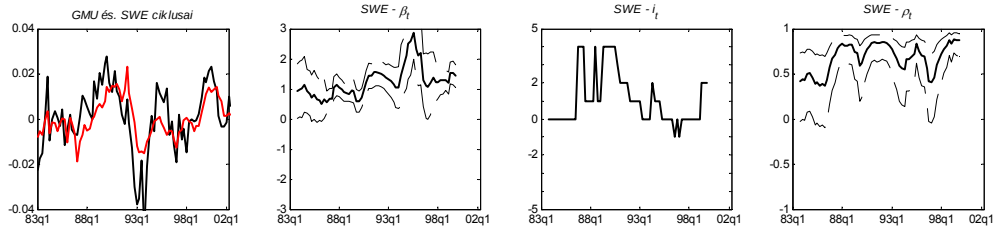
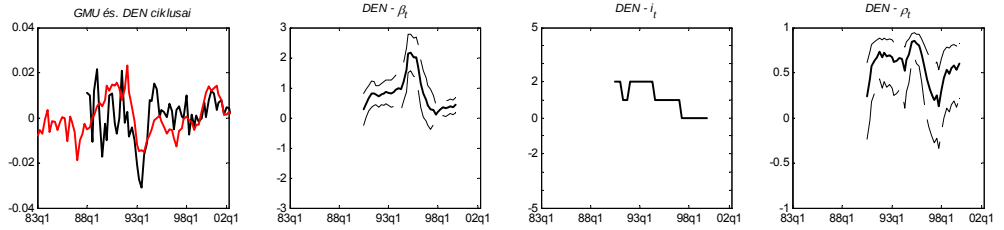


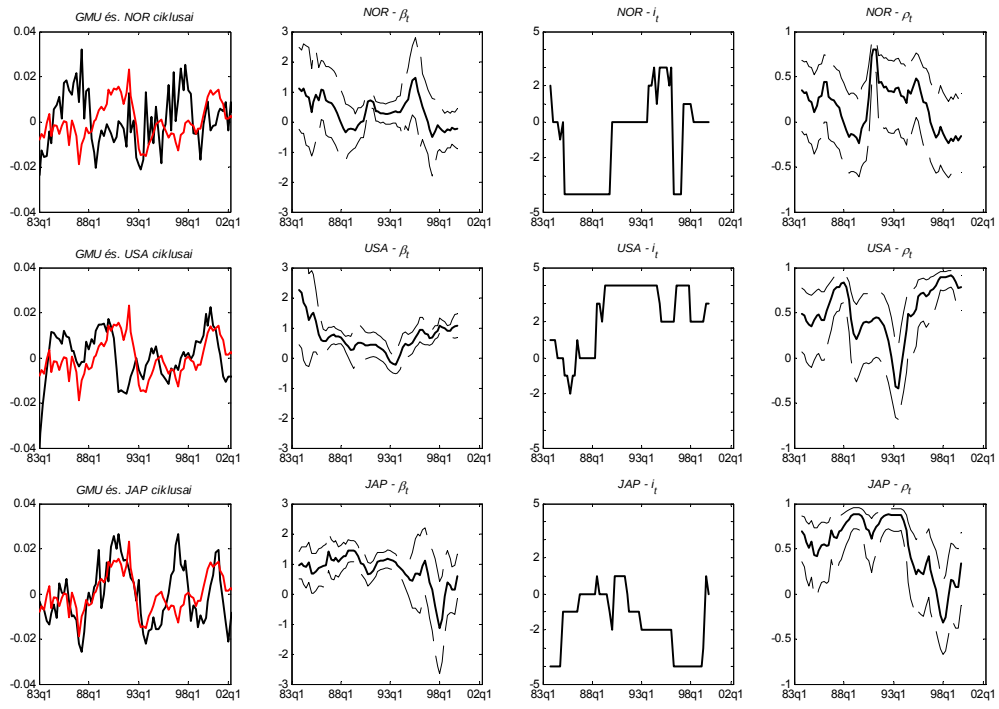
Gazdasági és Monetáris Unió országai



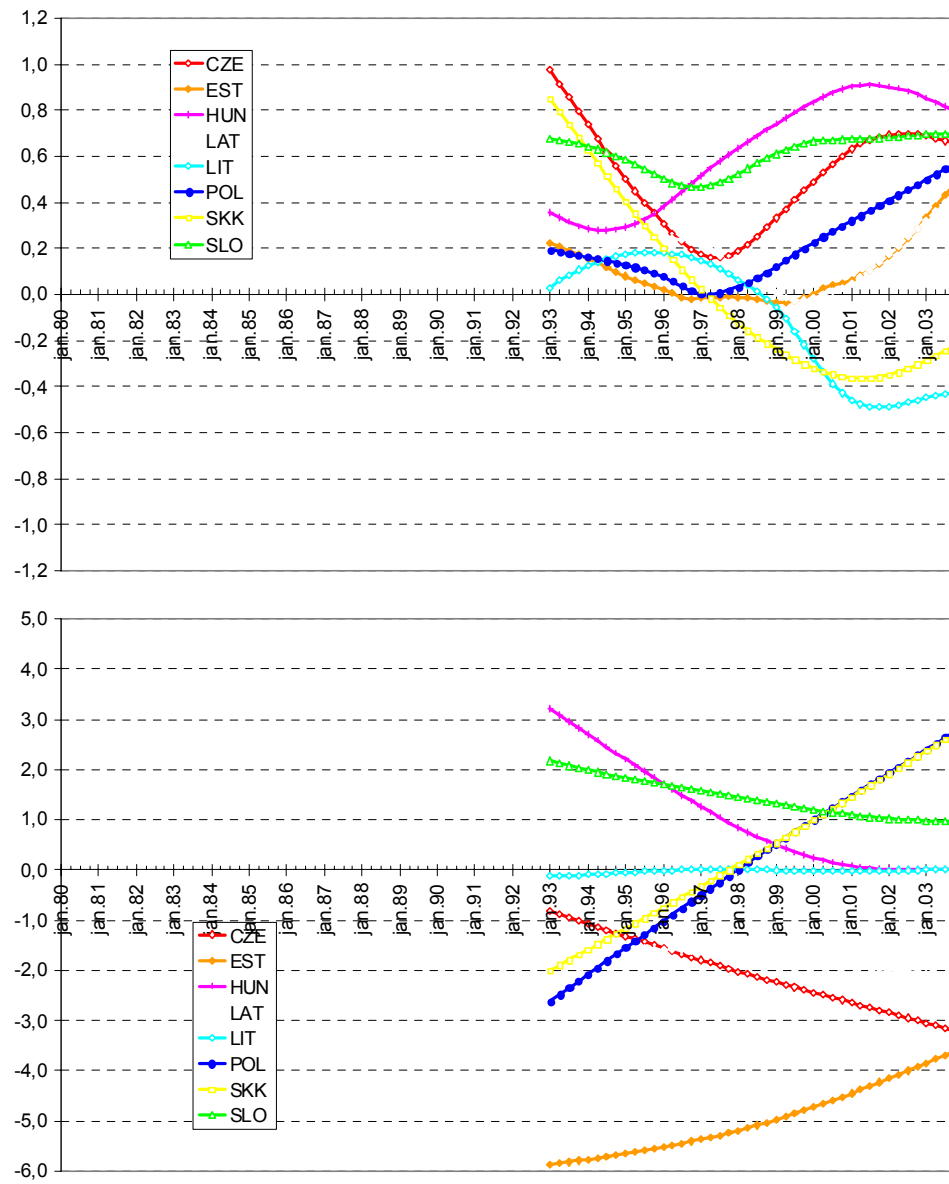


Kontrollcsoport országai

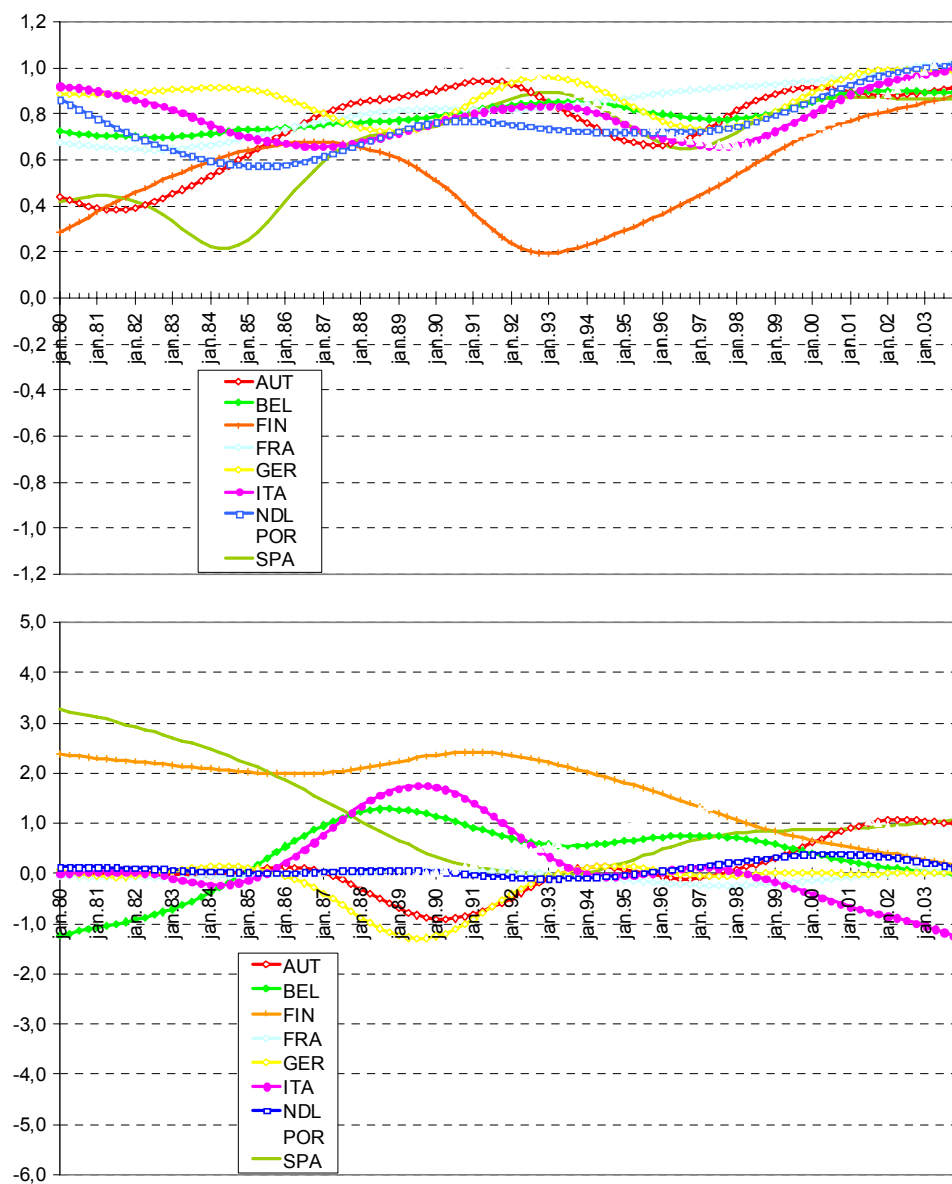




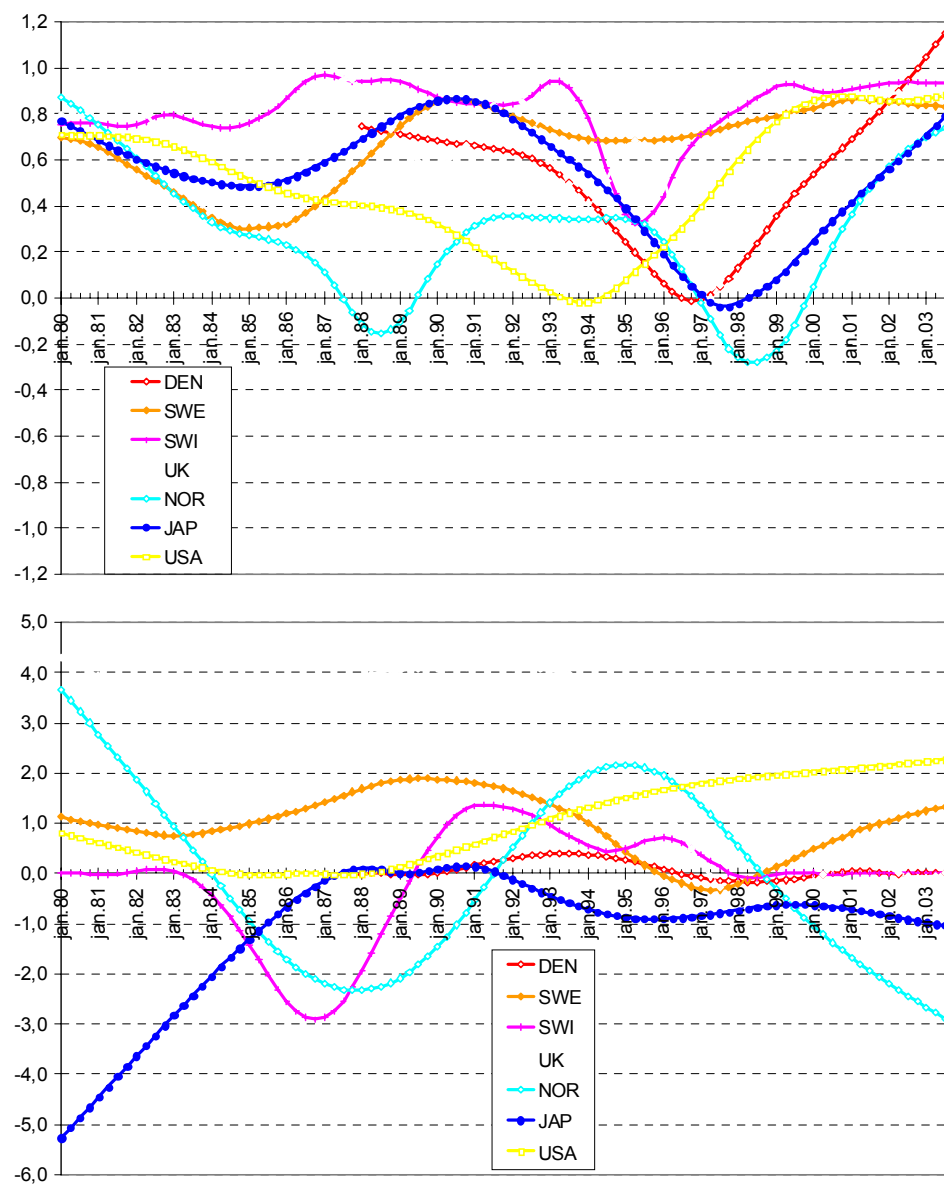
19-a. ábra. Üzleti ciklusok szinkronizációja a Közép-Kelet Európai országokban



19-b. ábra. Üzleti ciklusok szinkronizációja a Gazdasági és Monetáris Uniós országokban



19-c. ábra. Üzleti ciklusok szinkronizációja a kontrollcsoport országokban



C. Függelék a 3. fejezethez

C.1. $Z'_\mu Z_\mu$ invertálhatóságának bizonyítása

$Z'_\mu Z_\mu$ invertálhatóságának bizonyításához elegendő belátni, hogy a $2T - r_\mu \times T$ méretű $Z_\mu = \begin{bmatrix} I_T \\ \sqrt{k_\mu} R_{r_\mu} \end{bmatrix}$ mátrix oszloprangja $\text{rang}(Z_\mu) = T$, ha k_μ véges. Tudjuk, hogy egy véges elemeket tartalmazó mátrix rangja nem lehet kisebb mint tetszőleges almatríxának rangja. Z_μ mátrix egyik almatríxa $\mathbf{I}_T$, ami a $T \times T$ dimenziós egységmátrix, aminek rangja T , így $\text{rang}(Z_\mu) \geq T$. Mivel Z_μ oszlopainak száma T , ezért oszloprangja, azaz lineárisan független oszlopainak száma nem lehet nagyobb, mint T . Ezekből következik, $\text{rang}(Z_\mu) = T$, ami miatt $Z'_\mu Z_\mu$ invertálható.

C.2. $Z'_j Z_j$ invertálhatóságának bizonyítása

$Z'_j Z_j$ invertálhatóságának bizonyításához szintén elegendő belátni, hogy a $T + q_j - r_j + 1 \times q_j$ méretű $Z_j = \begin{bmatrix} \widetilde{\Delta C_j} \\ \sqrt{k_j} R_{r_j} \end{bmatrix}$ mátrix oszloprangja $\text{rang}(Z_j) = q_j$, ha $0 < k_j < \infty$ és $\widetilde{\Delta C_j}$ rangja legalább r_j . Ezek nem megszorító feltevések, hiszen $k_j = 0$ esetén az osztott késleltetéshez tartozó prior varianciája végtelen enne, míg $k_j = \infty$ esetén zéró, illetve a gyakorlatban $\widetilde{\Delta C_j}$ rangja teljes ($\text{rang}(\widetilde{\Delta C_j}) = q_j$).

R_{r_j} definíciója miatt egy $q_j - r_j + 1 \times q_j$ dimenziós mátrix $q_j - r_j + 1$ ranggal, amelynek tetszőleges $b \geq r_j - 1$ számú oszlopának elhagyásával előállt almatríx rangja $q_j - b$. Képezzük a Z_j mátrixból azt a r_j oszlopszámú almatríxot, ami azokat az oszlopokat tartalmazza, amelyben $\widetilde{\Delta C_j}$ oszlopainak rangja r_j . Jelölje ezt Z_1 . Ilyen biztos van feltevésünk miatt. Ennek az almatríxnak a rangja konstrukciójánál fogva r_j . Z_j ol r_j számú oszlopot elhagyva $q_j - r_j$ rangú almatríxot kapunk. A Z_1 és Z_2 mátrixok oszlopai függetlenek egymástól, mivel Z_2 minden oszlopának R_{r_j} sorait tartalmazó blokkja független Z_1 hasonló blokkjától, ezért $\text{rang}(Z_j) \geq r_j + q_j - r_j$. Mivel egy mátrix oszloprangja nem lehet több, mint oszlopainak száma ezért $\text{rang}(Z_j) = q_j$, ami $Z'_j Z_j$ invertálhatóságát biztosítja.

C.3. $Z'_\phi Z_\phi$ invertálhatóságának bizonyítása

$Z_\phi = \varepsilon$ definíció szerint egy $T \times 1$ -es vektor. Ezért $Z'_\phi Z_\phi$ egy skalár, ami akkor invertálható, ha nem zéró. Mivel $Z'_\phi Z_\phi = \sum_{k=1}^T \varepsilon_k^2$, ezért $Z'_\phi Z_\phi$ akkor lehet zéró, ha ε_k minden eleme zéró. Ebben az esetben a hosszú távú egyenlet azonosságként kellene teljesülnie (hibatag nélkül), ami kizárható. Megjegyzés: ha a hosszú távú egyenletnél a simasági prior relatív varianciája a végtelenhez tart (Hodrick-Prescott filter paramétere $\lambda \rightarrow 0$), akkor $\varepsilon \rightarrow 0$. A tanulmányban azonban kellően nagy λ értéket használtuk ($\lambda = 1600^2$), így igen alacsony relatív varianciát, ami gyakorlatilag kizárja ezt az esetet.

C.4. Táblázatok a 3. fejezethez

10-a. táblázat. A KSH 160 elemet tartalmazó fogyasztási kosarának csoportosítása

Súlyok 2005	Aggregált csoportok													
	Nyershús	Feldhús	Halak	Tújs	Tej	Tejterm	NovZár	Liszt	Pekaru	Cukor	Edesség	EgyébCereal	FrissGyüm	TartElelm
1,074 Sertéshús	1													
0,133 Marha- és borjúhús	1													
0,027 Juh-, nyúl és egyéb hús	1													
0,079 Belsősegek	1													
0,894 Baromfi	1													
0,741 Szalámi, szárazkolbász, sonka	1													
0,783 Párizsi, kolbász, hurka	1													
0,075 Húskonzerv	1													
0,089 Hal	1													
0,060 Halkonzerv	1													
0,386 Tej		1												
1,496 Tej				1										
0,391 Sajt					1									
1,264 Tejtermékek (sajt nélkül)					1									
0,088 Vaj, vajkrém					1									
0,210 Sertés- és baromfiszaradék	1													
0,275 Étkezési szalonna	1													
0,425 Étolaj						1								
0,299 Margarin						1								
0,321 Liszt, dara							1							
0,224 Rizs, hántolmányok								1						
1,565 Kenyér							1							
0,365 Péksütemények							1							
0,343 Száraztészta									1					
0,518 Cukor									1					
0,538 Csokoládé, kakaó										1				
0,438 Cukrászáru, fagyalt										1				
0,241 Édesipari lisztésáru										1				
0,175 Cukorka, méz										1				
0,458 Burgonya											1			
0,979 Friss zöldség, főzelék											1			
0,989 Friss hazai- és délgümölcs											1			
0,724 Gyümölcs-, zöldséglé, szörp												1		
0,233 Tartósított zöldség, főzelék												1		
0,056 Tartósított gyümölcs												1		
0,053 Száraz hüvelyesek												1		
0,126 Dió, mák, mogyoró												1		
0,098 Tartósított húsos ételek												1		
0,245 Tartósított hústalan ételek												1		
0,292 Fűszerek, ételízesítők												1		
0,749 Éttermi étkezés (nem előfizetéses)												1		
1,386 Munkahelyi és előfiz. menü étkezés												1		
0,399 Iskolai étkezés												1		
0,126 Óvodai, bölcsődei étkezés												1		
0,450 Büféáru												1		
0,730 Kávé (bolti)												1		
0,191 Eszpresszókávé												1		
0,080 Tea												1		
1,283 Alkoholfmentes üdítőitalok												1		
1,135 Bor												1		
3,290 Sör												1		
1,962 Tömény ital												1		
2,800 Dohányáru												1		
0,113 Pamut- és pamut típusú szövet												1		
0,094 Gyapjú- és gyapjú típusú szövet												1		
0,033 Egyéb szövetek												1		
0,144 Férfikabát													1	
0,133 Férfiöltöny													1	
0,415 Férfinadrág, -zakó													1	
0,174 Férfi felső kötöttáru													1	
0,459 Férfilábbeli													1	
0,300 Férfiing, -fehérmű													1	
0,168 Férfiharisnya, -zokni													1	
0,224 Női kabát													1	
0,131 Női ruha, kosztüm													1	
0,296 Női szoknya, blúz, nadrág													1	
0,165 Női felső kötöttáru													1	
0,562 Női lábbeli													1	
0,189 Női fehérmű													1	
0,217 Női harisnya, zokni													1	
0,120 Gyermekkabát													1	
0,285 Gyermekfelsőruha													1	
0,159 Gyermek felső kötöttáru													1	
0,237 Gyermeklábbeli													1	
0,049 Gyermekfehérmű													1	

KSH fogyasztói árindexének 160-as bontása

Az eredeti KSH megnevezések a második oszlopban szerepelnek, melyeket a fogyasztói kosárbeli súlyuk előz meg, az oszlopok fejlécében az aggregált csoportok elnevezései vannak feltüntetve. A táblázatban "1" jelöli, hogy az adott sorban szereplő fogyasztói kosár tételt az adott oszlopban feltüntetett aggregált csoportba soroltam.

KSH fogyasztói árindexének 160-as bontása

11-a. táblázat. Az infláció előrejelző modell költségösszetevői, prior költségűlyai, késlelteteshosszai és a hosszú táv illeszkedése modellegenként

		Költség elemek									Statistikák		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	σ	$R^2 - \Delta_1$	$R^2 - \Delta_{12}$
Nyersflus	γ_{ij}	Szállítás	Villany	Gaz	berk_keresk	mg_vagosa						-	-
	q_{ij}	6	12	12	36	24						0.009	0.64 0.89
Feldflus	γ_{ij}	Szállítás	Villany	Gaz	berk_keresk	berk_elemlip	mg_vagosa				σ	$R^2 - \Delta_1$	$R^2 - \Delta_{12}$
	q_{ij}	24	12	12	24	18	12					-	-
Halak	γ_{ij}	Szállítás	Villany	Gaz	berk_keresk	berk_elemlip	n_hal	huf_EUR			σ	$R^2 - \Delta_1$	$R^2 - \Delta_{12}$
	q_{ij}	24	12	12	24	18	12	0.600				-	-
Tojás	γ_{ij}	Szállítás	Villany	Gaz	berk_keresk	mg_tojas					σ	$R^2 - \Delta_1$	$R^2 - \Delta_{12}$
	q_{ij}	12	12	12	18	6		24				-	-
Tej	γ_{ij}	Szállítás	Villany	Gaz	berk_keresk	mg_tej					σ	$R^2 - \Delta_1$	$R^2 - \Delta_{12}$
	q_{ij}	24	12	12	24	12		0.600				-	-
TejTerm	γ_{ij}	Szállítás	Villany	Gaz	berk_keresk	berk_elemlip	mg_tej				σ	$R^2 - \Delta_1$	$R^2 - \Delta_{12}$
	q_{ij}	24	12	12	24	12		0.700				-	-
NovZsir	γ_{ij}	Szállítás	Villany	Gaz	berk_keresk	berk_elemlip	n_olajzsir	huf_EUR			σ	$R^2 - \Delta_1$	$R^2 - \Delta_{12}$
	q_{ij}	24	12	12	24	24	24	0.400				-	-
Liszt	γ_{ij}	Szállítás	Villany	Gaz	berk_keresk	berk_elemlip	mg_buza				σ	$R^2 - \Delta_1$	$R^2 - \Delta_{12}$
	q_{ij}	12	12	12	12	12	18	0.379				-	-
Pekaru	γ_{ij}	Liszt	Szállítás	Villany	Gaz	berk_keresk	berk_elemlip				σ	$R^2 - \Delta_1$	$R^2 - \Delta_{12}$
	q_{ij}	12	12	12	12	24	24	0.280				-	-
Cukor	γ_{ij}	Szállítás	Villany	Gaz	berk_keresk	berk_elemlip	n_cukor	huf_EUR			σ	$R^2 - \Delta_1$	$R^2 - \Delta_{12}$
	q_{ij}	24	12	12	24	24	24	0.325				-	-
Edesseg	γ_{ij}	Cukor	Szállítás	Villany	Gaz	berk_keresk	berk_elemlip	n_cukor	huf_EUR		σ	$R^2 - \Delta_1$	$R^2 - \Delta_{12}$
	q_{ij}	12	12	12	12	18	24	0.050				-	-
												0.004	0.69 0.97

11-b. táblázat. Az infláció előrejelző modell költségösszetevői, prior költségűlyai, késleltetéshosszai és a hosszú táv illeszkedése modellegenként

		Költség elemek										Statistikák	
1		2	3	4	5	6	7	8	9				
EgyébCereal	Szállítás	Villany	Gaz	berk_keresk	berk_elelmip	n_kenyerece	huf_EUR			$R^2 - \Delta_1$	$R^2 - \Delta_{12}$		
	γ_{ij}	0.050	0.030	0.250	0.350	0.290	0.290			-	-		
	$q_{i,j}$	12	12	24	24	24	36			0.003	0.76 0.97		
FrissZyüm	Szállítás	berk_keresk	mg_zgy							$R^2 - \Delta_1$	$R^2 - \Delta_{12}$		
	γ_{ij}	0.150	0.200	0.650						-	-		
	$q_{i,j}$	12	24	6						0.040	0.30 0.01		
TartElelm	Szállítás	Villany	Gaz	berk_keresk	berk_elelmip	Frissgyüm	n_egyebeelm	huf_EUR	mg_vagoo	$R^2 - \Delta_1$	$R^2 - \Delta_{12}$		
	γ_{ij}	0.050	0.050	0.050	0.200	0.100	0.330	0.330	0.020	-	-		
	$q_{i,j}$	24	12	12	24	24	24	24	12	0.002	0.78 0.91		
Etekezés	Szállítás	Villany	Gaz	berk_szallas	NyersHus	Pekaru	TartElelm			$R^2 - \Delta_1$	$R^2 - \Delta_{12}$		
	γ_{ij}	0.050	0.050	0.300	0.034	0.050	0.466			-	-		
	$q_{i,j}$	12	12	24	12	12	24			0.003	0.90 0.98		
KaveTea	Szállítás	Villany	Gaz	berk_keresk	n_kveteakakao	huf_EUR				$R^2 - \Delta_1$	$R^2 - \Delta_{12}$		
	γ_{ij}	0.050	0.025	0.250	0.650	0.650				-	-		
	$q_{i,j}$	24	12	36	36	24				0.005	-0.15 -0.74		
Italok	Cukor	Szállítás	Villany	Gaz	berk_keresk	berk_elelmip	n_italok	huf_EUR		$R^2 - \Delta_1$	$R^2 - \Delta_{12}$		
	γ_{ij}	0.025	0.050	0.025	0.200	0.551	0.124	0.124		-	-		
	$q_{i,j}$	12	12	12	24	24	24	24		0.003	0.83 0.97		
Udítok	Cukor	TartElelm	Szállítás	Villany	berk_keresk	berk_elelmip	Viz	n_softdrinks	huf_EUR	$R^2 - \Delta_1$	$R^2 - \Delta_{12}$		
	γ_{ij}	0.025	0.050	0.100	0.150	0.150	0.100	0.400	0.400	-	-		
	$q_{i,j}$	24	24	36	24	24	24	36	36	0.005	0.47 0.80		
Dohany	Szállítás	Villany	Gaz	berk_keresk	berk_elelmip	n_dohany	huf_EUR			$R^2 - \Delta_1$	$R^2 - \Delta_{12}$		
	γ_{ij}	0.025	0.025	0.150	0.385	0.390	0.390			-	-		
	$q_{i,j}$	12	12	36	36	24	36			0.011	0.52 0.89		
Szövet	Szállítás	Villany	Gaz	berk_keresk	berk_ruhaip	n_ruhaanyag	huf_EUR			$R^2 - \Delta_1$	$R^2 - \Delta_{12}$		
	γ_{ij}	0.100	0.100	0.150	0.150	0.400	0.400			-	-		
	$q_{i,j}$	24	12	36	24	36	36			0.003	0.29 0.80		
Cipo	Szállítás	Villany	Gaz	berk_keresk	berk_ruhaip	n_cipo	huf_EUR			$R^2 - \Delta_1$	$R^2 - \Delta_{12}$		
	γ_{ij}	0.050	0.025	0.150	0.190	0.560	0.560			-	-		
	$q_{i,j}$	36	12	24	24	36	36			0.006	0.43 0.92		
Konfekcio	Szövet	Szállítás	Villany	Gaz	berk_keresk	berk_ruhaip	n_konfekcio	huf_EUR		$R^2 - \Delta_1$	$R^2 - \Delta_{12}$		
	γ_{ij}	0.100	0.050	0.025	0.150	0.050	0.600	0.600		-	-		
	$q_{i,j}$	24	12	12	36	24	36	36		0.007	0.24 0.80		

11-c. táblázat. Az infláció előrejelző modell költségösszetevői, prior költségűlyai, késleltetéshosszai és a hosszú táv illeszkedése modellegenként

		Költség elemek										Statistikák			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	σ	R ² - Δ ₁	R ² - Δ ₁₂		
DivatFehér	γ _{ij}	Szövet	Szállítás	Villany	Gáz	berk_keresk	berk_ruhaip	n_dívatfeher	huf_EUR			-	-		
	q _{ij}	24	12	12	12	24	24	36	36		0.002	0.85	0.97		
Butor	γ _{ij}	Szállítás	Villany	Gáz	berk_keresk	berk_fapapip	n_butor	huf_EUR				-	-		
	q _{ij}	36	12	18	24	24	24	36			0.003	0.67	0.96		
TartHaziCikk	γ _{ij}	Szállítás	Villany	Gáz	berk_keresk	berk_gepip	n_haztgepek	huf_EUR				-	-		
	q _{ij}	0.050	0.050	0.025	0.250	0.125	0.500	0.500			0.002	0.78	0.97		
GepJarmu	γ _{ij}	Szállítás	Villany	Gáz	berk_keresk	berk_gepip	n_auto	huf_EUR				-	-		
	q _{ij}	0.050	0.025	0.025	0.175	0.175	0.550	0.550			0.006	0.40	0.81		
TartKultCikk	γ _{ij}	Szállítás	Villany	Gáz	berk_keresk	berk_gepip	n_tartkulcikk	huf_EUR				-	-		
	q _{ij}	0.050	0.050	0.025	0.200	0.200	0.475	0.475			0.002	0.80	0.93		
SzenFa	γ _{ij}	Szállítás	berk_banya	berk_keresk	n_szilarduza	huf_EUR						-	-		
	q _{ij}	0.200	0.100	0.150	0.550	0.550					0.005	0.59	0.90		
GazPalack	γ _{ij}	Szállítás	berk_keresk	n_gaz	huf_EUR							-	-		
	q _{ij}	0.050	0.050	0.900	0.900						0.022	0.22	0.72		
LaKasJavCikk	γ _{ij}	Szállítás	Villany	Gáz	berk_keresk	berk_gepip	n_lakasjavcik	huf_EUR				-	-		
	q _{ij}	0.050	0.025	0.025	0.400	0.400	0.100	0.100			0.002	0.82	0.89		
LaKasCikk	γ _{ij}	Szállítás	Villany	Gáz	berk_feld	berk_keresk	n_lakasfelszjav	huf_EUR				-	-		
	q _{ij}	0.050	0.025	0.025	0.300	0.300	0.300	0.300			0.001	0.86	0.98		
VegyiAru	γ _{ij}	Szállítás	Villany	Gáz	berk_feld	berk_keresk	n_egcikk	huf_EUR				-	-		
	q _{ij}	0.050	0.025	0.025	0.250	0.250	0.400	0.400			0.003	0.80	0.96		
Uzemenyag_mt_ft	γ _{ij}	Szállítás	Villany	Gáz	berk_feld	berk_keresk	huf_USD	usd_OILB_m2				-	-		
	q _{ij}	0.050	0.025	0.025	0.150	0.100	0.650	0.650			0.032	0.54	0.91		

11-d. táblázat. Az infláció előrejelző modell költségösszetevői, prior költségűlyai, késlelteteshosszai és a hosszú táv illeszkedése modellegyenletenként

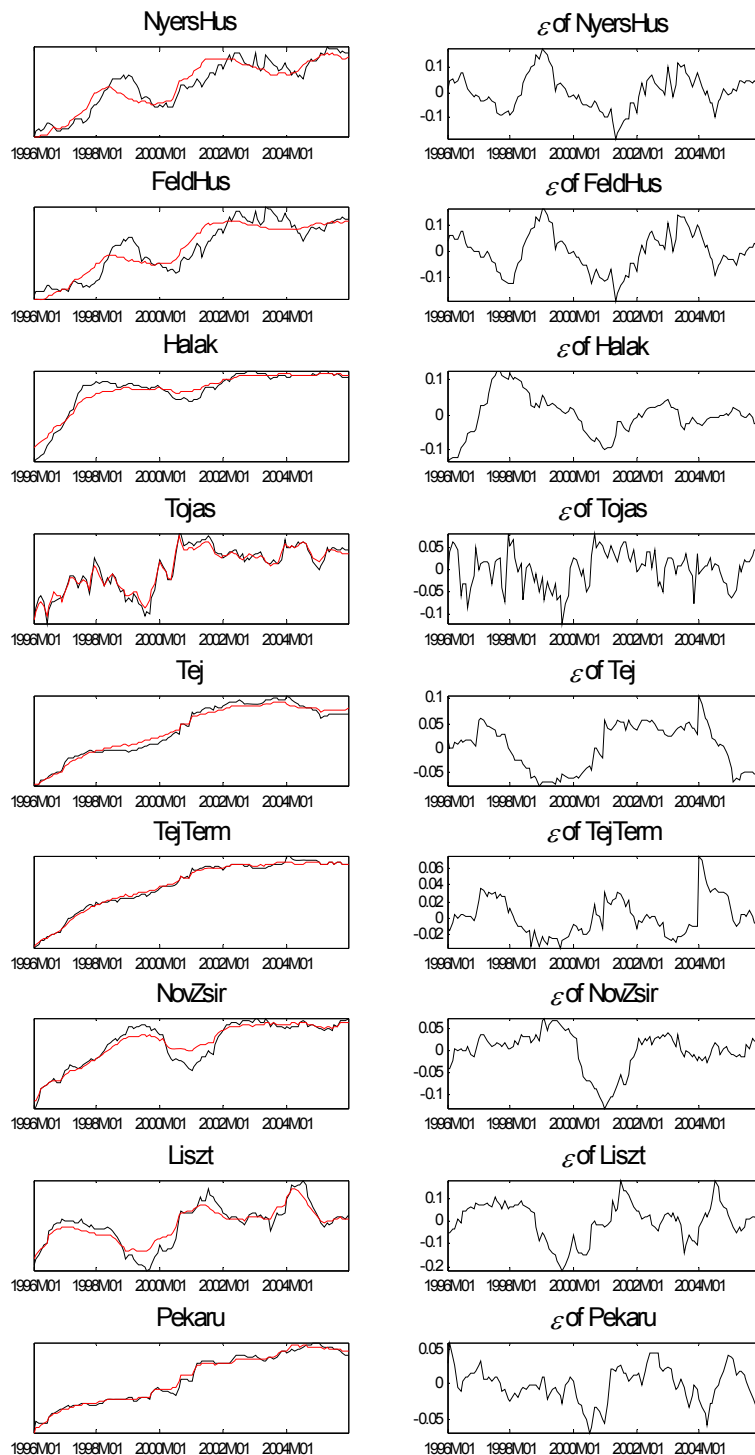
	Költség elemek									Statistikák	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	σ	$R^2 - \Delta_1$ $R^2 - \Delta_{12}$
UjsgKonyv	Szallitas	Villany	Gaz	berk_keresk	berk_fapapip	PPI_fapap				σ	- -
γ_{ij}	0.100	0.050	0.050	0.150	0.588	0.062					-
$q_{i,j}$	24	12	12	24	36	18					0.006 0.48 0.97
KultCikkVirag	Szallitas	Villany	Gaz	berk_keresk	n_egcikkviralat	huf_EUR				σ	$R^2 - \Delta_1$ $R^2 - \Delta_{12}$
γ_{ij}	0.050	0.025	0.025	0.547	0.353	0.353					- -
$q_{i,j}$	24	12	12	24	24	36					0.002 0.70 0.98
KozosKtg	LakasJav	Szenet	Viz	berk_pszolg	Csatorna					σ	$R^2 - \Delta_1$ $R^2 - \Delta_{12}$
γ_{ij}	0.125	0.162	0.189	0.200	0.324						- -
$q_{i,j}$	24	6	18	12	18						0.006 0.70 0.94
LakasJav	LakasCikk	Szallitas	Villany	berk_epit	berk_pszolg					σ	$R^2 - \Delta_1$ $R^2 - \Delta_{12}$
γ_{ij}	0.661	0.100	0.025	0.150	0.064						- -
$q_{i,j}$	24	24	12	24	24						0.003 0.88 0.98
Szallitas	GepJarmu	Uzenanyag	berk_pszolg							σ	$R^2 - \Delta_1$ $R^2 - \Delta_{12}$
γ_{ij}	0.200	0.300	0.500								- -
$q_{i,j}$	12	12	24								0.004 0.81 0.98
UdulesBelf	Etkezes	Villany	Gaz	berk_szallas	berk_pszolg	n_udules	huf_EUR			σ	$R^2 - \Delta_1$ $R^2 - \Delta_{12}$
γ_{ij}	0.100	0.050	0.050	0.300	0.300	0.200	0.200				- -
$q_{i,j}$	24	12	12	36	24	36	36				0.004 0.53 0.90
UdulesKulf	berk_pszolg	n_udules	huf_EUR							σ	$R^2 - \Delta_1$ $R^2 - \Delta_{12}$
γ_{ij}	0.750	0.250	0.250								- -
$q_{i,j}$	24	12	6								0.020 0.12 0.19
Javitas	TartHaziCikk	TartKultCikk	Szallitas	Villany	Gaz	berk_pszolg				σ	$R^2 - \Delta_1$ $R^2 - \Delta_{12}$
γ_{ij}	0.523	0.100	0.050	0.025	0.025	0.277					- -
$q_{i,j}$	12	24	24	12	12	24					0.003 0.91 0.98
KultSzolg	Villany	Gaz	berk_pszolg							σ	$R^2 - \Delta_1$ $R^2 - \Delta_{12}$
γ_{ij}	0.050	0.050	0.900								- -
$q_{i,j}$	12	12	12								0.005 0.76 0.98
EgyebSzolg	VegyiAru	Uzenanyag	Villany	Gaz	berk_pszolg					σ	$R^2 - \Delta_1$ $R^2 - \Delta_{12}$
γ_{ij}	0.300	0.100	0.050	0.050	0.500						- -
$q_{i,j}$	12	24	12	12	18						0.003 0.86 0.98

12. táblázat. Az infláció előrejelző modell ex-post előrejelzőképessége

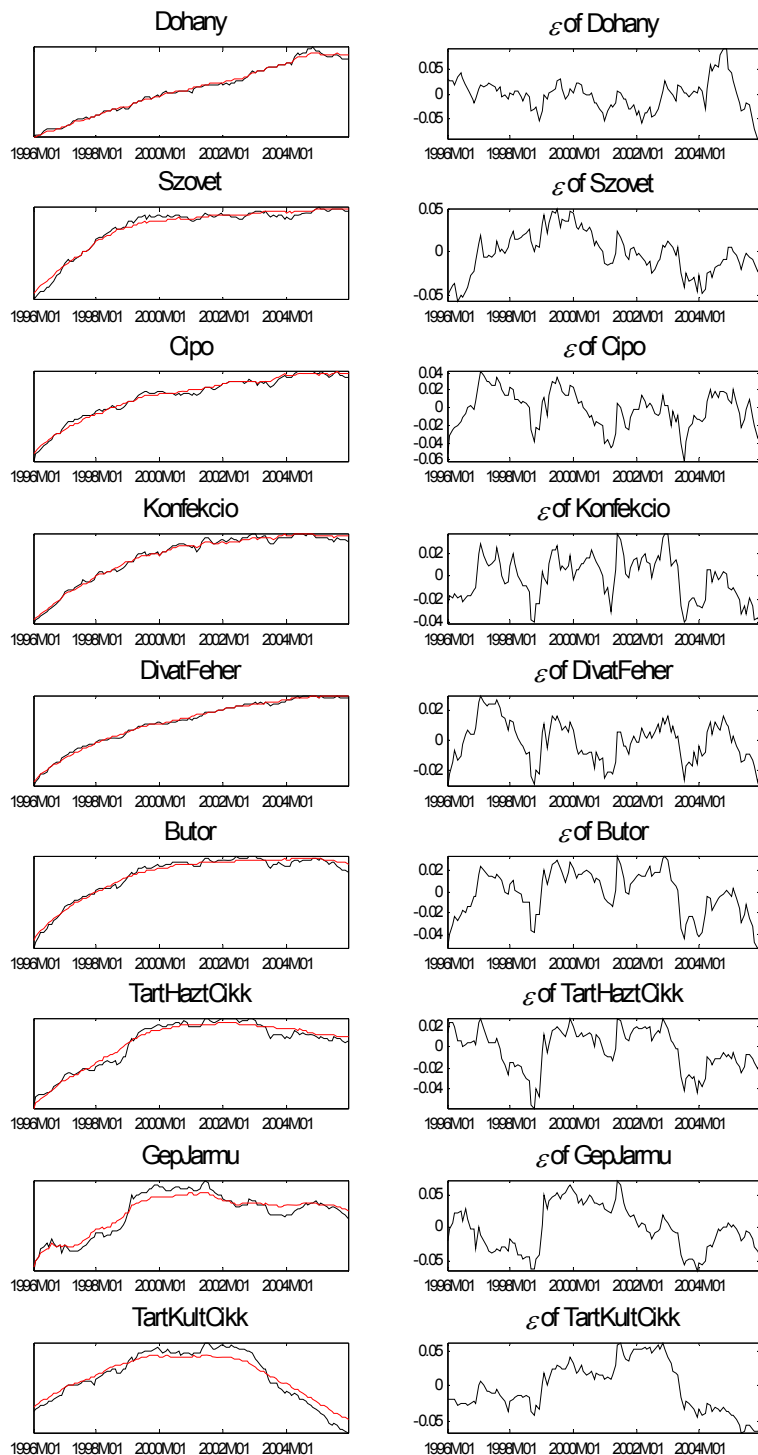
		1	2	3	6	9	12	18	24
		hónappal előre							
'ELELM'	RMSE	0,41	0,69	0,84	1,44	2,05	2,44	2,58	2,41
	MABE	0,34	0,55	0,67	1,28	1,85	2,25	2,28	2,05
	MAVE	0,01	0,04	0,16	-0,02	0,17	-0,18	-0,33	-0,49
	Theil - U	0,13	0,23	0,30	0,61	0,90	1,10	1,15	0,98
'ELELM_NY'	RMSE	1,19	1,68	2,09	3,42	4,83	5,71	6,25	5,73
	MABE	0,97	1,30	1,52	2,82	4,27	5,25	5,73	5,10
	MAVE	0,07	0,11	0,38	-0,04	0,38	-0,43	-0,82	-1,34
	Theil - U	0,30	0,42	0,54	0,93	1,27	1,45	1,46	1,21
'ELELM_FELD'	RMSE	0,24	0,41	0,50	0,87	1,14	1,30	1,22	1,24
	MABE	0,18	0,32	0,38	0,75	0,95	1,07	1,08	1,10
	MAVE	-0,01	0,00	0,07	-0,01	0,08	-0,07	-0,11	-0,13
	Theil - U	0,07	0,12	0,17	0,33	0,48	0,61	0,63	0,60
'IPARI'	RMSE	0,15	0,23	0,23	0,34	0,51	0,64	0,76	0,72
	MABE	0,12	0,17	0,18	0,30	0,44	0,55	0,69	0,65
	MAVE	0,07	0,11	0,07	0,06	0,15	0,11	0,06	0,09
	Theil - U	0,08	0,14	0,14	0,24	0,38	0,52	0,67	0,65
'IPARI_TART'	RMSE	0,14	0,18	0,22	0,39	0,56	0,81	1,00	1,11
	MABE	0,12	0,16	0,18	0,34	0,47	0,70	0,92	1,02
	MAVE	0,01	0,04	0,04	0,02	0,06	0,00	0,03	0,13
	Theil - U	0,05	0,07	0,08	0,14	0,19	0,27	0,32	0,35
'IPARI_NEMTART'	RMSE	0,20	0,29	0,32	0,50	0,77	1,02	1,21	1,15
	MABE	0,17	0,21	0,24	0,44	0,66	0,88	1,06	1,06
	MAVE	0,09	0,14	0,08	0,07	0,18	0,15	0,07	0,08
	Theil - U	0,07	0,11	0,12	0,20	0,33	0,47	0,58	0,58
'PSZOLG'	RMSE	0,18	0,21	0,36	0,45	0,57	0,75	0,76	0,63
	MABE	0,15	0,17	0,28	0,34	0,44	0,56	0,59	0,48
	MAVE	0,00	0,06	0,12	0,03	0,15	-0,01	-0,13	-0,08
	Theil - U	0,02	0,03	0,05	0,06	0,08	0,11	0,11	0,10
'PENERG'	RMSE	0,66	0,81	0,94	1,17	1,50	1,81	1,47	1,04
	MABE	0,41	0,56	0,71	0,91	1,20	1,44	1,09	0,87
	MAVE	-0,17	-0,15	-0,25	-0,04	-0,40	-0,01	-0,03	-0,28
	Theil - U	0,15	0,19	0,22	0,27	0,33	0,39	0,31	0,23
'ALKDOHUD'	RMSE	0,54	0,86	1,11	1,67	2,28	2,74	2,99	3,25
	MABE	0,34	0,58	0,81	1,32	1,88	2,28	2,57	2,72
	MAVE	0,20	0,36	0,49	0,12	0,56	0,18	0,18	0,39
	Theil - U	0,06	0,10	0,13	0,19	0,27	0,32	0,37	0,42
'UZEMANYAGOK'	RMSE	2,20	2,22	2,36	2,50	3,24	3,07	2,36	2,79
	MABE	1,68	1,55	1,86	1,84	2,65	2,52	2,03	2,32
	MAVE	0,19	-0,45	-1,04	0,72	-1,10	0,71	-0,28	-0,22
	Theil - U	0,28	0,28	0,28	0,30	0,38	0,35	0,29	0,32
'CPI_CORE'	RMSE	0,12	0,19	0,22	0,36	0,54	0,70	0,84	0,81
	MABE	0,10	0,17	0,18	0,34	0,47	0,61	0,77	0,75
	MAVE	0,04	0,08	0,09	0,04	0,15	0,04	-0,02	0,02
	Theil - U	0,03	0,06	0,07	0,12	0,19	0,26	0,32	0,32
'CPITOTAL'	RMSE	0,14	0,22	0,28	0,47	0,73	0,93	1,07	0,97
	MABE	0,10	0,20	0,24	0,42	0,64	0,79	0,95	0,84
	MAVE	0,03	0,07	0,09	0,03	0,12	0,01	-0,08	-0,10
	Theil - U	0,04	0,06	0,08	0,14	0,22	0,29	0,34	0,31

C.5. Ábrák a 3. fejezethez

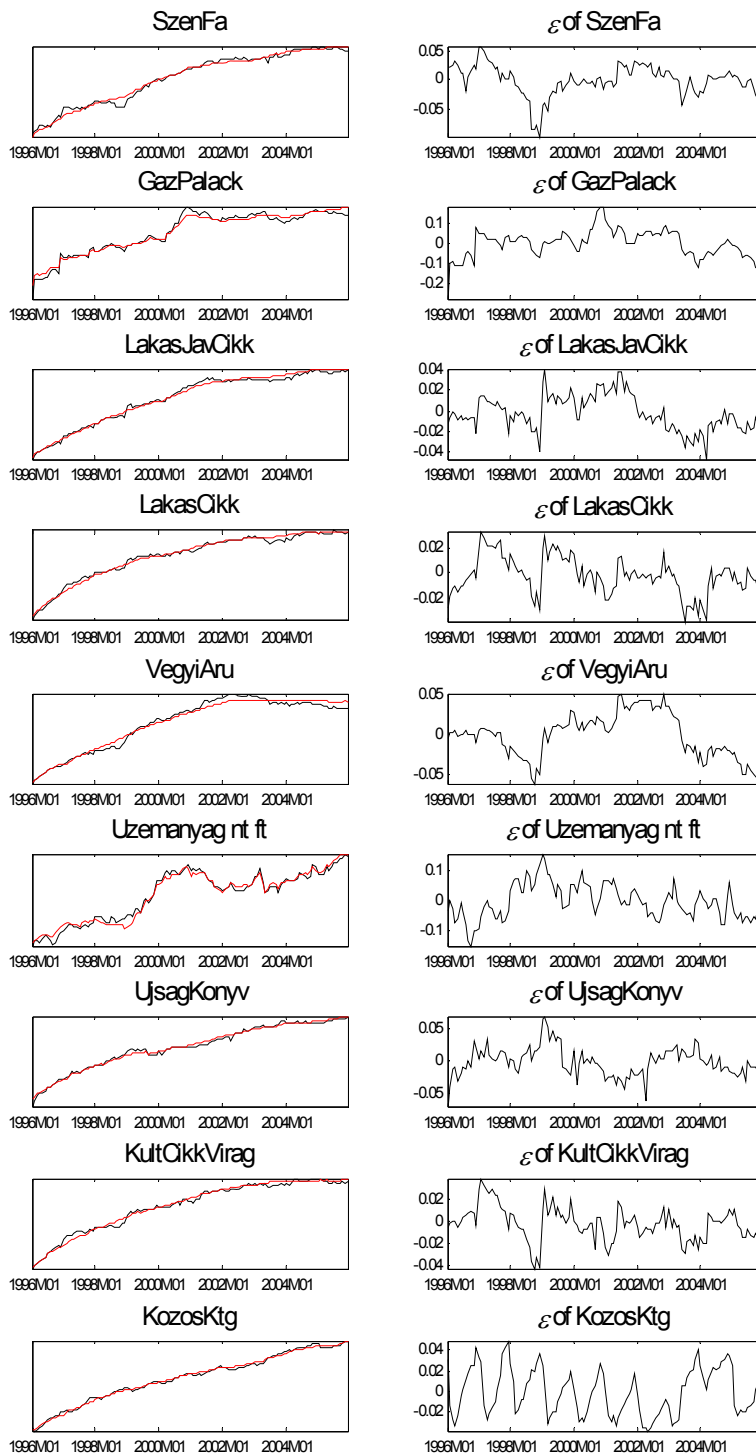
20-a. ábra. A hosszú távú egyenletek illeszkedése a költségtényezőkhez és a reziduum az inflációs előrejelző modellben



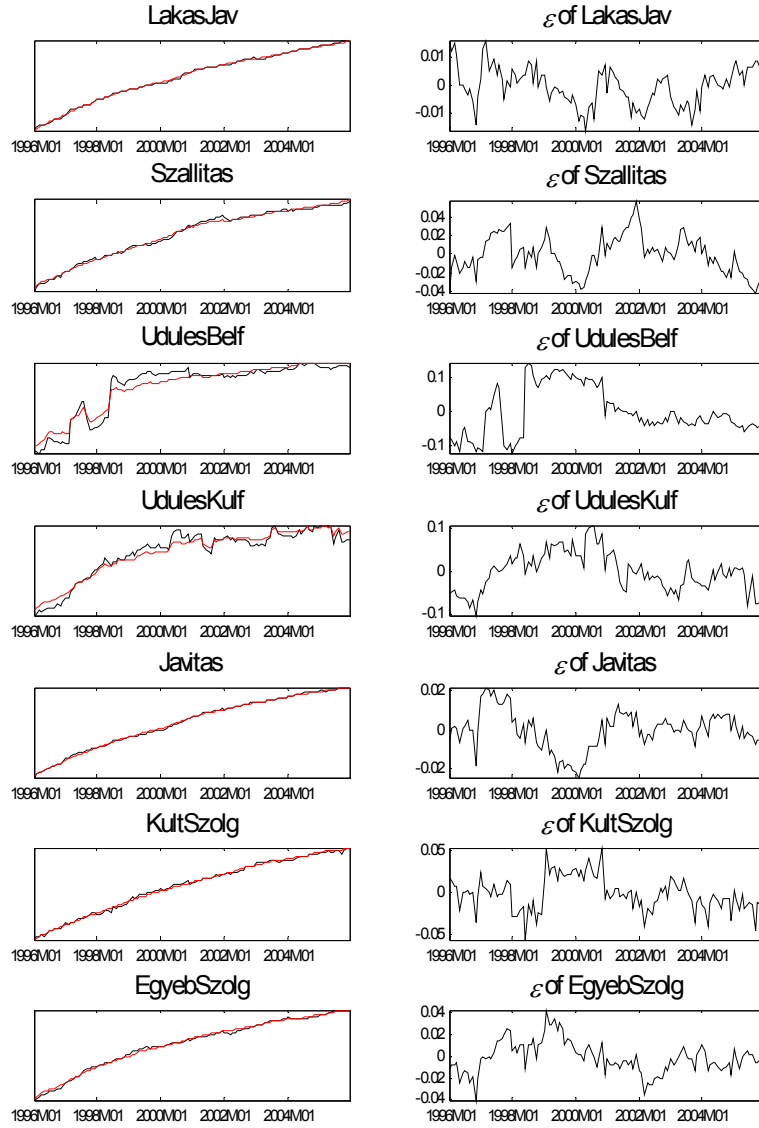
20-b. ábra. A hosszú távú egyenletek illeszkedése a költségtényezőkhez és a reziduum az inflációs előrejelző modellben



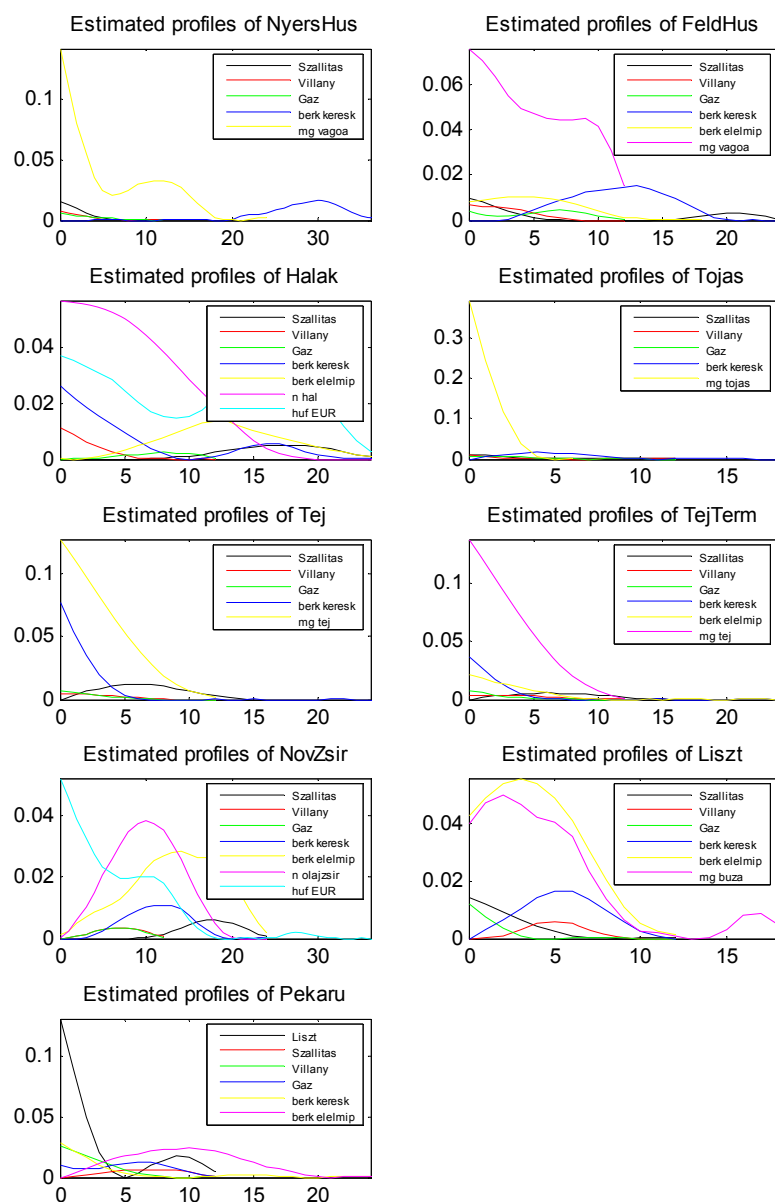
20-c. ábra. A hosszú távú egyenletek illeszkedése a költségtényezőkhöz és a reziduum az inflációs előrejelző modellben



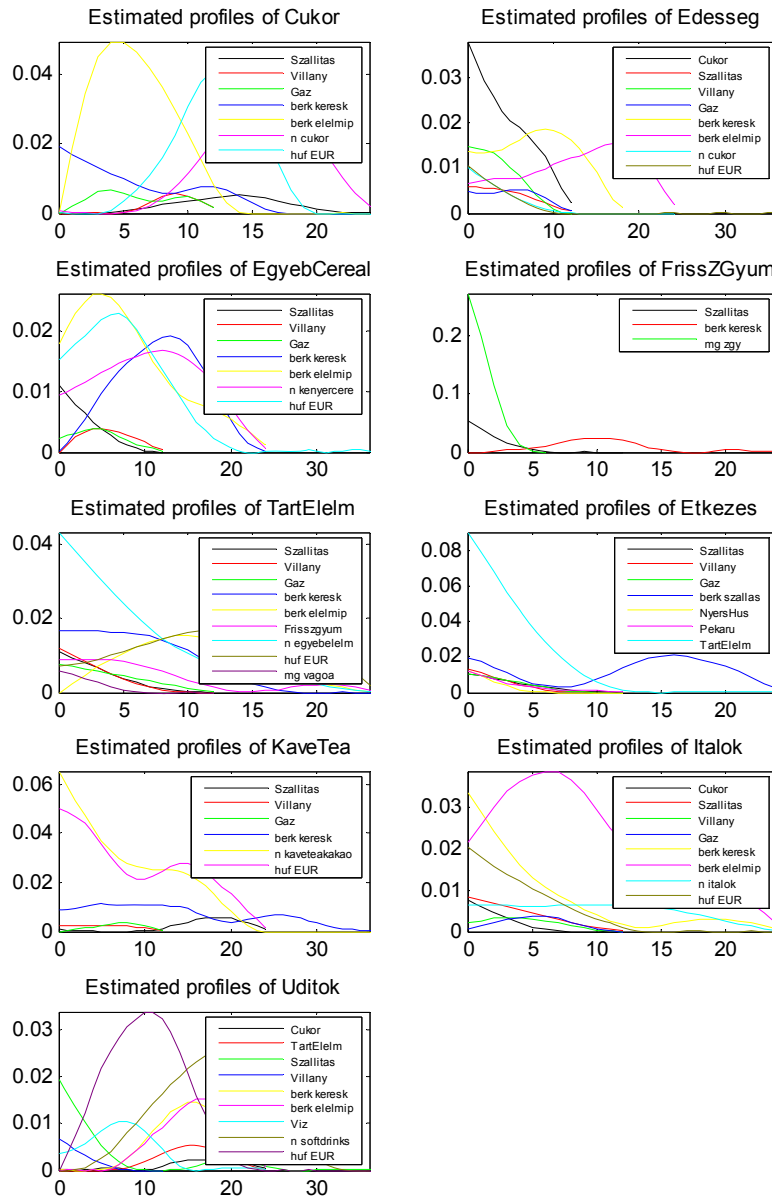
20-d. ábra. A hosszú távú egyenletek illeszkedése a költségtényezőkhez és a reziduum az inflációs előrejelző modellben



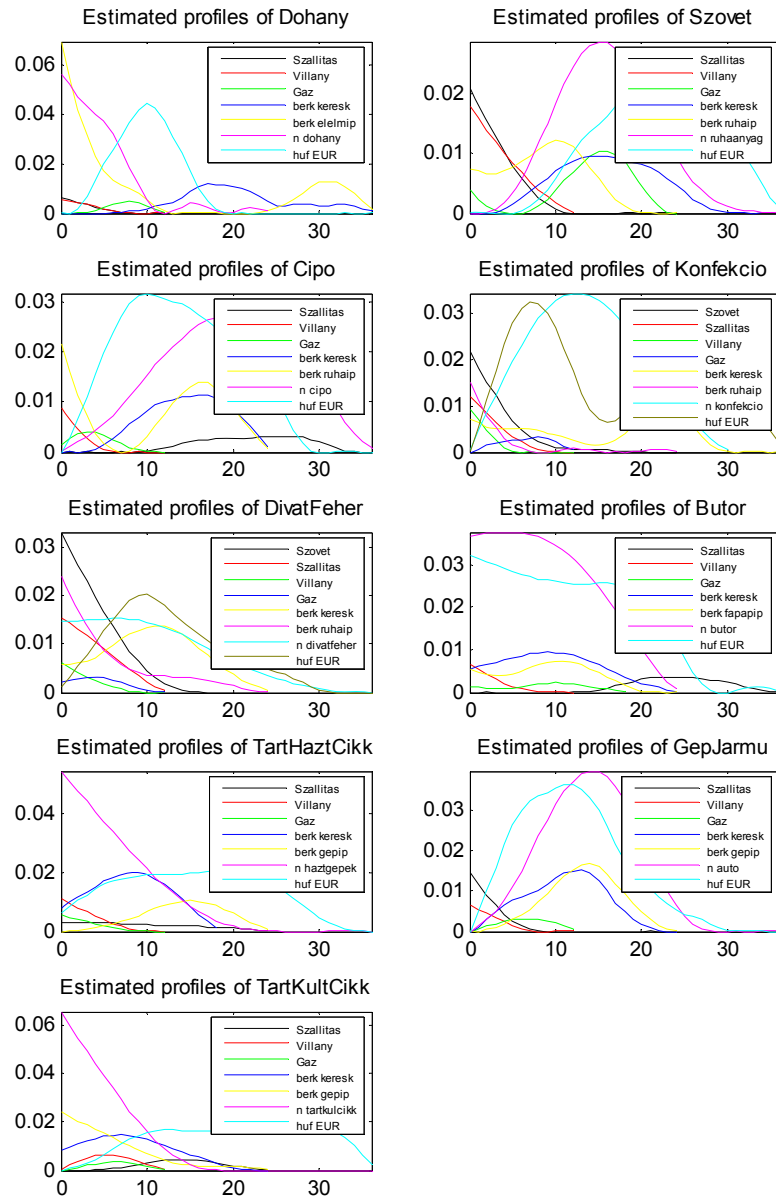
21-a. ábra. Becsült begyűrzési profilok az inflációs előrejelző modell rövid távú egyenleteiben



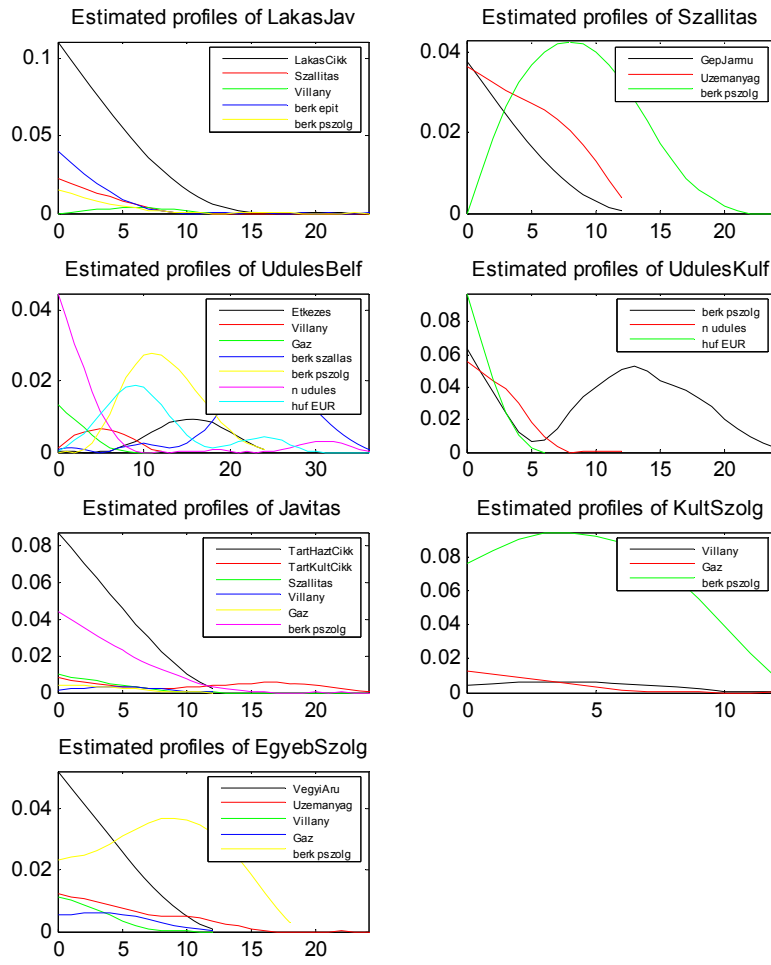
21-b. ábra. Becsült begyűrzési profilok az inflációs előrejelző modell rövid távú egyenleteiben



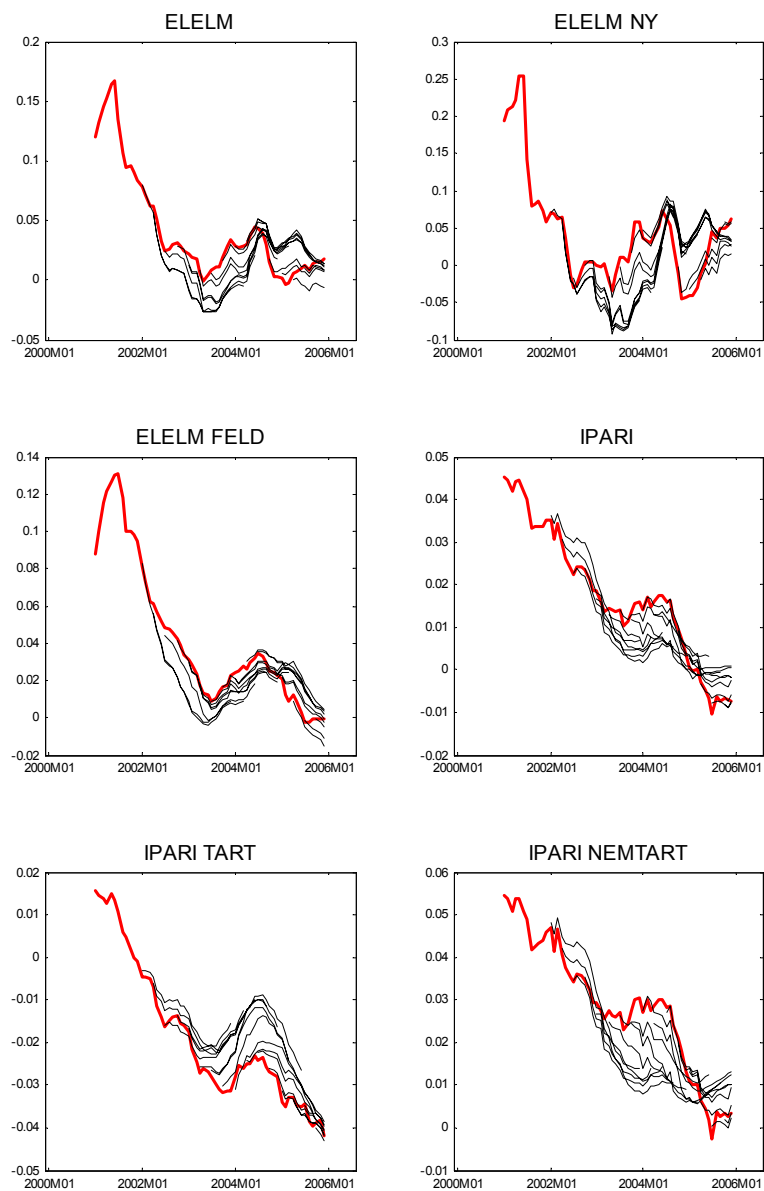
21-c. ábra. Becsült begyűrzési profilok az inflációs előrejelző modell rövid távú egyenleteiben



21-d. ábra. Becsült begyűrzési profilok az inflációs előrejelző modell rövid távú egyenleteiben



22-a. ábra. Tény éves infláció és a modell ex-post előrejelzései az MNB-csoportosítása szerint



22-b. ábra. Tény éves infláció és a modell ex-post előrejelzései az MNB-csoportosítása szerint

