A nemzetközi jövedelemegyenlőtlenség dinamikája

Major Klára

Makroökonómia Tanszék

Témavezető: Dr. Nemes Nagy József

Bíráló Bizottság:

Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem
Közgazdasági Ph.D. program

A nemzetközi jövedelemegyenlőtlenség dinamikája

Ph.D. értekezés

Major Klára

Budapest, 2001.

Tartalomjegyzék

Táblázatok jegyzéke

Ábrák jegyzéke

Bevezetés

A nemzetek gazdagságát, felemelkedését és hanyatlását meghatározó tényezők vizsgálata mind a mai napig a közgazdaságtan kiemelkedő kérdései közé tartozik. A „fejlett és fejlődő országok” elnevezés is a világ tartósan létező jövedelmi megosztottságának a következménye. A közgazdászok számára ezért mindig is kiemelt jelentőséggel bírt annak a kérdésnek a vizsgálata, hogy mely tényezők hatására alakult ki a jelenlegi megosztottság, melyek ennek rövid és hosszú távú következményei, illetve, hogy az egyes gazdaságok fejlődésének hatására várható-e jövedelmi és fejlettségbeli nivellálódás.

A kérdés nem csak a teoretikus közgazdász, de a gyakorló gazdaságpolitikus számára is kiemelt jelentőséggel bír, hiszen a fejlődő világ számára kidolgozott támogatási rendszerek szükségképpen támaszkodtak az elméleti eredményekre, s a szegénység csökkentésére kidolgozott nemzetközi segélyprogramok implicit módon a nivellálódási folyamat felgyorsítását célozták meg.

A nemzetközi jövedelmi egyelőtlenség kérdése tehát régóta a közgazdasági kutatás fontos területe. A '90-es évek második felében a növekedéselmélet konvergencia–vita néven említett kutatási területe ehhez a kérdéshez kívánt hozzászólni. A vita kiindulópontja a Solow modell újabb interpretációja révén adódó következtetés volt.

A vita fontossága nem csak a megcélzott problémával hozható összefüggésbe, hanem egyben azzal az állítással is, miszerint a jövedelmi egyenlőtlenségek mérésével implicit módon „igazságot tehetünk” a '80-as években kibontakozott ún. endogén növekedési iskola és a Solow modell hagyományain építkező (exogén) növekedési iskola között. Ennek tudományelméleti alapja a popperi tudományfilozófia volt, amely szerint az empirikus eredmények falszifikációs „képességgel” rendelkeznek. Mint azt dolgozatunk 1. fejezetében részletesen kifejtjük, ez az álláspont nem csak tudományelméleti megfontolásokból, de az alkalmazott módszertan miatt sem tartható. Az exogén és endogén növekedéselmélet közötti igazságtétel végül is nem vált a konvergencia–vita eredményévé.

A konvergencia–vitában állást foglalók a növekedéselméleti módszertannak megfelelően egy „reprezentatív ország" fejlődésének felvázolásával implicit módon kívántak következtetések levonni a jövedelmi egyenlőtlenségek várható alakulásáról. Dolgozatom 1. fejezetében bemutatom, hogy ez a módszertani megközelítés nem alkalmas a probléma ilyen irányú vizsgálatára. Álláspontom szerint a jövedelmi egyenlőtlenségek változását közvetlen módon, az egy főre jutó jövedelmek különbségének mérésével kell vizsgálni. Ezzel a kérdéskörrel részletesen foglalkozom [Major, 1998] és [Major, 1999] cikkeimben. A hivatkozott cikkekben komparatív statikai eszközökkel vizsgáltam a jövedelmi egyenlőtlenség változási tendenciáit. A jövedelmi különbségekkel leginkább összefüggésbe hozható tényezők a földrajzi elhelyezkedés és a gazdasági kapcsolatok intenzitása. Az előbbi komponens hatását a [Major, 2000] tanulmányomban vizsgáltam. Ezen eredmények összefoglalását tartalmazza disszertációm 2. fejezete.

A jövedelmi egyenlőtlenség mérésére alkalmazott módszertan nem csak a világméretű egyenlőtlenség vizsgálatára alkalmas. Ezt alkalmaztam [Major és Nemes Nagy, 1999] közös tanulmányunkban, ahol Magyarország területi egységei (kistérségei, megyéi és régiói) esetében néztük meg a gazdasági átmenet hatására végbement jövedelmi differenciálódási folyamat jellemzőit. Martos Bélával írt közös tanulmányomban [Major és Martos, 2001] a módszertant a nyugdíjak egyenlőtlenségének szintén a gazdasági átmenet során tapasztalt változásának vizsgálatára adaptáltam.

A kérdés teljeskörű vizsgálata, ahogy ezt 1. fejezet befejező részében megmutatom, nem merül ki az egyenlőtlenség komparatív statikai vizsgálatával. Az egyenlőtlenség jellegéről további információt nyújt az eloszlás nemparaméteres vizsgálatával nyerhető ún. empirikus sűrűségfüggvény lokális tulajdonsága. E kérdést érintettem [Major, 1998] és [Major, 2000] tanulmányaimban. A kérdés részletesebb vizsgálatára a disszertációm befejező, 3. fejezetében térek ki.

A felzárkózási esélyek elemzésére végképp alkalmatlan reprezentatív ország megközelítés helyett a disszertáció 3. fejezetében a jövedelemeloszlás dinamikus modellje segítségével próbáltam következtetni. A modellben Markov-folyamatként ábrázoltuk az egyes időszakokra jellemző jövedelmi eloszlást meghatározó dinamikus folyamatot. A folyamat dinamikáját meghatározó átmenetfüggvény jellemzői alapján határozhatóak meg az egyes országok felzárkózási esélyei és a jövedelmek nemzetek közötti eloszlásának hosszabb távon várható jellemzői. Az átmenetfüggvény becslésével és grafikus bemutatásával igyekszünk a kérdésekre a modell keretei között választ adni.

1. fejezet

A konvergencia vita és a jövedelmi egyenlőtlenségek

1.1. A konvergencia vita története

[1]Az egy főre jutó nemzeti jövedelmek egyenlőtlenségeinek csökkenése, illetve növekedése hosszú idők óta elemzések és viták tárgyát képezi a közgazdaságtanban. Emögött elsődlegesen a tartós világméretű fejlettségi, jövedelmi megosztottság tényei állnak. A növekedéselmélet '80-as években megszülető kutatási eredményei a '90-es évekre a probléma újraéledéséhez és intenzív empirikus és elméleti kutatások kialakulásához vezettek el.

A nyolcvanas években megjelenő ún. endogén növekedéselméleti iskola a különböző országok eltérő egy főre jutó nemzeti jövedelem növekedési rátáinak tartós fennmaradását jelezte előre, egyben sugallva és kimondva azt az adódó következtetést is, hogy a növekedési ráták különbségeinek tartós fennmaradása a létező jövedelemegyenlőtlenségek növekedését, de legalább tartós fennmaradását jelenti. Ez a következtetés éles ellentétben állt az addig (a növekedéselmélet keretein belül) uralkodó irányzatnak tartott klasszikus növekedéselmélet előrejelzésével, amely szerint az egyensúlyi állapothoz tartó gazdaságok egy főre jutó jövedelmeinek nö-

[1]Ezúton szeretnék köszönetét mondani témavezetőmnek, *Dr. Nemes Nagy Józsefnek*, *Pataki Attilának*, bátorításáért és az informatikai problémák megoldásában nyújtott nélkülözhetetlen segítségéért, *dr. Meyer Dietmarnak* és *dr. Ábel Istvánnak* támogatásukért és bátorításukért. Kutatásaim 1998/99-es évét a Soros Alapítvány támogatta.

vekedési ütemei egyre csökkenek, ahogy a gazdaság egyre közelebb kerül az ún. steady state állapothoz. Vagyis a megfigyelt különbségek csökkenése várható. Így a két elméleti irányzat közötti választás vált a később konvergencia néven elhíresült problematika forrásává (ld. *Barro - Sala-i-Martin* [Barro és Sala-i Martin, 1995], *Romer* [Romer, 1994]): ha a (neo)klasszikus növekedéselmélet által adott magyarázat szerint a jövedelmi különbségek csökkenése várható, amint az egyes országok megközelítik stacioner (steady-state) állapotaikat – ugyanakkor az endogén iskola szerint e csökkenés nem lesz megfigyelhető, akkor az állítás empirikus alapokon történő vizsgálata elvezethet az egyes versengő teóriák közötti „tudományos alapokon történő" választáshoz. A popperi alapokon építkező pozitivista közgazdaságtanban további kérdőjelek és kétségek nélkül adódó fenti következtetés így óriási méretű empirikus kutatásokat indukált.

A konvergencia–vitában feltett kérdésekhez nagyon hasonló problémákat fogalmaztak meg a makroökonómiai irodalom egyéb területein is, illetve egyéb diszciplinákban is. Érdemes röviden kitérni a probléma földrajzi aspektusainak elemzésére, melyek részben Paul Krugman kutatásaihoz kötődő új kereskedelmi elmélet a térségi viszonyok elemzése kapcsán (centrum-periféria modell) az egyes régiók relatív fejlettségének, növekedési ütemének fentiektől eltérő dinamikáját tárta fel. Az irányzat alapvetőnek tekinthető tanulmányai elsősorban *Paul Krugman* [Krugman, 1991b], [Krugman, 1991a], illetve [Krugman, 1995] monográfiák a monopolisztikus verseny elméletének alkalmazása révén elemzi a gazdasági kapcsolatok térbeli vonatkozásait. A konvergencia vita szemszögéből talán legnagyobb jelentőségű *Krugman* [Krugman és Venables, 1995] tanulmány kifejezetten a globalizálódás problémáját elemzi az általa kidolgozott - a közgazdaságtanban uralkodónak tekintett optimalizálási technikákra építő - elméleti keretben. Az elemzés „nemzetközi" jellegét az a feltevés adja, hogy a munkaerő az egyes országok között nem mobil. Ezt a feltevést arra az „empirikus tényre" alapozza, hogy az egyes országok közötti munkaerőáramlás mértéke elhanyagolható, különösen ha az országon belüli mobilitással vetjük össze. A dolgozatban a különböző régiók eltérő fejlődésének motorja a szállítási költségek tartós csökkenése lesz. A modell részletesebb tárgyalása nélkül most csak megemlítjük, hogy eredményül azt kapja, hogy a paraméterek egy meglehetősen valószerű tartományában a szállítási költségek csökkenése kezdetben konvergenciát, azaz a régiók (országok) közti jövedelemegyenlőtlenségek csökkenését, majd egy bizonyos kritikus érték alá csökkenés esetén pedig divergenciát, azaz a jövedelemegyenlőtlenségek növekedését idézi elő, elsősorban az ipari tevékenység egyik térségbe való koncentrálódása révén.

Az említett vizsgálat arra utal, hogy a konvergencia vitában felmerülő kérdések - ha nem is ebben a megfogalmazásban és módszertannal - a közgazdasági irodalomban nagy jelentőségű problémát vizsgáltak, s ehhez kezdetben a növekedéselmélet nyújtotta a módszertani alapokat. A probléma fontosságát mutatja talán az is, hogy kifejezetten a konvergencia–vita hatására más határdiszciplinákban is számos empirikus elemzés született a jövedelmi egyenlőtlenségek csökkenésének, illetve növekedésének a kérdéséről. Utalhatunk a regionális tudományokra gyakorolt hatásra, melyek gyakran alkalmazták a konvergencia vita során kialakult módszertant a regionális különbségek változásának mérésére. *Hofer – Wörgötter* [Hofer és Wörgötter, 1997] Ausztria regionális különbségeit, *Siriopulos – Asteriou* [Siriopoulos és Asteriou, 1998] Görögország, *Kangasharju* [Kangasharju, 1997] Finnország, *Persson* [Persson, 1997] Svédország esetében vizsgálta az egyes régiók közötti jövedelmi illetve fejlettségbeli különbségeket. Hasonló kérdésfeltevéseket, de más módszertannal vizsgálta a jövedelmi különbségeket Magyarország esetében *Major – Nemes Nagy* [Major és Nemes Nagy, 1999]. További fontos alkalmazási területté vált az Európai Unió regionális különbségeinei mérése, többek között, *Martin* [Martin, 1998], *Mur* [Mur, 1996], *Neven – Gouyette* [Neven és Gouyette, 1996], *Quah* [Quah, 1996c] tanulmányai.[2] Az említett vizsgálatokban a jövedelmi egyenlőtlenségek időbeni változásának mérésére alkalmazott módszertan - nem is titkoltan - a konvergencia vita során letisztult eredményeken alapult.

Azon túlmenően, hogy a konvergencia-vita számos más területen indukált további kutatásokat, az eredményeket az első pillanattól kezdve kétkedés és kritika kísérte. Ez részben az alkalmazott adatbázisra, részben a jövedelmi különbségek mérésének módszertanára vonatkozott.

[2] A konvergencia vita regionális szinten való megjelenésének további példája [Sala-i Martin, 1996b] tanulmány.

A konvergencia empirikus vizsgálatát nehezítette, hogy színvonalas elemzés lehetőségét nagymértékben korlátozta a rendelkezésre álló adatok szűkössége. Ebben a kérdésben jelentős változást hozott a Penn World Table (PWT) adatbázis 1991-es publikálása[3], amely kiküszöbölte a korábbi elemzésekben használt Maddison adatbázis (1982) szelekciós torzítását, szerteágazó és sokszínű empirikus kutatást indukálva.

Az adatbázis egyidejű fejlődésével párhuzamosan az alkalmazott módszertan is bővült és egyre pontosabb elemzéseket, egyre plauzibilisebb következtetéseket téve lehetővé. Az ökonometriai módszertan adekvát alkalmazása a problémákra a kiinduló, pusztán a növekedéselmélet berkein belül alkalmazott keresztmetszeti regresszió mellett panel módszerek alkalmazását indukálta (a kereszmetszeti regresszió problémáiról ld. pl. *Haan* [Haan, 1995], illetve panel módszer alkalmazására példa *Lee et al.* [Lee et al., 1996]). A panel módszerek alkalmazását támasztotta alá az a módszertani igény is, hogy a keresztmetszeti adatokra illesztett regresszió eredményei torzítanak, s így ökonometriailag megalapozatlan eljárásból vontak le súlyos közgazdasági következtetéseket a problémával foglalkozó kutatók.

További kritikaként merült fel a vitában, hogy az alkalmazott módszertan csak a jövedelmi különbségek csökkenését, növekedését vagy stagnálását, azaz mindenképpen monoton pályát lehetséges meghatározni. Holott a jövedelmek *eloszlásának* változása ettől különböző is lehet: előfordulhat, hogy az egyes országok bizonyos *csoportokon belül* mutatnak csak fel hasonulást, míg az egyes csoportok között semmiféle közeledés nem olvasható le. Ezzel gyakorlatilag meg is született a *konvergencia klubok* fogalma és létezésük mérésére szolgáló empirikus módszertan, melyről az 1.2.5. fejezetben még részletesen szólni fogunk.

A konvergencia klubok elméletének első kidolgozója Danny T. Quah, aki számos írásában mutatja be - elsősorban empirikusan -, hogy az országok egy főre jutó nemzeti jövedelmeinek alakulásának konvergenciával szemben egyfajta csoportosodás figyelhető meg: a közepes jövedelmi szintű országok száma egyre csökken, s a jövedelmek eloszlását egyre inkább egy magasabb és egy alacsonyabb jövedelmi

[3] *Summers - Heston* [Summers és Heston, 1991].

szint körüli csoportosulás határozza meg. Egyik első írásában *Quah* [Quah, 1993a] a Markov–láncok matematikai modelljével mutatja be, hogy a jövedelemeloszlások nem tartanak az egy pontra koncentrálódó eloszláshoz s így valójában nem mondhatjuk el, hogy konvergenciát figyelnénk meg, mint ahogy azt a tradicionális vonal képviselői hangoztatják. Későbbi empirikus elemzéseiben *Quah* [Quah, 1996a], [Quah, 1997] a jövedelemeloszlás folytonos becsléseire támaszkodva illusztrálja az állítását. Ez utóbbi írásokban a folytonos becslések segítségével a jövedelemegyenlőtlenség okait oly módon tárja fel, hogy figyelembe vesz két tényezőt - nevezetesen a földrajzi közelség (szomszédos ország), illetve a kereskedelmi partneri viszonyt. Az adatokból valószínűnek látszik annak a hipotézisnek az elfogadása, hogy ezek a tényezők felelhetnek a megfigyelt jövedelemegyenlőtlenségekért. Ez más szavakkal azt jelenti, hogy gazdagabb ország szomszédja nagy valószínűséggel gazdagabb és fordítva. Hasonlóképpen az egymással intenzív kereskedelmi kapcsolatban álló országok jövedelmei szintén nagy valószínűséggel hasonló nagyságrendűek. Ez az empirikus eredmény hasonló következtetéseket sugall, mint *Lucas* [Lucas, 1993] tanulmánya, amelyben szintén a tényezőáramlás mobilitásának a foka a meghatározó tényező a konvergencia szempontjából. Ezen írások alapján valószínűnek látszik, hogy az egyenlőtlenségek fő oka az egyes országok, illetve országcsoportok közötti gazdasági kapcsolatok intenzitásában és minőségében keresendő.

Kilépve a növekedéselmélet „reprezentatív ország”[4] megközelítéséből *Lucas* [Lucas, 1993] és *Barro – Mankiw – Sala-i-Martin* [Barro et al., 1995] elméleti tanulmányaikban a nemzetközi tényezőáramlás bekapcsolásával vizsgálták a konvergencia problémáját. Eredményeik a jövedelemkülönbségek rendkívül fontos összetevőjére hívták fel a figyelmet: az egymással intenzív gazdasági kapcsolatban álló országok között - avagy minél mobilabbak bizonyos termelési tényezők az egyes országok között - annál inkább várható a jövedelmek kiegyenlítődése.

Érdekes módon a konvergencia–vita kialakulása és az általa indukált kutatás a mai napig nem vezetett el a közgazdaságtanon belüli, rokon problémákat vizsgáló,

[4] A „reprezentatív ország” megközelítés alatt azt a vizsgálati technikát értjük, melynek során *egy adott ország* növekedési lehetőségeinek és egy főre jutó GDP-jének pályája alapján vonunk le következtetéseket.

már kialakult metodikával rendelkező diszciplinákkal való párbeszédhez, netán valamilyen szintézis megalkotásához. Most a számos lehetőség közül egyet szeretnénk kiemelni.

A konvergencia–vita alapkérdésének egyik lehetséges megfogalmazása szerint a konvergencia a nemzetközi jövedelmegyenlőtlenségek csökkenését jelenti. A jóléti közgazdaságtan ilyen típusú problémák megválaszolására az ún. *egyenlőtlenségi mutatókat* használja. Ezen megközelítés alkalmazása során, kiindulva egy megfelelően választott egyenlőtlenségi mutatóból, az adott év jövedelmi adatai alapján számszerűsíthető, a világ országai közötti fiktív jövedelemeloszlás egyenlőtlenségét jellemző mutató. Több időpontban rendelkezésre álló adatok esetén vizsgálhatjuk a jövedelemegyenlőtlenségek szintjét mérő mutató időbeni változását, mely *komparatív statikai* vizsgálatot tesz lehetővé.

Így az előbb említett jövedelemegyenlőtlenségi mutatók mérésére épülő irányzat bizonyos értelemben éppen „szimmetrikus" esetet ragad meg a növekedéselmélet „hagyományos", panel vagy egyéb regressziót alkalmazó módszereihez képest. Mindkét esetben „panel-szerkezetű" adatokkal állunk szemben, az utóbbi esetben azonban dinamikus modell következtetéseit teszteljük a keresztmetszeti megoszlásra vonatkozó bármilyen információ hiányában, míg az előbbi esetben dinamikus összefüggések nélkül a keresztmetszeti összefüggésekre koncentrálunk.

Kétségkívül felmerül a lehetőség, hogy megfelelő következtetések levonása céljából lehetséges-e a két irányzat „szintézisével" megalkotni a jövedelemeloszlások időbeni alakulását leíró dinamikus összefüggéséket, s ezek segítségével vizsgálni, hogy milyen feltételek és feltevések közepette beszélhetünk a jövedelmi egyenlőtlenségek növekedéséről vagy csökkenéséről. A disszertációban szereplő vizsgálat kiindulópontját épp az előbbi kérdésfelvetés határozta meg. A kérdésfelvetés pontosabb megfogalmazásához azonban elsőként, az 1.2. fejezetben összefoglaljuk röviden a konvergencia–vita történetét. Álláspontunk szerint a vita alapját képező kérdések valójában olyan összetett problémák, melyek további megválaszolása és a megfelelő módszertan kiválasztása a kérdésfelvetés további finomítását igényli. Az egyes, általunk meghatározott részkérdések további vizsgálatára teszünk kísérletet a 2. és 3. fejezetekben.

Mielőtt a részletesebb elemzésekre térnénk bemutatjuk az empirikus vizsgálataink során használt adatbázist.

Felhasznált adatbázis. Dolgozatunkban az elméleti modellek tárgyalása mellett empirikus vizsgálatokat is bemutatunk. Ehhez az ún Penn World Table adatbázisban szereplő GDP adatokat használtuk fel. Az Alan Heston és Robert Summers által 1991-ben publikált Penn World Table adatbázis [Summers és Heston, 1991], mely akkor az 5-ös sorszámot kapta (Mark 5) a vizsgált országok nemzeti számla rendszerének adatbázisára építve nemzetközi összehasonlító árakon számított, azonos pénznemben megadott jövedelmi adatokat tartalmaz, így azok tisztán reál nagyságoknak tekinthetők, azaz függetlenek mind az egyes országok árszínvonalainak, mind valuta-árfolyamainak alakulásától. Az adatbázist széles körben tekintik a jövedelmi különbségek empirikus vizsgálatai alapjának, különösen a növekedéselméleti irodalomban elmúlt években erősen kutatott konvergencia témájában alkalmazták ld. például [Lucas, 1993], [Quah, 1993a], [Romer, 1994], [Solow, 1994], [Durlauf és Quah, 1998].

Az 1991-ben publikált Mark 5 jelű PWT adatbázisban 1950-1988-as évekre vonatkozó adatok találhatók. Ezt az adatbázist a National Bureau of Economic Research (NBER) publikálta és elérhető minden kutató számára. Az adatbázis újabb, 5.6-os verzióját 1995 januárjában publikálta az intézet, melyben a legtöbb országra vonatkozóan 1992-ig találhatók meg adatok. Kutatásunkban az 5.6 verzió adatait használtuk fel számításainkhoz. Az adatbázisban szereplő egy főre jutó GDP adatok 1985-ös US dollárban adottak, nemzetközi összehasonlító áron. A vizsgálati periódus 1960-1992 éveket átfogó intervallum, melyben mintegy 111-128 ország reál GDP adata állt rendelkezésre a számítások elvégzésére. Felmerülhet kérdésként, hogy mennyire releváns egy olyan adatbázis használata a fenti kérdések esetén, melyből ”mindössze” egy harminc éves periódust lehet vizsgálódás alá vonni, s melynek legutolsó adata közel tíz éves. A nemzetközi jövedelemegyenlőtlenségek változása azonban igen lassan, hosszabb távon figyelhető meg, s a kérdés teljes körű elemzése valójában nem harminc, de kétszáz éves idősor ismeretét igényelné. Az előbbi gondolatmenetnek megfelelően elsődlegesen az idősor hossza jelenthet problémát, nem pedig az, hogy az tíz éves. Az adatbázis mellett szóló további érvek között igen súlyosan esik latba annak teljeskörűsége (összehasonlítva más, pl. világbanki adatbázisokkal), illetve elkészítésének gondossága.

1.2. A konvergencia–vita

A konvergencia–vita bemutatásakor a növekedéselmélet klasszikus modelljére, a Solow növekedési modellre támaszkodunk. Ezt részben a modell egyszerű struktúrája indokolja, részben az a tény, hogy magát a vitát alapvetően a Solow modellre épülő „klasszikus" növekedéselméleti iskola következtetései implikálták. Az eredeti, [Solow, 1956] tanulmány óta számos növekedési modell született, a konvergencia–vita kiindulópontjának elsősorban [Barro és Sala-i Martin, 1992] és [Mankiw et al., 1992] tekinthető. A konvergencia–vita fontosságát, illetve a létező és markánsan különböző irányok egymással való „vetélkedését" mutatja az is, hogy időről időre összefoglaló tanulmánygyűjtemények jelentek meg, pl. az The Economic Journal-ban Controversy on the Convergence and Divergence of Growth Rates cimmel a következők: [Durlauf, 1996], [Sala-i Martin, 1996a], [Bernard és Jones, 1996], [Quah, 1996d], [Galor, 1996], illetve az endogén növekedéselméletről szóló cikkek a Journal of Economic Perspectives 1994 téli számában: [Romer, 1994], [Grossman és Helpman, 1994], [Solow, 1994], [Pack, 1994] szintén tartalmaznak értékes észrevételeket a konvergencia témaköréhez.

1.2.1. Az abszolút konvergencia hipotézis

A közgazdasági irodalom talán (de a növekedéselméleté feltétlen) legtöbbet hivatkozott és többször újra és újra feldolgozott modellje, a Solow modell rövid összefoglalása elengedhetetlen a további tárgyalás szempontjából. A modellt a jövedelmi egyenlőtlenségek változásának szempontjából fogjuk vizsgálni.

Kiinduló feltevésként tekintsünk egy gazdaságot, amelyben mindössze egyetlen jószágot termelnek két termelési tényező, a munka és a tőke felhasználásával. A termelési feltételeket egy ún. neoklasszikus $F(K, L)$ termelési függvény írja le, azaz egy első fokon homogén, mindkét változójában monoton növekedő, konkáv függvény, ami még az ún. Inada feltételeket is kielégíti, vagyis

$$\lim_{K\to\infty} F_K = 0 \qquad és \qquad \lim_{K\to 0} F_K = \infty \tag{1.1}$$
$$\lim_{L\to\infty} F_L = 0 \qquad és \qquad \lim_{L\to 0} F_L = \infty.$$

Az output egy részét elfogyasztják, a maradék részt megtakarítják és beruházzák. A modellben a megtakarítási ráta konstans s. A modellben a munkaerő a népesség konstans ütemű növekedése következtében szintén állandó ütemben nő, vagyis

$$L(t) = L_0 e^{nt} \quad ahol \quad L(0) = L_0 > 0. \tag{1.2}$$

A jövedelem dinamikáját a beruházások (amelyek az árupiaci egyensúlyi feltételnek megfelelően egyenlőek a mindenkori megtakarításokkal) fogják jelenteni hiszen valójában megegyeznek a tőkeállomány változásával s ebből adódik a modell „alap-egyenlete":

$$\frac{dK}{dt} = sF\left(K, L_0 e^{nt}\right). \tag{1.3}$$

Ebből azonban a konstans skálahozadék feltevése miatt a következő differenciálegyenlethez juthatunk el némi számolás és az $k \equiv \frac{K}{L}$ változó bevezetésével:

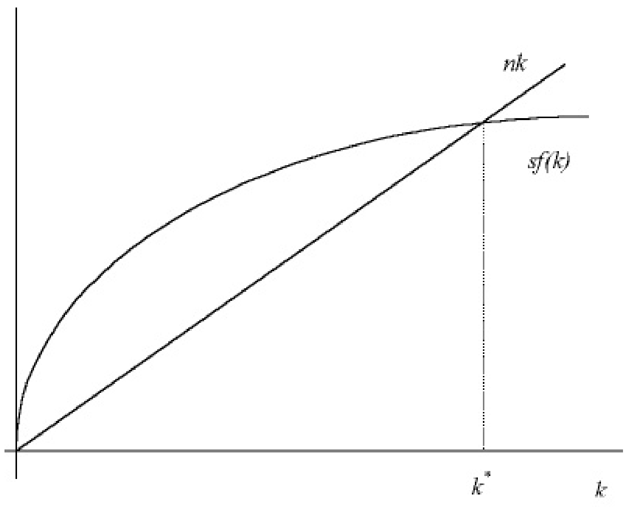
$$\frac{dk}{dt} = \frac{\frac{dK}{dt}L - \frac{dL}{dt}K}{L^2} = \frac{sF(K,L)}{L} - \frac{\frac{dL}{dt}}{L}\frac{K}{L} = sf(k) - nk. \tag{1.4}$$

ahol f az egy főre jutó kibocsátást adja meg az egy főre jutó tőkeállomány függvényében. Az egy főre jutó tőkeállomány dinamikáját leíró differenciálegyenletnek - a termelési függvényre tett feltevésekből adódóan - létezik egy, globálisan aszimptotikusan stabil stacioner állapota amelyhez az összes pálya tartani fog. A modell ábrája az 1.1. ábrán látható.

Az előbbi képletből az is kiolvasható, hogy a növekedési ütem csökken, amint k növekszik, hiszen ha γ_k jelöli az tőkefelszereltség növekedési ütemét, akkor az felírható

$$\gamma_k = s\frac{f(k)}{k} - n \tag{1.5}$$

alakban. Mivel a termelési függvény konkáv, így az $\frac{f(k)}{k}$ -vel kifejezett egységnyi tőkére jutó kibocsátás csökkenő függvény, ezért a tőkefelszereltség növekedésével annak növekedési üteme csökken. Az egy főre jutó kibocsátás növekedési üteme

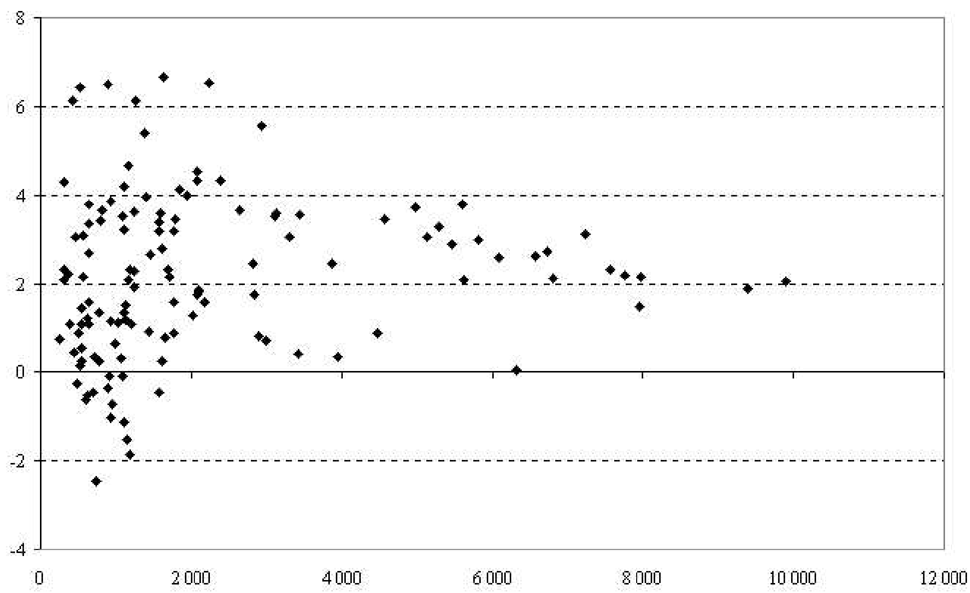


1.1. ábra. A Solow modell steady-state állapota.

ebből, mivel az felírható $\gamma_y = f'(k)\gamma_k$ alakban, szintén csökkenő függvénye k -nak. Ez látható abból, hogy a konkáv termelési függvény miatt a tőkefelszereltség határterméke csökkenő, és két csökkenő függvény szorzata szintén csökkenő.

Az abszolút konvergencia koncepciója ebből a felismerésből származik. Gazdagabb országokat nagyobb tőkefelszereltség, illetve ami ezzel ekvivalens, nagyobb egy főre jutó jövedelem jellemez. Következésképpen növekedési ütemük kisebb, mint az alacsonyabb jövedelműeké. A növekedési ütemekben meglévő különbség pedig hosszabb távon felzárkózáshoz, a jövedelmi különbségek csökkenéséhez fog vezetni.

Az abszolút konvergenciát empirikusan könnyen lehet ellenőrizni. Keresztmetszeti regresszió alapján az országok megfigyelt átlagos növekedési ütemét próbáljuk magyarázni a kiinduló időszak tőkekoefficiensének állományával. Amennyiben a tőkekoefficiens együtthatója negatív, akkor az abszolút konvergencia hipotézis empirikus igazolásáról beszélhetünk. Ezzel az módszertannal szemben azonban kritikák merültek fel, méghozzá az ökonometriai irodalomban Galton's Fallacy néven ismert jelenségé. *Friedman* [Friedman, 1992] és *Quah* [Quah, 1993b] dolgozataikban fejtik ki ennek a jelenségnek a lényegét és rámutatnak, hogy az előbb említett keresztmetszeti tesztelés során kapott konvergencia eredmények valójában statisztikai áltények. A kérdéses problémáról ilyen módon nem kaphatunk választ, hiszen az lényegénél fogva dinamikus probléma, melyet keresztmetszeti adatokból tesztelve hamis következtetéseket vonhatunk le.



1.2. ábra.

Az egy főre jutó GDP átlagos növekedési üteme 1960-1986 között 125 ország esetében, az 1960-as egy főre jutó GDP függvényében. Adatok forrása: PWT 5.6.

Az eredmények nem támasztják alá az abszolút konvergencia hipotézisét. A publikált számítási eredmények szerint, amennyiben nem csak egy országcsoporton belül végezzük a számításainkat, hanem a rendelkezésre álló legszélesebb adatbázison, akkor gyakorlatilag nem lehet elfogadni a hipotézist.

1.2.2. A feltételes konvergencia

A hipotézis empirikus irrelevanciájára adott egyik válasz a feltételes konvergencia hipotézisének a megszületése volt. A korábbi, (1.5) növekedési ütem további átalakításával kapjuk, hogy a növekedési ütem csökkenése összefüggésbe hozható a stacioner állapottól való távolsággal:

$$\gamma_k = s\left(\frac{f(k)}{k} - \frac{n}{s}\right) = s\left(\frac{f(k)}{k} - \frac{f(k^*)}{k^*}\right) \tag{1.6}$$

ahol k^* jelöli a stacioner egy főre jutó tőkeállományt. Ily módon a Solow modell egyik végkövetkeztetése lett az a felismerés, hogy mivel minden ország egyre csökkenő ütemben tart a *saját* stacioner állapotához. A hipotézis megfelelő vizsgálata során figyelembe kell venni, hogy a stacioner állapotok különböző tőkefelszereltségi szint mellett alakulhatnak ki az egyes országok esetében, amennyiben feltehető, hogy a stacioner állapotot meghatározó gazdasági változók értékei országspecifikusak. Ez az észrevétel az empirikus tesztelést az egyváltozós keresztmetszeti regresszióból az instrumentális változók módszertana felé mozdította el.

Az ismertebb empirikus művek [Barro és Sala-i Martin, 1995], [Barro és Sala-i Martin, 1992], [Mankiw et al., 1992], [Sala-i Martin, 1996a] is elsősorban keresztmetszeti adatokon tesztelték a konvergencia jelenségét. A növekedéselméleti megközelítésből olyan módon következett a konvergencia, hogy ha egyszer minden ország egy főre jutó nemzeti jövedelme tart annak stacioner értéke felé és méghozzá minél közelebb van a stacioner állapothoz a gazdaság, annál lassabban, akkor ezt lehet oly módon vizsgálni, hogy regressziós becslést készítünk a növekedési ütemekről a kiinduló jövedelem és néhány kontroll változó függvényében melyek képesek a stacioner állapottól való távolságot mérni.

A feltételes konvergencia hipotézisének széles körű kutatása feltehetően részben annak is köszönhető volt, hogy a fenti észrevétel alapján megújított módszertan alapján a feltételes konvergencia hipotézisét széles körben empirikusan verifikálhatónak találták, továbbá a konvergencia ütemére „bűvös érték”, a legtöbb vizsgálatban 2% körüli sebesség adódott.

1.2.3. Divergencia az endogén növekedési modellekben

Az endogén növekedéselmélet megszületését a fenti modell azon következtetése ösztönözte, mely szerint az egy főre jutó jövedelmek növekedési ütemei tartósan csökkenek (tartanak a nullához), ami ellentmondani látszott a megfigyelt tényeknek. Erre a problémára már az eredeti, 1956-os Solow cikk is megfogalmaz magyarázatot. Ennek során a technikai fejlődés exogén bevezetésével az egy főre jutó GDP értékek is növekedtek a technológiai haladás növekedési ütemével - vagyis igazodtak ahhoz - ez azonban nem tűnt elfogadható magyarázatnak egy olyan horderejű kérdésre, hogy milyen tényezők okozzák a nemzetek gazdagságát, felemelkedését vagy hanyatlását. A kihívásra a nyolcvanas években megszülető válasz ennek megfelelően éppen azért kapta az endogén növekedéselmélet nevet, mert a modell belső feltevéseiből tudta az egy főre jutó jövedelem tartósan pozitív ütemű növekedését megmagyarázni.

A kulcs a konstans skálahozadék feltevésének feloldása volt, amennyiben ugyanis a termelési függvény növekvő skálahozadékot mutat fel, akkor a termelés gyorsabban fog növekedni mint a termelési tényezők, s így az egy főre jutó mennyiségek tartósan pozitív ütemben fognak növekedni. Ez a megfogalmazás természetesen nagyon leegyszerűsíti az összefüggéseket, mindazonáltal rámutat arra, hogy végül is mi játszotta a döntő szerepet az új elméleti eredmények megszületésében. Mivel a jelen megfogalmazásban a konstans skálahozadék feltevésének feloldását tekintjük a kulcsmozzanatnak, ezért a továbbiakban elsőként az ún. AK modellt fogjuk kifejteni - a konvergencia problémájára adott válaszára összpontosítva. Ez hasonlít a leginkább az előbb tárgyalt modellhez és alkalmas a leginkább arra, hogy az előbb említett feltevés szerepére rávilágítson. Az AK modellt azonban hihetetlenül egyszerű struktúrája miatt gyakran éri olyan kritika, miszerint túlságosan leegyszerűsíti az összefüggéseket. Mi itt azért választottuk ezt a modellt, mivel nem célunk a kérdés mélységekbe menő elemzése, viszont szeretnénk rámutatni arra, hogy az első fokú homogenitás feloldása hogyan indukálja az egy főre jutó jövedelmek növekedési ütemének tartós fennmaradását és a konvergencia cáfolatát egyaránt.

Az AK modell arra a feltevésre épít, hogy az egy főre jutó kibocsátást leíró f függvény konstans hozadékú[5], ami azt jelenti, hogy felírható

$$f(k) = Ak \tag{1.7}$$

alakban. Az előző modellben az F termelési függvény első fokú homogenitása miatt az egy főre jutó kibocsátást leíró f függvény csökkenő hozadékot mutatott, azaz az f' derivált függvény monoton csökkenő volt. Ebben az esetben a derivált függvény (a határtermék) nullad fokon homogén függvény lesz, vagyis mivel egyváltozós függ-

[5]Ez a feltevés egybevág azzal, hogy a kétváltozós (mindkét változójában monoton növekedő) F termelési függvény növekvő skálahozadékú, ha ugyanis az

$$f(k) \doteq F(k, 1)$$

függvény első fokon homogén k-ban, akkor $L > 1$ esetén

$$F(K, L) > F(K, 1) = LF\left(\frac{K}{L}, 1\right)$$

éppen azt mutatja, hogy az F kétváltozós termelési függvény növekvő skálahozadékú.

vényről van szó, konstans. A feltevés jelentősen megváltoztatja a dinamikus rendszer tulajdonságait, ugyanis a pályákat meghatározó differenciálegyenlet ebben az esetben a

$$\frac{dk}{dt} = sf(k) - nk = (sA - n)k \tag{1.8}$$

alakban írható fel, vagyis az egy főre jutó tőkeállomány növekedési üteme

$$\gamma_k = \frac{\dot{k}}{k} = sA - n \tag{1.9}$$

konstans. Az egy főre jutó tőkeállomány tehát exponenciális pályán halad, így az egy főre jutó jövedelem, ami az egy főre jutó tőkeállomány konstansszorosa, szintén konstans ütemben növekszik ugyanavval a növekedési rátával:

$$y_t = k_0 A e^{(sA-n)t} \tag{1.10}$$

Ebben az esetben nem beszélhetünk konvergenciáról, hiszen az egyes gazdaságok közötti, az egy főre jutó jövedelmekben kifejezett fejlődésbeli különbségek tartósan fennmaradnak.

A növekvő skálahozadék okairól. Az endogén növekedéselméleti irodalom (méltán) legtöbbet hivatkozott írásai [Arrow, 1962], [Romer, 1986] és [Lucas, 1988], melyekben a hagyományos termelési tényezők (elsősorban a fizikai tőke, illetve munka) mellett a humán tőke is megjelenik, sőt a hosszú távú növekedés mozgatórugója lesz. A növekvő skálahozadék forrása ezek szerint a tudás, mint termelési tényező speciális tulajdonságaiban keresendő. Az egyszer már „megtermelt" (felfedezett, kikutatott) tudás nem amortizálódik, nem évül el, s nem lehet teljesen titokban tartani. Ez utóbbi tulajdonsága miatt externális hatásokat hordoz magában, hiszen egy vállalat által létrehozott új tudás megnöveli más vállalatok termelési lehetőségeit is. A modell feltevései szerint a tudás hozadéka növekvő: minden input (beleértve a tudást is) megduplázódása esetén a kibocsátás több, mint kétszeresére fog nőni. Ez a növekvő hozadék azonban egy ún. továbbterjedési (spillover) hatás révén fejti ki hatását. Az egyes vállalatok számára elérhető technológia konstans volumenhozadékú a vállalat számára rendelkezésre álló tudás, illetve az összes többi termelési tényező függvényében. Ugyanakkor a termelési lehetőségeit befolyásolja a társadalom számára elérhető összes tudás nagysága is, amelyet azonban az egyéni döntéshozó adottságként kezel egyéni optimuma meghatározásakor. Társadalmi szinten a tudás hozadéka növekvő, s így még ha az összes többi input felhasználási szintje változatlan is, érdemes a tudást növelni (ami a kutatás+fejlesztésbe való beruházáson keresztül valósul meg).

1.2.4. Szigma konvergencia

A makröokonómiai irodalomban konvergenciának nevezett jelenségen a fent kifejtett abszolút, illetve feltételes konvergencia fogalmakat értik. A regressziós együttható gyakori jelölése miatt gyakran *béta* konvergencia elnevezés alatt találkozhatunk e hipotézisekkel. Ez az elnevezés részben azt is szolgálja, hogy a koncepciót meg lehessen különböztetni az egyéb kritériumok alapján megállapítható közeledéstől. Ez utóbbira példa a konvergencia–vita kibontakozása óta néha elhangzó *szigma* konvergencia hipotézis, mely alapvetően különbözik a korábbi elképzelésektől. Valójában nem új koncepcióról van szó, hanem arról az egyszerű tényről, hogy egy sokaság heterogenitásának egyik lehetséges mérőszáma az empirikus szórás nagysága. A két konvergencia fogalom közötti kapcsolatról megmutatható, hogy a szigma konvergenciából következik a béta konvergencia, fordítva azonban nem áll fenn az összefüggés.[6] Véleményünk szerint ez az összehasonlítás elfedi a lényeget a két koncepció között: a szórás ugyanis a jövedelmi egyenlőtlenségek *abszolút* mutatója, míg a béta konvergencia esetében a jövedelmek *relatív* eltéréseiben következik be csökkenés.[7] Ha kiindulási sokaságunkat különböző növekedési ütemű országok képezik és egy főre jutó jövedelmeik *nem csökkenek* a megfigyelt időszak alatt, akkor a jövedelmi különbségek abszolút csökkenése egyben mindig relatív egyenlőtlenségi csökkenést is jelenteni fog, így egyáltalán nem meglepő a béta és szigma konvergencia között talált kapcsolat. Az állítás fordítva természetesen nem igaz, hiszen a relatív egyenlőtlenségi csökkenés végbemehet az abszolút különbségek szintenmaradása, vagy növekedése mellett is.

[6] [Barro és Sala-i Martin, 1995].

[7] A relatív és abszolút jövedelemegyenlőtlenségi mutatók részletes kifejtését ld. 2. fejezetben.

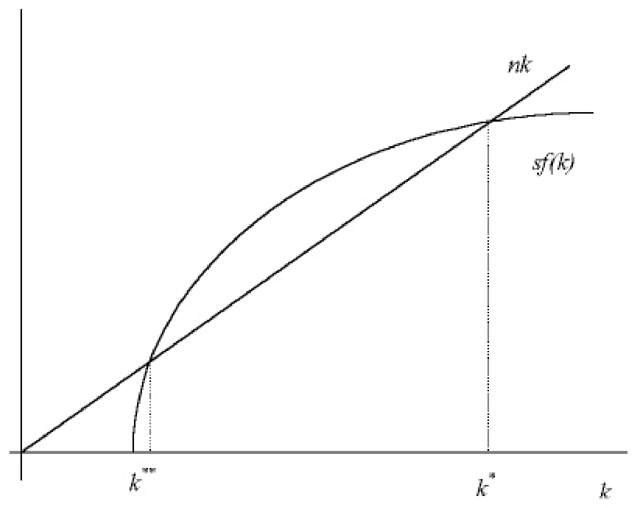
1.2.5. Konvergencia klubok

A feltételes konvergencia hipotézisére megszülető egyik versengő teória a konvergencia klubok hipotézise. Ennek első kifejtései *Quah* nevéhez köthetők (pl. [Quah, 1996b], [Quah, 1996c], [Quah, 1996a], [Quah, 1996d], [Quah, 1997] tanulmányok), amelyekben a konvergencia mérésének *közvetlen* módszertana mellett érvel. Véleményünk szerint tanulmánya két ponton járult hozzá jelentősen a konvergencia–vitához.

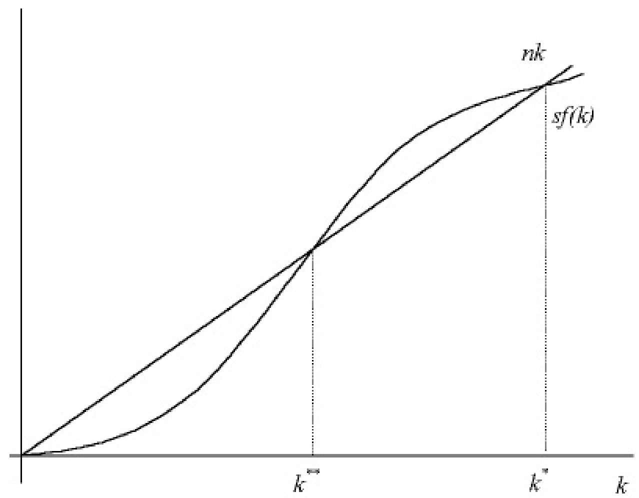
- Egyrészt azt állítja, hogy a feltételes konvergencia fogalmának megszületésével a konvergencia–vita azon értelmezése, miszerint az azt vizsgálja, hogy a szegényebb országok képesek-e a felzárkózásra, illetve, hogy megfigyelhető-e az egy főre jutó jövedelmek csökkenése, *hamissá* válik: a feltételes konvergencia szerint minden ország a saját állandósult állapotához tart, következésképpen még megfigyelt konvergencia esetén sem beszélhetünk felzárkózásról, a jövedelmi különbségek kiegyenlítődéséről.

- Ha azonban valóban a jövedelmi egyenlőtlenségek alakulása a kérdés, arra a jövedelmi egyenlőtlenségek közvetlen mérésével, vagy magának az eloszlásnak a közvetlen vizsgálatával kaphatunk választ. Ha azt tapasztaljuk, hogy az eloszlás jellemzően egyre meredekebb eloszlásfüggvénnyel írható le, s a jövedelmek egyre kisebb tartományban szóródnak, az „konvergenciát” sugall, míg ettől eltérő esetek nem csak úgy merülhetnek fel, hogy divergenciát tapasztalunk, de úgy is, hogy a jövedelmek eloszlásfüggvénye valamilyen, a korábbi technikákkal nem modellezhető alakot ölt, pl. kétmóduszúvá válik.

A konvergencia klubok teóriája pontosan e két észrevétel talaján alakult ki. Újításaik két fronton jelentek meg: egyrészt megfigyelhető egy módszertani váltás az egyenlőtlenségek csökkenésének közvetlen vizsgálata felé (melynek eszköze az eloszlásfüggvény empirikus jellemzése), másrészt egy tartalmi újítás, amely szerint nem csak közeledés vagy távolodás a lehetséges alternatívák az országok számára, hanem a *polarizálódás* is: létrejöhetnek „klubok”, országok olyan csoportjai, melyeken belül közeledés figyelhető meg, anélkül, hogy a teljes sokaság figyelembevételével, azaz az összes ország vonatkozásában létezne konvergencia.



1.3. ábra.
A Solow modell stacionárius állapotai minimális tőkefelszereltségi szint esetén.



1.4. ábra.
A Solow modell stacionárius állapotai konvex szakaszt tartalmazó termelési függvény esetén.

A konvergencia klubok elméleti kifejtését e fejezeten belül az összehasonlíthatóság kedvéért a Solow modell keretében fogjuk bemutatni, az előbb említett módszertani váltást a 3. fejezetben mutatjuk be.

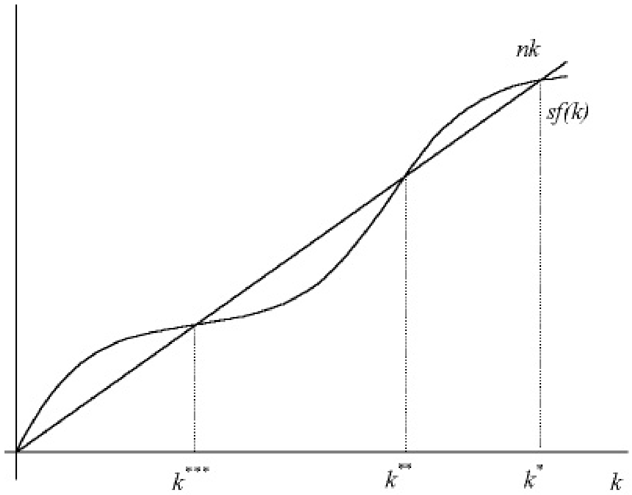
Ha sérülnek a Solow modellben a termelési függvényre tett feltevések, pl. oly módon, hogy az f termelési függvénynek van konvex szakasza (1.4. ábra), vagy létezik minimális $k_0 > 0$ tőkefelszereltségi szint, amely alatt nincsen pozitív kibocsátás (1.3. ábra), akkor a paraméterértékek egy tartományában megszűnik az állandósult állapot unicitása. Könnyen látható ugyanakkor a növekedési egyenletek vizsgálatával, hogy ekkor a k^{**}, alacsony tőkefelszereltségi szinthez tartozó állapot instabil. Ha ezeken túlmenően a termelési függvény olyan mértékben nem „szabályos", hogy konkáv és konvex szakaszok váltogatják egymást, ekkor az az 1.51.5. ábrának megfelelően növekszik az aszimptotikusan stabil állandósult állapotok száma is. Látható az ábrán, hogy mind a k^{***}, mind a k^* egyensúlyi tőkefelszereltségi szinttel jellemezhető egyensúlyi állapot stabil, ebből kifolyólag, ha valamely ország kezdeti tőkefelszereltsége kisebb, mint k^{**}, akkor a növekedési modell szerint annak hosszú távú egyensúlyi értéke k^{***} lesz. A modell predikciója szerint tehát az ilyen termelési függvény esetén várhatóan a közepes jövedelmi rétegű országok száma csökkenni fog, a gazdagabbak jövedelmi szintje hasonulni fog egymáshoz. Mondhatjuk azt is, hogy a gazdagabb országok alkotnak egy „fejlett klubot", míg a szegényebb országok jövedelmei szintén közelebb kerülnek egymáshoz. A két csoport jövedelmei között azonban tartósan fennmarad a különbség.

Ilyen értelemben az eredeti Solow modell a konvergencia klubok teóriájával is konzisztens lehet, a döntő kérdés az, hogy az országok termelési kapacitását (következésképpen növekedési lehetőségeit) jellemző termelési függvényt milyen hozadéki struktúra jellemzi.

1.2.6. Összefoglalás és következtetések

A konvergencia–vita fenti összefoglalásából véleményünk szerint az alábbi legfontosabb észrevételek olvashatók ki.

A vita fejlődését nagymértékben befolyásolta, hogy kiinduló problémája az endogén és exogén növekedéselmélelek közötti "igazságtétel" volt. Ez önmagában szá-



1.5. ábra.
A Solow növekedési modell steady-state állapotai több inflexiós ponttal rendelkező termelési függvény esetén.

mos konfliktusforrást hordozott magában. Mindenekelőtt szeretnénk megemlíteni a tudományelmélet arra vonatkozó megállapítását, melyek szerint „a tények képtelenek igazolni teljesen az elméletet”[8]. A pozitivista megközelítéssel szemben egyáltalán nem triviális, hogy az egyes teóriák közötti választást valóban meg lehet-e tenni pusztán empirikus alapokon. A dolgozatban nem szeretnénk a tudományelméleti metodika érvelésébe belemerülni, mindössze megemlítjük, hogy vélekedésünk szerint a teória és empíria közötti kapcsolat igen szoros, ámde nem ok-okozati. A kutatónak lehetőség szerint az alkotott modell következtetései és a lehetőségei szerint adott empirikus vizsgálatok eredményei közötti összhangra kell törekedni, semmiképpen sem lehet alternatív teóriák felett pusztán empirikus alapokon pálcát törni.

A vita tudományelméleti jelentősége akkor érthető meg, ha megpróbáljuk összeegyeztetni pl. a feltételes konvergencia fogalmát a kiindulásul választott problémával. Az eredeti kérdésfeltevésre, miszerint az egyes országok egy főre jutó jövedelmeiben megfigyelhető-e közeledés, azaz konvergencia, nyilván elutasító választ kell adnunk akkor, ha arra csupán *feltételesen*, azaz a feltételes konvergencia fogalma szerint adhatunk pozitív választ. A koncepció megszületését mégis több kutató értékeli úgy, mint ami „megmenti” a konvergencia problémáját az elutasító empirikus

[8][Farkas, 1994], 24. old.

vizsgálatok ellenére.

Az empirikus igazságtétel problémájának lezárásaképpen szeretnénk pusztán hivatkozni *Kelly* [Kelly, 1992], *Leung – Quah* [Leung és Quah, 1996], és *Tamura* [Tamura, 1991] (talán nem elég gyakran hivatkozott) tanulmányaira, amelyek endogén növekedéselméleti modelljükben kimutatják a konvergencia jelenségét.[9] Mindezek az eredmények valójában arra utalnak, hogy a konvergencia kérdése nem pusztán empirikus probléma, e tekintetben azonban maga az irodalom sem egységes. Az ellentétes álláspontok szemléltetésére idézzük egyrészről Quah megfogalmazását, aki az empirikus relevancia mellett foglal állást.

> "...a konvergencia egyszerűen egy empirikus kérdés, amelyik számos tényező között a polarizáció, a jövedelemelosztás és az egyenlőtlenség kérdéseire világít rá. Nyilvánvalóan, a gazdasági növekedés megértése fontos dolog. De a növekedés pusztán csak egyike a közgazdaságtanon belüli különböző területeknek, ahol a konvergencia elemzése hasznos bepillantást tesz lehetővé."[10]

Álláspontunk szerint a probléma elemzése az empirikus problémákon túlmenően számos teoretikus kérdést is felvet, a másik oldal álláspontját képviselje ezúttal egy Romertől származó idézet.

> "A konvergencia vitáról elmondottak megerősíteni látszanak azt az álláspontot, amelyről én azt gondolom, hogy súlyosan félrevezető, miszerint az adatok képezik a közgazdasági elemzés egyetlen szűkös erőforrását."[11]

[9]A fő különbség *Tamura* [Tamura, 1991] tanulmánya és a korábban bemutatott, egyszerű endogén növekedéselméleti modell között az, hogy az előbbi esetben az egyes országok, illetve régiók között a fejlettség függvényében tovagyűrűző (spillover) hatások jelennek meg, emiatt az alacsonyabb fejlettségű területek magasabb növekedési rátát mutatnak fel, mint a magasabb fejlettségűek. *Kelly* [Kelly, 1992] és *Leung – Quah* [Leung és Quah, 1996] tanulmányaik ***sztochasztikus*** endogén növekedési modelleket tartalmaznak, s amellett érvelnek, hogy az endogén modellekben a konvergencia hiánya pusztán a modellek determinisztikus jellegéből fakad .

[10]Quah, [Quah, 1996b], p. 1354.

[11]Romer, [Romer, 1994]

A konvergencia–vita eddigi tárgyalása azt is mutatja, hogy a fő elemzési keret a „reprezentatív ország" megközelítés: egy adott gazdaság egy főre eső jövedelmének pályájából próbálnak következtetéseket levonni a nemzetek közötti jövedelemelosztás dinamikájára. Azokban az esetekben, ahol a konvergencia ténye és a modellek exogén, illetve endogén jellege között korábban talált összefüggés megtörik (azaz pl. *Tamura* [Tamura, 1991] példája, ahol endogén növekedési modellben figyelhető meg konvergencia, vagy pl. *Lucas* [Lucas, 1993] tanulmánya), általában a „reprezentatív ország" keretektől való elmozdulással, s az egyes országok közötti gazdasági kapcsolatok (a tényezőmobilitás vagy „spillover" hatások) modellezésével találkozhatunk. Ez két okból is elgondolkodtató. Egyrészt várható, hogy a reprezentatív ország keret elsősorban az átlagról mond valamit, következésképpen egy egész sokaság heterogenitásának jellemzésére (vagy a heterogenitás időben változásánal leírására) nem feltétlen alkalmas. Másrészt mivel a konvergenciára vonatkozó eredmények nagyon erősen függnek a nemzetközi kapcsolatok modellbeli specifikációjától, és mivel ezek a kapcsolatok igenis léteznek nemzetközi szinten (még ha különböző intenzitással is az egyes országokra nézve) és nem is elhanyagolhatóak, ezért adódik a következtetés, hogy a „reprezentatív ország" modellezési technika nem képes a nemzetközi jövedelemeloszlás jelenségét megfelelő módon megragadni és elméletileg modellezni.

Végül és nem utolsósorban a vita arra enged rátekintést, hogy minden vizsgálódás szempontjából kiemelkedő fontosságú, hogy a kutató pontosan meghatározza vizsgálódása tárgyát. Úgy gondoljuk, hogy a konvergencia-vitában valójában három – bár szorosan összefüggő, de mégis – különböző kérdés egyidejű megválaszolására történt kísérlet, miközben ezek egészen más módszertant, megközelítést igényelnek.

1. A közeledés vagy távolodás *ténye*. Szeretnénk hangsúlyozni, miszerint az a kérdés, hogy az egy főre jutó jövedelmek különbségei csökkenek-e vagy sem, implicit feltételezi, hogy a nemzetek közötti jövedelemelosztásokat *rendezni* tudjuk, azaz össze tudjuk hasonlítani őket *egyenlőtlenségi* szempontból. A jóléti közgazdaságtanon belül (csakúgy mint pl. a pénzügy, a statisztika területein egyaránt) kifejlett módszertan áll rendelkezésre az egyenlőtlenségek mérésére vonatkozóan.

Ez a kérdés tehát az *eloszlások rendezésének* problémájára vezethető vissza.

2. Az előzőtől független kérdés az, hogy ha meg is figyelünk csökkenést, az hosszabb távon végleges kiegyenlítődést jelent-e (azaz a neoklasszikus növekedési modell szerint eltűnnek az egyenlőtlenségek), vagy az egyenlőtlenség csökkenése megáll egy adott szinten (például a feltételes konvergencia szerint vagy Quah konvergencia klubjai esetében), vagy esetleg átmeneti jellegű (azaz a folyamat nem is rendelkezik állandósult állapottal, hanem ciklusok figyelhetők meg benne)? A kérdés ebben a formában történő megfogalmazása azt igényli, hogy a jövedelmek eloszlásának időbeni alakulásáról állítsunk valamit.

   A kérdés megválaszolása tehát az *eloszlások konvergenciájának*, s az invariáns valószínűségeloszlásoknak a vizsgálatát igényli.

3. S végül a korábbiaktól különböző kérdésfelvetés, hogy milyen esélyekkel lehetséges a felzárkózás, azaz a szegényebb országok ténylegesen képesek lesznek-e a felzárkózásra? Az előző két kérdésre adott válaszok ugyanis nem tudják meghatározni, hogy mik az egyes országok *mobilitási kilátásai* a jövedelemelosztás rendszerében való előrejutásra.

   A kérdés megválaszolása az eloszlások dinamikáját meghatározó *sztochasztikus folyamat* vizsgálatát igényli.

A három probléma nem teljesen független egymástól, mivel ugyanazon jelenség három különböző oldalát ragadja meg. Úgy gondoljuk azonban, hogy a vizsgált probléma egyes részkérdéseinek pontos szétválasztása elsődleges a megfelelő metodika megválasztása, és a kapott eredmények értelmezése szempontjából.

A dolgozat 2. fejezetében az első kérdésre koncentrálva bemutatjuk, hogy a jóléti közgazdaságtanon belül milyen eszközök állnak rendelkezésre a jövedelmi egyenlőtlenségek mérésére, illetve az eloszlások rendezésére. Látni fogjuk, hogy ez az eset elsősorban komparatív statikai vizsgálatot tesz lehetővé. A 3. fejezetben kísérletet teszünk a második és harmadik kérdés megválaszolásának céljából a jövedelmi egyenlőtlenségek változásának *dinamikus* modellezésére.

2. fejezet

Jövedelmi egyenlőtlenségek komparatív statikai mérése

Amikor jövedelemegyenlőtlenségek időbeni *változásáról*, *növekedésről* vagy *csökkenésről* beszélünk, alapvetően a jövedelemeloszlások *összehasonlítására* teszünk kísérletet. Ezzel implicit módon *rendezzük* az eloszlásokat: melyiket milyen mértékű, vagy csak egy másik eloszláshoz képest milyen mértékű egyenlőtlenség jellemez. Eloszlások rendezése azonban többféle megközelítés alapján is lehetséges; nincsen olyan természetes rendezőelv, mint például a valós számok halmazán értelmezett $\leq, \geq$ reláció.

A közgazdasági irodalomban valójában már igen régi „hagyománya” van eloszlások rendezésére vonatkozó teóriák kialakításának. Az általunk áttekintett irodalomban két olyan irányzatra bukkantunk, melyek – bár látszólag különböző elméletek más megközelítésekkel és módszertanokkal – sok tekintetben igen hasonlóak. Egyrészt gondolunk a sztochasztikus dominancia elméletére, melynek gyökerei a pénzügyi közgazdaságtanon belül keresendők s eredetileg főleg befektetések kockázatának és hozamának „összemérése”, azaz a különböző befektetési lehetőségek közötti mérlegelés szempontja hívott életre; másrészt az egyenlőtlenségi mutatók széles irodalmára, melyeket elsősorban a jóléti közgazdaságtanban alkalmaznak a redisztribúció, az adózás és általában a jövedelemújraelosztó mechanizmusok jóléti hatásainak számszerűsítése céljából.

Az alkalmazott megközelítések összehasonlítását tovább nehezíti az alkalmazott eszközök különbözősége. A sztochasztikus dominancia irodalmában főleg folytonos eloszlásokkal foglalkoznak, s a legtöbb összefüggést az eloszlásfüggvény terminológiájában fogalmazzák meg. Ezzel szemben az egyenlőtlenségi mutatók irodalma főleg véges, rendezett vektorok összehasonlítását végzi, bizonyos esetekben utalva az ún. empirikus eloszlásfüggvényre vonatkozó következményekre.

Az általunk vizsgált egyenlőtlenség fogalom szoros kapcsolatot mutat mindkét irányzat fogalmaival és alapvetően épül a két említett iskola eredményeire. Ezért a további kifejtésben e két megközelítés fogalmait és eredményeit egyaránt felhasználva a két iskola közötti hasonlóságra és különbségre is rámutatva kívánjuk kifejteni az általunk vizsgált egyenlőtlenségi koncepciót. A jelen fejezetben, mivel elsődleges célunk az egyenlőtlenségi mutatók koncepciójának kifejtése, mi is az utóbbi utat fogjuk követni. A következő fejezetekben azonban, ahol kísérletet teszünk egy általánosabb elemzési keret kifejtésére, a célunknak inkább megfelelő, folytonos esetet fogjuk használni, így az ott bemutatásra kerülő összefüggések inkább a sztochasztikus dominancia jelölésrendszerével fognak egybeesni. A jelölésrendszerbeli különbségek ellenére a két irányzat által megfogalmazott egyenlőtlenség koncepció (illetve adódó rendezés) igen hasonló koncepción nyugszik. A jelen fejezetben elsősorban *Ebert* [Ebert, 1988] tanulmánya alapján, összefoglaló jellegű kifejtését adjuk az egyenlőtlenségi mutatókra épülő megközelítésnek.

Az egyenlőtlenségi mutatók definiálására épülő megközelítés szerint az egyes eloszlásokat mutatószámmal jellemezhetjük, s két eloszlás egyenlőtlenségi szempontból történő ellemzése egyszerűen e mutató értékeinek összehasonlítását igényli. Kihasználva a valós számtesten értelmezett $\leq, \geq$ rendezéseket az eloszlások leképezése a valós számok halmazára implicit módon megad egy teljes rendezést a valószínűségi eloszlások halmaza felett.

A megközelítésen belül is két fő út alakult ki a tekintetben, hogy hogyan is jussunk el a rendezést lehetővé tévő egyenlőtlenségi mutatók megkonstruálásához. Az egyik lehetséges út *(axiomatikus megközelítés)*, hogy definiáljuk a társadalmi jóléti rendezés alapelveit s az egyenlőtlenségi mutatókat azokból származtatjuk. A másik *(normatív megközelítés)* adott egyenlőtlenségi mutatókból indul ki, s vizsgálja, hogy milyen feltevéseket elégítenek ki. A továbbiakban az axiomatikus utat fogjuk követni, s az irodalomban széleskörűen elfogadott és hivatkozott axiómákat fogjuk a társadalmi jóléti rendezés szempontjaiként állítani.

2.1. Az egyenlőtlenségi rendezés axiomái

A továbbiakban $x = (x_1, ..., x_n)$ n-elemű vektor jelöli az egyes egyének, illetve országok (azaz általában tetszőleges megfigyelési egységek) jövedelmét, és ezen jövedelmi vektorok halmazát Ω^n. Igy n a megfigyelési egységek számát jelöli. A jövedelemeloszlások egyenlőtlenségi rendezésének axiomatikus megközelítése során meghatározzuk azokat az axiómákat, melyeknek az egyenlőtlenségi relációnak teljesítenie kell. Az irodalomban alkalmazott axiómarendszerek többnyire azonos alapokon épülnek fel, megfigyelhetők ugyanakkor kisebb különbségek is (ld. pl. *Ebert* [Ebert, 1988], *Krtscha* [Krtscha, 1984].) Számunkra azok az axiómák érdekesek, melyek a legtöbb szerző által alkalmazott axiómarendszerben megtalálhatók, s a közgazdasági elemzések alapjaival konzisztens rendszert alkotnak.

Ha a $\succeq$ bináris reláció valamely jóléti vagy egyenlőtlenségi koncepciót kifejező bináris reláció, akkor feltesszük róla, hogy teljes, tranzitív és folytonos, s ebben az esetben reprezentálható társadalmi jóléti függvénnyel.

1. axióma (Folytonosság). *A $\succeq$ bináris reláció folytonos rendezés (azaz teljes, tranzitív és reflexív), így reprezentálható folytonos társadalmi jóléti függvénnyel, azaz $\exists W(x) : \Omega^n \to \mathbb{R}$ amelyre minden $x, y \in \Omega^n$ esetén $W(x) \geq W(y)$ pontosan akkor teljesül, ha $x \succeq y$ is teljesül.*

A $W(x) : \Omega^n \to \mathbb{R}$ $(\Omega^n \subseteq \mathbb{R}^n)$ hozzárendelési szabályt a továbbiakban *társadalmi jóléti függvénynek* fogjuk hívni. Az elnevezés a jóléti közgazdaságtanból származik, hiszen ha egy adott társadalomra vonatkozóan vizsgáljuk az egyenlőtlenségeket, akkor a W függvény értelmezése az adott jövedelmi viszonyok által meghatározott jólét szintje. A jólét növekedését jelzi tehát a W függvény értékének esetleges növekedése.

A megközelítés jelen problémára való adaptációja felveti, hogy nemzetközi viszonylatban hogyan lehet értelmezni egy „jóléti függvényt". Úgy gondoljuk, hogy a társadalmakra definiált társadalmi jóléti függvény koncepciójának általánosítása világméretekre nem feltétlenül jár együtt a közgazdasági értelmezés automatikus kiterjeszthetőségével. Ugyanakkor az *egyenlőtlenségek létezése* és azok mérésének *metodikai megalapozása* igényli, hogy a világméretű jövedelmek eloszlásának időbeni alakulására vonatkozóan határozzunk meg rendezési elveket. Részben ez is indokolja, hogy a rendezési axiómákat nem a jóléti függvényekre, hanem a $\succeq$ bináris relációra fogjuk kimondani. A fenti axióma teljesülése esetén a $\succeq$ bináris reláció reprezentálható egy W jóléti függvénnyel.

A monotonitási axióma szerint az összjövedelem növekedése jóléti szempontból preferált.

2. axióma (Monotonitás). *$y \geq x$ esetén (azaz ha y nagyobb, de nem egyenlő x -el), akkor $y \succ x$ is fennáll (azaz $y \succeq x$ fennáll, de $x \succeq y$ nem).*

Fontos észrevétel, hogy mivel az $\mathbb{R}^n$-beli vektorrendezés nem teljes rendezés, ezért a fenti monotonitási axióma nem határozza meg egyértelműen az $\succeq$ bináris relációt.

További gyakori feltevések, hogy az egyes társadalmak jóléte nem függ attól, hogy az egyes jövedelemeket éppen melyik tag birtokolja, ami a mi keretünkben azt jelenti, hogy a fenti x vektor tetszőleges permutációja ugyanakkora jóléthez vezet el. További fontos feltevés, hogy egy x_i jövedelem hatása a társadalmi jólétre *mindaddig, amíg a jövedelmek rangsora változatlan,* független a többi jövedelem szintjétől. Ennek a feltevésnek a megragadására igen változatos axiómákat fogalmaztak meg az irodalomban, a végső következtetés azonban az, hogy a társadalmi jólét szempontjából egy adott x jövedelmi vektor esetében az eloszlásfüggvények játsszák a döntő szerepet. Ezért bevezetjük az x jövedelmi vektor rendezésével adódó $x_{[.]}$ rendezett jövedelmi vektort, amelyet oly módon kaphatunk az x vektor permutációjával, hogy $x_{[i]} \geq x_{[i+1]}$ fennálljon minden i indexre. Az előbb megfogalmazott „függetlenségi" axiómának az a jelentősége, hogy a társadalmi jóléti függvény felírható az alábbi additívan szeparábilis formában

$$W(x) \cong \sum_{i=1}^{n} g_i\left(x_{[i]}\right) \tag{2.1}$$

ahol $\cong$ most az „ordinálisan ekvivalens" jelölésére szolgál.

A gyakorlatban alkalmazott legtöbb egyenlőtlenségi mutató teljesíti ezt a feltételt, s mindössze azt ragadja meg, hogy a társadalmi jólét jellemzéséhez szükséges információkat a jövedelmek empirikus eloszlásfüggvénye tartalmazza. Ez igen fontos a későbbiek szempontjából, egyrészt mert pl. az említett sztochasztikus dominancia teóriája szintén az eloszlásfüggvényekből indul ki, s így a két irány valóban összehasonlíthatóvá válik. Továbbá a következő, 3. fejezetben bemutatásra kerülő általánosabb keret is erre épít, amikor a mértékelmélet eszközeire alapozva valószínűségi mértékeket kíván jellemezni egyenlőtlenségi szempontból.

A következő tulajdonság kifejezetten az egyenlőtlenségi irodalomra jellemző és magához az egyenlőtlenség fogalmához, s nem annyira a társadalmi jólét, vagy az eloszlásfüggvények koncepciójához áll közel. Meg kell ugyanis fontolnunk, hogy egyenlőtlenségen a relatív vagy az abszolút jövedelmek különbözőségeinek vizsgálatát értjük, általános esetben a két megközelítés ugyanis nem esik egybe. Relatív invariancia tulajdonság teljesülése esetén két különböző jövedelmi vektor, illetve ezek skalárszorosainak sorrendje azonosnak kell lennie.

3. axióma. 1. *A $\succeq$ rendezés kielégíti a relatív invariancia tulajdonságot, ha minden x, y jövedelmi vektorpár esetében, amelyre $x \succeq y$ fennáll, teljesül az is, hogy $\lambda x \succeq \lambda y$ minden pozitív λ valós szám esetén.*

2. *A $\succeq$ rendezés kielégíti az abszolút invariancia tulajdonságot, ha minden x, y jövedelmi vektorpár esetében, amelyre $x \succeq y$ fennáll, teljesül az is, hogy $\lambda \mathbf{1} + x \succeq \lambda \mathbf{1} + y$ minden pozitív λ valós szám esetén, ahol $\mathbf{1}$ az összegzővektort jelöli.*

Meg lehet mutatni, hogy a korábban említett axiómák továbbá a relatív invariancia feltevésének teljesülése esetén a társadalmi jóléti függvény felírható az alábbi alakban[1]:

$$W^{\varepsilon}(x) = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{[i]}^{\varepsilon}\right)^{1/\varepsilon}, & \varepsilon \neq 0; \\ \prod_{i=1}^{n} x_{[i]}^{\alpha_i}, & \varepsilon = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

ahol α_i pozitív valós számokra teljesül, hogy $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

A fenti társadalmi jóléti függvény esetében a korábbiakban általánosságban $g_i\left(x_{[i]}\right)$-vel jelzett haszonfüggvény, mely a társadalom i-ik rangsorú jövedelmű egyénnek a jövedelemből fakadó hasznosságát fejezi ki, a (2.2) függvény esetében a hat-

[1] [Ebert, 1988], 3. tétel, 64. old.

ványfüggvény alakját ölti, ahol a kitevő azonos minden egyén esetében, s az egyéni preferenciák közötti különbséget az α_i paraméterek hordozzák.

Szeretnénk kihangsúlyozni, hogy a (2.2) társadalmi jóléti függvény a jövedelmi vektorok első fokon homogén függvénye, s ezáltal minden jövedelem pl. megkétszereződése esetén a társadalmi jóléti függvény értéke is kétszeresére változik. A relatív invariancia tulajdonság ilymódon a társadalmi jóléti függvény homogenitásával áll összefüggésben, s az egyenlőtlenségi mutatók esetében kiemelt jelentőséggel bír. Az egyenlőtlenségi mutatók esetében a relatív és abszolút invariancia megfogalmazása némileg eltér a társadalmi jóléti függvénynél alkalmazottnál. Egy egyenlőtlenségi mutatót relatívnak hívunk, ha a jövedelmek pl. megkétszereződése esetén a mutató értéke változatlan marad. Abszolút egy egyenlőtlenségi mutató, ha minden jövedelem adott, abszolút nagyságú növekedése esetén a mutató értéke változatlan marad. A konkrét egyenlőtlenségi mutatóknál látni fogjuk, hogy a társadalmi jóléti függvény és a belőle származtatott egyenlőtlenségi mutató egyaránt rendelkezik vagy nem rendelkezik a relatív invariancia tulajdonsággal. A két fogalom közötti kapcsolatot pedig éppen a társadalmi jóléti függvény homogenitása biztosítja.

Társadalmi jóléti függvényekkel szemben további igen gyakran kifejezett elvárás, hogy teljesítsék az ún. progresszív transzfer, vagy másnéven Pareto-elv teljesülését. Ez azt fejezi ki, hogy ha egy adott jövedelmi vektor esetén egy magasabb jövedelmű személytől úgy csoportosítunk át egy adott jövedelemnagyságot egy alacsonyabb jövedelmű egyed felé, hogy közben nem változik meg az egyének jövedelem szerinti sorrendje, akkor a társadalmi jólét növekszik. Az elv egyfelől igen szemléletes, másfelől közgazdaságilag könnnyen alátámasztható. Látható ugyanis, hogy ez egy olyan jövedelemtranszfert fogalmaz meg, amelynek során nem változik a társadalom átlagos jövedelmi szintje, miközben néhány egyén közötti jövedelmi különbség csökken. Ekkor pedig általában elvárható, hogy a nagyobb egyenlőséget preferáló társadalmak egy ilyen átrendeződést nagyobb társadalmi jólétként értékeljenek. A Pareto-elv jövedelmi vektorokkal történő megfogalmazása az alábbi.

4. axióma (Progresszív transzfer). *Ha egy y jövedelmi vektor progresszív transzfer révén származik egy x jövedelmi vektorból, akkor y szigorúan preferált x-hez képest.*

A Pareto-elv elemzésére vonatkozó vizsgálatok eredményeiből a fogalomnak az ún. Schur-konvexitáshoz való közelségét lehet megfigyelni. Megmutatható, hogy a (2.2) alatt megadott társadalmi jóléti függvény pontosan akkor teljesíti a progresszív transzfer tulajdonságot, ha $\varepsilon < 1$ és $\alpha_i \leq \alpha_{i+1}$ vagy $\varepsilon = 1$ esetén $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ teljesül[2].

A társadalmi jóléti függvények alapjául szolgáló rendezés – általunk legfontosabbnak tartott – axiómáit soroltuk fel az előző bekezdésekben. Fontos megemlíteni ugyanakkor, hogy további igen fontos metodikai kérdések merülhetnek fel, pl. különböző elemszámú populáció egyenlőtlenségi viszonyainak összehasonlítása során. Ennek kezelésére született az ún. Daltoni népességelv, illetve az aggregációval szemben támasztott konzisztenciakövetelmények. A Dalton-féle népesség elv szerint (Principle of Population) ha két jövedelmi vektor, x és y azonos egyenlőtlenséget képvisel, akkor azok m-szeres ismétléséből álló $x^{(m)}$ és $y^{(m)}$ vektorok is azonos egyenlőtlenséget képviselnek. Ezen elv alapján lehet különböző népességszám (illetve jelen esetben különböző számú országok esetén) számított egyenlőtlenségi mutatókat összehasonlítani. Ezekre az axiómákra azonban nem lesz szükségünk, s ennek oka alapvetően a következő.

Már a korábbiakban is hangsúlyoztuk, hogy az egyenlőtlenségi viszonyoknak az előbb kifejtett koncepciója szerint a releváns információt az egyes eloszlásfüggvények tartalmazzák. Következésképpen az eloszlásfüggvények (illetve a nekik megfelelő valószínűségi mértékek) egyértelműen leírják az egyenlőtlenségi viszonyok alakulását. Egy általánosabb keretben, ahol a feltételezett eloszlás *folytonos*, a különböző népességszám problémája igazán nem értelmezhető. Ezért a jóléti rendezések általunk fontosnak tartott axiómái alatt mindössze a fentebb felsoroltakat értjük.

2.2. Egyenlőtlenségi mutatók

A társadalmi jóléti függvény értékének a növekedése természetesen nem jelenti automatikusan az egyenlőtlenségek csökkenését, csak abban az esetben, ha W növekedése csak és kizárólag az egyenlőtlenség csökkenése révén következhetne be. Általában azonban nem ez a helyzet. Ezért a következő lépcső a W társadalmi

[2] [Ebert, 1988], 6. tétel, 65. old.

jóléti függvényből egyenlőtlenségi mutató meghatározása.

Erre a lépésre számos különböző út kínálkozik. A további tárgyalás során az alábbi utat fogjuk követni. Bemutatjuk a szakirodalomban legtöbbet hivatkozott egyenlőtlenségi mutatókat és azt is, hogy hogyan származtathatók társadalmi jóléti függvényből. Ezen keresztül megmutatható a korábbi axiómák szerepe az egyenlőtlenség mérésében.[3]

Atkinsoni mutató

A társadalmi jóléti koncepcióból egyenlőtlenségi mutató kialakításának Atkinsoni útja az ún. egyenletes eloszlással ekvivalens jövedelemszint definálásán keresztül történik. Ennek során azt a jövedelemszintet keressük, melynek egyenletes eloszlása[4] a társadalomban ugyanazt a társadalmi jólétet eredményezné, mint a jelenlegi eloszlás és a jelenlegi átlagjövedelem. A társadalmi jóléti függvény W^ε ($\varepsilon < 1$ esetén) konkávitása biztosítja, hogy az egyenletes eloszlással ekvivalens jövedelemszint mindig kisebb, mint a szóban forgó eloszlás átlagjövedelme, s ily módon hányadosuk 0 és 1 közé esik. Ez indokolja az egyenlőtlenségi mutató alábbi definícióját:

$$\text{Atkinsoni mérték} = 1 - \frac{\tilde{y}_{EDE}}{\bar{y}} \tag{2.3}$$

A mutató értékkészlete a [0, 1] intervallum, magasabb mutató magasabb egyenlőtlenséget fejez ki.

A relatív invariancia korábbi definícióját további tartalommal ruházhatjuk fel: mivel a társadalmi jóléti függvény első fokon homogén függvénye a jövedelmeknek, ezért az egyenlőtlenség atkinsoni mutatója *érzéketlen* a jövedelmek arányos változására. A fenti kifejezésben szereplő tört számlálója és nevezője azonos mértékben változik, amennyiben minden jövedelem ugyanazzal a százalékkal változik.

A társadalmi jóléti függvényben szereplő $\varepsilon < 1$ paramétert ún. egyenlőtlenségelutasítási paraméterként lehet értelmezni. A fent definiált mutató ε-nak monoton

[3] A mutatók bemutatása során elsősorban [Hajdú, 1997], [Nemes Nagy, 1998] és [Ebert, 1988] tanulmányaira támaszkodunk.

[4] Az egyenletes eloszlás alatt a továbbiakban matematikai értelemben az „egy pontra koncentrálódó elfajult eloszlást” értjük, vagyis azt az eloszlást, amelyben minden egyén (vagy ország) jövedelme azonos. Ez az eloszlás képviseli a jelen vizsgálódások során a minimális egyenlőtlenséget kifejező eloszlást.

függvénye, azaz minél nagyobb ε értéke annál nagyobb egyenlőtlenséget fog mutatni (feltéve, hogy nem egyenlő minden adat, mely szélsőséges esetet nyugodtan kizárhatunk, mint empirikusan teljesen irrelevánsat). Megmutatható, hogy amint ε tart a végtelenbe, úgy a társadalmi jóléti függvény tart a $\min_i y_i$ függvényhez[5], s az Atkinsoni mutató értéke 1-hez. A paraméter tehát az egyenlőtlenséggel szembeni elutasítás mértékét adja meg, s minél nagyobb, annál nagyobb súlyt kapnak a számítás során az alacsony jövedelmi értékek. Ez azonban azt is jelenti, hogy a mutató annál kevésbé válik robusztussá, annál érzékenyebbé válik az adatvételi és mérési hibákra.

Számításaink során szükséges volt az ε egyenlőtlenség-elutasítási paraméter értékét konkrétan megválasztani. Az előző bekezdésben említettek miatt a következő kifejtés során azokat az eredményeket tárgyaljuk, melyeket $\varepsilon = 0$ választással kaptunk. (Emellett azonban további paraméter értékek mellett is végeztünk - itt nem részletezett - számításokat. A paraméter értékének növekedésével a számított egyenlőtlenségek mértéke is növekedett, tendenciájukban hasonló összefüggések adódtak, ugyanakkor mivel nagyobb paraméterértékek az előbb elmondottaknak megfelelően érzékenyebbek voltak az alacsonyabb jövedelmi rétegekben bekövetkezett változásokra, ezért nagyobb paraméterértékeknél az egyenlőtlenség nagyobb időbeni fluktuációját tapasztaltuk).

Az egyenlőtlenség daltoni mutatója

A Dalton féle egyenlőtlenségi mutatót az előzőektől eltérő módon vezetjük le a társadalmi jóléti függvényből. Azt vizsgáljuk, hogy mekkora a rés a jelenlegi jövedelemeloszlásból fakadó társadalmi jólét és az elérhető maximális jólét között. Belátható, hogy ha a társadalmi jólétet (2.2) alakban írjuk fel , akkor maximális társadalmi jólét az egy pontra koncentrálódó, ún. elfajult jövedelemeloszlás esetén fog kialakulni[6]. Vagyis pontosan abban a helyzetben, amikor minden egyén jövedelme éppen az átlagos jövedelemmel egyezik meg. A társadalmi jóléti függvény konkávitása, azaz a Pareto-elv teljesülése miatt a társadalom jóléte az adott jövedelemelosztás mellett nem lehet nagyobb, mint az átlagjövedelméhez tartozó

[5] [Atkinson, 1980], 34. old.

[6] Hajdu [] XXX

jólét illetve hasznosság. Ezért hányadosuk 0 és 1 közé esik, amiből a következő egyenlőtlenségi mutató adódik:

$$\text{Daltoni mérték} = 1 - \frac{W^{\varepsilon}(y)}{W^{\varepsilon}(\bar{y})} \tag{2.4}$$

A mutató értékkészlete a $[0, 1]$ intervallum, nagyobb mutató nagyobb *egyenlőtlenséget* fejez ki. Továbbá az atkinsoni mutatóhoz hasonlóan a daltoni mutató is az egyenlőtlenség relatív mutatója: minden jövedelem azonos arányú változása esetén a mutató értéke nem változik.

Relatív szórás

A konvergencia-vitáról szóló rész kifejtése során említettük, hogy a szórás csökkenését e vita kapcsán szigma konvergenciaként emlegetik, amely azonban a jövedelmi egyenlőtlenségek abszolút mutatója. Mi a továbbiakban főleg a relatív egyenlőtlenségi mutatókra koncentrálunk azért, mert egyfelől maga a béta konvergencia koncepciója is relatív egyenlőtlenségek változásáról szól, másrészt mert növekedő gazdaságok esetén ez tűnik a probléma szempontjából relevánsabb (de egészen bizonyosan szigorúbb) kritériumnak.

A relatív szórás az egyik leggyakrabban használt mutató, mellyel valamely jellemző sokasági szóródásának mértékét tudjuk jellemezni. Képletben egyszerűen a szórás és az átlag hányadosa, vagyis

$$\text{Relatív szórás} = \frac{1}{\bar{y}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n}} \tag{2.5}$$

ahol $\bar{y}$ jelöli az y_i empirikus jövedelmi értékek átlagát. A mutató az átlag százalékában adja meg a jövedelmek szóródásának mértékét, értékkészlete a pozitív számok halmaza, nagyobb érték nagyobb szóródást, vagyis dolgozatunk terminológiájában nagyobb egyenlőtlenséget jelent. A szórás az átlagtól való eltérések négyzeteinek átlaga; így a relatív szórás által kifejezett egyenlőtlenségi koncepció azt mutatja meg, hogy „átlagosan mennyire térnek el az adatok az átlagtól".

A relatív szórás mutató tárgyalása során nem túl gyakori, hogy azt társadalmi jóléti függvényre vezessük vissza. Némi algebrai átalakítás révén azonban megmutathatjuk, hogy a mutató milyen módon kötődik az előző fejezetben tárgyalt axiomatikus megközlítéshez. A relatív szórás fenti definícióját az alábbi kifejezéssé alakíthatjuk át:

$$\text{Relatív szórás} = \frac{1}{\bar{y}}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2}{n} - \bar{y}^2} \tag{2.6}$$

Az előző kifejezés alapján a relatív szóráshoz tartozó, (2.2)-nek megfelelő társadalmi jóléti függvénynek a négyzetes közép adódik, azaz ($\varepsilon = 2$)

$$W(y) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2}{n}} \tag{2.7}$$

s ekkor az egyenlőtlenségi mutatót a társadalmi jóléti függvény alábbi monoton transzformációja révén határozhatjuk meg

$$\text{Relatív szórás} = \sqrt{\frac{W^2 - \bar{y}^2}{\bar{y}^2}} \tag{2.8}$$

A (2.7) módon meghatározott társadalmi jóléti függvény teljesíti a monotonitás, de nem teljesíti a progresszív transzfer tulajdonságot. Illetve a progresszív transzfer tulajdonság *ellenkezője* áll fenn: progresszív transzfer esetében a négyzetes közép mutatója *csökken*, így annak ellenére, hogy az (2.7) társadalmi jóléti függvény nem teljesíti az általunk meghatározott axiómarendszert, a belőle (2.8) módon képzett mutató *igen*.

A relatív szórás az egyenlőtlenségek relatív mutatója, hiszen teljesíti a relatív invariancia tulajdonságot. A szórás abszolút egyenlőtlenségi mutató, hiszen ha minden jövedelem egy adott összeggel növekszik, az nem változtatja meg a szórás nagyságát. Ugyanakkor az átlagot azonos mértékben növeli, s így a relatív szórás csökken. Ez arra mutat rá, hogy ilyen változás esetén a relatív egyenlőtlenség csökkenése nem járt együtt az abszolút egyenlőtlenségi szint csökkenésével.

Gini együttható

A Gini együttható a vizsgált eloszlásnak az egyenletes eloszlástól való távolságát próbálja megragadni. A mutató szoros kapcsolatot mutat a Lorenz-görbe koncepciójával, ezért gyakori a mutató geometrikus interpretációja.

Egy egységnyi oldalú négyzet átlója az egyenletes eloszlást jeleníti meg. A négyzet vízszintes oldalán a kumulált sokaságot (százalékban), függőleges oldalán a nagyság szerint növekvő sorrendbe rendezett s ezután kumulát jövedelmeket (szintén százalékban) tüntetjük fel. Az így kirajzolódó, általában konvex vonal a Lorenz görbe. Ez a görbe miközben összeköti az origót a négyzet felső csúcsával mindvégig az átló alatt marad. A Gini együttható a Lorenz görbe és az átló közötti területtel arányos. A konkrét számításokhoz [Hajdú, 1997] alapján a Gini együttható következő felírási formáját használtuk fel:

$$\text{Gini együttható} = \frac{1}{2\bar{y}n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|y_i - y_j| \tag{2.9}$$

A mutató értékkészlete a [0, 1] intervallum. A 0 értéket akkor veszi fel, ha a Lorenz görbe éppen egybeesik az átlóval, ami azt jelenti, hogy a vizsgált sokaságban a jövedelemeloszlás egyenletes, s ilyenkor nincsenek egyenlőtlenségek. Másik szélső értékét akkor veszi fel, ha az összes jövedelem egy kézben összpontosul, ilyenkor a Lorenz görbe lényegében a vízszintes tengellyel azonos. Empirikusan érdekes esetekben a mutató valamely köztes értéket vesz, nagyobb érték nagyobb egyenlőtlenséget fejez ki.

A Gini együttható szintén származtatható társadalmi jóléti függvényből. Ehhez tekintsük a (2.2). általánosan megadott jóléti függvény alábbi, konkét alakját

$$W(y) = \sum_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{n^2}y_{[i]}. \tag{2.10}$$

Ekkor a Gini együttható értékét a társadalmi jóléti függvényből a következő kifejezés határozza meg

$$\text{Gini együttható } = 1 - \frac{W}{\bar{y}} \tag{2.11}$$

A többi eddig tárgyalt mutatóhoz hasonlóan a Gini együttható is az egyenlőtlenség relatív mutatója, sőt, mivel $2i - 1 \leqq 2(i + 1) - 1$ is fennáll, ezért a mutató a progresszív transzfer tulajdonságot is kielégíti.

Duál mutató (Éltető-Frigyes index)

Eloszlások egyenlőtlenségi jellemzésére a közgazdasági empirikus irodalomban viszonylag ritkán, a statisztikai gyakorlatban annál gyakrabban használt mutató az ún. duál mutató, amely az átlag alatti és átlag feletti jövedelmek hányadosaként számítható, formálisan:

$$\text{Duál mutató} = \frac{y_m}{y_a} \tag{2.12}$$

ahol y_m jelöli az átlag feletti jövedelmek átlagát és y_a az átlagos jövedelem alatti jövedelmek átlagát. A mutató értéke 1-nél nagyobb valós szám, azt a jövedelmi rést mutatja meg, amely az átlagosnál jobb „átlagos", és az átlagosnál rosszabb „átlagos" jövedelmű egyének jövedelmi szintjeiben fennáll.

A duál mutató a korábbi axiómarendszer egyetlen tulajdonságának felel meg, nevezetesen a relatív invarianciának. Ugyanakkor nem származtatható társadalmi jóléti függvényből, hiszen az egyes jövedelmeknek nem szeparábilis függvénye.

Hirschman-Herfindahl index

Jövedelmi egyenlőtlenségek vizsgálatának egyik lehetséges útja azok koncentrációjának számszerűsítése. Ebben az esetben az egyes jövedelemrészesedések megoszlását vizsgáljuk. A (2.13) képlettel kifejezett mutató értékkészlete a $[1/n, 1]$ intervallum (ahol n a jövedelemmel rendelkezők száma).

$$\text{Hirschman-Herfindahl index} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i}{\sum_{j=1}^{n} y_j} \right)^2 \tag{2.13}$$

A mutató értéke maximális értékét akkor veszi fel, ha az összes jövedelem egy kézben koncentrálódik, minimális értékét pedig akkor, ha egyenletesen oszlik el a vizsgált sokaságban. Ez azt jelenti, hogy a mutató alacsonyabb értékei magasabb egyenlőséget fejeznek ki.

Társadalmi jóléti függvényből történő származtatásához a relatív mutatóhoz hasonlóan járhatunk el. Társadalmi jóléti függvénynek (2.2) általános alak esetében az $\varepsilon = 2$-nek megfelelő négyzetes közép adódik. Ekkor az (2.13) kifejezést átalakítva kapjuk, hogy az egyenlőtlenségi mutatót

$$\text{Hirschman-Herfindahl index} = \frac{W^2}{\bar{y}^2 n}$$

alakban írhatjuk fel. Így ebben az esetben is érvényes lesz, hogy bár a társadalmi jóléti függvény nem teljesíti a progresszív transzfer axiómát, a belőle származtatott egyenlőtlenségi mutató igen. A mutató az egyenlőtlenségek relatív egyenlőtlenségi mutatója.

Hoover mutató (Robin Hood index)

A Hoover mutató két numerikus jellemző eloszlásának különbségét méri. Jelen esetben az összjövedelem és a népesség eloszlásának különbségét célszerű vizsgálni. A mutatót a következő kifejezés adja meg:

$$\text{Hoover mutató} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |x_i - f_i| \tag{2.14}$$

ahol x jelöli pl. az egyes települések, településtípusok összjövedelmét és f a település népességét. A mutató ezért lesz az egy főre jutó jövedelem területi megoszlásában rejlő egyenlőtlenségek mutatója: számszerű értékét az határozza meg, hogy mennyiben tér el a jövedelmek és a népesség területi megoszlásának struktúrája. A mutató értéke azt mutatja meg, hogy a jövedelem hány százalékát kellene átcsoportosítani ahhoz, hogy (területi) megoszlása megegyezzen a népesség megoszlásával, azaz az egy főre jutó jövedelem egyenletes megoszlású legyen.

Mivel ezen mutató nem az egy főre jutó jövedelmeken van definiálva, hanem szélesebb adatbázison, ezért nyilvánvalóan nem kompatibilis a korábban elmondott társadalmi jóléti függvény koncepcióval.

A redundancia mutatója (Theil index)

A redundancia mutatói az entrópia koncepciójára épülnek és az összjövedelemből való részesedések „rendezetlenségét" mérik. A mutató értékét *Hajdú* [Hajdú, 1997] alapján a következő képlet szerint számítottuk:

$$\text{Redundancia mutató} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\bar{y}} \log\left(\frac{y_i}{\bar{y}}\right) \tag{2.15}$$

A mutató értékkészlete a $[0, \log(n)]$ intervallum. Minimális értékét akkor veszi fel, ha minden jövedelmi érték azonos, maximumát pedig akkor, ha a jövedelmeket egy kézben monopolizálják. Hasonlóan a Hirschman-Herfindahl indexhez a mutató alacsonyabb értékei fejeznek ki magasabb egyenlőséget. Társadalmi jóléti függvényből való származtatása során ezért itt is hasonló eredményekhez jutunk, mint a relatív szórás, illetve az előbb említett Hirschman-Herfindahl index esetében. A társadalmi jóléti függvény legyen a (2.2) alatti kifejezés $\varepsilon = 1$ választással, ahol az együtthatók rendre

$$\alpha_i = \log \left(\frac{y_{[i]}}{\bar{y}} \right)^{1/n} \tag{2.16}$$

Ezzel a redundancia mutatóját a társadalmi jóléti függvény értékéből az alábbi képlettel számíthatjuk

$$\text{Redundancia mutató} = \frac{W}{\bar{y}} \tag{2.17}$$

A társadalmi jóléti függvény esetében az α_i együtthatók nem monoton csökkenőek, ezért a jóléti rendezés nem teljesíti a progresszív transzfer axiómát. De az együtthatók sorozata monoton, s a monoton növekedés következménye, hogy progresszív transzfer hatására a W társadalmi jóléti függvény értéke csökken. Ezért a (2.8) módon definiált egyenlőtlenségi mutató értéke progresszív transzfer esetén csökken, s így a *mutató* teljesíti az axiómát, amennyiben a logaritmus alapja 1-nél nagyobb.

A logaritmus alapja szerint különböző indexeket lehet számítani. A leggyakrabban a 2;3 illetve a természetes alapú logaritmusokat használják így mi is azokat számítottuk.

2.3. Az egyenlőtlenségek empirikus értékei

A jelen fejezetben az egyenlőtlenségek számszerűsítésére vonatkozó kutatásaink eredményeit fogjuk összefoglalni. A korábbi fejezetben bemutatott mutatókra vonatkozóan végeztünk számításokat a rendelkezésre álló adatbázis alapján. A számított pontbecslések alapján kirajzoló tendencia prezentálására készítettünk néhány grafikont. A számszerű eredményeket elsősorban a 2.6. fejezet tartalmazza a nagy számú mutatóra való tekintettel.

2.1. táblázat: Az egyenlőtlenségi mutatók értéke 1960-1992.

Év	*Orsz. száma*	*Átlagos egy főre jutó GDP*	*Relatív szórás*	*Gini együttható*	*Duál mutató*	*Koncentrációs mutató*
1960	125	2242	0.9711	0.4763	4.6918	0.0155
1961	126	2312	0.9756	0.4807	4.7598	0.0154
1962	126	2382	0.9762	0.4819	4.7544	0.0154
1963	126	2453	0.9737	0.4824	4.7538	0.0154
1964	126	2568	0.9821	0.4882	4.8834	0.0155
1965	126	2659	0.9844	0.4905	4.9320	0.0156
1966	126	2738	0.9796	0.4897	4.9087	0.0155
1967	127	2786	0.9707	0.4864	4.8402	0.0152

2.1. táblázat: Egyenlőtlenségi mutatók 1960-1992, folyt.

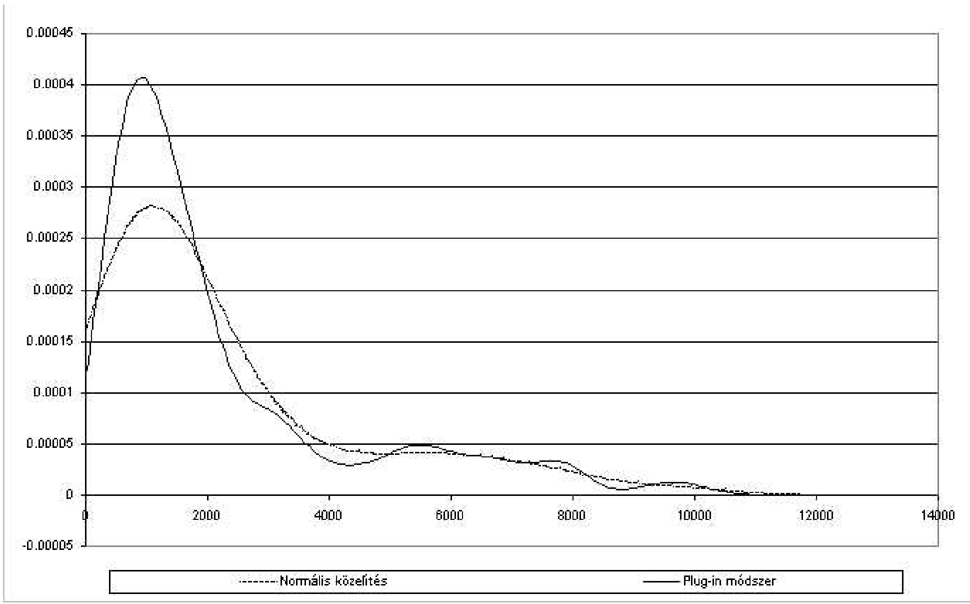
Év	*Orsz. száma*	*Átlagos egy főre jutó GDP*	*Relatív szórás*	*Gini együtt-ható*	*Duál mu-tató*	*Koncent-rációs mutató*
1968	127	2915	0.9618	0.4873	4.8815	0.0151
1969	128	3049	0.9697	0.4923	5.0081	0.0151
1970	133	3170	0.9545	0.4869	4.8514	0.0143
1971	133	3282	0.9487	0.4864	4.8929	0.0142
1972	133	3404	0.9548	0.4907	4.9622	0.0143
1973	133	3551	0.9631	0.4951	5.0608	0.0144
1974	133	3653	0.9547	0.4929	4.9586	0.0143
1975	134	3710	0.9321	0.4884	4.9104	0.0139
1976	134	3873	0.9330	0.4902	4.9578	0.0139
1977	135	4005	0.9221	0.4870	4.9266	0.0137
1978	135	4107	0.9196	0.4860	4.9103	0.0136
1979	136	4225	0.9282	0.4900	5.0160	0.0136
1980	142	4762	1.1221	0.5250	5.4902	0.0158
1981	142	4691	1.0708	0.5163	5.2818	0.0151
1982	142	4571	1.0209	0.5094	5.2265	0.0143
1983	144	4475	0.9901	0.5060	5.2333	0.0137
1984	147	4483	1.0039	0.5124	5.3678	0.0136
1985	152	4423	1.0001	0.5116	5.3540	0.0131
1986	147	4559	0.9849	0.5103	5.3885	0.0134
1987	144	4726	0.9765	0.5080	5.4520	0.0135
1988	141	4805	0.9787	0.5097	5.4778	0.0138
1989	137	4890	0.9956	0.5149	5.5511	0.0145
1990	116	4904	1.0031	0.5163	5.5800	0.0172
1991	101	5145	1.0053	0.5239	6.0189	0.0198
1992	92	5387	0.9898	0.5186	5.9444	0.0214

A pontbecslésekből eredő következtetések alátámasztása érdekében konfidenciaintervallumokat is számítottunk bizonyos mutatók köré. A konfidenciaintervallumok számításának módját és az empirikus eredményeket tartalmazza a a 2.3.1. fejezet.

2.3.1. Konfidenciaintervallum számítása bootstrap mintavétellel

A különböző időpontbeli számított értékek alapján kirajzolódó tendenciát az egyenlőtlenségi mutatók köré szerkesztett konfidencia-intervallumokkal kívánjuk alátámasztani, s ez jelentős módszertani apparátus igénybevételét jelenti. A továbbiakban az alkalmazott módszertan részletes kifejtésére törekszünk.

A konfidencia-intervallum számításához a megfigyelési értékek empirikus eloszlását (azaz az adatokból becsült eloszlást) használtuk fel. Az empirikus eloszlás becsléséhez bootstrap mintavétellel generáltunk „új mintákat". Ekkor az eredeti n



2.1. ábra.
Az egy főre jutó nemzeti jövedelmek sűrűségfüggvényének folytonos becslése az 1960 évre. (Sávszélességi paraméter normális eloszlással való közelítésnél 879$, plug-in módszernél 417$ lett.)

elemű mintából visszatevéssel generálunk újabb n elemű mintákat és mindegyikre kiszámítjuk a kérdéses mutató értékét. Kellően nagy számú bootstrap minta esetén a mutató mintabeli eloszlása megfelelő pontossággal meghatározható.

Számításunkban a fentitől némileg eltérő, ún. folytonos bootstrap (smoothed bootstrap) módszert alkalmaztuk. [7] A folytonos bootstrap annyiban tér el az előző eljárástól, hogy nem az eredeti adatokból generálja az új mintákat, hanem azok eloszlásának folytonos becsléséből. Erre azért lehet szükség, mert visszatevéses mintavétel esetén a generált új mintákban szükségszerűen lesznek ismétlődő elemek. Olyan esetekben, amikor az eredeti adatok természetük szerint folytonosak (pl. valamely intervallumon vehetnek fel értékeket) és a kérdéses mutató érzékeny az ismétlődő adatokra, hasznos lehet a folytonos bootstrap eljárás, amelynek során a generált új mintában 0 valószínűséggel lesznek csak azonos adatok.

A folytonos bootstrap klasszikus útja lehet az eloszlás paraméteres becslése,

[7] A folytonos bootstrap kidolgozásához felhasználtuk [Hall et al., 1989] és [Silverman és Young, 1987] tanulmányokban foglaltakat.

majd az abból történő mintavétel.[8] Nemparaméteres statisztikai módszerek is rendelkezésre állnak az eloszlás folytonos becslésére és az abból való mintavételre. Jelen dolgozatban a nemparaméteres eljárást választottuk a következő megfontolások miatt. Paraméteres eljárás esetén a kutató nullhipotézist állít fel az eloszlás jellegét illetően, és a rendelkezésre álló adatokból becsüli az eloszlás néhány, ismeretlen paraméterét. Ez az eljárás a jelen problémában több okból sem tűnt alkalmazhatónak:

- az adatbázisból készített nemparaméteres jövedelemeloszlás-becslések alapján az eloszlás nem sorolható be egyetlen ismertebb eloszláscsaládba sem. A kapott eloszlás - korábbi tapasztalatokkal összecsengően - közel lognormális alakú, azonban hosszan elnyúló farka van, melyen további (két, három) csúcs található, melyek alapján az eloszlás lokális tulajdonságai erősen különböznek a lognormális eloszlásétól. Az 1960 évre kirajzolódó eloszlás sűrűségfüggvényét mutatja a 2.1. ábra[9];
- a vizsgálat célja az eloszlások néhány jellemzője (az egyenlőtlenségi mutató) mintabeli viselkedésének meghatározása volt. Ha a paraméteres eljárást választottuk volna, az eloszlás típusának specifikációja és a paraméterértékek becslése után azok analitikusan is kiszámíthatóakká válnak. A jelen dolgozatban felvetett kérdés azonban a mutatók mintabeli viselkedését kívánta feltárni és ezért hasznosnak tűnt, hogy semmilyen kiinduló hipotézissel ne éljünk az eloszlás jellegére vonatkozóan, és azt az eloszlást tekintsük kiindulópontnak, amelyet az adatok rajzolnak ki.

A sűrűségfüggvény nemparaméteres becslésének alapgondolata az, hogy az adatok által kirajzolt naiv becslőfüggvényre[10] (mely lépcsős, azaz nem folytonos) loká-

[8] A nemparaméteres sűrűségfüggvény-becslés módszertanáról kiváló áttekintést nyújt [Silverman, 1986] illetve [Wand és Jones, 1995]. A folytonos bootstrap elvégzéséhez felhasznált algoritmust [Silverman, 1986] 143. oldalán található.

[9] A nemparaméteres sűrűségfüggvénybecslés módszerénél eltekinthetünk a fent említett feltevések megfogalmazásától, bár a módszer maga is további problémákat vet fel, beleértve az ún. kernelfüggvény és a sávszélességi paraméter megválasztását. Az ábra értelmezésére és a becsléshez alkalmazott módszertan további kifejtésére a 3.4.1. fejezetben kerül sor.

[10] Ún. naiv estimator, ld. [Silverman, 1986] 11-13. old.

lisan illesztünk sűrűségfüggvényeket, s az ezek átlagaként kirajzoló becsült sűrűségfüggvény folytonos lesz. A folytonos bootstrap eljárásnál magát a sűrűségfüggvényt nem kell megbecsülnünk.

Az eloszlás sűrűségfüggvényének a becsléséhez gaussi kernelt használtunk,[11] ez azonban további módszertani problémákat vetett fel. Ebben az esetben a mintaadatoknak a normális eloszlás sűrűségfüggvényével alkotott konvolúciója adja a sűrűségfüggvény becslését. A jövedelmi adatok azonban tipikusan csak pozitív értékeket vehetnek fel, míg a normális eloszlás értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Ebből fakadóan a sűrűségfüggvény becslése a nulla egy környezetében torzított lesz. A bootstrap becslés során azonban az jelentette a problémát, hogy a fenti említettek miatt a gaussi kernellel számított folytonos eloszlásfüggvényből generált új minták tartalmaztak negatív elemeket is. Ezek egyrészt közgazdaságilag értelmezhetetlenek, másrészt bizonyos egyenlőtlenségi mutatókat (pl. az Atkinsoni mutatót is) negatív adatokra nem lehet értelmezni. Ezt a problémát úgy oldottuk fel, hogy a folytonos sűrűségfüggvénybecslést nem az eredeti adatokra, hanem azok logaritmusára végeztük el, majd visszatranszformálás után számítottuk a mutatókat. Mindazonáltal ahol ez matematikailag kivitelezhető volt, ott mind a két módszerrel (logaritmizált adatokból való mintavétel illetve az eredetiből) készítettünk bootstrap konfidenciaintervallumot.

A fent leírt mintavétel ismételt alkalmazásával nagyszámú „új mintára” tehetünk szert, és minden egyes mintára ki lehet számítani a kérdéses egyenlőtlenségi mutató értékét. A nagyszámú bootstrap mintából számított egyenlőtlenségi mutató-értékekre illesztett empirikus eloszlásfüggvényt használtuk fel a konfidenciaintervallum meghatározására.[12]

[11] A hivatkozott dolgozat szerint az eljárás robusztusnak tekinthető a kernelfüggvény megválasztása tekintetében.

[12] A következő rövid kifejtés erősen támaszkodik [Vinod, 1993] tárgyalására.

Naív módszer

A naiv módszer szerint a konfidenciaintervallum alsó és felső határát 2α megbízhatósági szinten[13]

$$\begin{aligned} \theta_{LO}(\alpha) &= (F^*)^{-1}(\alpha) \\ \theta_{UP}(\alpha) &= (F^*)^{-1}(1-\alpha) \end{aligned} \tag{2.18}$$

fejezi ki, ahol F^* jelöli a mutató bootstrap eljárással nyert empirikus eloszlásfüggvényét (a továbbiakban *-gal jelöljük a bootstrap becsléseket). A naiv módszer arra a feltevésre épít, hogy ha $\theta_j^* \approx \theta$, ahol $\approx$ a közel egyenlő jele és a * jelöli a j -edik bootstrap becslést $(j = 0, ..., J)$, akkor

$$P^* \left[\theta_{LO}(\alpha) \leq \theta_j^* \leq \theta_{UP}(\alpha)\right] = P^* \left[\theta_{LO}(\alpha) \leq \theta \leq \theta_{UP}(\alpha)\right] = 1 - 2\alpha. \tag{2.19}$$

Azaz a naív módszer a bootstrap mintavételből nyert új minták alapján kirajzolódó lépcsőzetes eloszlásfüggvény „farkait” vágja le a konfidenciaintervallum meghatározásához.

Empirikus torzítás

Az alábbi kifejezéssel megkaphatjuk az eljárás torzításának mértékét:

$$\text{empirikus torzítás} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\theta_j^* - \theta_p \tag{2.20}$$

Ha a fenti kifejezés 0-tól különbözik, az azt jelenti, hogy a naiv módszer által adott konfidenciaintervallumok torzítottak és ilyenkor szükségessé válik módszertani korrekció alkalmazása. A torzítás abból fakad, hogy az eredeti mintából generált „új minták'-ra jellemző mutatók átlaga nem adja vissza az eredeti mintára jellemző mutatóértéket.

Torzítás korrigálási módszer

A naiv módszer megbízhatatlan eredményekre vezethet, ha a becslőfüggvény torzított. A torzítást csökkenti bizonyos esetekben, ha a fenti feltevés helyett a kevésbé

[13] A továbbiakban F^*-gal fogjuk jelölni a mutató bootstrap eljárással nyert mintabeli empirikus eloszlásfüggvényét. A jelölést az elméleti tárgyalás kedvéért vezetjük be, az algoritmus implementálása során csak a kritikus értékek meghatározására volt szükség.

megszorító $\theta_j^* - \theta_p \approx \theta_p - \theta$ feltevéssel élünk, ahol θ_p az eredeti mintából nyert pontbecslés. Ez a feltevés azt jelenti, hogy a bootstrap mintából nyert becslés és a pontbecslés viszonya körülbelül ugyanaz, mint a pontbecslés és a sokasági érték viszonya. Ilyenkor a következő konfidencia-intervallum adódik θ -ra[14]:

$$\begin{aligned} &P^*\left[\theta_{LO}(\alpha) - \theta_p \le \theta_j^* - \theta_p \le \theta_{UP}(\alpha) - \theta_p\right] = \\ &= P^*\left[2\theta_p - \theta_{UP}(\alpha) \le \theta \le 2\theta_p - \theta_{LO}(\alpha)\right] = 1 - 2\alpha. \end{aligned} \tag{2.21}$$

E módszer alkalmazásával a kapott konfidenciaintervallum közepe az eredeti pontbecslés lesz, a sáv hossza pedig $\theta_{UP} - \theta_{LO}$.

Torzítás korrigálási módszer a normális eloszlás felhasználásával

A normalizált torzítás korrigálási (normalized bias corrected NBC) módszer lényegében az empirikus eloszlásfüggvényt felhasználva a megbízhatósági (valószínűségi) szint korrekcióján keresztül próbálja kezelni a torzítás problémáját. Az eljárás során az előző pontban végrehajtott tükrözéshez hasonló korrekciót végzünk, csak azt most megfelelő normalizálási transzformáció után hajtjuk végre.

A módszer feltevése szerint ha létezik olyan $\phi = g(\theta)$ monoton növekedő normalizáló transzformáció, amelyre[15]

$$\phi_p - \phi \sim N\left(-z_0\sigma, \sigma^2\right) \quad és \quad \phi_j^* - \phi_p \sim N\left(-z_0\sigma, \sigma^2\right); \tag{2.22}$$

ahol a fenti kifejezésben szereplő z_0 és σ ismeretlen paraméterek, akkor a konfidencia-intervallum meghatározásához elégséges z_0 paraméter értékét becsülni. Ezt a következőképpen tehetjük meg.

Az empirikus eloszlásfüggvényből meghatározzuk a bootstrap minták azon hányadát, amelyre $\theta_j^* \le \theta_p$. Ekkor

$$\begin{aligned} F^*(\theta_p) &= P^*\left[\theta_j^* \le \theta_p\right] = P\left[\phi_j^* \le \phi_p\right] = \\ &= P\left[\left(\phi_j^* - \phi_p + z_0\sigma\right)/\sigma \le z_0\right]. \end{aligned} \tag{2.23}$$

[14]Ez a módszer torzítás-korrigálási (bias corrected, BC) elnevezést kapta [Vinod, 1993] összefoglaló műben. Több más forrásban azonban az itt harmadikként tárgyalásra kerülő módszert hívják torzítás korrigálási módszernek.

[15]Az alábbi kifejtés elsősorban [Garthwaite et al., 1995] munkáján alapszik.

A módszer (2.22) alatt említett feltevései miatt $\left(\phi_j^* - \phi_p + z_0\sigma\right)/\sigma \sim N(0,1)$, ezért z_0 -ra az alábbi becslés adódik:

$$z_0 = \Phi^{-1}\left(F^*\left(\theta_p\right)\right), \tag{2.24}$$

ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét jelöli.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy z_0 ismeretében hogyan juthatunk el a kérdéses mutató konfidenciaintervallumához. A módszer feltevése szerint $\phi_p - \phi \sim N\left(-z_0\sigma, \sigma^2\right)$ normális eloszlást követ, ezért az $1-2\alpha$ megbízhatósági szintű konfidenciaintervallumot θ -ra

$$\left[g^{-1}\left(\phi_p + z_0\sigma - z_\alpha\sigma\right), g^{-1}\left(\phi_p + z_0\sigma + z_\alpha\sigma\right)\right] \tag{2.25}$$

kifejezés határozza meg, ahol $\Phi\left[z_\alpha\right] = 1-\alpha$. Első lépésként az alsó határ kiszámítására koncentráljunk. Ehhez tekintsük a következő átalakítást:

$$\begin{aligned} P^*\left[\phi_j^* \le \phi_p + z_0\sigma - z_\alpha\sigma\right] &= P\left[\left(\phi_j^* - \phi_p + z_0\sigma\right)/\sigma \le 2z_0 - z_\alpha\right] = \\ &= \Phi\left(2z_0 - z_\alpha\right). \end{aligned} \tag{2.26}$$

A konfidenciaintervallum alsó határa $1-2\alpha$ megbízhatósági szinten tehát azon $\theta_{LO}(\alpha)$ érték lesz, amelyik éppen a bootstrap becslés $\Phi\left(2z_0 - z_\alpha\right)$ -ik kvantilis értéke. Hasonlóképpen elvégezve a megfelelő számításokat az intervallum felső határára az NBC módszer szerint adódó konfidenciaintervallum a fentiek alapján a következő:

$$P^*\left[\left(F^*\right)^{-1}\left(\Phi\left[2z_0 - z_\alpha\right]\right) \le \theta \le \left(F^*\right)^{-1}\left(\Phi\left[2z_0 + z_\alpha\right]\right)\right] = 1-2\alpha. \tag{2.27}$$

Ha θ_p becslőfüggvény nem torzított, akkor z_0 értéke 0, és a metódus szerint számolva a naiv módszerrel azonos konfidenciaintervallum adódik θ -ra.

Az eljárás során lényegében a konfidenciaintervallum számításához használt megbízhatósági szintet módosítjuk attól függően, hogy a megfigyelt empirikus eloszlás milyen mértékű torzítást mutat. Torzítatlan becslés esetén a pontbecslésnek a mintabeli eloszlás átlagával kell egybeesnie, ekkor a korrekció mértéke nulla.

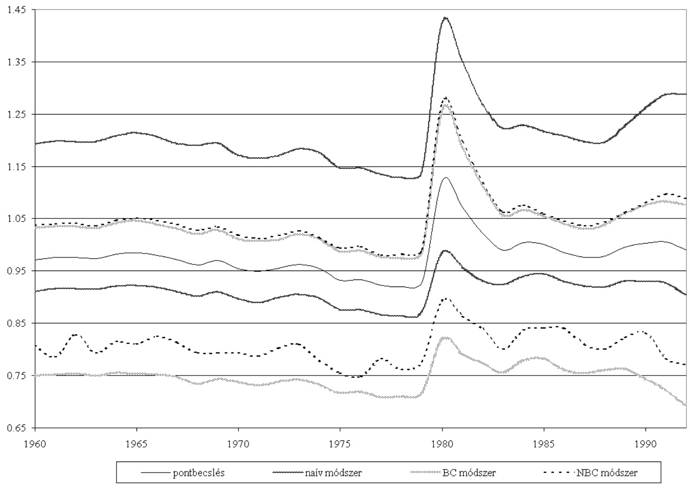
2.3.2. Számítási eredmények

Az egyenlőtlenségi mutatók értékeire kapott pontbecslések idősorát összevetve a korábbi munkákkal láthatjuk, hogy az egyenlőtlenségi mutatók pontbecsléseinek idősora enyhén emelkedő tendenciát mutat. Megfigyelhető abban egy csúcspont, kiemelkedés 1980 körül. Ennek okát az adatszelekciós eljárásban látjuk. 1980-ban öt országgal növekedett a vizsgálatban szereplő országok száma, ebből két ország közel a világátlaghoz hasonló, annál kicsit alacsonyabb jövedelemmel rendelkezett. A másik három ország (Kuvait, Egyesült Arab Emirségek és Katar) egy főre jutó jövedelme egyenként is az adott évi világátlag 5, 8, illetve 8,5 szerese volt, melyek együttes hatása látványos ugrást hozott az egyenlőtlenség mértékében. Ez a kiugrás a következő években eltűnt, ami részben annak volt köszönhető, hogy az előbb említett országok esetében a 80-as évtized első felében kiugró jövedelmi szint átmenetinek bizonyult (79'es olajválság hatása).

A 2.6. fejezetben szereplő táblázatokban foglaltuk össze a számítási eredményeket, amelyek a különböző mutatók és megbízhatósági szintek esetén mutatják a becsült konfidenciaintervallumokat. A függelékben szereplő táblázatokban megadtuk az empirikus torzítás mértékét is.

Az empirikus torzítás minden esetben jelentős, s ez indokolja a normalizált torzítás korrekciós módszer alkalmazását a konfidenciaintervallumok számítása során. A kutatások során mind a három konfidenciaintervallum számítása indokoltnak tűnt, mert a torzítás várható mértékére vonatkozó információk hiányoztak. A számítások tükrében a naiv módszer nem vezetett megbízható eredményekre a konfidenciaintervallumok meghatározása során és így igazolja a torzítás korrigált módszerek eredményét. Az eredmények értékelése kapcsán ennek megfelelően az NBC módszer által adott intervallumokat fogjuk figyelembe venni. Mindazonáltal az egyik mutató, a relatív szórás példáján érdemes megvizsgálni a három módszer által adott konfidenciaintervallumok viszonyát.

A 2.2. ábrán láthatjuk a relatív szórás mutatóhoz készített konfidenciaintervallumokat a három különböző konfidenciaintervallum számítási módszer esetében. Láthatjuk, hogy a torzítás korrigált és a normalizált torzítás korrigált módszer esetében az intervallum felső határai közel egybeesnek, és jelentősen eltérnek a naív módszer eredményétől. Ennek is az az oka, hogy a mutató mintabeli eloszlásából számított várható érték és az eredeti pontbecslés eltérnek egymástól. Az empirikus torzítás előjele mutatja, hogy a becslési eljárás felfelé torzít, így ennek megfelelően kellett a konfidenciaintervallumokat korrigálni. A korrekció hatására a számított



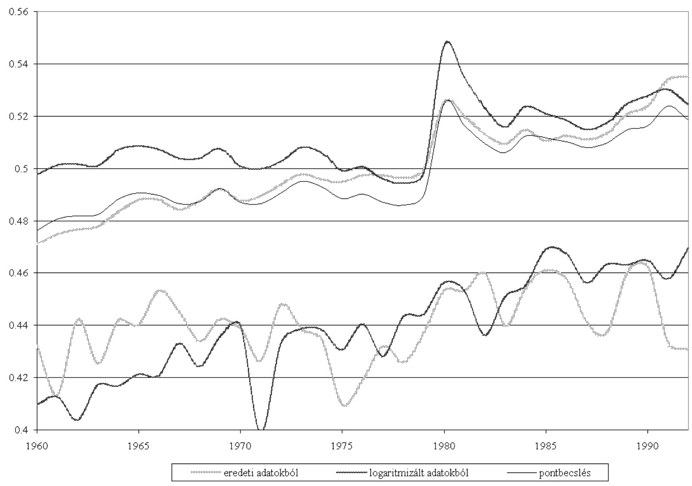
2.2. ábra.

Bootstrap konfidenciaintervallumok relatív szórás mutatóhoz naív, torzítás korrigált és normalizált torzítás korrigált módszerrel 5%-os megbízhatósági szinten.

konfidenciaintervallumok határai lefelé tolódtak el, a pontbecslésre majdnem szimmetrikus intevallum adódott. Figyelembe véve a torzításra kapott eredményeket, a továbbiakban a normalizált torzítás korrigált módszer eredményeivel fogunk foglalkozni.

A 2.3. ábrán a Gini koefficiens konfidenciaintervallumait láthatjuk normalizált torzítás korrigált módszert alkalmazva. A két ábrázolt intervallum közül az egyik az eredeti adatokból történt mintavételezés esetén készült, a másik a pedig már említett logaritmizálási transzformáció után. Maga a mutató matematikai formulája értelmezhető negatív adatokra is, így ezen mutató esetében lehetséges összehasonlítani a két eljárás közti különbséget. Azt láthatjuk, hogy a tendencia megítélésében hasonló eredményekre vezetnek.

A 2.4. ábra esetében az atkinsoni mutatóhoz számított konfidenciaintervallumokat láthatjuk különböző megbízhatósági szintek mellett. Az intervallumokat a normalizált torzítás korrigált módszerrel számítottuk és ennek köszönhető az az eredmény, hogy a torzítás korrekciójának eredményeképpen a konfidenciaintervallum alsó határa mind a három vizsgált szignifikanciszint esetében egybeesik. Ennek az az oka, hogy a pontbecslés a bootstrap minták igen alacsony hányadában helyez-

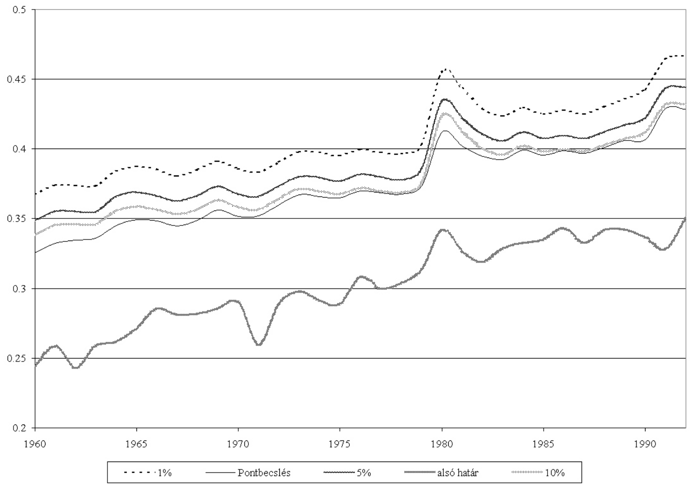


2.3. ábra.

Bootstrap konfidenciaintervallumok Gini koefficiens mutatóhoz az eredeti adatokból történt mintavételezés illetve logaritmizált mintavételezés esetén 5%-os megbízhatósági szinten. [Az intervallumokat normalizált torzításkorrigált módszerrel számítottuk.]

kedik el, pl. az 1960-ik évben a 10000 elemű bootstrap mintában nagyság szerint az 1115-ik, 1961-ben 1077-ik, és végignézve az eredményeket általában elmondható, hogy a pontbecslés a bootstrap minta első 5-10%-ában helyezkedik el, vagyis igen messze a minta átlagától. Ezért a normalizált torzítás korrigált módszer mind a három vizsgált valószínűségi szinten a bootstrap minta első elemét adta meg a konfidenciaintervallum alsó határának. Ha összevetjük ezt az eredményt a relatív szórás esetében bemutatott három különböző módszerral készített konfidencia intervallummal, akkor jól látható, hogy a naiv módszer esetében a pontbecslés a konfidenciaintervallum alsó határához közel helyezkedik el, amit az előbb említett eredmény jól magyaráz. A naiv intervallum túl magasra helyezi az egyenlőtlenségi mutatók lehetséges értékeit, s ezt a torzítást korrigálja a két említett korrekciós módszer.

A számított konfidenciaintervallumok esetében azt láthatjuk, hogy az egy főre jutó jövedelmek egyenlőtlenségei - a pontbecslésekből adódó következtetésekhez hasonlóan - a vizsgált mutató függvényében inkább enyhén növekedő, esetleg stagnáló tendenciát mutatnak.



2.4. ábra.

Bootstrap konfidenciaintervallumok Atkinsoni mutatóhoz 1%, 5% és 10%-os megbízhatósági szinteken. [Logaritmizált adatok, normalizált torzítás korrigált módszer.]

A fejezetben tárgyalt összefüggések összefoglalása előtt röviden kitérnénk az egyenlőtlenségek egy további lehetséges mutatójára. Ez a mutató a területi autokorreláció mutatója, amelyet elsősorban a regionális tudományokban alkalmaznak a területi közelség gazdasági hatásainak mérésére. Úgy is fogalmazhatnánk, hogy a továbbiakban nem egyszerűen az egyenlőtlenség nagyságában bekövetkező változásokat vizsgáljuk, hanem kiragadjuk a jövedelmi egyenlőtlenségek egy aspektusát, nevezetesen a földrajzi elhelyezkedést, s megvizsgáljuk, hogy önmagában a földrajzi közelség mennyiben tekinthető az egyenlőtlenségek forrásának, illetve, hogy ebben a vonatkozásban a korábban feltárt általános tendenciákhoz képest eltérő folyamatokat találunk-e.

2.4. A földrajzi elhelyezkedés hatása az egyenlőtlenségi viszonyokra

Azzal a kérdéssel fogunk foglalkozni, hogy megfigyelhető-e összefüggés a földrajzi elhelyezkedés és a kialakuló egyenlőtlenségi viszonyok között. A területi autokorreláció mutatója választ adhat arra, hogy

- az egy főre jutó nemzeti jövedelmek eloszlását milyen mértékű területi egyenlőtlenség jellemzi;
- a számszerűsített területi egyenlőtlenségi viszonyok hátterében milyen földrajzi struktúra húzódik meg, azaz a korábban tárgyalt általánosabb mutatók által leírt egyenlőtlenség hogyan oszlik meg a földrajzi térben;
- a területi elhelyezkedés mennyiben magyarázza a jövedelmi különbségeket.

A következő alfejezetben bemutatjuk a területi autokorreláció módszertanát, majd a számítási eredmények ismertetésére térünk rá.

2.4.1. A területi autokorreláció

A területi megoszlás vizsgálata során az a kérdés merül fel, hogy a földrajzi közelség mennyire szoros kapcsolatban áll a megfigyelt jelenség heterogenitásával. Amennyiben egy jelenség (pl. magas egy főre jutó jövedelem) előfordulása egy adott országban szoros kapcsolatban van a hozzá földrajzilag közel álló országok egy főre jutó jövedelmével, úgy azt mondhatjuk, hogy a földrajzilag közel fekvő országok egy főre eső jövedelmei együtt mozognak, hatnak egymásra.

További kérdésként merül fel (az egymásra hatás tényén kívül) annak iránya és erőssége. Negatív irányú hatás esetén a vizsgált jelensége előfordulása egy adott helyen csökkenti az esemény előfordulásának valószínűségét a közeli helyeken. Amikor a negatív irányú hatás nagyon erős, azaz szinte teljes kizárólagossággal mindig érvényesül, akkor az sakktáblaszerű területi struktúrát hoz létre (amennyiben a vizsgálatot mondjuk magas és alacsony jövedelmi kategóriákra végezzük el). Ha nem csak két kategóriát vizsgálunk (magas–alacsony jövedelem) hanem figyelembe vesszük az egy főre jutó jövedelmek abszolút nagyságát is, akkor erős negatív területi egymásrahatás esetén azt mondhatjuk, hogy magas egy főre jutó jövedelem megfigyelése egy adott területen nagy valószínűséggel alacsony egy főre jutó jövedelmekkel fog együttjárni a hozzá közeli területeken.

Pozitív területi egymásra hatás esetén a megfigyelt jelenség a hasonulás. Ilyenkor a közelség a hasonulás irányába hat, a közeli területeknek hasonló színvonalú a jövedelmük. Ennek a jelenségnek a tartóssága esetén az adott jelenség ún. „regionalizálódik”. Azaz a vizsgált területet olyan földrajzi régiókra oszthatjuk fel, amelyekben egy adott jelenség előfordulásának valószínűsége, vagy intezitása (pl. az egy főre jutó jövedelmek szintje) hasonló és ez lényegesen különbözik más régiókban megfigyelt értékektől.

A mutató számításával azt a kérdést fogjuk közelebbről megvizsgálni, hogy az egy főre jutó jövedelmekben megfigyelt egyenlőtlenség mögötti területi struktúra mennyiben azonosítható regionalizálódással, azaz a földrajzi közelség mennyiben jár együtt hasonulással a jelen problémában.

A területi autokorreláció modellje lényegében a fent leírt gondolatmenetre épül, amennyiben egy adott jelenség térbeli előfordulását méri. A kapcsolat erősségét korrelációs mutató fejezi ki, azt mutatja meg, hogy egy ország egy főre jutó nemzeti jövedelme mennyire korrelál a hozzá földrajzilag közel álló országokéval.

A mutató számszerűsítéséhez szükség van a közelség fogalmára is. A területi autokorreláció modellje a földrajzi közelséget a szomszédsági viszonyokon keresztül ragadja meg, és így azt vizsgálja hogy egy adott ország egy főre jutó jövedelme korrelál-e a szomszédok jövedelmeivel. A módszertan továbbiakban következő rövid kifejtése során Cliff – Ord [Cliff és Ord, 1973] monográfiáját használjuk fel .

Területi autokorreláció mérésére (intervallumskálán mért adatok esetén) két különböző mutatót is kidolgoztak. Az egyik mutató Moran nevéhez kötődik és a következő kifejezéssel számítható:

$$I = \frac{n}{2A} \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \left(y_i - \bar{y}\right) \left(y_j - \bar{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y}\right)^2} \tag{2.28}$$

ahol n az országok száma, y_i az egyes országok egy főre jutó jövedelme, $\bar{y}$ az összes ország egy főre jutó jövedelmeinek az átlaga, A a szomszédsági kapcsolatok száma és a δ_{ij} együttható értéke 1, ha i és j szomszédosak, 0 egyébként.

A másik mutató Geary statisztikus nevéhez (változatlan jelölésekkel):

$$c = \frac{n-1}{4A} \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \left(y_i - y_j\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y}\right)^2} \tag{2.29}$$

mindkét kifejezésben a korrelációs mutatók lényegének megfelelően a nevezőben a variancia, a számlálóban a kovariancia megfelelő kifejezése áll. A fent hivatkozott monográfiában megtalálhatjuk a fenti mutatók elméleti várható értékeit és szórásait, továbbá azt azt elméleti eredményt, hogy a fenti mutatók aszimptotikusan normális eloszlásúak, amint n, azaz a mintaméret növekszik. Ezen eredményeket felhasználva tesztelhetjük a fenti képletekkel számított autokorrelációs mutatók szignifikanciáját.

A fenti kifejezésekben szereplő δ együtthatókból álló mátrixot szomszédsági mátrixnak nevezik. Ez egy $n \times n$-es szimmetrikus mátrix, melynek i -edik sorának j -edik eleme 1, ha az i -edik és a j -edik ország szomszédos, egyébként nulla.

Az a jellemző, hogy a legtöbb vizsgálatban a szomszédsági mátrix elemei a fent leírtaknak megfelelően csak 0 vagy 1 értéket vesznek fel, annak a modellezési koncepciónak felel meg, ami a térbeli hatások létét vizsgálja, és pusztán azt nézi, hogy a szomszédsági reláció *ténye* mennyiben befolyásolja (oka vagy következménye) valamely megfigyelt térbeli heterogenitásnak. Ez az modellezési technika nem veszi figyelembe a térbeli hatások létezésének kérdésén túlmenően azok intenzitásának problémáját, bár ez utóbbi szintén lehetséges éspedig éppen a szomszédsági mátrix általánosításán keresztül. Az az „általánosított szomszédsági mátrix", melynek elemei nem csak 0 és 1 értéket vehetnek fel, hanem éppen a térbeli hatás erősségével arányos súlyozó tényezőt, lehetővé teszik a természeti határok, eltérő területek, népességi viszonyok figyelembevételét is. Mi a jelen dolgozatban pusztán a térbeli hatás tényét vizsgáljuk, azt, hogy a szomszédság együtt jár-e hasonulással, esetleg éppen különbözővé válással vagy semmilyen szignifikáns kapcsolat nem mutatható ki. Ezért számításainkhoz az elsőként említett, pusztán 0 és 1 elemeket tartalmazó szomszédsági mátrixot használtuk fel.

A dolgozatban számítottunk egy harmadik területi autokorrelációs mutatót is, melynél egyszerűen a leíró statisztika által jól ismert korrelációs együtthatót számítottuk ki az egyes országok egy főre jutó GDP-je, illetve az adott országgal szomszédos országok átlagos egy főre jutó GDP-je között. Képletben

$$corr = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})(y_i^s - \bar{y}^s)}{n s_y s_{y^s}} \tag{2.30}$$

ahol y_i^s jelöli az i-edik ország szomszéd országainak átlagos GDP-jét.

2.4.2. Számítási eredmények

A számítások eredményeit tartalmazza a 2.2. táblázat. Az autokorrelációs együttható magas, pozitív értéke azt tükrözi, hogy határozott regionalizálódás tapasztalható. A magas jövedelmű országokat magas jövedelmmel rendelkező szomszédokkal lehet jellemezni, míg az alacsony jövedelmű országok szomszédai jellemzően alacsonyabb jövedelműek. A mutató értékének stabilitása arra enged következtetni, hogy a jövedelmi tagolódás nem erősödik de nem is enyhül, hanem tartós jelensége a világgazdaságnak.

2.2. táblázat: A területi autokorreláció értékei 1960-1992.

Év	*Orsz*	*Szom*	*I*	*c*	*corr*
1960	111	192	0,6783	0,2383	0,8271
1961	112	194	0,6931	0,2412	0,8260
1962	112	194	0,6959	0,2365	0,8274
1963	112	194	0,6931	0,2383	0,8219
1964	112	194	0,6949	0,2391	0,8242
1965	112	194	0,6928	0,2409	0,8218
1966	112	194	0,6975	0,2330	0,8257
1967	113	195	0,7011	0,2412	0,8091
1968	113	195	0,7071	0,2374	0,8203
1969	114	197	0,7020	0,2501	0,8039
1970	119	216	0,6939	0,2569	0,8145
1971	119	216	0,6969	0,2565	0,8172
1972	119	216	0,6914	0,2614	0,8111
1973	119	216	0,6896	0,2659	0,8072
1974	119	216	0,6893	0,2718	0,8032
1975	120	217	0,7032	0,2509	0,8237
1976	120	217	0,7045	0,2398	0,8308
1977	120	217	0,7100	0,2452	0,8278
1978	120	217	0,7196	0,2376	0,8324
1979	120	217	0,7269	0,2434	0,8355
1980	125	230	0,6382	0,2665	0,8248
1981	125	230	0,6573	0,2603	0,8291
1982	125	230	0,6880	0,2483	0,8357
1983	125	230	0,7004	0,2269	0,8504
1984	127	235	0,6878	0,2238	0,8531
1985	128	237	0,6973	0,2134	0,8606
1986	127	235	0,6962	0,2148	0,8551
1987	124	226	0,6836	0,2272	0,8413
1988	122	219	0,7044	0,2211	0,8431
1989	119	206	0,6967	0,2252	0,8464
1990	101	152	0,7814	0,2121	0,8416
1991	90	128	0,8487	0,1771	0,8420
1992	81	98	0,8677	0,1995	0,7807

Az eredmények részben megerősítik a korábbi számítások eredményeit, részben további információkkal járulnak hozzá az értelmezésükhöz. A mutató abszolút nagysága és előjele sugallta következtetések, nevezetesen hogy a világgazdaság jellemzően különböző jövedelmi színvonalú régiókra bomlik, megfelelnek az erről a kérdésről kialakult általános felfogásnak. Másrészről, ha a mutató dinamikáját nézzük, abban semmilyen trend nem fedezhető fel, leginkább stabilnak, 0,68 és 0,70 értékek körül ingadozónak láthatjuk. (Az utolsó három év eredményei a nagy számú hiányzó adat miatt rendkívül megbízhatatlanok.) A dinamikus trend megítélésének a kérdését befolyásolja az, hogy a különböző években különböző számú országot tudtunk bevonni az elemzésbe és ez valamelyest nehézkesebbé teszi az elemzést, mert a különböző évekre vonatkozó mutatókat nehezebb összevetni, bár a mutatók „normalizáltak", azaz a különböző számú megfigyelési esetekben egymással összevetheőek. A 2.2. táblázat második és harmadik oszlopa mutatja, hogy az adott évben hány ország szerepelt a vizsgálatban és azok között hány szomszédsági reláció létezett. Láthatjuk, hogy az elemzésbe bevont országok számának növekedésével közel arányosan nőtt a szomszédsági relációk száma is, ezért mondhatjuk azt, hogy a jelen empirikus vizsgálat sugallta következtetés szerint a jövedelmi tagolódás a világgazdaságban a vizsgált periódusban közel azonos maradt. Ez az eredmény azonban további kérdéseket vet fel; mennyiben az alkalmazott módszertan, a felhasznált adatok jellege, illetve mennyiben valamely, a háttérben meghúzódó folyamat következményének tekinthető. Ugyanerre a kétkedésre enged következtetni a Moran féle területi autokorrelációs mutató értékeinek közelebbi vizsgálata is. A vizsgált periódus az elemzésbe bevont országok száma szerint négy jól elhatárolódó periódusra osztható, ezek nevezetesen a hatvanas évek (1960-69) 111-114 országgal és 192-197 szomszédsági relációval; a hetvenes évek (1970-79) 119-120 országgal és 216-217 szomszédsági relációval; a nyolcvanas évek (1980-86) 125-128 országgal és 230-237 szomszédsági relációval és végül a kilencvenes évek fordulója (1987-92) igen változó számú országgal és szomszédsági kapoccsal. E négy periódus közül ez utóbbit valójában nem túl célszerű figyelembe venni a hiányzó adatok igen nagy száma miatt. Az előzőleg említett három periódusban azonban mindegyikben külön-külön a területi autokorrelációs együttható enyhe emelkedése figyelhető meg; ami valószínűsíti azt az érvelést, hogy az észlelt látszólagos stabilitás esetleg csak az egyre több bevont ország miatt a mutatóban megjelenő ingadozás helytelen értelmezése.

A 2.3. táblázatban közöljük a területi autokorreláció értékeit az egyes kontinensekre lebontva. Az eredményeket úgy kaptuk, hogy az egyes kontinenseket zárt területegységeknek vettük, és azon belül figyelembe véve a szomszédsági viszonyokat a fent részletezett módszertannal számítottuk ki a területi autokorreláció értékeit. A 2.3. táblázatban található adatok a Moran féle I mutató értékeit tartalmazzák.

2.3. táblázat: A területi autokorreláció (Moran féle I mutató) értékei az egyes kontinenseken. ** 5%-os, ** 10%-os szignifikancia-szinten szignifikáns mutatók; *** 10% felett vagy nem szignifikáns mutatók.*

Év	*Afrika*	*Amerika*	*Ázsia*	*Európa*
1960	0.1188**	0.2240*	0.2890*	0.4349
1961	0.1672*	0.2363*	0.2821*	0.4248
1962	0.1871*	0.2337*	0.2807*	0.4389
1963	0.1666*	0.2369*	0.2042**	0.4394
1964	0.1841*	0.2368*	0.2445*	0.4420
1965	0.1924*	0.2367*	0.2528*	0.4441
1966	0.1869*	0.2552*	0.2386*	0.4497
1967	0.2114*	0.2567*	0.1802**	0.4459
1968	0.1924*	0.2643*	0.2920*	0.4550
1969	0.2164*	0.2690*	0.1595**	0.4629
1970	0.2070*	0.2684*	0.1188***	0.5983
1971	0.2224	0.2818	0.1405***	0.5956
1972	0.2361	0.2967	0.1266***	0.6010
1973	0.2633	0.3112	0.0843***	0.6089
1974	0.2304	0.3097	0.0976***	0.5896
1975	0.1867	0.3204	0.2979*	0.5699
1976	0.1503*	0.3265	0.3259	0.5908
1977	0.1554*	0.3107	0.3271	0.5910
1978	0.1943	0.3222	0.3150	0.5945
1979	0.2267	0.3320	0.3247	0.5988
1980	0.2647	0.3456	0.5595	0.6466
1981	0.2827	0.3627	0.5742	0.6316
1982	0.2933	0.3571	0.5763	0.6330
1983	0.2882	0.3511	0.5410	0.6238
1984	0.3084	0.3544	0.5231	0.6168
1985	0.3273	0.3604	0.5038	0.6071
1986	0.3355	0.3511	0.4337	0.5932
1987	0.3490	0.3512	0.3773	0.5983
1988	0.3617	0.3573	0.4039	0.6065
1989	0.3296	0.3671	0.3539	0.6412
1990	0.2698	0.3710	-0.0190***	0.5938
1991	0.2822	0.4719	0.0154***	0.4352
1992	0.3428*	0.4747	-0.0724***	0.1243**

Az egyes kontinensekre vonatkozó értékek megbízhatóságát jelzik a táblázatban szereplő *-ok. A kis számú megfigyelés miatt a kontinensekre vonatkozó értékek nagy része megbízhatatlan, ezekből következtetéseket levonni nem lehet. Továbbra is érvényes minden egyes kontinensre az, hogy az utolsó három év (1990-1992) adatai nem megbízhatóak, így azokat az elemzés során figyelmen kívül kell hagynunk, mint amelyekről nem rendelkezünk megfigyeléssel.

Ezektől eltekintve azonban Európa esetében a teljes idősor adatai megbízhatóak és az adatokból pozitív, közepes nagyságú területi autokorreláció látszik, melynek értékei az évek során egyre növekednek. Ez azt jelenti, hogy amellett, hogy a területi közelség fontos magyarázó tényezője a jövedelem-egyenlőtlenségeknek a kontinensen, a területi homogenizálódás egyre erősödött és az egyes szomszédok közötti különbség csökkent a vizsgált időszakban. Hasonló következetetéseket lehet látni Amerika estében is, azzal a különbséggel, hogy a mutató abszolút értékben kisebb, mint Európa esetében. Ez azt mutatja, hogy Amerika területileg nem annyira „homogén", mint Európa, melyet Észak-Amerika versus Közép- és Dél-Amerika (azaz az ún. Latin-Amerika) közötti erőteljes különbségekkel lehet magyarázni. (A Penn World Table adatbázisból sajnálatos módon a volt szocialista országok többsége hiányzik, és bár e hiány éppen Európa esetén nem annyira szembetűnő, mert itt hiányzik a legkevesebb közülük, továbbá az adatok értelmezésének problémái miatt valószínűleg Európa kelet-nyugati megosztottsága nem tükröződik annyira az adatokban, mint egy teljesebb adatbázisból az látszana.) Mindkét kontinens esetében azonban egyértelműen emelkedő tendenciáról beszélhetünk, vagyis kontinensenkénti viszonylatban a regionalizálódási folyamat felerősödése figyelhető meg.

A fentiektől némileg eltérő eredményeket láthatunk Afrika és Ázsia esetén. Az egyik szembetűnő különbség, hogy ezen kontinensek esetében a vizsgált periódus nagy részében az eredmények nem megbízhatóak, így belőlük következetetéseket levonni nem lehet. A vizsgált időszak közel felében pedig (Afrika esetében 1971-1989 között, Ázsia esetében 1976-1989 között) az 1%-os szignifikanciaszinten megbízható eredmények igen vegyes képet festenek az egyes kontinensekről. Továbbra is pozitív a területi autokorreláció értéke, azaz az egyes kontinenseken belül regionalizálódási folyamat figyelhető meg. Ennek mértéke azonban az eredmények szerint igen ingadozó, ami feltehetően nagy részben a kontinensek nagyobb fokú heterogenitásával magyarázható.

A kontinensenkénti eredmények összevetése a (közel) összes országra számított területi autokorrelációs mutatóval megerősíti a regionalizálódási folyamatra tett feltevéseket. Valószínű, hogy az regionalizálódási folyamat még nem lépte át a kontinenshatárokat és ezzel magyarázható hogy világméretekben a területi autokorreláció idősorában nem fedezhető fel tendencia.

2.5. Következtetések

A kapott eredmények megerősítik azt a korábbi – pontbecslések alapján megállapított – következtetést, miszerint az egy főre jutó jövedelmek, illetve az egy főre jutó GDP közti különbségek tendenciájának ilyen, komparatív statikai eszközökkel való elemzése az egyenlőtlenségek tartós jelenlétére vagy enyhe növekedésére utal. Az irodalomban ettől ellentétesnek látszó eredményeket, melyek az egy főre jutó jövedelmek különbözőségének csökkenéséről, illetve a fejlettségbeli lemaradás csökkenéséről szólnak, a különböző megközelítésnek és módszertannak tudjuk be. A kiindulásul megfogalmazott probléma számos különböző megközelítést rejt magában, és a kérdés pontos felvetésétől függ a kérdésre adott válasz is.

Jelen fejezetben arra a kérdésre kerestük a választ, hogy figyelembe véve a rendelkezésre álló adatokat, mit mondhatunk az egy főre jutó jövedelmek egyenlőtlenségének tendenciájáról. Két fogalmat emelnék ki az előző mondatból: egyenlőtlenség és tendencia. Egyrészt a vizsgálatot azokra az évekre lehetett elvégezni, melyekre rendelkezésre állnak adatok, és ezek alapján azt mondhatjuk, hogy a vizsgált periódusban (az elmúlt harminc évben) az egyenlőtlenségek mértéke nem változott számottevően. Jövőre vonatkozóan következtetéseket levonni belőle igen korlátozottan lehet, hiszen a felvetett probléma természetét illetően nem harminc éves távlatokban, inkább évszázadokban mérhető a meghatározó folyamatok lefutásának ideje.

A kapott numerikus eredmények mindazonáltal összecsengenek az abszolút konvergencia tesztelése során kapott eredményekkel, nevezetesen egyik sem támasztja alá a jövedelmi egyenlőtlenségek csökkenését. A feltételes konvergencia fogalma – ez pusztán az elnevezésből is kiderül –, valójában csak egy adott csoporton belüli közeledést mér, hiszen azt vizsgálja, hogy az egyes országok növekedési ütemei és a stacioner állapottól való távolság között megfigyelhető-e negatív irányú kapcsolat. Ezáltal a kimutatott konvergencia még önmagában nem feltétlen jelenti a jövedelmi egyenlőtlenségek csökkenését, melyet az egyenlőtlenség közvetlen mérései alá is támasztanak.

Az eddigi számítások azonban az egyenlőtlenségek mérésének komparatív statikai eszközei voltak. Nyilvánvaló, hogy az egyes országok egy főre eső jövedelmeinek bonyolult mérési problémái, az adathibák, s a gazdaság folyamatos működését befolyásoló egyedi, váratlan hatások igen „zajossá" teszik a GDP-k idősorát. Ezek alapján az egyenlőtlenségi mutatók pont- és intervallumbecslései szintén ki vannak téve ezen torzító hatásoknak. A komparatív statikai elemzések elméletileg sincsenek kellően alátámasztva ahhoz, hogy ezekből kellő bátorsággal fogalmazzunk meg dinamikus természetű jelenségekre vonatkozó következtetéseket. S bár az eredmények eléggé plauzibilisnek tűnnek a stagnáló egyenlőtlenségek viszonyában, felmerül a kérdés, hogy az időbeniség explicit modellezésével, s az esetleges egyedi véletlen hatások időbeni „kisimításával" többletinformációhoz juthatunk-e kiinduló problémánk megválaszolásában.

A továbbiakban ezt az utat fogjuk követni, s a jövedelemeloszlások s azok egyenlőtlenségi viszonyainak dinamikus jellemzésére teszünk kísérletet. A következő kifejtés elsősorban [Lucas és Stokey, 1989], valamint [Quah, 1996a] és [Quah, 1996d] munkáin alapszik.

2.6. Függelék a 2. fejezethez

2.4. táblázat: Az egyenlőtlenségi mutatók értéke 1960-1992. Súlyozott egyenlőtlenségi mutatók.

Év	*Orsz. száma*	*Átlagos egy főre jutó GDP*	*Relatív szórás*	*Gini együtt-ható*	*Duál mutató*	*Koncent-rációs mutató*
1960	125	2250	1.1763	0.5433	6.4677	0.1030
1961	126	2298	1.1811	0.5563	6.8680	0.1012
1962	126	2363	1.1944	0.5638	7.0703	0.1023
1963	126	2433	1.1889	0.5610	6.9926	0.1009
1964	126	2549	1.1850	0.5595	7.0590	0.0992
1965	126	2627	1.1999	0.5625	7.3124	0.1006
1966	126	2704	1.2117	0.5655	7.5479	0.1017
1967	127	2753	1.2114	0.5705	7.7819	0.1001
1968	127	2852	1.2171	0.5780	8.1055	0.0987
1969	128	2959	1.2049	0.5717	7.9921	0.0948
1970	133	3074	1.1647	0.5576	7.4035	0.0864
1971	133	3147	1.1618	0.5574	7.4168	0.0855
1972	133	3231	1.1764	0.5636	7.6996	0.0857
1973	133	3377	1.1813	0.5668	7.8365	0.0850
1974	133	3404	1.1613	0.5630	8.0320	0.0808

2.4. táblázat: Súlyozott egyenlőtlenségi mutatók 1960-1992, folyt.

Év	*Orsz. száma*	*Átlagos egy főre jutó GDP*	*Relatív szórás*	*Gini együtt-ható*	*Duál mu-tató*	*Koncent-rációs mutató*
1975	134	3395	1.1368	0.5542	7.7061	0.0783
1976	134	3494	1.1512	0.5624	7.9679	0.0785
1977	135	3589	1.1504	0.5604	7.7470	0.0787
1978	135	3688	1.1519	0.5580	7.6604	0.0793
1979	136	3764	1.1540	0.5591	7.6908	0.0780
1980	142	3806	1.1392	0.5512	7.3537	0.0749
1981	142	3815	1.1406	0.5505	7.2812	0.0755
1982	142	3773	1.1258	0.5457	7.0939	0.0736
1983	144	3816	1.1270	0.5435	6.8523	0.0747
1984	147	3923	1.1394	0.5451	6.9106	0.0767
1985	152	4003	1.1342	0.5409	6.9112	0.0765
1986	147	4049	1.1414	0.5429	6.8957	0.0762
1987	144	4159	1.1392	0.5413	6.8821	0.0761
1988	141	4284	1.1448	0.5413	6.8308	0.0766
1989	137	4354	1.1511	0.5410	6.8415	0.0776
1990	116	4247	1.2204	0.5483	7.4219	0.0847
1991	101	4223	1.2276	0.5484	7.7270	0.0873
1992	92	4274	1.2295	0.5437	7.7644	0.0918

2.5. táblázat: Az atkinsoni egyenlőtlenségi mutató értéke különböző paraméterértékek esetén 1960-1992.

Év	*Orsz.sz.*	*0,5*	*1,0*	*2,0*	*3,0*	*5,0*	*10,0*
1960	125	0.1784	0.3254	0.5198	0.6263	0.7303	0.8139
1961	126	0.1819	0.3326	0.5308	0.6373	0.7384	0.8178
1962	126	0.1828	0.3346	0.5338	0.6390	0.7367	0.8159
1963	126	0.1833	0.3361	0.5369	0.6427	0.7408	0.8201
1964	126	0.1882	0.3453	0.5501	0.6553	0.7490	0.8219
1965	126	0.1902	0.3493	0.5558	0.6607	0.7532	0.8230
1966	126	0.1895	0.3484	0.5542	0.6581	0.7505	0.8240
1967	127	0.1870	0.3446	0.5506	0.6557	0.7502	0.8265
1968	127	0.1881	0.3490	0.5605	0.6663	0.7582	0.8313
1969	128	0.1923	0.3564	0.5686	0.6728	0.7637	0.8360
1970	133	0.1885	0.3518	0.5699	0.6808	0.7773	0.8474
1971	133	0.1883	0.3521	0.5697	0.6787	0.7741	0.8477
1972	133	0.1922	0.3597	0.5799	0.6873	0.7791	0.8496
1973	133	0.1961	0.3672	0.5908	0.6980	0.7881	0.8568
1974	133	0.1947	0.3660	0.5924	0.7016	0.7932	0.8617
1975	134	0.1925	0.3650	0.5943	0.7027	0.7916	0.8604
1976	134	0.1946	0.3700	0.6030	0.7115	0.7991	0.8678
1977	135	0.1928	0.3683	0.6037	0.7133	0.8014	0.8701
1978	135	0.1922	0.3676	0.6034	0.7133	0.8014	0.8698
1979	136	0.1957	0.3736	0.6101	0.7189	0.8054	0.8721
1980	142	0.2245	0.4121	0.6452	0.7483	0.8276	0.8848
1981	142	0.2168	0.4019	0.6364	0.7416	0.8236	0.8834
1982	142	0.2110	0.3947	0.6304	0.7374	0.8218	0.8821
1983	144	0.2083	0.3924	0.6319	0.7418	0.8288	0.8889
1984	147	0.2130	0.3994	0.6369	0.7439	0.8285	0.8881
1985	152	0.2115	0.3956	0.6295	0.7354	0.8197	0.8837
1986	147	0.2117	0.3986	0.6362	0.7413	0.8230	0.8838
1987	144	0.2103	0.3971	0.6357	0.7400	0.8172	0.8710
1988	141	0.2121	0.4010	0.6414	0.7450	0.8198	0.8685

2.5. táblázat: Atkinsoni egyenlőtlenségi mutató 1960-1992, folyt.

Év	*Orsz.sz.*	*0,5*	*1,0*	*2,0*	*3,0*	*5,0*	*10,0*
1989	137	0.2160	0.4060	0.6437	0.7452	0.8193	0.8692
1990	116	0.2175	0.4066	0.6400	0.7402	0.8153	0.8681
1991	101	0.2284	0.4291	0.6682	0.7627	0.8290	0.8724
1992	92	0.2261	0.4283	0.6742	0.7723	0.8400	0.8827

2.6. táblázat: A daltoni egyenlőtlenségi mutató értéke különböző paraméterértékek esetén 1960-1992.

Év	*Orsz.sz.*	*0,1*	*0,2*	*0,5*	*0,8*	*1,0*	*1,5*
1960	125	0.0339	0.0601	0.0956	0.0779	0.0510	0.0072
1961	126	0.0345	0.0612	0.0976	0.0796	0.0522	0.0073
1962	126	0.0347	0.0614	0.0980	0.0800	0.0524	0.0073
1963	126	0.0347	0.0615	0.0983	0.0803	0.0525	0.0072
1964	126	0.0355	0.0630	0.1010	0.0826	0.0540	0.0074
1965	126	0.0358	0.0636	0.1021	0.0835	0.0545	0.0074
1966	126	0.0357	0.0633	0.1017	0.0831	0.0541	0.0072
1967	127	0.0351	0.0624	0.1002	0.0819	0.0533	0.0071
1968	127	0.0351	0.0625	0.1008	0.0827	0.0538	0.0071
1969	128	0.0359	0.0639	0.1032	0.0846	0.0549	0.0072
1970	133	0.0350	0.0624	0.1009	0.0829	0.0538	0.0070
1971	133	0.0349	0.0622	0.1008	0.0828	0.0536	0.0068
1972	133	0.0355	0.0634	0.1030	0.0847	0.0548	0.0069
1973	133	0.0362	0.0646	0.1052	0.0865	0.0560	0.0070
1974	133	0.0359	0.0640	0.1043	0.0859	0.0556	0.0069
1975	134	0.0352	0.0629	0.1031	0.0853	0.0553	0.0069
1976	134	0.0354	0.0635	0.1043	0.0864	0.0559	0.0069
1977	135	0.0350	0.0626	0.1032	0.0856	0.0554	0.0068
1978	135	0.0348	0.0624	0.1028	0.0852	0.0551	0.0067
1979	136	0.0355	0.0636	0.1048	0.0868	0.0560	0.0068
1980	142	0.0424	0.0753	0.1211	0.0986	0.0627	0.0072
1981	142	0.0406	0.0722	0.1167	0.0953	0.0608	0.0071
1982	142	0.0391	0.0696	0.1134	0.0931	0.0596	0.0070
1983	144	0.0383	0.0684	0.1119	0.0923	0.0593	0.0071
1984	147	0.0392	0.0701	0.1146	0.0944	0.0606	0.0072
1985	152	0.0390	0.0697	0.1138	0.0935	0.0600	0.0071
1986	147	0.0388	0.0694	0.1138	0.0940	0.0604	0.0071
1987	144	0.0384	0.0688	0.1130	0.0933	0.0598	0.0070
1988	141	0.0387	0.0693	0.1140	0.0943	0.0605	0.0071
1989	137	0.0396	0.0708	0.1162	0.0958	0.0613	0.0071
1990	116	0.0400	0.0715	0.1171	0.0963	0.0614	0.0070
1991	101	0.0415	0.0745	0.1233	0.1023	0.0656	0.0076
1992	92	0.0409	0.0734	0.1220	0.1015	0.0651	0.0074

2.7. táblázat: A Hoover mutató és a Theil mutató értéke különböző paraméterértékek esetén 1960-1992.

Év	*Orsz.sz.*	*Hoover*	*2,0*	*e*	*3,0*
1960	125	0.4324	0.5480	0.3798	0.3458
1961	126	0.4425	0.5569	0.3860	0.3513
1962	126	0.4484	0.5588	0.3873	0.3526
1963	126	0.4463	0.5590	0.3874	0.3527
1964	126	0.4484	0.5719	0.3964	0.3608
1965	126	0.4550	0.5769	0.3999	0.3640

2.7. táblázat: Hoover és Theil mutató 1960-1992, folyt.

Év	*Orsz.sz.*	*Hoover*	*2,0*	*e*	*3,0*
1966	126	0.4611	0.5739	0.3978	0.3621
1967	127	0.4655	0.5654	0.3919	0.3567
1968	127	0.4722	0.5639	0.3909	0.3558
1969	128	0.4693	0.5761	0.3993	0.3635
1970	133	0.4568	0.5619	0.3895	0.3545
1971	133	0.4574	0.5596	0.3879	0.3531
1972	133	0.4624	0.5697	0.3949	0.3594
1973	133	0.4660	0.5803	0.4023	0.3661
1974	133	0.4629	0.5740	0.3978	0.3621
1975	134	0.4573	0.5616	0.3893	0.3543
1976	134	0.4631	0.5658	0.3922	0.3570
1977	135	0.4610	0.5576	0.3865	0.3518
1978	135	0.4586	0.5555	0.3850	0.3505
1979	136	0.4597	0.5660	0.3923	0.3571
1980	142	0.4541	0.6840	0.4741	0.4316
1981	142	0.4521	0.6524	0.4522	0.4116
1982	142	0.4483	0.6261	0.4340	0.3950
1983	144	0.4464	0.6119	0.4241	0.3861
1984	147	0.4465	0.6275	0.4349	0.3959
1985	152	0.4418	0.6247	0.4330	0.3942
1986	147	0.4453	0.6194	0.4293	0.3908
1987	144	0.4447	0.6133	0.4251	0.3869
1988	141	0.4464	0.6175	0.4280	0.3896
1989	137	0.4466	0.6319	0.4380	0.3987
1990	116	0.4604	0.6391	0.4430	0.4033
1991	101	0.4659	0.6618	0.4587	0.4176
1992	92	0.4645	0.6506	0.4510	0.4105

2.8. táblázat: Konfidencia intervallum becslés eredményei relatív szórás mutatóhoz. A bootstrap mintavételi eljárás az eredeti adatokon alapult, a sűrűségfüggvény becsléséhez gaussi kernelt alkalmaztunk. A táblázat mutatja a naív, torzítás korrigált és normalizált torzitás korrigált módszerrel számított intervallumokat. Bootstrap minták száma: 10000, szignifikanciaszint: 0.05.

Év	Orsz.	pontbecslés	naív alsó	naív felső	BC alsó	BC felső	NBC alsó	NBC felső	torzítás
1960	125	0.971	0.910	1.192	0.750	1.032	0.809	1.037	0.071
1961	126	0.976	0.916	1.199	0.752	1.035	0.785	1.039	0.072
1962	126	0.976	0.916	1.198	0.755	1.036	0.829	1.041	0.073
1963	126	0.974	0.915	1.197	0.750	1.033	0.793	1.037	0.072
1964	126	0.982	0.922	1.208	0.756	1.043	0.815	1.047	0.073
1965	126	0.984	0.922	1.215	0.754	1.047	0.810	1.051	0.075
1966	126	0.980	0.919	1.206	0.753	1.040	0.824	1.047	0.073
1967	127	0.971	0.911	1.193	0.748	1.031	0.814	1.040	0.072
1968	127	0.962	0.902	1.189	0.734	1.021	0.793	1.027	0.073
1969	128	0.970	0.910	1.195	0.744	1.029	0.793	1.035	0.072
1970	133	0.955	0.897	1.172	0.737	1.012	0.793	1.018	0.071
1971	133	0.949	0.890	1.165	0.732	1.008	0.787	1.011	0.071
1972	133	0.955	0.899	1.170	0.739	1.011	0.802	1.018	0.070
1973	133	0.963	0.905	1.183	0.743	1.021	0.810	1.026	0.072
1974	133	0.955	0.897	1.176	0.733	1.012	0.779	1.014	0.073
1975	134	0.932	0.876	1.147	0.717	0.988	0.755	0.993	0.071
1976	134	0.933	0.877	1.147	0.719	0.990	0.748	0.997	0.070
1977	135	0.922	0.867	1.135	0.709	0.978	0.781	0.980	0.070
1978	135	0.920	0.864	1.129	0.711	0.975	0.761	0.982	0.068
1979	136	0.928	0.871	1.139	0.717	0.986	0.776	0.990	0.069
1980	142	1.122	0.985	1.424	0.820	1.259	0.893	1.271	0.072
1981	142	1.071	0.958	1.349	0.792	1.184	0.864	1.197	0.072
1982	142	1.021	0.931	1.267	0.775	1.111	0.840	1.118	0.070
1983	144	0.990	0.924	1.223	0.757	1.056	0.801	1.063	0.073
1984	147	1.004	0.940	1.229	0.779	1.068	0.836	1.076	0.071
1985	152	1.000	0.944	1.217	0.783	1.056	0.841	1.059	0.072
1986	147	0.985	0.929	1.209	0.761	1.041	0.840	1.046	0.073

2.8. táblázat: Konfidencia intervallum relatív szórás mutatóhoz, folyt.

Év	Orsz.	pontbecslés	naív alsó	naív felső	BC alsó	BC felső	NBC alsó	NBC felső	torzítás
1987	144	0.977	0.922	1.198	0.755	1.031	0.811	1.035	0.073
1988	141	0.979	0.919	1.196	0.761	1.039	0.800	1.043	0.071
1989	137	0.996	0.931	1.228	0.763	1.060	0.823	1.062	0.074
1990	116	1.003	0.930	1.262	0.744	1.077	0.832	1.081	0.081
1991	101	1.005	0.927	1.288	0.723	1.084	0.783	1.097	0.087
1992	92	0.990	0.904	1.288	0.692	1.076	0.770	1.089	0.088

2.9. táblázat: Konfidencia intervallum becslés eredményei gini koefficienshez. A bootstrap mintavételi eljárás az eredeti adatokon és azok logaritmusán alapult, a sűrűségfüggvény becsléséhez gaussi kernelt alkalmaztunk. A táblázat a normalizált torzítás korrigált módszerrel számított intervallumokat mutatja. Bootstrap minták száma: 10000, szignifikanciaszint: 0.05. Országok száma: ld. 2.8. táblázat.

Év	pontbecslés	eredeti alsó	eredeti felső	logaritmizált alsó	logaritmizált felső	torzítás, eredeti	torzítás, logaritmizált
1960	0.476	0.432	0.471	0.409	0.498	0.068	0.026
1961	0.481	0.414	0.475	0.413	0.501	0.068	0.027
1962	0.482	0.442	0.477	0.404	0.502	0.068	0.027
1963	0.482	0.425	0.478	0.417	0.501	0.067	0.027
1964	0.488	0.442	0.483	0.417	0.507	0.067	0.028
1965	0.491	0.440	0.488	0.421	0.508	0.068	0.028
1966	0.490	0.453	0.488	0.421	0.507	0.067	0.028
1967	0.486	0.445	0.484	0.433	0.504	0.065	0.028
1968	0.487	0.434	0.487	0.424	0.504	0.063	0.029
1969	0.492	0.442	0.492	0.435	0.507	0.063	0.030
1970	0.487	0.439	0.488	0.440	0.501	0.061	0.030
1971	0.486	0.427	0.489	0.398	0.500	0.060	0.030
1972	0.491	0.448	0.494	0.433	0.503	0.059	0.031
1973	0.495	0.439	0.498	0.439	0.508	0.060	0.032
1974	0.493	0.434	0.496	0.438	0.506	0.060	0.032

2.9. táblázat: Konfidencia intervallum gini koefficienshez, folyt.

Év	pontbecslés	eredeti alsó	eredeti felső	logaritmizált alsó	logaritmizált felső	torzítás, eredeti	torzítás, logaritmizált
1975	0.488	0.410	0.495	0.431	0.499	0.056	0.034
1976	0.490	0.419	0.497	0.440	0.501	0.055	0.035
1977	0.487	0.432	0.497	0.428	0.496	0.054	0.036
1978	0.486	0.426	0.496	0.443	0.494	0.053	0.036
1979	0.490	0.437	0.500	0.444	0.498	0.054	0.036
1980	0.525	0.453	0.525	0.456	0.547	0.076	0.032
1981	0.516	0.453	0.520	0.453	0.535	0.070	0.033
1982	0.509	0.460	0.513	0.436	0.523	0.064	0.034
1983	0.506	0.440	0.509	0.451	0.516	0.062	0.035
1984	0.512	0.454	0.515	0.455	0.523	0.062	0.034
1985	0.512	0.461	0.511	0.469	0.521	0.062	0.033
1986	0.510	0.458	0.513	0.467	0.519	0.060	0.035
1987	0.508	0.441	0.511	0.456	0.515	0.060	0.036
1988	0.510	0.437	0.513	0.463	0.517	0.059	0.036
1989	0.515	0.460	0.521	0.463	0.525	0.062	0.036
1990	0.516	0.462	0.524	0.465	0.527	0.068	0.038
1991	0.524	0.433	0.534	0.458	0.530	0.072	0.045
1992	0.519	0.431	0.535	0.469	0.524	0.072	0.049

2.10. táblázat: Konfidencia intervallum becslés eredményei atkinsoni mutatóhoz. A bootstrap mintavételi eljárás az eredeti adatok logaritmusán alapult, a sűrűségfüggvény becsléséhez gaussi kernelt alkalmaztunk. A táblázat a normalizált torzitás korrigált módszerrel számított intervallumokat mutatja. Bootstrap minták száma: 10000, szignifikanciaszint: 0.01, 0.05, 0.1. Országok száma: ld. 2.8. táblázat.

Év	pontbecslés	1% alsó	1% felső	5% alsó	5% felső	10% alsó	10% felső	torzítás
1960	0.325	0.244	0.367	0.244	0.348	0.244	0.339	0.037
1961	0.333	0.259	0.374	0.259	0.355	0.259	0.346	0.038
1962	0.335	0.243	0.374	0.243	0.355	0.243	0.346	0.038
1963	0.336	0.259	0.374	0.259	0.355	0.259	0.346	0.039

2.10. táblázat: Konfidencia intervallum atkinsoni mutatóhoz, folyt.

Év	pontbecslés	1% alsó	1% felső	5% alsó	5% felső	10% alsó	10% felső	torzítás
1964	0.345	0.262	0.384	0.262	0.366	0.262	0.356	0.040
1965	0.349	0.271	0.387	0.271	0.369	0.271	0.359	0.041
1966	0.348	0.286	0.386	0.286	0.366	0.286	0.357	0.041
1967	0.345	0.282	0.380	0.282	0.362	0.282	0.353	0.040
1968	0.349	0.282	0.385	0.282	0.366	0.282	0.357	0.041
1969	0.356	0.285	0.391	0.285	0.373	0.285	0.363	0.042
1970	0.352	0.290	0.386	0.290	0.368	0.290	0.358	0.042
1971	0.352	0.259	0.383	0.259	0.366	0.259	0.357	0.042
1972	0.360	0.289	0.391	0.289	0.373	0.289	0.364	0.043
1973	0.367	0.298	0.398	0.298	0.380	0.298	0.371	0.043
1974	0.366	0.292	0.398	0.292	0.379	0.292	0.370	0.044
1975	0.365	0.289	0.395	0.289	0.377	0.289	0.368	0.045
1976	0.370	0.309	0.400	0.309	0.382	0.309	0.372	0.045
1977	0.368	0.300	0.397	0.300	0.380	0.300	0.370	0.046
1978	0.368	0.304	0.396	0.304	0.378	0.304	0.369	0.046
1979	0.374	0.314	0.403	0.314	0.385	0.314	0.376	0.045
1980	0.412	0.342	0.455	0.342	0.434	0.342	0.424	0.044
1981	0.402	0.327	0.443	0.327	0.423	0.327	0.412	0.045
1982	0.395	0.319	0.429	0.319	0.411	0.319	0.401	0.045
1983	0.392	0.329	0.424	0.329	0.406	0.329	0.396	0.046
1984	0.399	0.333	0.429	0.333	0.412	0.333	0.403	0.045
1985	0.396	0.335	0.425	0.335	0.408	0.335	0.399	0.044
1986	0.399	0.343	0.428	0.343	0.410	0.343	0.400	0.046
1987	0.397	0.333	0.425	0.333	0.408	0.333	0.398	0.046
1988	0.401	0.342	0.430	0.342	0.412	0.342	0.403	0.047
1989	0.406	0.342	0.436	0.342	0.417	0.342	0.408	0.047
1990	0.407	0.337	0.443	0.337	0.422	0.337	0.412	0.049
1991	0.429	0.328	0.464	0.328	0.443	0.328	0.432	0.055
1992	0.428	0.350	0.467	0.350	0.444	0.350	0.432	0.057

3. fejezet

Jövedelmi egyenlőtlenségek dinamikus modellje és statisztikái

A korábban kifejtett egyenlőtlenségi mértékek időbeni alakulása révén nem valós dinamikai, mindössze komparatív statikai úton vizsgálhatjuk az egyenlőtlenség időbeni alakulását. A jelen fejezetben kísérletet teszünk az egyenlőtlenségek dinamikus tárgyalására, olyan módon, hogy egy adott időpontban megfigyelt jövedelmi eloszlás és a rendszerre jellemző ún. átmenetfüggvény segítségével próbálunk következtetéseket levonni a következő időszakban várható eloszlás és annak egyenlőtlenségi tulajdonságaira. Ez a megközelítés lényegében a dinamikus rendszerek differenciálegyenletekkel történő leírásának analógiája, azzal a különbséggel, hogy a vizsgált objektum nem valamely gazdasági változó, hanem a jövedelemeloszlás. A jövedelemeloszlások dinamikáját meghatározó átmenetfüggvény jellemzői segítségével kívánjuk ezt követően az egyenlőtlenség várható időbeni alakulását elemezni.

A fejezet felépítése a következő. Első lépésben visszatérünk az eloszlások egyenlőtlenségi jellemzésére alkalmas mérőszámok tárgyalására, melyet már az előző fejezetben érintettük. A 2.1. fejezetben diszkrét módon megadott eloszlások esetében definiáltuk az eloszlások rendezésének axiómáit. A továbbiakban azonban folytonos eloszlásokkal kívánunk foglalkozni, ezért a korábbi axiómákat megfogalmazzuk folytonos eloszlások esetére is. Ezzel nem pusztán módszertani változást kívánunk bevezetni az előző fejezethez képest, hanem egyben a korábbi tárgyalásmódnál általánosabb terminológiák bevezetése is a célunk. Szeretnénk rámutatni arra is, hogy ebben a keretben kirajzolódik azon axiómák köre, amelyek az eloszlások rendezésének kulcsfogalmait képezik.

Ezt követően az eloszlások időbeni pályáját meghatározó átmenetfüggvényt Markov folyamatként fogjuk származtatni, s egyben megvizsgáljuk azt is, hogy milyen tulajdonságok szükségesek az egyenlőtlenségi rendezés dinamikus viselkedésének modellezéséhez. A bemutatott elméleti keret empirikus eredmények nélkül is szolgáltat olyan következtetéseket, melyek önmagukban alkalmasak a vizsgált problémára adandó válaszok lehetséges körének a leszűkítéséhez.

A befejező fejezetben a kifejtett dinamikus modell empirikus vizsgálatát mutatjuk be. Ennek során nemparaméteres statisztikai eljárásokkal becslést készítünk az átmenetfüggvény lehetséges realizációjára, melyet grafikus úton áll módunkban bemutatni. Az empirikus eredmények további észrevételekkel gazdagítják a kiinduló probléma vizsgálatát, valamint számos további kérdést is felvetnek a probléma dinamikus modellezésének továbbfejlesztése irányában.

Jelölések. A jövedelmi vektorokról a folytonos eloszlásokra történő áttérés a korábbi jelöléseink mellett számos új bevezetését is igényli. Az alábbiakban röviden összefoglaljuk a folytonos eset tárgyalása során használt legfőbb fogalmakat és a jelölésükre használt szimbólumokat.

$(\mathbb{R}, \mathfrak{R})$ A valós számok mérhető tere, ahol $\mathfrak{R}$ jelöli az $\mathbb{R}$ Borel halmazai által generált σ-algebrát;

A_x Jelölje a valós számok $[-\infty, x]$ Borel-mérhető halmazait;

$(\mathbf{Z}, \mathcal{Z})$ ahol $\mathbf{Z} \subseteq \mathbb{R}$, további vizsgálódásaink értelmezési tartománya, mely lehet az $\mathbb{R}$ valós részhalmaza (bizonyos esetekben kompakt részhalmaza), bizonyos alkalmazásokban maga az $\mathbb{R}$, $\mathcal{Z}$ pedig a $\mathbf{Z}$ halmaz Borel mérhető részhalmazainak σ-algebrája;

$b(\mathbf{Z}, \mathcal{Z})$ az $(\mathbf{Z}, \mathcal{Z})$ mérhető téren korlátos, mérhető függvények halmazának *sup* norma által generált Banach tere;

$\mathbf{B}(\mathbf{Z}, \mathcal{Z})$ az $(\mathbf{Z}, \mathcal{Z})$ mérhető téren korlátos, végesen additív halmazfüggvények Banach tere a teljes variációs norma szerint, azaz egy $\mu \in B(\mathbf{Z}, \mathcal{Z})$ mérték normája definíció szerint

$$|\mu| = \sup \sum_i |\mu(A_i)| \tag{3.1}$$

ahol a szuprémumot $\mathbf{Z}$ összes véges, mérhető partíciója felett kell venni. Világos, hogy minden valószínűségi mérték normája éppen egységnyi.

E norma segítségével értelmezhetjük a teljes variációs norma topológiát a $\mathbf{B}$ téren, s így definiálhatjuk az

$(\mathbf{B}, \mathfrak{B})$ mérhető teret, ahol $\mathfrak{B}$ a fentiek szerint generált σ -algebra a B téren. (A későbbiekben látni fogjuk, hogy $b(\mathbf{R}, \mathfrak{R})$ tér duális tere éppen $(\mathbf{B}, \mathfrak{B})$ tér lesz s ennek adódnak bizonyos következményei);

$\Lambda \in (\mathbf{B}, \mathfrak{B})$ A $\mathbf{Z}$ Borel halmazain értelmezett valószínűségi mértékek halmaza, azaz, $\forall\lambda \in \Lambda$ esetén definíció szerint egyrészt $\forall A \in \mathcal{Z}$ mérhető halmaz esetén $\lambda(A) \geq 0$, másrészt $\lambda(\mathbf{Z}) = 1$. Világos, hogy $\Lambda \subset (\mathbf{B}, \mathfrak{B})$. Ismert, hogy Λ a teljes variációs normával teljes metrikus tér. Ugyanakkor nem lineáris tér (két valószínűségi mérték összege és skalárszorosa nem fog valószínűségi mértéket megadni), ezért nem is Banach tér, ami az előzőeken túlmenően jellemzi a $(\mathbf{B}, \mathfrak{B})$ teret;

Θ Valamely paraméterek halmaza, többnyire $\Theta = \{t \in \mathbb{Z}_+\}$ a sztochasztikus folyamat időbeni lefutását leíró „időváltozó” halmaza;

δ_x jelölje a valós számok halmazán értelmezett Dirac mértéket.

3.1. Folytonos eloszlások egyenlőtlenségi rendezése

Jövedelemeloszlások egyenlőtlenségi rendezésének axiómáit részletesen bemutattuk a 2.1. fejezetben a diszkrét jövedelemi vektorok esetében. Folytonos eloszlásokra vonatkozó adaptációjuk is megtalálható más diszciplinák szakirodalomában, pl. a *sztochasztikus dominancia* vagy a *sztochasztikus rendezés* elméletében. A sztochasztikus dominancia elmélete az eloszlások részleges rendezését adja bizonyos tulajdonságok fennállása esetén. Látni fogjuk, hogy valójában a társadalmi jóléti rendezések szokásos axiómái (monotonitás, progresszív transzfer tulajdonság) szoros kapcsolatban vannak a sztochasztikus dominancia elméletében kifejtett elsőfokú, illetve másodfokú sztochasztikus dominanciával. A sztochasztikus dominancia fogalmainak és összefüggéseinek összefoglalása található [Levy, 1992] tanulmányban. A sztochasztikus dominancia mellett a sztochasztikus rendezések elmélete is hasonló fogalmakat tárgyal és összefüggésekre vezet. A sztochasztikus rendezés és a konkáv sztochasztikus rendezés fogalmai teljes analógiát mutatnak az elsőfajú sztochasztikus dominancia illetve a másodfajú sztochasztikus dominancia fogalmaival. Az említett diszciplina alkalmazási területei között megtalálhatóak a biológia, a közgazdaságtan, statisztika és az operációkutatás különböző tudományterületei is. Az elméletről és alkalmazásairól ld. [Shaked és Shantikumar, 1994] monográfiát. Mivel e két diszciplina még fogalomhasználatában is mutat számos rokon vonást, néha szinonímaként fogjuk használni az elsőfajú sztochasztikus dominancia és a sztochasztikus rendezés, illetve a konkáv sztochasztikus rendezés és a másodfajú sztochasztikus dominancia fogalmakat. A kifejtés során azonban igyekszünk egységes terminológiát alkalmazni. [1]

Legyen a továbbiakban $\succeq$ a Λ valószínűségi mértékek halmazán értelmezett bináris reláció. E relációról a következő feltevésekkel fogunk élni.

5. axióma (Folytonos rendezés). *A $\succeq$ bináris reláció Λ-n folytonos, teljes, reflexív, tranzitív s ily módon reprezentálható ún. társadalmi jóléti függvénnyel*[2]*, jelölve: $\exists W : \Lambda \to \mathbb{R}$, oly módon, hogy $\forall \lambda, \mu \in \Lambda$ valószínűségi mértékekre $\mu \succeq \lambda$ pontosan akkor, ha $W(\mu) \geq W(\lambda)$.*

A folytonos relációk reprezentálhatóságára vonatkozó tétel jól ismert a hasznosságelméletből. Fontos kiemelnünk, hogy a $W(.)$ társadalmi jóléti függvény csak „ordinálisan meghatározott", azaz, ha $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton nemcsökkenő függvény

[1] A jövedelemegyenlőtlenségek mérésének a 2.1. fejezetben bemutatott elméleti megközelítésének a sztochasztikus dominancia módszertanával való közvetlen összevetését az is nehezíti, hogy míg pl. a jövedelemegyenlőtlenségek mutatószámokkal történő jellemzése során jövedelmi vektorokról beszélnek és azokra definiálnak fogalmakat, addig a sztochasztikus dominancia elméletében elsősorban valószínűségi változók eloszlásfüggvényei és várható értékei szerepelnek az állítások alanyaiként. Ez bizonyos esetekben az egyes axiómák megfelelő értelmezését is igényli, ahol ez szükséges, ott ezt külön jelezzük.

[2] „social evaluation function".

és $W(.)$ egy Λ-n értelmezett, folytonos bináris relációt reprezentáló társadalmi jóléti függvény, akkor a $W' : \Lambda \to \mathbb{R}$, ahol $W'(\lambda) = w(W(\lambda))$ is reprezentálja az adott $\succeq$ relációt.

6. axióma (Monotonitás). [3] *Ha valamely $\lambda, \mu \in \Lambda$ eloszlásra*

$$\lambda([-\infty, z)) \geq \mu([-\infty, z)) \tag{3.2}$$

$\forall z \in R$ esetén, akkor $\mu \succeq \lambda$.

Az axióma szerint azon eloszlás preferált monotonitási szempontból, amelynél az A_z halmazok mértéke alacsonyabb, amelyet másként úgy is megfogalmazhatunk, hogy a magasabb jövedelmek kialakulásának valószínűsége minden jövedelmi szint esetén magasabb a μ eloszlás esetében, mint a λ eloszlás esetében. Ez az axióma pontosan megfelel a monotonitás 2. fejezetben bemutatott fogalmának.

A sztochasztikus rendezés irodalmának ismeretében (3.2) összefüggés pontosan akkor áll fenn, ha

$$\int_{\mathbf{Z}} f d\mu \geq \int_{\mathbf{Z}} f d\lambda \tag{3.3}$$

minden f monoton növekedő függvényre. Ekkor azt mondjuk, hogy a $\mu \succeq \lambda$, azaz a μ valószínűségi mérték *dominálja* a λ valószínűségi mértéket. Ebből adódik a következő észrevétel.

7. következmény. *Egy $\succeq$ folytonos bináris reláció Λ valószínűségi mértékek halmazán pontosan akkor monoton, ha reprezentálható*

$$W(\lambda) = \int u(z)\, d\lambda(z) \tag{3.4}$$

társadalmi jóléti függvénnyel, ahol $u(.)$ monoton növekedő függvény.

Tekinettel arra, hogy $f(z) = z$ konstans leképezés is nemcsökkenő, így adódik a következő észrevétel.

[3] A monotonitás 2. definíciója szerint azokat a jövedelmi vektorokat, amelyeknek minden eleme nagyobb, mint egy másik vektor megfelelő eleme, egy monoton reláció preferálni fogja. Ilyen x és y jövedelmi vektorok esetén a megfelelő empirikus eloszlásfüggvényekre ebből éppen az adódik, hogy az x jövedelmi vektornak megfelelő eloszlásfüggvény „mindenhol az y vektornak megfelelő eloszlásfüggvény felett” halad, azaz a preferált eloszlásban adott z -re az $[-\infty, z)$ halmaz mértéke kisebb.

8. következmény. *Ha valamely $\lambda, \mu \in \Lambda$ eloszlásra fennáll (3.2) összefüggés, akkor $\int zd\mu(z) \geq \int zd\lambda(z)$ is fennáll, mely összefüggés éppen azt mondja ki, hogy a μ eloszlás várható jövedelme magasabb, mint λ eloszlásé.*

Az egyenlőtlenségi irodalomban hivatkozott progresszív transzfer tulajdonság a konkáv sztochasztikus rendezés fogalmával mutat teljesen analóg kapcsolatot.

9. axióma (Progresszív transzfer). [4] *Azt mondjuk, hogy a $\succeq$ rendezés rendelkezik a progresszív transzfer tulajdonsággal, ha fennállnak a következők. $\forall \lambda, \mu \in \Lambda$ valószínűségi mértékre, amelyre minden $z \in R$ valós számra teljesül, hogy*

$$\int_{A_z} \mu(A_x)\, dx \leq \int_{A_z} \lambda(A_x)\, dx \tag{3.5}$$

és ugyanakkor az is fennáll, hogy

$$\int xd\mu(x) = \int xd\lambda(x) \tag{3.6}$$

akkor $\mu \succeq \lambda$.

Vegyük észre a progresszív transzfer tulajdonság és a konkáv sztochasztikus rendezés közötti hasonlóságot! A sztochasztikus rendezések irodalma szerint a (3.5) és a (3.6) együtt pontosan akkor áll fenn, ha $\int_{\mathbf{Z}} fd\mu \geq \int_{\mathbf{Z}} fd\lambda$ teljesül minden f konkáv függvény esetén. Ekkor azt mondjuk, hogy $\mu \succeq_{cv} \lambda$, azaz a μ mérték *konkáv rendezés szerint dominálja* λ valószínűségi mértéket.

Mivel a $f(z) = z$ és az $f(z) = -z$ szintén konkáv függvények, ezért $\mu \succeq \lambda$ fennállásából következik, hogy $\int_{\mathbf{Z}} zd\mu(z) \geq \int_{\mathbf{Z}} zd\lambda(z)$ és $\int_{\mathbf{Z}} zd\lambda(z) \geq \int_{\mathbf{Z}} zd\mu(z)$

[4] Ha az y a progresszív transzfer 4 definíciója szerint származik az x az x vektorból, akkor az y -nak megfelelő empirikus eloszlásfüggvény mindaddig egybeesik az x vektornak megfelelő empirikus eloszlásfüggvénnyel, amíg el nem jutunk a tranzakcióban említett alacsonyabb jövedelmű egyénhez. Innentől az y eloszlásfüggvénye egy darabig x eloszlásfüggvénye „alatt halad", s pontosan $\Delta z \frac{1}{n}$ nagysággal kisebb az alatta lévő terület, mint x -é (ahol Δz-vel jelöltük a jövedelmi transzfer nagyságát). Amikor eljutunk a tranzakcióban résztvevő magasabb jövedelmű egyénig, akkor egyrészt átmenetileg y eloszlásfüggvénye x eloszlásfüggvénye felett fog haladni, másrészt az alatta lévő terület éppen $\Delta z \frac{1}{n}$ nagysággal fog jobban nőni, mint x -é. Ez az észrevétel indokolja a progresszív transzfer tulajdonság eloszlásfüggvényekre vonatkozó, valószínűségi mértékekkel megfogalmazott 9. alatti definícióját.

egyaránt fennállnak, azaz a két eloszlás átlagos (várható) jövedelmi szintje megegyezik.

Mivel az $f(z) = -z^2$ szintén konkáv függvény, ezért a korábbi, 8. következményhez hasonló összefüggés adódik.

10. következmény. *Ha valamely $\lambda, \mu \in \Lambda$ eloszlásra fennáll a (3.5)-(3.6) összefüggés, akkor*

$$-\int (z-a)^2 \, d\mu(z) \geq -\int (z-a)^2 \, d\lambda(z) \tag{3.7}$$

is fennáll, ahol

$$a = \int z d\mu(z) = \int z d\lambda(z) \tag{3.8}$$

mely összefüggés éppen azt mondja ki, hogy a feltevés fennállása esetén μ eloszlás varianciája alacsonyabb, mint λ eloszlásé.

A hivatkozott eredmények alapján tehát láthatjuk, hogy a jövedelemegyenlőtlenségi mutatók irodalmában ismert progresszív transzfer tulajdonság a másodfajú sztochasztikus dominancia, illetve a konkáv sztochasztikus rendezés fogalmaival azonos. Ebből adódik az alábbi következtetés.

11. következmény. *Egy $\succeq$ folytonos bináris reláció Λ valószínűségi mértékek halmazán pontosan akkor rendelkezik a progresszív transzfer tulajdonsággal, ha reprezentálható*

$$W(\lambda) = \int u(z) \, d\lambda(z) \tag{3.9}$$

társadalmi jóléti függvénnyel, ahol $u(.)$ konkáv függvény.

Mind a sztochasztikus rendezés, mind a konkáv sztochasztikus rendezés részleges rendezést ad meg a valószínűségeloszlások halmazán. Az általunk az egyenlőtlenségi mutatókkal szemben axiómaszerűen állított követelmények éppen azt fogalmazzák meg, hogy ha két eloszlás az elsőrendű sztochasztikus dominancia vagy a másodrendű sztochasztikus dominancia szerinti relációban áll egymással, akkor a jövedelemegyenlőtlenségi mutató azonosan rendezze őket. Összefoglalva az eddigi kifejtett összefüggéseket adódik a következő állítás.

12. állítás. *A $\succeq$ rendezés pontosan akkor elégíti ki az 5., 6. és 9. feltevéseket, ha a megfelelő társadalmi jóléti függvény felírható*

$$W(\lambda) = \int u(z)\, d\lambda(z) \tag{3.10}$$

alakban, ahol $u(.)$ folytonos, monoton növekedő, konkáv függvény.

Bizonyítás. Az állítás igazsága következik az 7. és 11. következményből. Azt kell csak megmutatni, hogy a két tulajdonság nem állhat konfliktusban egymással.

Tegyük fel, hogy a $\succeq$ rendezés monoton. Ekkor ha valamely λ, μ valószínűségi mértékekre $\forall z$ -re fennáll (3.2) összefüggés, akkor az integrál tulajdonságai alapján (3.5) teljesülése is következik. Így ha még az is teljesül, hogy a két eloszlás várható értéke megegyezik, akkor a (3.6) összefüggés fennállása implikálja a progresszív transzfer tulajdonság teljesülését. Ezért ebben az esetben λ és μ mértékeket a progresszív transzfer tulajdonság szerint is lehet rendezni, s a rendezés megegyezik a monotonitási kritérium által adott rendezéssel. Ha a várható értékekre vonatkozó feltétel nem áll fenn, akkor ez utóbbi tulajdonság szerint nincs relációban a két eloszlás, így nyilván nem mondhatnak ellent a monotonitás szerinti rendezésnek.

Fordítva, tegyük fel, hogy valamely λ, μ valószínűségi mértékek relációban állnak a progresszív transzfer tulajdonság szerint. Ekkor az eloszlások várható értéke megegyezik, így a monotonitás feltevés csak úgy teljesülhet, ha a (6) kifejezésben szereplő valószínűségek mind azonosak. A monotonitás definíciója alapján ekkor $\lambda \succeq \mu$ és $\mu \succeq \lambda$ egyaránt fennállnak. Ugyanakkor a progresszív transzfer szerint szintén relációban állnak $\lambda \succeq \mu$ és $\mu \succeq \lambda$ formában egyaránt.

Ha a két eloszlás nem azonos, akkor nyilvánvalóan van olyan z, amire

$$\lambda(A_z) > \mu(A_z)$$

teljesül a progresszív transzfer tulajdonság fennállása mellett, akkor van olyan z' is, amire a fenti kifejezés fordított reláció mellett is fennáll. Ez következik az integrál tulajdonságaiból, továbbá abból a tényből, hogy a progresszív transzfer tulajdonság szerinti rendezés esetében a két valószínűségi változó várható értékének meg kell egyezni. Emiatt ekkor a monotonitás feltételeként megfogalmazott reláció nyilván nem teljesül, így nem vezethet ellentétes rendezéshez. ■

A jövedelmi egyenlőtlenségek kérdésének további tárgyalása során a valószínűségi mértékek fenti rendezésein túlmenően további fontos feltevéseket szoktunk tenni, melyek mindenekelőtt a jellemezni kívánt egyenlőtlenség relatív vagy abszolút jellegét ragadja meg. A relatív invariancia tulajdonság tárgyalásához szükségünk lesz az Atkinsoni mutatónál bevezetett ekvivalens jövedelem fogalmára, mivel ezen fogalom segítségével a relatív invariancia fogalmát az alább következő 13. definíciónál szemléletesebb, a fenti tárgyalást jobban kiegészítő értelmezéséhez juthatunk el.

13. definíció. *Jelölje $c > 0$ és $\lambda \in \Lambda$ esetén jelölje $c\lambda$ azt a $\tilde{\lambda} \in \Lambda$ valószínűségi mértéket, amit úgy kapunk, hogy*

$$\tilde{\lambda}\left([-\infty, cz)\right) = \lambda\left([-\infty, z)\right). \tag{3.11}$$

Vegyük észre, hogy jelen esetben a c „szorzónak" és a mértékek valós számokkal való szorzásának természetes definíciójához nincs semmi köze! Egy valószínűségi mértéknek és egy valós számnak a szorzata annak természetes értelmében nem valószínűségi mértéket fog eredményezni, hiszen az alaptér mértéke nem 1 lesz, hanem c. A valószínűségi mértéknek az előbbiek szerint adott skalárral való szorzata ugyanakkor újabb valószínűségi mértéket fog eredményezni, így a definíció tehát értelmes. A jelölést úgy lehet értelmezni, mintha egy λ valószínűségi mértéknek megfelelő eloszlásfüggvényt „megnyújtanánk" az x tengely mentén.

A relatív invariancia feltevése a valószínűségi mértékek vonatkozásában az alábbiak szerint ragadható meg.

14. axióma (Relatív invariancia). *$\forall \lambda, \mu \in \Lambda$, ha $\lambda \sim \mu$ teljesülése maga után vonja $\tilde{\lambda} \sim \tilde{\mu}$ fennállását, ahol*

$$\begin{aligned} \lambda\left([-\infty, z)\right) &= \tilde{\lambda}\left([-\infty, cz)\right) \\ \mu\left([-\infty, z)\right) &= \tilde{\mu}\left([-\infty, cz)\right) \end{aligned} \tag{3.12}$$

$\forall z \in Z$ és $c > 0$ esetén, akkor relatív invarianciáról beszélünk.

15. axióma (Abszolút invariancia). *$\forall \lambda, \mu \in \Lambda$, ha $\lambda \sim \mu$ teljesülése maga után* *vonja $\tilde{\lambda} \sim \tilde{\mu}$ fennállását, ahol*

$$\lambda\left([-\infty, z)\right) = \tilde{\lambda}\left([-\infty, c+z)\right)$$
$$\mu\left([-\infty, z)\right) = \tilde{\mu}\left([-\infty, c+z)\right) \tag{3.13}$$

$\forall z \in R$ és $c > 0$ esetén, akkor abszolút invarianciáról beszélünk.

A 13. definíció pusztán a jelölés megkönnyítésére vonatkozik, ekkor ugyanis a relatív invariancia tulajdonság definícióját az alábbi egyszerűbb formában lehet felírni:

$$\lambda \sim \mu \Longrightarrow c\lambda \sim c\mu$$

vagy a társadalmi jóléti függvény jelölésével ez pontosan azt jelenti, hogy

$$W(\lambda) = W(\mu) \Longrightarrow W(c\lambda) = W(c\mu) \tag{3.14}$$

Igen fontos észrevétel a további tárgyalás szempontjából, hogyha a $\succeq$ rendezés kielégíti az az (5), (6). és a (14). tulajdonságokat, akkor van olyan társadalmi jóléti függvény, hogy $W(c\lambda) = cW(\lambda)$ egyenlőség teljesül. Ebben az esetben a (3.14) teljesülése nyilvánvaló következménye $W(\lambda) = W(\mu)$ teljesülésének.[5]

A fenti állítás megmutatásához, illetve a relatív és az abszolút invariancia valószínűségi mértékekkel való kapcsolatának bemutatásához szükséges az ún. ekvivalens jövedelem fogalmának bevezetése. A fogalmat az egyenlőtlenségi irodalomban „egyenletes jövedelemmel ekvivalens jövedelem” fogalmának a valószínűségi mértékekre való adaptációjával nyertük, s pontosan azt a jövedelemszintet mutatja meg, amelynek 1 valószínűséggel történő bekövetkezése pontosan ugyanakkora társadalmi jólétet eredményez, mint a vizsgálat alapját képező jövedelemeloszlás.

16. definíció (Ekvivalens jövedelem). *A $\xi : \Lambda \to R$ leképezést implicit módon definiálja az alábbi összefüggés:*

$$\delta_{\xi(\lambda)} \sim \lambda$$

Azaz jelölje $\xi(\lambda)$ azt a jövedelemszintet, melynek 1 valószínűséggel történő bekövetkezése azonos társadalmi jólétet eredményez, mint a λ eloszlás. A $\xi(\lambda)$ jövedelemszintet a továbbiakban ekvivalens jövedelemnek fogjuk nevezni.

[5] Ez utóbbi egyben szintén arra mutat rá, hogy a 14. definícióban bevezetett jelölés valójában a fogalmak struktúrájához (is) próbál igazodni az egyszerűbb jelölések mellett.

A társadalmi jóléti függvényekkel jelölve a ξ ekvivalens jövedelmi szintet, a definíciót felírhatjuk

$$W\left(\delta_{\xi(\lambda)}\right) = W(\lambda) \tag{3.15}$$

alakban is. A definíció értelmességéhez megmutatjuk, hogy ha $Z = [a, b]$ halmaz és $\succeq$ folytonos, monoton, konkáv reláció, azaz reprezentálható a (3.10) alatti, $W(.)$ társadalmi jóléti függvénnyel, akkor ilyen $\xi(\lambda)$ ekvivalens jövedelemszint létezik. Egyrészt ξ definíciója alapján

$$u(\xi) = \int_{\mathbf{Z}} u(z)\, d\delta_{\xi}(z) = \int_{\mathbf{Z}} u(z)\, d\lambda(z) \tag{3.16}$$

azaz $\xi = u^{-1}\left(\int_{\mathbf{Z}} u(z)\, d\lambda(z)\right)$. Másrészt, mivel tetszőleges $\lambda \in \Lambda([a, b])$ valószínűségi mértékre a $\succeq$ reláció monotonitása miatt fennáll, hogy $\delta_b \succeq \lambda \succeq \delta_a$, így $\xi \in [a, b]$ adódik. A kiinduló állításunk megmutatásához tekintsük az alábbi lemmát.

17. lemma. *Legyen $\succeq$ reláció folytonos és monoton. Tegyük fel továbbá, hogy $\delta_{\tilde{\xi}} \sim c\delta_{\xi}$. Ekkor $\tilde{\xi} = c\xi$.*

Bizonyítás. Vegyük észre először, hogy $c\delta_{\xi}$ szintén Dirac mértéket határoz meg, $c\xi$ paraméterrel. Az A_z alakú mérhető halmazok esetében, felhasználva 13. definíciót érvényes az alábbi összefüggés

$$c\delta_{\xi}([-\infty, z)) = \delta_{\xi}\left(\left[-\infty, \frac{z}{c}\right)\right) = \begin{cases} 0, & ha \quad \frac{z}{c} \leq \xi \\ 1, & ha \quad \frac{z}{c} > \xi \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & ha \quad z \leq \xi c \\ 1, & ha \quad z > \xi c \end{cases} = \delta_{c\xi}([-\infty, z)).$$

Az állítás ezek után azon az észrevételen nyugszik, hogy ha valamely ξ, ξ' valós értékekre $\delta_{\xi} \sim \delta_{\xi'}$ fennáll, az csak úgy lehet, ha $\xi = \xi'$. Ellenkező esetben sérülne a monotonitás feltevése. Ennek megmutatásához az általánosság megsértése nélkül tegyük fel, hogy $\xi' > \xi$. Ekkor δ_{ξ} mértékre érvényesek az alábbiak:

$$\forall z \leq \xi \quad \delta_{\xi}([-\infty, z)) = \delta_{\xi'}([-\infty, z)) = 0$$

$$\forall z > \xi' \quad \delta_{\xi}([-\infty, z)) = \delta_{\xi'}([-\infty, z)) = 1$$

ugyanakkor valahányszor $\xi < z \leq \xi'$ akkor

$$\delta_{\xi}([-\infty, z)) = 1 \quad és \quad \delta_{\xi'}([-\infty, z)) = 0$$

emiatt $\delta_{\xi}([-\infty, z)) \geq \delta_{\bar{\xi}}([-\infty, z))$ következik minden $z \in \mathbf{Z}$ esetén amiből a monotonitás definíciója alapján $\delta_{\xi'} \succeq \delta_{\xi}$ következik. Ugyanakkor létezik olyan z valós szám, amire az előbbi egyenlőtlenség határozott egyenlőtlenségként teljesül, így a reláció fordítottja biztos nem állhat fenn – azaz egyidejűleg $\delta_{\xi} \succeq \delta_{\xi'}$ nem teljesülhet. Ezért az ekvivalenciareláció nem állhat fenn $\delta_{\xi'}$ és δ_{ξ} között, ha $\xi \neq \xi'$. ■

18. állítás. *Tegyük fel, hogy $\succeq$ kielégíti az 5., 6. és 14. feltevéseket. Ekkor létezik olyan $W(.)$ társadalmi jóléti függvény, amire $W(c\lambda) = cW(\lambda)$, ahol a $c\lambda$ kifejezést az 13. definíció szerint kell érteni.*

Bizonyítás. Legyen $W(\lambda) = \xi(\lambda)$. Ekkor egyrészt $\lambda \sim \delta_{\xi(\lambda)}$ az ekvivalens jövedelem definíciója miatt áll fenn, másrészt a relatív invariancia feltevése szerint ebből $c\lambda \sim c\delta_{\xi(\lambda)}$ következik. Az előző lemma és az ekvivalenciareláció tranzitivitása folytán kapjuk, hogy $c\lambda \sim c\delta_{\xi(\lambda)} \sim \delta_{(c\xi(\lambda))}$, ezért $W(c\lambda) = c\xi(\lambda)$. ■

A tétel következtében az ekvivalens jövedelmi szintet tekinthetjük a fenti feltételeknek eleget tevő társadalmi jóléti függvénynek. A 2. fejezetben ugyanakkor láttuk, hogy az általunk támasztott követelményeknek több mutató is megfelelhet, így ez a folytonos esetben is elvárható. Az ekvivalens jövedelem fogalma ugyanakkor megmutatja, hogy *létezik* olyan társadalmi jóléti függvény, mely kielégíti az általunk támasztott követelményeket s így a jövedelemeloszlások egyenlőtlenségi rendezésére is alkalmas.

3.2. A jövedelmi eloszlások dinamikus modellje

A jövedelemegyenlőtlenségek dinamikus tárgyalásához mindenekelőtt a jövedelemeloszlások dinamikus tárgyalására van szükség. Arról kell tehát összefüggéseket felfedeznünk, hogy egy adott időpontban megfigyelt jövedelemeloszlás milyen következő időpontbeli jövedelemeloszlást valószínűsít (ezzel implicit feltételezve, hogy az előző időpont eloszlása kellően sok információt tartalmaz a jövő időszakról, s nem kell például további időszakokat bevonni a konkrét vizsgálódásba). A jelenlegi eloszlás és az átmenet szabályának ismeretében, ahol ez utóbbi azt határozza meg, hogy egy adott eloszlást milyen eloszlás követ a következő időszakban, meg tudjuk mondani a következő időszak eloszlását. Ez az elképzelés a dinamikát Markov folyamatként határozza meg. A konvergencia–vita kapcsán már hivatkozott [Quah, 1996a], [Quah, 1997] modellek erre az elképzelésre építenek: az eloszlások közvetlen vizsgálatával kívánnak hozzászólni a konvergencia vitához, s ehhez az dinamikus folyamatokat Markov folyamatként határozzák meg. A tanulmány egyik elődjének tekinthető [Quah, 1993a] az állapottér diszkretizálásával a jövedelemeloszlások dinamikáját Markov láncok modelljével vizsgálja. Mivel Markov láncok esetében az állapottér véges elemből áll, ezért a jövedelmekre való alkalmazhatóságához az $\mathbb{R}_+$, a pozitív valós számok halmazát néhány diszjunkt halmazra kell bontani, s ezek fogják alkotni a Markov láncok egyes állapotait.

Úgy gondoljuk, hogy az állapottér diszkrét vagy folytonos megválasztásának kérdése nem pusztán metodikai kérdés, még akkor sem, ha matematikai szempontból lényeges különbségek figyelhetők meg a két eset között. Az előbbi esetben az eredmények erősen függnek az állapottér diszkretizálásától. Mivel a nemzeti jövedelmek alapjában véve folytonos változók, ezért elméleti szempontból is a folytonos modell választása az adekvát.

A jövedelemeloszlások Markov folyamatainak ismeretében eljuthatunk a jövedelmi egyenlőtlenségek dinamikus összefüggéseinek tárgyalásához. Az adott időszakbeli eloszlást jellemző egyenlőtlenségek, továbbá az átmenetfüggvény jellemzőinek az ismeretében képet alkothatunk a következő időszakot jellemző egyenlőtlenségek jellemzőiről. A továbbiakban pontosan ezt az utat fogjuk követni.

Első lépésben megalkotjuk az átmenetet meghatározó szabályokat, melyet egy ún. átmenetfüggvény ír le. Az átmenetfüggvény ismeretében egy adott időszaki eloszlás alapján meg tudjuk mondani a következő időszakot jellemző jövedelemeloszlást. A jövedelemeloszlásokat jellemző egyenlőtlenségi viszonyokat az előző fejezetben bemutatott összefüggések segítségével tudjuk vizsgálni. A fejezet végén bemutatjuk az egyenlőtlenségek dinamikus alakulására vonatkozó empirikus számításaink eredményeit.

3.2.1. Jövedelemeloszlások dinamikáját leíró Markov folyamat

A jövedelemegyenlőtlenségek időbeni dinamikáját leíró modellt alapvetően a valószínűségi mértékek halmazán értelmezett leképezésként fogjuk definiálni, így elsődlegesen a mértékelmélet bizonyos tételeire fogunk támaszkodni a kifejtés során. Az irodalomban található tárgyalások azonban gyakorta az eloszlásfüggvények terminológiájában fogalmazzák meg az egyes problémákat. Mi a továbbiakban szeretnénk mellőzni az eloszlásfüggvények terminológiájának használatát, ahol ez azonban elengedhetetlennek tűnik, vagy jelentősen megkönnyíti az értelmezést, ott lábjegyzetben ki fogunk erre térni. Mivel további vizsgálódásainkat a valós számok Borel halmazain értelmezett valószínűségi mértékekre korlátozzuk, és ismert, hogy itt a valószínűségi mértékek és eloszlásfüggvények között egy-egyértelmű leképezés van, ezért az átjárás a két terminológia között kölcsönösen egyértelmű, így a választást elsősorban a tiszta logikai struktúrára való törekvés határozta meg.[6]

Az egy főre jutó jövedelmek egy adott időpontbeli eloszlását feltevés szerint leírhatjuk egy $\lambda_t \in \Lambda$ valószínűségi mértékkel. A különböző időpontokhoz tartozó valószínűségi mértékek sorozatát úgy kívánjuk leírni, melyek valamely véletlen folyamat hatására „választódnak ki” a valószínűségi mértékek korábban definiált halmazából. E véletlen folyamat definiálásához tekintsük az alábbi halmazokat.

Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ valószínűségi tér és Θ paraméterek megfelelő halmaza. Minden $t \in \Theta$ paraméter mellett definiáljuk az alábbi mérhető leképezést

$$\Xi_t : (\Omega, \mathfrak{F}) \rightarrow (\mathbf{B}, \mathfrak{B}) \tag{3.17}$$

Az ily módon kialakuló $\{\Xi_t, t \in \Theta\}$ folyamat B értékű sztochasztikus folyamatot határoz meg.

E véletlen folyamatról további feltevésekkel fogunk élni. Először is vegyük észre, hogy a $\mathbf{P}$ mérték segítségével definiálhatjuk az alábbi (véges dimenziós) valószínűségi mértéket. Minden $t \in \Theta$ esetén legyen

$$P_{t+1}(A) = \mathbf{P}(\omega \in \Omega : \Xi_{t+1}(\omega) \in A) \tag{3.18}$$

[6] A Markov folyamat leírásában erősen támaszkodunk [Lucas és Stokey, 1989] kifejtésére.

minden $A \in \mathcal{Z}$ mérhető halmazra. Egy sztochasztikus folyamatot stacionáriusnak fogunk nevezni, ha a P_{t+1} valószínűségek függetlenek t -től.

Jelölje a továbbiakban $P_{t+1}(A \mid z_{t-s}, ...z_t)$ azt a feltételes valószínűséget, hogy az

$$\{\omega \in \Omega : \Xi_{t+1} \in A\} \tag{3.19}$$

esemény bekövetkezik, feltéve, hogy az

$$\{\omega \in \Omega : \Xi_\tau(\omega) = z_\tau, \tau = t-s, ..., t\} \tag{3.20}$$

esemény bekövetkezett.

19. definíció. *Elsőrendű Markov folyamatnak hívunk egy sztochasztikus folyamatot, ha*

$$P_{t+1}(A \mid z_{t-s}, ...z_t) = P_{t+1}(A \mid z_t) \tag{3.21}$$

minden $A \in B$, mérhető halmazra, ahol $t \in \Theta$ és $s = 1, ..., t-1$.

Az általunk vizsgált folyamatról a továbbiakban tételezzük fel, hogy elsőrendű Markov folyamatnak feleltethető meg.

20. axióma. *A fent meghatározott (3.17) sztochasztikus folyamat stacionárius, elsőrendű Markov folyamat.*

E feltevés szerint egy adott időpont jövedelemeloszlását az előző időszak jövedelemeloszlása illetve az átmeneteket leíró valószínűségek határoznak meg. Ezért a folyamat további specifikációja értelmében meghatározzuk azon fogalmaknak a körét, melyek segítségével konkrétabban jellemezni tudjuk az „átmeneteket" a valószínűségi mértékek terén.

3.2.2. A sztochasztikus folyamat mozgástörvénye: az átmenetfüggvény

Ha a $T^* : (\mathbf{B}, \mathfrak{B}) \to (\mathbf{B}, \mathfrak{B})$ leképezés, akkor az

$$\lambda_t = T^* \lambda_{t-1} \tag{3.22}$$

kifejezéssel megadott összefüggés éppen a korábban általunk elmondott tulajdonságokkal rendelkezik, azaz egy adott időpont eloszlását a megelőző időpont eloszlása és valamely hozzárendelési szabály szerint határozza meg. T^* további specifikálása a folyamat részletesebb elemzését teszi lehetővé. Ehhez vezessük be az alábbi fogalmakat.

21. definíció (Átmenetfüggvény). *A $Q : \mathbf{Z} \times \mathcal{Z} \to [0,1]$ leképezést ámenetfüggvénynek hívjuk, ha*

1. *$\forall z \in \mathbf{Z}$ esetén a $Q(z,.)$ valószínűségi mértéket ad meg $(\mathbf{Z}, \mathcal{Z})$ mérhető téren;*
2. *$\forall A \in \mathcal{Z}$ esetén a $Q(.,A)$ $\mathcal{Z}$-mérhető függvény.*

Az átmenetfüggvény valójában nem más, mint a feltételes valószínűség leírásához szükséges információk gyűjteménye. Segítségével felírhatjuk a $P(A \mid B)$ feltételes valószínűséget, azaz annak a valószínűségét, hogy a következő időpontban a rendszer az A halmazban lesz, feltéve, hogy a jelenlegi állapot a B halmazban van s a jelenlegi állapot valószínűségi mértéke λ. Ekkor az előbb említett feltételes valószínűséget felírhatjuk az átmenetfüggvény integráljával:

$$P(A \mid B) = \int_B Q(z,A)\, d\lambda(z) \tag{3.23}$$

Ha a $B = \mathbf{Z}$, azaz az egész halmaz feletti integrált tekintjük, akkor annak valószínűségét kapjuk, hogy a következő állapot az A halmazban lesz, feltéve, hogy a jelenlegi állapot eloszlása λ.

A továbbiakban szükségünk lesz az átmenetfüggvény bizonyos tulajdonságaira, illetve ezen tulajdonságoknak a feltételes valószínűségekre való „örökíthetőségére". Ezért bevezetjük az alábbi fogalmakat. Ha $f \in b(\mathbf{Z}, \mathcal{Z})$ mérhető függvény és $\lambda \in \Lambda$ valószínűségi mérték, akkor jelölje $(\lambda, f) : B \times b(\mathbf{Z}, \mathcal{Z}) \to R$ azt a lineáris funkcionált, ami éppen

$$(\lambda, f) = \int_{\mathbf{Z}} f(z)\, d\lambda(z) \tag{3.24}$$

alakban írható fel.

Legyen továbbá $f \in b(\mathbf{Z}, \mathcal{Z}) \to \mathbb{R}$ korlátos, valós értékű, $\mathcal{Z}$-mérhető függvény és legyen $T : b(\mathbf{Z}, \mathcal{Z}) \to b(\mathbf{Z}, \mathcal{Z})$ leképezés az ilyen függvények terén a következő operátor:

$$(Tf)(z) = \int_{\mathbf{Z}} f(z') Q(z, dz') \qquad \forall z \in \mathbf{Z} \tag{3.25}$$

ahol $Q(.,.)$ a fent definiált átmenetfüggvény. Ekkor mivel $Q(z,.)$ valószínűségi mérték Tf jóldefiniált, nemnegatív és korlátos, így a T leképezés valóban a $b(\mathbf{Z}, \mathcal{Z})$ teret képezi le önmagára. A fenti kifejezést az $f(.)$ transzformált valószínűségi változó várható értékeként határozhatjuk meg, feltéve, hogy a jelen állapot, z, adott. Az értelmezés indokaként szükségünk van a T operátor adjungáltjának a bevezetésére.

Jelölje $T^* : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ a T lineáris leképezés adjungáltját, vagyis definíció szerint legyen

$$(T^*\lambda, f) = (\lambda, Tf) \tag{3.26}$$

ahol (λ, f) a fent definiált lineáris funkcionál. A definíció szerint a T^* adjungált leképzés valójában

$$\begin{aligned}
(T^*\lambda)(A) &= \int_{\mathbf{Z}} \chi_A(z)\, d(T^*\lambda)(z) = \int_{\mathbf{Z}} (T\chi_A)(z)\, d\lambda(z) = \\
&= \int_{\mathbf{Z}} \left[\int_{\mathbf{Z}} \chi_A(z') Q(z, dz') \right] d\lambda(z) = \\
&= \int_{\mathbf{Z}} Q(z, A)\, d\lambda(z)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

módon számítható. Az átalakítás során az első sorban az adjungált definícióját, a második sorban a T operátor definícióját használtuk fel, s a harmadik sor egyszerű kalkulus révén adódik. A kifejezésben szereplő χ_A függvény az A mérhető halmaz indikátorfüggvénye.

Mivel $\forall A \in \mathbf{Z}$ esetén $Q(., A)$ korlátos és $\mathcal{Z}$-mérhető, ezért $T^*\lambda$ jóldefiniált. Annak valószínűségét mutatja meg, hogy a következő állapot A -ban lesz, feltéve, hogy a jelenlegi állapot eloszlása λ.

Vegyük észre, hogy ha T^* adjungált leképezésre kapott kifejezést visszahelyettesítjük a (3.26) egyenlőségbe, akkor

$$\int_{\mathbf{Z}} (Tf)\, z\lambda(dz) = \int_{\mathbf{Z}} f(z')(T^*\lambda)(dz') \tag{3.28}$$

adódik, amit felírhatunk

$$\iint f(z')\,Q(z,dz')\,\lambda(dz) \tag{3.29}$$

alakban is. Ezt az összefüggést a továbbiakban többször is alkalmazni fogjuk, hiszen ennek segítségével tudunk következtetést levonni T, T^* és Q tulajdonságai közötti összefüggésekről.

Átmenetfüggvények jellemzői

A továbbiakban ismertetjük, hogy melyek azok a legfontosabb tulajdonságok, melyeket teljesülését bizonyos esetekben feltételezni fogjuk. A jelen fejezetben mindössze a tulajdonságokkal és azok közvetlen következményeivel foglalkozunk. A későbbiek fejezetek során fog értelmet nyerni, hogy miért is van szükségünk az alábbi tulajdonságokra.

22. definíció (Feller tulajdonság). *Egy Q átmenetfüggvény a $(\mathbf{Z}, \mathcal{Z})$ mérhető téren rendelkezik a Feller tulajdonsággal, ha a (3.25) alatt definiált T leképezés $\forall f$ $\mathcal{Z}$-mérhető függvényre $T : C(\mathbf{Z}) \to C(\mathbf{Z})$ leképezés, azaz korlátos, folytonos függvényt korlátos, folytonos függvénybe képez le.*

A Feller tulajdonság nagyon fontos a Q átmenetfüggvény által generált Markov folyamat viselkedése szempontjából. Előzetesen megemlítjük, hogy a Feller tulajdonságon múlik, hogy a kialakuló Markov folyamathoz létezzen invariáns mérték.

23. állítás. *A következő állítások ekvivalensek:*

1. *$f \in C(Z) \Rightarrow Tf \in C(Z)$ (Feller tulajdonság)*
2. *$\lambda_n \to \lambda \Rightarrow T^*\lambda_n \to T^*\lambda$ (Mértékek gyenge konvergenciája)*
3. *Ha $z_n \to z \Rightarrow$ konvergens sorozat, akkor a $Q(z_n, .)$ valószínűségi mértékek gyengén konvegálnak az $Q(z, .)$ valószínűségi mértékhez.*

Bizonyítás.
(3)$\Longrightarrow$(1) állítás valójában éppen a gyenge konvergencia definíciója.

(1)$\Longrightarrow$(3) megmutatásához legyen f tetszőleges folytonos függvény. Ekkor Tf is folytonos, ezért, ha $z_n \to z$ konvergens pontsorozat, akkor $\lim_{n\to\infty} (Tf)(z_n) = (Tf)(z)$.Ez viszont a T transzformáció definíciója alapján éppen azt jelenti, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{Z}} f(z') Q(z_n, dz') = \int_{\mathbf{Z}} f(z') Q(z, dz')$$

ami pontosan azt mondja ki, hogy a $Q(z_n, .)$ valószínűségi mértékek gyengén konvergálnak a $Q(z, .)$ mértékhez.

(1)$\Longrightarrow$(2) fennállása (3.28) miatt fog teljesülni. Legyen ugyanis f folytonos, ekkor feltevés szerint Tf is folytonos. Ekkor ha $\lambda_n \to \lambda$ valószínűségi mértékek gyengén konvergens sorozata, akkor a gyenge konvergencia definíciója szerint fennáll, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{Z}} (Tf)(z)\, d\lambda_n(z) = \int_{\mathbf{Z}} (Tf)(z)\, d\lambda(z)$$

amiből (3.28) alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{Z}} f(z)\, dT^*\lambda_n(z) = \int_{\mathbf{Z}} f(z)\, dT^*\lambda(z)$$

ami éppen azt mondja ki, hogy a valószínűségi mértékek $T^*\lambda_n$ sorozata gyengén konvergens, hiszen f tetszőleges folytonos függvény volt.

(2)$\Longrightarrow$(1) állítás megmutatásához legyen $z_n \to z$ konvergens sorozat és válasszuk a $\lambda_n = \delta_{z_n}$ Dirac mértéknek. Ekkor mivel $\delta_{z_n} \to \delta_z$ a gyenge konvergencia topológiában, így alkalmazva (2) állítást kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} Tf(z_n) &= \lim_{n\to\infty} (\lambda_n, Tf) = \lim_{n\to\infty} (T^*\lambda_n, f) = \\ &= (T^*\lambda, f) = (\lambda, Tf) = Tf(z) \end{aligned}$$

azaz Tf folytonos. ■

A folytonosságra vonatkozó összefüggések után a monotonitás és a konkávitásra vonatkozó összefüggéseket tárgyaljuk.

24. definíció. *Egy Q átmenetfüggvényt az $\mathbf{Z} \times \mathcal{Z}$ téren monotonnak nevezünk, ha a megfelelő T leképezés minden $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ nemcsökkenő függvényt Tf nemcsökkenő függvénybe visz át.*

A kialakuló Markov folyamat monotonitását a fenti definíció a T leképezés tulajdonságain keresztül írja le. Ugyanakkor megtehetjük ezt Q és T^* vonatkozásában is. Látni fogjuk, hogy a fenti definíció ekvivalens azzal, hogy a T^* leképezés monoton, azaz megőrzi a dominancia relációt a valószínűségi mértékek között, ahol ez utóbbin az alábbit kell érteni:

25. lemma. *A következő állítások ekvivalensek:*

1. *$f \in b$ és nemcsökkenő $\Rightarrow Tf$ is nemcsökkenő;*

2. *λ és μ valószínűségi mértékek fennáll, hogy $\mu \succeq \lambda \Rightarrow T^*\mu \succeq T^*\lambda$;*

3. *$z, z' \in Z$ és $z \geq z' \Rightarrow Q(z, .) \succeq Q(z', .)$.*

Bizonyítás.

(3)$\Longrightarrow$(1) éppen az átmenetfüggvény monotonitásának definíciója.

(1)$\Longrightarrow$(3) fennállása abból következik, hogyha f tetszőleges nemcsökkenő függvény, akkor feltevés szerint Tf is nemcsökkenő, így ha $z_1 > z_0$ esetén $Tf(z_1) \geq Tf(z_0)$ ami T definíciója miatt éppen azzal ekvivalens, hogy

$$\int_{\mathbf{Z}} f(z)\, Q(z_1, dz) \geq \int_{\mathbf{Z}} f(z)\, Q(z_0, dz)$$

s mivel f tetszőleges nemcsökkenő függvény volt, így ez pontosan azt mondja ki, hogy $Q(z_1, .) \succeq Q(z_0, .)$.

(1)$\Longrightarrow$(2) fennállása (3.28) miatt fog teljesülni. Legyen ugyanis f nemcsökkenő, ekkor feltevés szerint Tf is nemcsökkenő. Ekkor ha $\mu \succeq \lambda$, akkor a dominancia definíciója szerint fennáll, hogy

$$\int_{\mathbf{Z}} Tf(z)\, d\mu(z) \geq \int_{\mathbf{Z}} (Tf)(z)\, d\lambda(z)$$

amiből (3.28) alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\int f(z)\, dT^*\mu(z) \geq \int f(z)\, dT^*\lambda(z)$$

ami éppen azt mondja ki, hogy a $T^*\mu$ valószínűségi mérték dominálja a $T^*\lambda$ valószínűségi mértéket, hiszen f tetszőleges nemcsökkenő függvény volt.

(2)$\Longrightarrow$(1) Legyen f tetszőleges nemcsökkenő függvény és $z_1 > z_0$. Ekkor egyrészt nyilván $f(z_1) \geq f(z_0)$, másrészt a z_1 és z_0 pontokra vonatkozó δ_{z_1} és δ_{z_0} Dirac mértékekre fennáll, hogy

$$\int_{\mathbf{Z}} f(z)\, d\delta_{z_1}(z) = f(z_1) \geq f(z_0) = \int_{\mathbf{Z}} f(z)\, d\delta_{z_0}(z)$$

ezért $\delta_{z_1} \succeq \delta_{z_0}$ dominanciareláció fennáll a két mérték között. így a kiinduló feltevésünknek megfelelően $T^*\delta_{z_1} \succeq T^*\delta_{z_0}$ is fennáll, amiből következik, hogy Tf is nemcsökkenő, hiszen

$$Tf(z_1) = (\delta_{z_1}, Tf) = (T^*\delta_{z_1}, f) \geq (T^*\delta_{z_0}, f) = (\delta_{z_0}, Tf) = Tf(z_0)$$

∎

A fentiek alapján egy Markov folyamatot monotonnak nevezünk, ha megőrzi a dominancia relációt a valószínűségi mértékek között. A továbbiakban valószínűségi mértékek $\{\lambda_n\}$ sorozatát monotonnak fogjuk mondani, ha $\lambda_{n+1} \succeq \lambda_n$ vagy $\lambda_n \succeq \lambda_{n+1}$ fennáll minden n -re.

A harmadik tulajdonság, melyre szükségünk lesz a későbbi kifejtés során, a konkávitás. Egy T leképezést konkávnak nevezünk, ha $f \in b$ konkáv függvényt Tf konkáv függvénybe képez le.

26. lemma. *Legyen a $\mathbf{Z} \subseteq \mathbb{R}$ halmaz konvex. A következő állítások ekvivalensek:*

1. *$f \in b$ és konkáv $\Rightarrow Tf$ is konkáv;*
2. *λ és μ valószínűségi mértékek és $\mu \succeq_{cv} \lambda \Rightarrow T^*\mu \succeq_{cv} T^*\lambda$;*
3. *ha valamely $\theta \in [0,1]$ valós számra a $z_\theta = \theta z_1 + (1-\theta) z_0$ helyen, ahol $z_1, z_0 \in \mathbf{Z}$, a $Q(z_\theta, .)$ mérték konkávan dominálja a $Q_\theta \doteq \theta Q(z_1, .) + (1-\theta) Q(z_0, .)$ mértéket.*

Bizonyítás.

(3)$\Longrightarrow$(1) Legyen f tetszőleges konkáv függvény, s jelölje $z_\theta \in \mathbf{Z}$ a (3) alatti valós számot. Ekkor felhasználva a Tf definícióját és az integrál linearitását adódik az alábbi átalakítás:

$$\begin{aligned} Tf(z_\theta) &= \int_{\mathbf{Z}} f(z)\, Q(z_\theta, dz) \\ &\geq \theta \int_{\mathbf{Z}} f(z)\, Q(z_1, dz) + (1-\theta) \int_{\mathbf{Z}} f(z)\, Q(z_0, dz) \\ &= \theta Tf(z_1) + (1-\theta)\, Tf(z_0) \end{aligned}$$

(1)$\Longrightarrow$(3) Ha f tetszőleges konkáv függvény, akkor Tf is konkáv, s ebből kapjuk, hogy a korábbi jelölések mellett

$$Tf(z_\theta) \geq \theta Tf(z_1) + (1-\theta) Tf(z_0)$$

ami pontosan azt jelenti, hogy a $Q(z_\theta, .)$ mérték konkávan dominálja a Q_θ mértéket.

(1)$\Longrightarrow$(2) fennállása (3.28) miatt fog teljesülni. Legyen ugyanis f tetszőleges konkáv függvény, ekkor feltevés szerint Tf is konkáv. Ekkor ha $\mu \succeq_{cv} \lambda$, akkor a dominancia definíciója szerint fennáll, hogy

$$\int_{\mathbf{Z}} Tf(z)\, d\mu(z) \geq \int_{\mathbf{Z}} (Tf)(z)\, d\lambda(z)$$

amiből (3.28) alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\int f(z)\, dT^*\mu(z) \geq \int f(z)\, dT^*\lambda(z)$$

ami éppen azt mondja ki, hogy a $T^*\mu$ valószínűségi mérték konkávan dominálja a $T^*\lambda$ valószínűségi mértéket, hiszen f tetszőleges konkáv függvény volt.

(2)$\Longrightarrow$(1) Legyen f tetszőleges konkáv függvény és z_θ. (3) alatti. Ekkor egyrészt nyilván $f(z_\theta) \geq \theta f(z_1) + (1-\theta) f(z_0)$, másrészt a z_θ, z_1 és z_0 pontokra vonatkozó $\delta_{z_\theta}, \delta_{z_1}$ és δ_{z_0} Dirac mértékekre fennáll, hogy

$$\begin{aligned} &\theta \int_{\mathbf{Z}} f(z)\, d\delta_{z_1}(z) + (1-\theta) \int_{\mathbf{Z}} f(z)\, d\delta_{z_0}(z) = \\ &= \theta f(z_1) + (1-\theta) f(z_0) \geq f(z_\theta) = \int_{\mathbf{Z}} f(z)\, d\delta_{z_\theta}(z) \end{aligned}$$

ezért $\delta_{z_\theta} \succeq \theta\delta_{z_1} + (1-\theta)\delta_{z_0}$ dominanciareláció fennáll a két mérték között. Így a kiinduló feltevésünknek megfelelően $T^*\delta_{z_\theta} \succeq T^*(\theta\delta_{z_1} + (1-\theta)\delta_{z_0})$ is fennáll, amiből következik, hogy Tf is konkáv, hiszen

$$\begin{aligned} Tf(z_\theta) &= (\delta_{z_\theta}, Tf) = (T^*\delta_{z_\theta}, f) \geq (T^*(\theta\delta_{z_1} + (1-\theta)\delta_{z_0}), f) = \\ &= (\theta T^*\delta_{z_1} + (1-\theta) T^*\delta_{z_0}, f) = \theta (T^*\delta_{z_1}, f) + (1-\theta)(T^*\delta_{z_0}, f) = \\ &= \theta(\delta_{z_1}, Tf) + (1-\theta)(\delta_{z_0}, Tf) = \theta Tf(z_1) + (1-\theta) Tf(z_0) \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk (3.28) összefüggést illetve a skalár szorzat és T^* linearitását. ∎

Valószínűségi mértékek gyenge konvergenciája

Az általunk vizsgált λ_n valószínűségi mértékek sorozata szempontjából kiemelkedő jelentőségű, hogy milyen feltevések fennállása esetén és milyen típusú konvergencia szerint mondható ki a határérték létezése. A valószínűségeloszlások norma szerinti konvergenciájának kérdése számos problémát rejt magában, hiszen a T^* leképezés normája egységnyi, így a természetesen adódó kontrakciós leképezés, mely Banach terekben biztosítja a fix ponttal rendelkező leképezéseket, itt nem alkalmazható.

A jelen dolgozat keretei között nem foglalkozunk azzal a kérdéssel, hogy a fent említettől eltérő megközelítések (pl. Brower-féle fixponttétel) alkalmazása mennyiben járul hozzá a fixpontok megkereséséhez. Első megközelítésben elégségesnek tűnik a problémát a mértékek gyenge konvergenciájának szempontjából vizsgálni.

Az alábbiakban bizonyítás nélkül hivatkozzuk az idevonatkozó állításokat.

27. állítás. *Ha $\mathbf{Z} \subset \mathbb{R}$ kompakt és Q rendelkezik a Feller-tulajdonsággal, akkor a T^* leképezésnek létezik invariáns eloszlása.*

Bizonyítás.[Lucas és Stokey, 1989], 12.10 tétel, 376-378. old. ∎

A részletes bizonyítás nélkül megmutatjuk az alapgondolatot. Jelölje λ_N valószínűségi mértékek azon sorozatát, melyet az eredeti λ_n sorozatból az alábbi átlagolás szerint kapunk:

$$\lambda_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_n. \tag{3.30}$$

Helly tétele szerint e sorozatnak létezik λ_{N_k} konvergens részsorozata, jelölje ennek határértékét λ. A háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával ezek után megmutatható, hogy $(\lambda, f) = (\lambda, Tf) = (T^*\lambda, f)$, ami éppen azt mutatja, hogy λ invariáns eloszlás.

Az invariáns eloszlás unicitásának biztosítására azonban további feltevéseket kell tenni. A Q átmenetfüggvénynek a Feller tulajdonságon és a monotonitáson kívül még egy további feltételnek is (ld. 28. feltétel) eleget kell tenni ahhoz, hogy egyetlen invariáns mérték létezhessen, s az $\lambda_n = T^*\lambda_{n-1}$ sorozat gyengén konvergáljon az invariáns eloszláshoz. E feltevés lényegében egyfajta „összefüggőségi", azaz „keverő" feltételt fogalmaz meg: véges lépésben, pozitív valószínűséggel el lehet jutni az értelmezési tartomány „alsó és felső állapotából a másik közelébe".

28. feltevés. *$\exists c \in Z$, $\varepsilon > 0$, $N \geq 1$, hogy $Q^N(a,[c,b]) \geq \varepsilon$ és $Q^N(b,[a,c]) \geq \varepsilon$.*

29. állítás. *Legyen $\mathbf{Z} = [a,b] \subset \mathbb{R}$. Ha Q monoton és rendelkezik a Feller tulajdonsággal és kielégíti az 28. feltételt, akkor $\exists \lambda^*$ egyetlen invariáns eloszlás és $\lambda_n \to \lambda^*$ a gyenge konvergencia topológia szerint minden λ_0 kezdeti valószínűségi mérték esetén.*

Bizonyítás.[Lucas és Stokey, 1989], 12.12 tétel, 382-383. old. ■

A részletes bizonyítás nélkül vázoljuk az alapgondolatot. Ha $\lambda_0 \in \Lambda([a,b])$, akkor a dominanciareláció definíciója alapján kapjuk, hogy $\delta_b \succeq \lambda_0 \succeq \delta_a$ teljesül, másrészt a monotonitás feltevése miatt ebből $T^{*n}\delta_b \succeq T^{*n}\lambda_0 \succeq T^{*n}\delta_a$ dominanciareláció fennállása következik minden n-re. Ezért ha a $T^{*n}\delta_a$, illetve a $T^{*n}\delta_b$ sorozatok konvergensek, s határértékük megegyezik, akkor a valószínűségi mértékek eloszlásfüggvényeire vonatkozó konvergenciatételek felhasználásával megmutatható, hogy $T^{*n}\lambda_0$ is konvergens, s határértéke éppen az előbbi közös határérték.

Ehhez a $T^{*n}\delta_a$ sorozatról megmutatjuk, hogy a dominanciareláció szerint monoton növekedő. Ez látható abból, hogy az f nemcsökkenő függvényre $f(s) \geq f(a)$ minden $s \in [a,b]$ esetén, ezért az

$$T^*\delta_a(A) = \int_{\mathbf{Z}} Q(s,A)\, d\delta_a(s) = Q(a,A) \tag{3.31}$$

mérték szerinti integráljára

$$\int_{\mathbf{Z}} f(s)\, dT^*\delta_a(s) = \int_{\mathbf{Z}} f(s)\, Q(a,ds) \geq f(a) \int_{\mathbf{Z}} Q(a,ds) = f(a) \tag{3.32}$$

adódik. Ebből pontosan azt kaptuk, hogy tetszőleges f növekedő függvényre $\int_{\mathbf{Z}} f d\delta_a \leq \int_{\mathbf{Z}} f dT^*\delta_a$, ami pontosan a dominancia reláció definíciója.

Hasonló gondolatmenettel lehet megmutatni, hogy a $T^{*n}\delta_b$ sorozat monoton csökkenő a dominanciareláció szerint. Ugyanakkor fennáll az $\delta_b \succeq \delta_a$ összefüggés, s mivel Q monoton, ezért ebből az $T^{*n}\delta_b \succeq T^{*n}\delta_a$ adódik minden n-re. Összevetve az előző bekezdésben kapott monotonitási összefüggéssel látható, hogy az $\int_{\mathbf{Z}} f dT^{*n}\delta_a$, illetve az $\int_{\mathbf{Z}} f dT^{*n}\delta_b$ valós számsorozatok rendre monoton növekedő, illetve monoton csökkenő, korlátos sorozatok, következésképpen konvergensek.

A Feller tulajdonság miatt megmutatható az is, hogy a

$$\lambda_a = \lim_{n\to\infty} T^{*n}\delta_a \tag{3.33}$$

határértékek egyben invariáns mértékek is. Ez abból következik, hogy a Feller tulajdonság miatt alkalmazhatjuk az 23. állítás 2. pontját, amiből kapjuk, hogy a fenti konvergens sorozatokból a T^* transzformáció alkalmazásával előálló sorozat is konvergens, azaz fennáll az

$$T^*\lambda_a = \lim_{n\to\infty} T^{*(n+1)}\delta_a \tag{3.34}$$

összefüggés. Összevetve (3.33) kifejezéssel kapjuk, hogy a λ_a mérték invariáns. Hasonló gondolatmenettel lehet megmutatni, hogy a $\lambda_b = \lim_{n\to\infty} T^*\delta_b$ szintén invariáns mérték.

Ha a fentieken túlmenően az is teljesül, hogy az λ_a és az λ_b mértékek megegyeznek, akkor a korábban elmondottak szerint következik, hogy a valószínűségi mértékek $T^{*n}\lambda_0$ sorozatának létezik határértéke, s ez egyben a leképezés egyetlen invariáns mértékével egyezik meg. Ahhoz azonban, hogy ez a feltevés teljesüljön nem elégséges a Feller-tulajdonság, illetve a monotonitás feltevésének a teljesülése. A 28. feltevés fogalmazza meg azokat a további feltételeket, melyek fennállása szükséges és elégséges ahhoz, hogy az invariáns mérték unicitását biztosíthassuk.

3.2.3. Az átmenetfüggvény és az egyenlőtlenségi reláció: az adódó teoretikus következtetések

A fejezetben bemutatott jövedelemegyenlőtlenségi koncepció szerint az egy olyan bináris reláció a valószínűségi mértékek terén, mely kielégíti a monotonitási, progresszív transzfer és relatív invariancia tulajdonságokat. Ugyanakkor ezen tulajdonságok teljesülése, valamint a rendezés folytonos mivolta implikálja, hogy a rendezés reprezentálható (3.10) alakban. Ha ugyanakkor feltehető, hogy a jövedelemeloszlások dinamikáját meghatározó átmenetfüggvény monoton és konkáv (az előző alfejezet definíciója értelmében), akkor egy adott λ_0 és $T^*\lambda_0$ eloszlás között relációt „leképezi" $\lambda_n \mapsto T^*\lambda_n$ sorozatra. Ez azt jelenti, hogy ekkor a jövedelemeloszlások kialakuló dinamikus pályája mindenképpen monoton lesz, vagy növekedő, vagy csökkenő egyenlőtlenségek jellemzik.

Ez azonban nem jelenti azt, hogy maga a jövedelemeloszlások sorozata konvergens. Ha feltehető, hogy a Q átmenetfüggvény teljesíti a Feller tulajdonságot, akkor a fentiek értelmében létezik invariáns eloszlás. Azt azonban csak a keverő feltétel tudja biztosítani, hogy egyetlen invariáns eloszlás létezzen és az eloszlások sorozatának határértéke éppen ez az invariáns eloszlás legyen.

3.3. Függelék az 3. fejezethez: a növekedéselmélet konvergencia fogalma és a jövedelemeloszlások dinamikus modelljei

A fent bemutatott elmélet alapján a jövedelemeloszlások illetve az azokat jellemző egyenlőtlenségek leírására törekszik. A bevezető illetve a 2. fejezetben részletesen bemutatott konvergencia–vita alapján jutottunk el ahhoz a hármas osztályozáshoz, melynek során meghatároztuk azokat a kérdéseket, amelyeknek vizsgálata a dolgozat célját képezi. A továbbiakban egy kis kitérővel szeretnénk megmutatni, hogy a kiindulópontul választott konvergencia–vita, illetve az e gondolati körben alkalmazott konvergencia fogalma és a jövedelemegyenlőtlenségek kérdésköre valójában egészen más kérdéseket fed le. A két problematika ortogonalitása akkor a legszembetűnőbb, ha azokat a sztochasztikus folyamatok fogalmi rendszerébe ágyazzuk be.

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ mértéktér, s legyen $\{y_j(t), t = 0, 1, ...\}$ $j = 1, ...J$ sztochasztikus folyamat az előbbi mértéktéren, valamint $y_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Az egyes $y_j : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változókat tekinthetjük az egyes országok véletlen folyamatok által befolyásolt egy főre jutó jövedelmeinek. Jelölje $\lambda_j \in \Lambda(\mathbb{R}, R)$ azokat a valós számok Borel halmazain értelmezett valószínűségi mértékeket, melyeket az egyes y_j valószínűségi változók generálnak

$$\lambda_j(A_z) = \mathbf{P}\left(y_j^{-1}(A_z)\right) \tag{3.35}$$

módon. Kilépve a szokásos determinisztikus keretekből, s megengedve, hogy az egyes országok egy főre jutó jövedelmei a növekedési törvényektől véletlen hatások miatt eltérjenek, a konvergencia növekedéselméleti fogalmát álláspontunk szerint az alábbiak szerint lehetne specifikálni.

30. definíció. *Konvergenciáról beszélünk neoklasszikus értelemben, ha $\forall j$-re*

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_j(t) = \lambda_0 \tag{3.36}$$

a gyenge konvergencia topológia szerint.

Jelölje $Y_j(t)$ az $\{y_j(t), t = 0, 1, ...\}$ realizációját, azaz $Y_j(t) \in R_+$. Jelölje ezek rendezett statisztikáit rendre $Y_j^*(t)$, azaz

$$Y_1^*(t) \leq Y_2^*(t) \leq ... \leq Y_J^*(t) \tag{3.37}$$

és a realizációkból származtatott empirikus eloszlásfüggvényt $F_t(y)$, ahol

$$F_t(y) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ ha } y \leq Y_1^*(t) \\ \frac{j}{J}, \text{ ha } Y_j^*(t) < y \leq Y_{j+1}^*(t) \\ 1, \text{ ha } Y_J^*(t) < y \end{array} \right\} \tag{3.38}$$

és jelöljük $F(y)$-al az alábbi (degenerált) eloszlást:

$$F(y) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ ha } y \leq \bar{y} \\ 1, \text{ ha } y > \bar{y} \end{array} \right\} \tag{3.39}$$

ahol $\bar{y} \in R$ adott valós szám.

31. definíció. *Konvergenciáról beszélünk distributional értelemben, ha*

$$\lim_{t \to \infty} F_t(y) = F(y) \tag{3.40}$$

azaz a megfelelő (az F_t illetve F eloszlásfüggvény által meghatározott) valószínűségi mértékek gyengén konvergálnak.

A fenti két fogalom formális felírásával szeretnénk rávilágítani a két megközelítés közötti éles szakadékra, mely véleményünk szerint determinisztikus modellek esetében nem oly szembetűnő s gyakorta rejtve marad. A neoklasszikus növekedéselmélet megközelítése, mivel a reprezentatív ország koncepciójára épít valójában pusztán a konvergencia létét tudja vizsgálni, a konvergenciát abban az értelemben, hogy az egyes országok egy főre jutó jövedelmei, illetve annak valószínűségeloszlása tart-e valamilyen eloszláshoz – függetlenül az eloszlás jellegétől (azaz attól, hogy az megegyezik-e a Dirac mértékkel vagy sem). Ettől teljesen különböző kérdés, hogy az egyes országok véletlen folyamatoktól befolyásolt egy főre jutó jövedelmeinek konkrét realizációja által meghatározott eloszlásfüggvény konvergens-e, s határértékeként adódó eloszlásfüggvény vajon a Dirac mértéknek megfelelő egyetlen lépcsőből álló eloszlásfüggvény lesz-e.

Sztochasztikus keretben felírva a két fogalmat teljesen világos, hogy a (3.40) határérték létezéséről nem mond semmit nekünk a (3.36) folyamat konvergenciájának az ismerete. A két probléma tehát (a konvergencia egyfelől és a jövedelemeloszlások konvergenciája) valójában független egymástól.

3.4. A dinamikus modell nemparaméteres becslése

A fenti elmélet számszerűsítéséhez mindenekelőtt a jövedelemeloszlások illetve az átmenetfüggvény becslésére volt szükség. Mindkét esetben azzal a feltevéssel éltünk, hogy az eloszlás abszolút folytonos a Lebesque-mértékre nézve, s így létezik sűrűségfüggvénye. A feltétel, bár matematikai szempontból eléggé megszorító lehet, jelen esetben az alkalmazott módszertan alkalmazhatóságának a kritériuma.

A továbbiakban bemutatjuk az alkalmazott becslési eljárásokat. A kifejtést elsősorban [Silverman, 1986] illetve [Bosq, 1998] monográfiákra épül.

3.4.1. Eloszlásfüggvények becslése

Az eloszlások becslésére általánosan alkalmazható becslőfüggvény, mely független a folytonosság kérdésétől, az ún. empirikus eloszlásfüggvény. Ha n megfigyelésünk van egy eloszlásból, akkor az n megfigyelés rendezéséből előálló, $X_{[1]}, ..., X_{[n]}$ rendezett statisztikák alapján az empirikus eloszlásfüggvény definíció szerint

$$F_n(x) = \frac{i}{n}, \quad X_i < x \leq X_{i+1} \tag{3.41}$$

alakban írható fel. Megmutatható, hogy az empirikus eloszlásfüggvény pontonként tart a tényleges, F-el jelölt eloszlásfüggvényhez, azaz $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ teljesül az értelmezési tartomány minden x pontjára.

Kernel sűrűségfüggvény becslés

Tegyük fel, hogy a vizsgálatunk tárgyát képező eloszlás jellemezhető az f sűrűségfüggvénnyel, ahol az f -ről feltesszük a továbbiakban, hogy egy kellően tág függvényosztály tagja. Ismert tény, hogy ebben az esetben nem létezik a sűrűségfüggvénynek torzítatlan becslése. Az előző alfejezetben hivatkozott eredmények alapján tudjuk, hogy az F_n ún. empirikus eloszlásfüggvény az eloszlás torzítatlan becslését adja. Az eloszlásfüggvények és a valószínűségi mértékek $\mathbb{R}^1$-re jellemző kölcsönös egyértelműsége folytán meghatározhatjuk az F_n-nek megfelelő empirikus mértéket, mely definíció szerint az alábbi alakban írható fel:

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{(x_i)} \tag{3.42}$$

A μ_n empirikus mérték azonban nem abszolút folytonos a Lebesque mértékre nézve. Az előbbi kifejezésben az $X_1, ..., X_n$ jelöli a rendelkezésre álló adatokat az f sűrűségfüggvénnyel leírható eloszlásból.

Mivel a sűrűségfüggvény természetes becslőfüggvénye így nem származtatható közvetlenül a μ_n empirikus mértékből, ezért ezt transzformálni kell. Kernel módszer alkalmazása esetében μ_n regularizációja egy kellően folytonos kernellel való konvolúciója során történik meg, azaz a becslőfüggvény valójában $f_n(x) = (\mu_n * K_{h_n})(x)$ alakban írható fel, amiből az

$$f_n(x) = \frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) \tag{3.43}$$

$x \in R$ kernel becslése adódik f -nek[7].

A kifejezésben szereplő $K(.)$ az ún. kernelfüggvény, amely általában szimmetrikus sűrűségfüggvény, melyre teljesül, hogy $\lim_{x\to\infty} xK(x) = 0$, valamint $\int x^2 K(x) < \infty$. A leggyakrabban alkalmazott kernel függvények a gaussi kernel valamint az epanechnikov kernel, ahol ez utóbbi képlete

$$K(x) = \frac{3}{4\sqrt{5}}\left(1 - \frac{1}{5}x^2\right), \quad ha \quad |x| < \sqrt{5} \tag{3.44}$$

A kernel becslőfüggvény didaktikusabb levezetése során meg szokták mutatni, hogy az valójában a hisztogram általánosításának tekinthető. A (3.43) kifejezésben szereplő h_n az ún. sávszélességi paraméter. Ennek szerepe hasonló a hisztogramnál szereplő intervallumok hosszával. A sávszélességi paraméter pontosan azt mutatja meg, hogy az x pont milyen sugarú környezetébe eső megfigyeléseket vegyük figyelembe az sűrűségfüggvény x pontban felvett értékének a becsléséhez. E paraméter

[7] Az itt tárgyalt összefüggések általánosan, $\mathbb{R}^d$ esetében is érvényesek, ahogy ezt az irodalomban általában be is mutatják. Nekünk most elégséges az $\mathbb{R}$ esetre koncentrálnunk.

megválasztása kritikus f_n becslőfüggvény hatékonysága szempontjából. Viszonylag általános feltételek mellett[8] $n \to \infty$ esetén a $h_n \to 0$ és $nh_n^d \to \infty$ feltételek teljesülése szükséges és elégséges kritériuma annak, hogy az f_n becslőfüggvény az f elméleti sűrűségfüggvénynek konzisztens becslését adja.

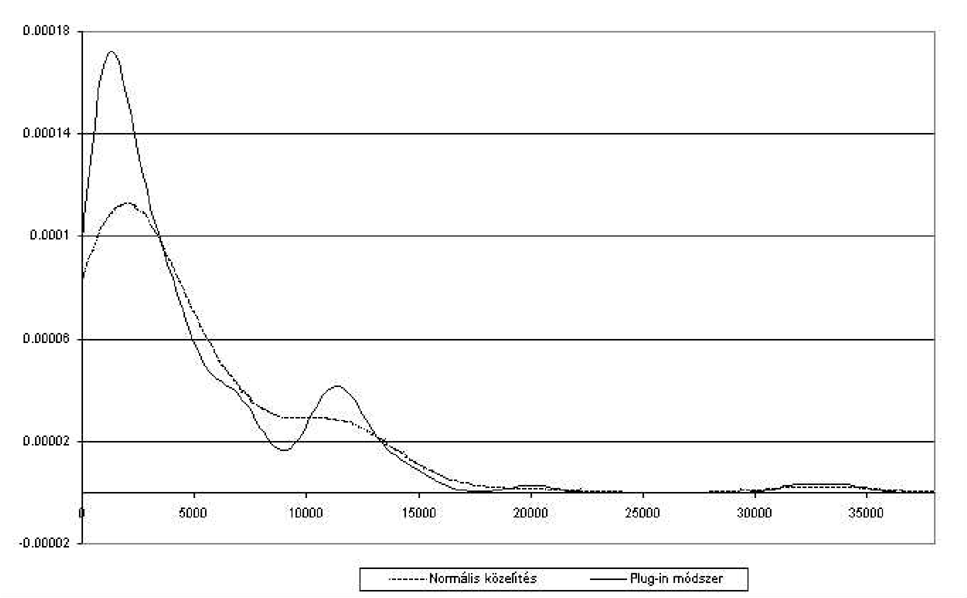
A kernel becslőfüggvény valójában egy adott pont környezetében található megfigyelések konvolúcióját hozza létre a kernelfüggvénnyel. Ennek megválasztásának a szerepe a becslés torzításában viszonylag kevésbé jelentős[9], mert nincs számottevő eltérés az egyes kernelek okozta torzítás mértékében. Szerepük elsődlegesen abban van, hogy az adott x pont környezetében található megfigyelések felhasználásával lokálisan pl. haranggörbét (gaussi kernel) vagy pl. lokális parabolákat (epanechnikov kernel) illesztünk-e az adatokra. A sűrűségfüggvény végső becslése az egyes pontokra illesztett folytonos pl. haranggörbék „átlagaként" adódik.

A konkrét alkalmazás során a sávszélességi paraméter megválasztása külön megfontolásokat igényel. Az alapvető problémát az okozza, hogy az optimális sávszélességi paraméter (vagyis az a paraméter, amely mellett a becslés átlagos négyzetes hibája (MSE) a legkisebb) a becsülni kívánt sűrűségfüggvény bizonyos jellemzőinek (nevezetesen a második derivált második momentumának) a függvénye. Ezért a becsülendő függvény ismeretének hiányában nem tudjuk megmondani az optimális sávszélességi paramétert sem.

A sávszélességi paraméter problematikájának a vizsgálatával lehet látni, hogy az probléma alapvetően a becslés torzítása és az adatokban rejlő zaj kiszűrése közötti ellentmondás feloldása. Minél nagyobb a sávszélességi paraméter, egy adott x pontnak annál nagyobb környezetébe eső megfigyeléseket vesz figyelembe az eljárás az x pontbeli sűrűség kiszámításához. Szélső esetben, ha a sávszélességi paraméter megfelelően nagy, tetszőleges x pont környezetébe esik az összes megfigyelés, s ilyenkor a becsült sűrűségfüggvény konstans lesz, azaz az egyenletes eloszlást adja vissza. Ennek megfelelően minél nagyobb a sávszélességi paraméter, annál nagyobb a becslés torzítása, annál inkább „kisimul" a sűrűségfüggvény. Ugyanakkor minél kisebb sávszélességi paramétert választunk, úgy a kialakuló becslés annál érzékenyebb lesz az egyedi adatokban meglévő hibákra, annál „zajosabb" lesz. A két szempont kö-

[8][Bosq, 1998], 42. old.

[9]Ld. pl. [Silverman, 1986], 40-43. old.



3.1. ábra.

Az egy főre jutó nemzeti jövedelmek sűrűségfüggvényének folytonos becslése az 1980. évi adatok alapján. (A sávszélességi paraméter értéke a normális közelítés esetében 2102$, a plug-in módszer esetében 968$.)

zötti optimalizáció révén megmutatható, hogy az optimális sávszélességi paraméter $n^{-1/5}$-el arányos.

Két gyakori út mutatkozik a fenti szempontok közötti feszültség minimalizálására és a sávszélességi paraméter becslésére. Az egyik, hogy az adatokból becslik az egyes kritériumokat, pl. az átlagos integrált négyzetes hibát (MISE) vagy annak aszimptotikus közelítését, s azon sávszélességi paramétert választják, amely minimalizálja ezen veszteségfüggvények értékét. Másik lehetséges eljárás, hogy az adatokból megkísérlik megbecsülni a sűrűségfüggvény második deriváltjának második momentumát valamely iteratív eljárással, s az így adódó sávszélességi paramétert alkalmazzák a sűrűségfüggvény becsléséhez.

Kiindulópontnak pedig gyakran felmerül „referenciapontok" választásának metódusa: ilyenkor általában a normális eloszlásra jellemző optimális sávszélességi paramétert alkalmazzák. Ennek értéke[10] $h_n = 1.06\sigma n^{-1/5}$. A hivatkozott műben azt is bemutatják, hogy az előbb említett paraméter használata általában túlsimítja

[10][Silverman, 1986], 45. old.

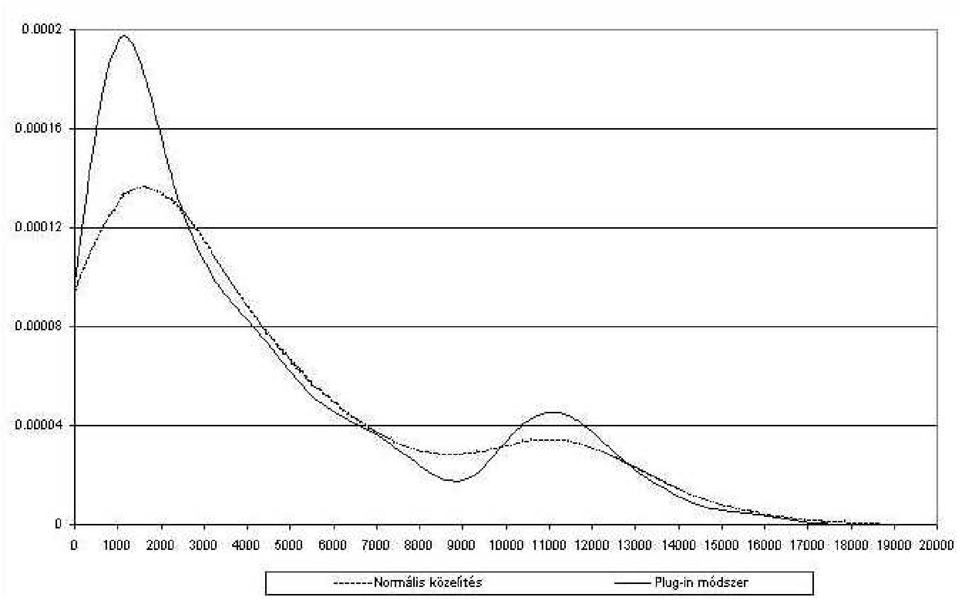
a több móduszú eloszlásokat.

Az általunk vizsgált esetben is pontosan ez a szituáció alakult ki. A 2.1. ábrán mutatjuk be az 1960. évi adatok alapján becsült sűrűségfüggvényt, a 3.1. ábrán az 1980. évi adatok alapján, s végül a 3.3. ábrán az 1986. évi adatok alapján becsült eloszlást. A sűrűségfüggvényt két különböző sávszélességi paraméterérték mellett számítottuk, az egyik esetben a normális eloszlásnak megfelelő, korábban említett paraméterértéket használtuk. A másik esetben az ún. kétfázisú plug-in módszert alkalmaztuk a sávszélességi paraméter megválasztására.[11] A direkt plug-in eljárások esetében az adatokból közvetlenül becsüljük az ismeretlen f sűrűségfüggvény második deriváltjának funkcionálját, s ebből kapjuk meg az optimális sávszélességi paramétert. Az eljárás nehézsége, hogy a deriváltak funkcionáljainak becsléséhez szintén szükség van sávszélességi paraméter megválasztására, amelyre vonatkozóan hasonlóan nem állnak rendelkezésre kézzel fogható információk. Ugyanakkor megmutatható, hogy egy tetszőleges „pilot" becslésnél alkalmazott sávszélességi paraméter értékére kevéssé érzékeny az eljárás. Ebből fakad a plug-in eljárások iteratív jellege: kiindulva valamely referencia-értékből (többnyire a normális eloszlás esetén alkalmazottból), több lépésen keresztül eljuthatunk az optimális sávszélességi paraméter pontosabb becsléséhez.

A becsült sűrűségfüggvények összevetésével látható, hogy egyrészt valóban jelen esetben a normális eloszlás által meghatározott sávszélességi paraméter nagyobb, mint a plug-in módszer által adott, másrészt az eloszlás is kisimítottabb, kevesebb „púp" található benne. De még így is, a mindkét esetben tisztán kivehetően több módusszal rendelkezik az eloszlás, látható, hogy az alacsonyabb jövedelmű rétegek kimagaslóan magasabb aránya mellett létezik egy magasabb jövedelmi rétegű kategória is. Ugyanakkor ha összevetjük az 1960-as év adatai alapján készült sűrűségfüggvényt a későbbiekkel, két fő jellegzetesség ötlik szembe. Egyfelől, hogy növekedett a jövedelmek abszolút szintje. Ez nem nyilvánvaló a sűrűségfüggvényekből, de látható, hogy a móduszok, a függvény lokális maximumhelyei vándoroltak, többnyire növekedtek.

A kiragadott három év esete általánosnak és egyben egyedinek is tekinthető.

[11] A plug-in módszer kifejtését tartalmazza [Wand és Jones, 1995] monográfia. Az eljárást ezen forrás alapján implementáltuk.

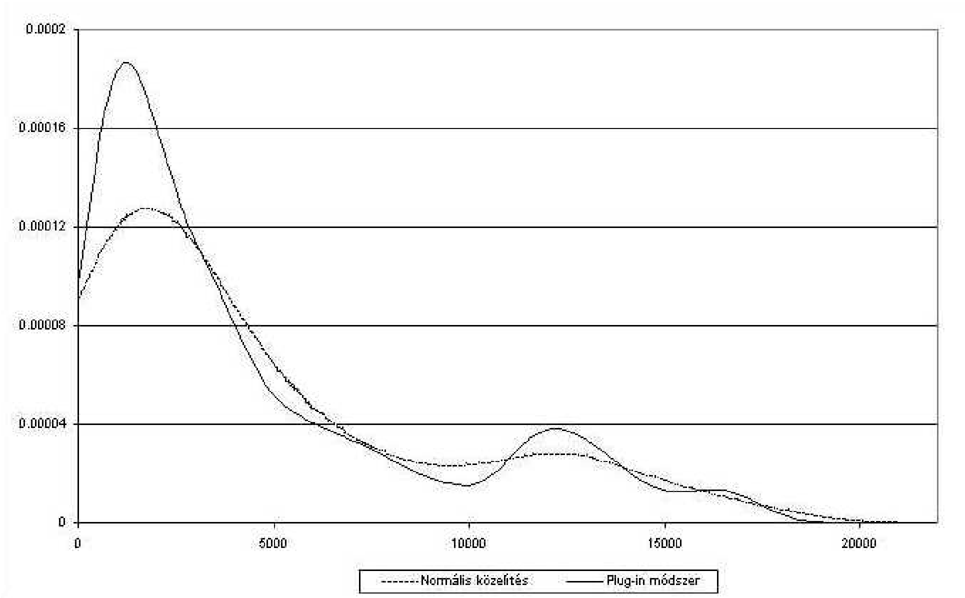


3.2. ábra.

Az egy főre jutó nemzeti jövedelmek sűrűségfüggvénye az 1979. évi adatok alapján. (A sávszélességi paraméter értéke a normális közelítés esetén 1556$, plug-in módszer esetén 797$.)

Az összes évre vonatkozó sűrűségfüggvényt terjedelmi okokból nem áll módunkban bemutatni, de nincs is szükség rá. A legtöbb évet nagyon hasonló sűrűségfüggvények jellemeztek, kisebb elmozdulásokat figyelhetünk meg a lokális maximumok helyeit illetően, valalmint az adatok zajosságában, azaz a függvény simaságában lelhetők fel kisebb különbségek.

Ezekből a szempontokból az 1980-as év mindenképpen kivételnek tekinthető. Összevetve a közvetlenül megelőző évvel (ld. a 3.2. ábra) láthatjuk, hogy a jövedelmek terjedelme jelentősen megnövekedett, s a függvény „púpjainak" a száma is megnőtt eggyel. 1979-ben az alacsony jövedelmű csoport 1100$ környékén mozog, a magasabb jövedelmű módusz 11100$ körül. Egy évvel később e két csoport helyzete nagyjából változatlan, pusztán megjelenik egy további csúcs 32000$(!) körül. Ennek a jelenségeknek igazából csak az adathalmazban rejlő egyenlőtlenségek lehetnek az okai: három olyan olaj-országra vonatkozó adat is csak 1980-tól áll rendelkezésre, amelyek egy főre jutó jövedelmei egyenként is két illetve háromszorosai a korábbi fejlett országokra jellemző értékeknek. Ugyanez a magyarázat arra



3.3. ábra.

Az egy főre jutó nemzeti jövedelmek sűrűségfüggvénye az 1986. évi adatok alapján. (A sávszélességi paraméter értéke a normális közelítés esetén 1754$, plug-in módszer esetén 851$.)

a korábban látott eredményre is, miszerint az egyenlőtlenségi mutatók értékében rendre ugrás tapasztalható 1980 körül.

A sűrűségfüggvények vizsgálatával nyerhető további összefüggés, mely önmagában nehezen igazolható, hogy az 1960-as éveket jellemző eloszlásokban nem nyilvánvaló, hogy két, vagy három módusszal állunk-e szemben. Az alacsony jövedelmeket jellemző csúcs mellett két magasabb jövedelmi csúcs is található; valójában az 5500$ és a 8000$ közötti egy főre eső jövedelmi nagyságok esetében a sűrűségfüggvény közel vízszintes, mely intervallumba eső országok esetében közel egyenletes eloszlást sugall. Úgy tűnik tehát, hogy ekkor még létezik a közepes, inkább magas jövedelmű országoknak egy széles palettája, mely a későbbi évek folyamán elvékonyodik. De arra a kérdésre, hogy egy adott jövedelmi szinttel rendelkező ország milyen felzárkózási esélyekkel rendelkezik, az átmenetfüggvény becslésére van szükség. Ezt fogjuk módszertanilag és számításaink tükrében bemutatni a következő fejezetben.

3.4.2. Az átmenetfüggvény becslése kernel regresszió alkalmazásával

Az $Q(z, A)$ átmenetvalószínűségek folytonos becsléséhez a kernel regresszió módszertanát használtuk fel. A következő néhány bekezdésben [Bosq, 1998] alapján bemutatjuk röviden a kernel regresszió alapgondolatát, majd az általunk konkrétan számított kifejezés tárgyalására térünk rá.

Tegyük fel, hogy a $Z_t = (X_t, Y_t)$, $t \in Z$ szigorúan stacionárius folyamat és legyen az $m(.)$ Borel függvény olyan, hogy $E(|m(Y_0)|) < \infty$. Feltesszük továbbá, hogy Z_0-nak létezik $f_Z(x, y)$ sűrűségfüggvénye, továbbá, hogy az $f_Z(x, .)$ valamint $m(.) f_Z(x, .)$ mind L^1-beli függvények. Ekkor definiálhatjuk az alábbi függvényeket:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f_Z(x, y)\, dy \tag{3.45}$$

amely valójában X_0 „peremeloszlását" fejezi ki. Az $m(.)$ transzformált valószínűségi változó „feltételes várható értékét" mutatja a $\varphi(.)$ függvény, azaz

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} m(y) f_Z(x, y)\, dy \tag{3.46}$$

Az $r(.)$ regressziós együttható az f és φ függvények segítségével az alábbiak szerint írható fel:

$$r(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x)}{f(x)} & ha \quad f(x) > 0 \\ E(m(Y_0)) & ha \quad f(x) = 0 \end{cases} \tag{3.47}$$

A kifejezésből látható, hogy az „heurisztikusan" az $E(m(Y_0) \mid X_0 = x)$ függvény egy verziójának tekinthető adott $x \in R$ esetén.

Az $r(.)$ regressziós együttható becsléséhez az empirikus mértékek folytonos sűrűségfüggvényekkel való konvolúcióján keresztül juthatunk el. A $\varphi(.)$ függvénynek megfelelő empirikus mérték a korábbi jelölésekkel

$$\upsilon_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \delta_{(X_t, m(Y_t))} \tag{3.48}$$

alakban írható fel, s ennek peremeloszlása, azaz az f függvény empirikus mértéke

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{(x_i)} \tag{3.49}$$

alakban. A nemparaméteres kernel becslőfüggvényekhez υ_n és μ_n konvolúcióval történő regularizációja révén juthatunk el f és φ természetes becslőfüggvényeihez. Ezek rendre

$$f_n(x) = \frac{1}{nh_n}\sum_{t=1}^{n} K\left(\frac{x-X_t}{h_n}\right) \tag{3.50}$$

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{nh_n}\sum_{t=1}^{n} m(Y_t)\, K\left(\frac{x-X_t}{h_n}\right) \tag{3.51}$$

alakban írható fel. Ezek alapján $r(.)$ regressziós paraméter kernel becslését az alábbi kifejezéssel lehet felírni

$$r_n(x) = \begin{cases} \frac{\varphi_n(x)}{f_n(x)} & ha \quad f_n(x) > 0 \\ \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} m(Y_t) & ha \quad f_n(x) = 0 \end{cases} \tag{3.52}$$

32. megjegyzés. *Vegyük észre, hogy r_n felírható az alábbi súlyozott átlag formában:*

$$r_n(x) = \sum_{t=1}^{n} p_{nt}(x)\, m(Y_t) \tag{3.53}$$

ahol

$$p_{nt}(x) = \begin{cases} \frac{K\left(\frac{x-X_t}{h_n}\right)}{\sum_{s=1}^{n} K\left(\frac{x-X_s}{h_n}\right)} & ha \quad f_n(x) > 0 \\ \frac{1}{n} & ha \quad f_n(x) = 0 \end{cases} \tag{3.54}$$

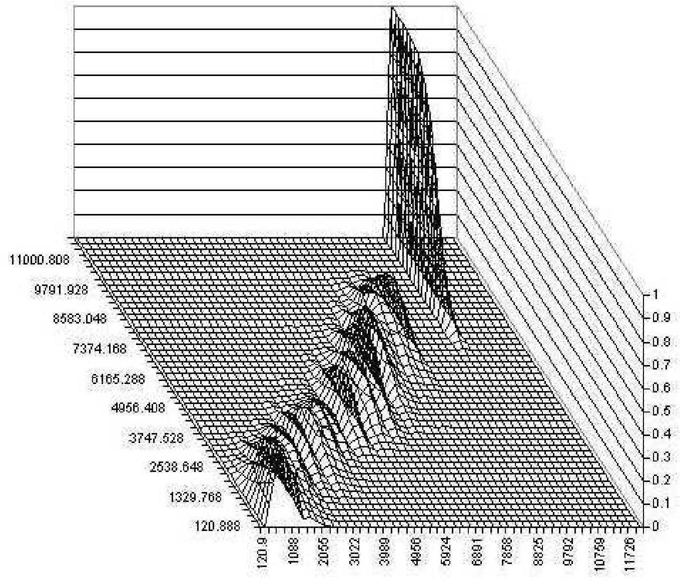
Az $Q(z, A)$ átmenetfüggvény becsléséhez a fenti általános esethez képest az

$$r(z) = \mathbf{P}(Y \in A \mid X = z)\,, \quad ahol \quad A \in \mathcal{B} \tag{3.55}$$

valószínűségek meghatározása a feladatunk. A továbbiakban jelölje $Z_i(t)$ az egyes megfigyeléseket a $t = 0, ..., T$ időpontokban az $i = 1, ..., n$ országokra vonatkozóan. Ekkor a t időpontról a $t+1$-ik időpontra történő átmenetvalószínűségek becsléséhez a fenti általános sémában az $X = Z(t)$ illetve $Y = Z(t+1)$ választással juthatunk el. Továbbá a korábbi $m(.)$ függvényt az A halmaz karakterisztikus függvényének választottuk. Ebből a következő becslőfüggvény adódott:

$$Q_n(z, A) = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^{n} \chi_A(Z_i(t+1)) K\left(\frac{z-Z_i(t)}{h_n}\right)}{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{z-Z_i(t)}{h_n}\right)} & ha \quad \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{z-Z_i(t)}{h_n}\right) > 0 \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \chi_A(Z_i(t+1)) & ha \quad \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{z-Z_i(t)}{h_n}\right) = 0 \end{cases} \tag{3.56}$$

A fenti becslőfüggvény alkalmazásával készítettük el az egy főre jutó GDP-k adatai alapján a nemzetközi jövedelemeloszlások pályáját meghatározó egy lépéses



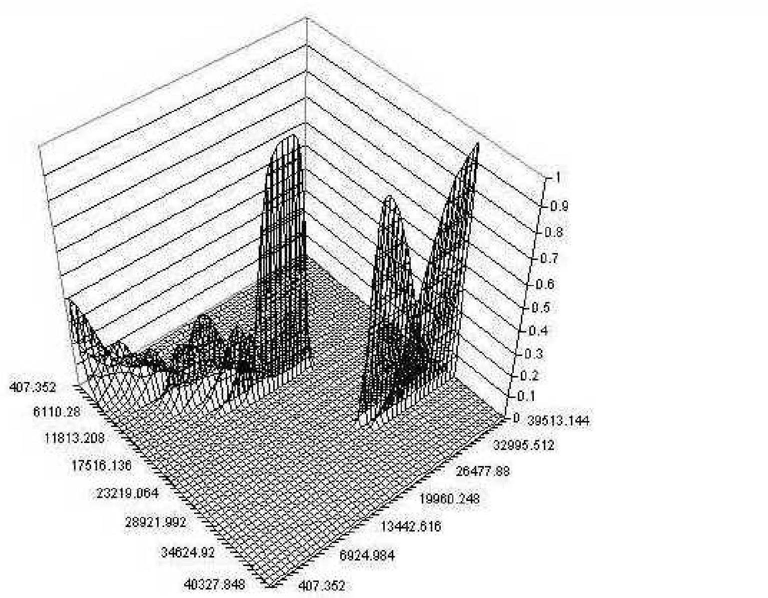
3.4. ábra.

Az átmenetfüggvény felülete a PWT alapján becsülve az 1960-61 évekre.

átmenetfüggvények becslését, melyek rendre az 3.4., 3.5. és 3.6. ábrákon láthatunk. A sávszélességi paramétert [Bosq, 1998] alapján $\hat{\sigma} n^{-1/5}$ értéknek választottuk.

Az átmenetfüggvények vizsgálatával láthatjuk, hogy pozitív értékek többnyire csak a főtengely mentén találhatóak, melyek alapján az egyes jövedelmi rétegekhez való tartozás magas stabilitása olvasható ki. Az ábrákon bemutatott évek, hasonlóan a sűrűségfüggvényekhez, általánosnak tekinthetők abban az értelemben, hogy a leolvasható főbb jellegzetességek minden egyes év esetén megfigyelhetőek voltak, melyeket most nem áll módunkban közölni. E jellegzetességek között említenénk meg a főátlóra való „ráhúzódás” mellett azt is, hogy az egészen alacsony, illetve a kiemelkedően magas jövedelmek esetén az átmenetfüggvény kiugróan magas értéket vesz fel, amely azt jelenti, hogy sokkal szűkebb az a jövedelmi tartomány, amelyben egy időszak múlva található lesz. Ennek a tartománynak a pontos meghatározásához az átmenetfüggvény síkmetszeteinek a meghatározásával juthatunk el.

Az 1980-as évre vonatkozóan ugyanakkor megint kiugró értékeket is találhatunk, szemben az 1960-as és 1986-os évre számított, sokkal „összefüggőbb” átmenetfüggvényekkel. Ennek az oka abban van, hogy az 1980-81 évek adatai alapján számított



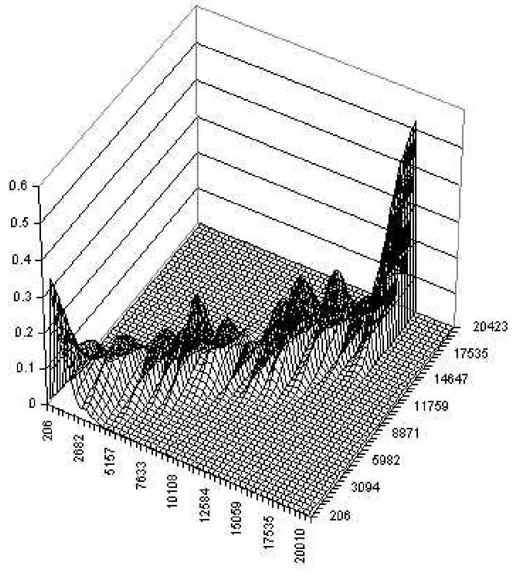
3.5. ábra.

Az átmenetfüggvény felülete a PWT alapján becsülve az 1980-81 évekre.

átmenetfüggvényt meghatározzák azok a kiugró értékek, melyek már korábban is az ezekben az években megfigyelt jövedelmi különbség-növekedést előidézték.

Az 1.2. fejezet összefoglalásában említett három részkérdés közül a harmadik, nevezetesen az egyes országok felzárkózási lehetőségeinek egy lehetséges vizsgálati módja az átmenetfüggvények számszerűsítése. Ezekből leolvasható, hogy egy adott jövedelmű ország esetén a következő időszakban milyen valószínűségeloszlás írja le a jövedelmi helyzetét. Láthatjuk, hogy igen jelentős, számottevő ugrásokra az általunk vizsgált adatbázisban nem találtunk példát. A mobilitás alacsony fokára korábban utaló jelek (a jövedelmi egyenlőtlenségek alig változó értékei, a jövedelmek eloszlásának becsült sűrűségfüggvényei, mely szintén alig változott, valamint a diszkrét állapotterű becsléseknél explicit módon mérhető mobilitiási mutatók alacsony értékei) alapján a kapott eredmények megerősíthetik azt a hipotézist, mely szerint az egyes gazdaságok nemzetközi jövedelemeloszlásban elfoglalt helye alig változik, a vizsgálati horizonton gyakorlatilag stabilnak tekinthető.

A következtetések értelmezését korlátozza, hogy a fenti ábrákon egy lépéses átmenetfüggvényeket láthatunk. Egy év alatt várhatóan nem változik olyan jelentősen egy ország jövedelme, ami annak az országok közötti relatív pozícióját,



3.6. ábra. Az átmenetfüggvény felülete, a PWT alapján becsülve, 1986-87 évekre.

valamint az átmentfüggvényben látványos kiugrást eredményezhetne. Ugyanakkor a probléma természetéből fakadóan hosszabb távú jelenségre koncentrál. Ezért a felzárkózási esélyek meghatározásakor szükség lehet a több lépéses átmenetek vizsgálatára. Ez több módszertani probléma vizsgálatát is igényli. Egyrészt ebben az esetben felmerül a stacionaritás kérdése, nevezetesen, hogy az ámenetfüggvényt időben változatlannak lehet-e feltételezni, s ekkor ennek iterálásával vizsgálhatjuk hosszabb időtávon az átmenetek kérdését.

Összefoglalás

A dolgozatban a kilencvenes években széleskörű kutatásokat kiváltott konvergencia vitához kívántunk hozzászólni mind teoretikus, mind empirikus alapokon.

A konvergencia–vita a Solow modell sokadik reneszánszát hozta, amely a növekedéselméletet a kilencvenes években újra a makroökonómiai vizsgálatok fő áramához csatolta. Az az eredeti szerep, amely az endogén versus exogén technikai fejlődésre épülő növekedési modellek közötti igazságtételre vonatkozott korán megbukott, részben a mérés módszertani problémáinak a végeérhetetlen sorozata révén, részben tudományelméleti megfontolások következtében is.

A konvergencia–vita nem kisebb kérdéskörre, mint az egyes országok felemelkedésének, gazdagságának és hanyatlásának folyamatára kívánt összpontosítani. E kérdéskört az elemezhetőség kedvéért három alkérdésre bontottuk, s a válaszokat ezen részproblémákra kerestük.

Jövedelmi egyenlőtlenségek. Komparatív statikai eszközökkel vizsgáltuk az egy főre jutó nemzeti jövedelmek egyenlőtlenségét az 1960-1992-es időszakban. Az egyenlőtlenség mérését számos egyenlőtlenségi mutató számításával végeztük el. A mutatók többsége *relatív* egyenlőtlenséget mért, s mivel azonos axiómákból vezettük le őket, így a változás irányára vonatkozóan többnyire azonos eredményeket is kaptunk.

A számszerű eredmények alapján megállapítható, hogy az egy főre jutó jövedelmek relatív egyenlőtlenségében történt változás leginkább stagnálásként fogható fel, sem látványos javulás, sem látványos csökkenés nem következett be. A területi autokorrelációs vizsgálat fontos üzenettel egészíti ki az előző észrevételt: miközben világméretekben nem mutatható ki számottevő változás a jövedelmi különbségek szintjében, addig Európa és Amerika esetében megfigyelhető homogenizálódás. Ez utalhat arra is, hogy (a konvergencia klubok teóriájának megfelelően) a világ egyes régióiban az országok gazdasági értelemben vett hasonulása megy végbe, a folyamat azonban egyelőre nem terjed ki világgazdasági szintre. Sőt, amennyiben a kontinensenkénti elemzés eredményeit megfigyeljük, láthatjuk, hogy a gazdaságilag homogénebbnek tekinthető régiók Afrika és Ázsia esetében egyáltalán nem esnek egybe a kontinenshatárokkal. Ez az eredmény, tekintve hogy ebben az esetben igen heterogén kontinensekről van szó, akár közhelyszerűnek is tűnhet, de valójában nagyon komoly kérdéseket vet fel a konvergencia–klubok elméletének további empirikus elemzése felé.

Amennyiben a területi autokorrelációs vizsgálatot a konvergencia–klubok létezésének bizonyítékanént tekintjük, akkor felmerülhet a kérdés, hogy milyen tényezők határozzák meg az egyes klubokhoz tartozást. A területi elhelyezkedés igen bizonyosan fontos tényezője a gazdasági prosperitásnak, de nyilvánvalóan vannak további tényezők is, melyeket hasonlóképpen meg kell vizsgálni a „klubokhoz tartozás" meghatározásához.

Jövedelemeloszlás. Az egy főre jutó jövedelmek nemzetközi eloszlásának a jellemzésére nemparaméteres statisztikai eszközökkel elvégeztük a jövelemeloszlás becslését.

A kirajzolódó jövedelemeloszlás lokális tulajdonságaitól eltekintve nagymértékben hasonlít a lognormális eloszlásra. Fontosnak tartjuk megemlíteni, hogy egy jövedelemeloszlás sűrűségfüggvénye azon koncepciót testesíti meg, hogy a jövedelmek egyének (vagy országok) közötti eloszlását valamely véletlen folyamat határozza meg, azaz a jövedelmek várható értéke minden egyes egyén (vagy ország) esetében azonos, az eltéréseket pedig valamely multiplikatív véletlen folyamat okozza. Ennek felel meg a lognormális eloszlás, amelynek fontos jellemzője, hogy egymóduszú. Az általunk becsült eloszlásfüggvény esetében ez a tulajdonság azonban nem mondható el, még a mérésben lévő módszertani bizonytalanságok ellenére is a becsült sűrűségfüggvény minden egyes évre legalább két módusszal rendelkezik. Ez arra utal, hogy a jövedelmeket több, különböző véletlen folyamat hatázza meg, amelyek eredőjeként rajzolódik ki a „kétpúpú" eloszlás.

Az a megközelítés tehát, amelyik a „reprezentatív ország" koncepciója alapján minden ország növekedési lehetőségeit azonos modell keretein belül kísérli leírni, az előbbi eredmények tükrében kevésbé adekvát leírása lehet a jövedelmek eloszlását meghatározó folyamatoknak, mint amilyennek azt a konvergencia–vita korai szakaszában bemutatták.[12]

Differenciálódás vagy nivellálódás. A differenciálódási versus nivellálódási folyamatok feltárása céljából a komparatív statikai vizsgálatot kiegészítettük dinamikus modell építésével. Kétségkívül a várható változásra vonatkozó kérdés a legnehezebb s talán ez az a pont, ahol a legnagyobb bizonytalansággal érvelhetünk felzárkózás mellett vagy ellen. A modellben a jövedelemeloszlások pályáját stacionárius Markov folyamat határozza meg. A modell alapján megállapítható, hogy jövedelmi eloszlások dinamikáját meghatározó folyamat konvergenciája csak igen szigorú feltételek mellett létezik. Az átmenetfüggvény ilyen tulajdonságainak formális tesztelésére jelenleg nem létezik kidolgozott statisztika, ezért szigorú értelemben véve nem tudjuk ennek empirikus létezését ellenőrizni. Azonban még abban az esetben is, amennyiben a folyamatnak létezik invariáns eloszlása (sőt, esetleg annak unicitása is biztosítható), a jelenlegi modell keretei között nem tudjuk azt biztosítani, hogy ez az eloszlás az egy pontra koncentrálódott, elfajult eloszlás legyen.

Felzárkózási esélyek. Kiinduló hipotézisünk szerint a dinamikát Markov folyamatként lehet leírni, ahol az átmeneteket meghatározó függvény empirikus becslését is elvégeztük. A becslés eredményeként adódó átmenetfüggvények megerősítették a komparatív statikai vizsgálat által adott következtetést. Láthatóan az egyes országok jövedelmi helyzeteit nagyfokú stabilitás jellemzi, a felzárkózási esélyek az irodalomban általában elfogadott álláspontnak megfelelően alacsony értéket vesznek fel.

[12] A későbbiekben a béta konvergencia fogalmát felváltotta a feltételes konvergencia fogalma, álláspontunk szerint ez azonban nem ad választ a nemzetközi jövedelemegyenlőtlenségi viszonyokban várható változásra.

Hivatkozások

Arrow, K. J. (1962). The economic implications of learning by doing. *Review of Economic Studies*, pages 155–73.

Atkinson, A. B. (1980). On the measurement of inequality. In *Wealth, Income and Inequality*. Oxford Univ. Press.

Barro, R. J. – Mankiw, N. G., – Sala-i Martin, X. (1995). Capital mobility in neoclassical models of growth. *The American Economic Review*, 85.

Barro, R. J. – Sala-i Martin, X. (1992). Convergence. *Journal of Political Economy*, 100.

Barro, R. J. – Sala-i Martin, X. (1995). *Economic Growth*. McGraw Hill, Inc., New York.

Bernard, A. B. – Jones, C. I. (1996). Technology and convergence. *The Economic Journal*, 106.

Bosq, D. (1998). *Nonparametric Statistics for Stochastic Processes Estimation and Prediction*. Springer-Verlag, New York.

Cliff, A. D. – Ord, J. K. (1973). *Spatial Autocorrelation*. Pion Limited, London.

Durlauf, S. N. (1996). On the convergence and divergence of growth rates (an introduction). *The Economic Journal*, 106.

Durlauf, S. N. – Quah, D. T. (1998). The new empirics of economic growth. Technical Report 6422, NBER Working Paper.

Ebert, U. (1988). Measurement of inequality: An attempt at unification and generalization. In *Distributive Justice and Inequality*, pages 59–81. Springer-Verlag, Berlin.

Farkas, J. (1994). *Perlekedő tudáselméletek*. Gondolat Kiadó, Budapest.

Friedman, M. (1992). Do old fallacies ever die? *Journal of Economic Literature*, 30:2129–2132.

Galor, O. (1996). Convergence? inferences from theoretical models. *The Economic Journal*, 106.

Garthwaite, P. H. – Jolliffe, I. T., – Jones, B. (1995). *Statistical Inference*. Prentice Hall, London.

Grossman, G. M. – Helpman, E. (1994). Endogenous innovation in the theory of growth. *Journal of Economic Perspectives*, 8:23–44.

Haan, W. J. (1995). Convergence in stochastic growth models: The importance of why income levels differ. *Journal of Monetary Economics*, 35:65–82.

Hajdú, O. (1997). *A szegénység mérőszámai*. KSH, Budapest.

Hall, P. – DiCiccio, T. J., – Romano, J. P. (1989). On smoothing and the bootstrap. *Annals of Statistics*, 17:692–704.

Hofer, H. – Wörgötter, A. (1997). Regional per capita income convergence in austria. *Regional Studies*, 8:57–69.

Kangasharju, A. (1997). Relativ income performance in finland: Regional convergence. *Regional Studies*, 33:207–217.

Kelly, M. (1992). On endogenous growth with productivity shocks. *Journal of Monetary Economics*, 30:47–56.

Krtscha, M. (1984). A new compromise measure of inequality. In *Models and Measurement of Welfare and Inequality*. Springer-Verlag, Berlin.

Krugman, P. (1991a). *Geography and Trade.* Leuven University Press and The MIT Press.

Krugman, P. (1991b). Increasing returns and economic geography. *Journal of Political Economy*, 99:483–499.

Krugman, P. (1995). *Development, Geography and Economic Theory.* The MIT Press, Cambridge.

Krugman, P. – Venables, A. J. (1995). Globalization and the inequality of nations. *The Quaterly Journal of Economics*, 110.

Lee, M. – Longmire, R. – Mátyás, L., – Harris, M. (1996). Growth convergence: Some panel data evidence. Technical Report 14/96.

Leung, C. K. Y. – Quah, D. T. (1996). Convergence, endogenous growth and productivity disturbances. *Journal of Monetary Economics*, 38:535–547.

Levy, H. (1992). Stochastic dominance and expected utility: Survey and analysis. *Management Science*, 38.

Lucas, Jr, R. E. (1988). On the mechanics of economic development. *Journal of Monetary Economics*, 22:3–42.

Lucas, Jr, R. E. (1993). Making a miracle. *Econometrica*, 61:251–271.

Lucas, Jr, R. E. – Stokey, N. L. (1989). *Recursive Methods in Econonic Dynamics.* Harvard University Press, Cambridge.

Major, K. (1998). Nemzetközi jövedelemegyenlőtlenségek változási tendenciái. In *A jövő a jelenben - átalakuló társadalom, új tudományos problémák PhD hallgatók előadásai az első nemzetközi konferencián*, Budapest. BKE Posztgraduális Kar.

Major, K. (1999). Nemzetközi jövedelemegyenlőtlenségek változási tendenciái. *Szigma*, 30:55–77.

Major, K. (2000). Világméretű jövedelemegyenlőtlenségek regionális tényezői geográfus doktoranduszok iii. országos konferenciája 1998. In *A földrajz jövője, a jövő földrajzosai*, Debrecen. Debreceni Egyetem TTK.

Major, K. – Martos, B. (2001). Változott a nyugdíjak eloszlása. In *Reform körkép után Tanulmányok a nyugdíjrendszerről*, Budapest. Közgazdasági Szemle Alapítvány.

Major, K. – Nemes Nagy, J. (1999). Területi jövedelemegyenlőtlenségek a kilencvenes években. *Statisztikai Szemle*, 77:397–421.

Mankiw, N. G. – Romer, D., – Weil, D. N. (1992). A contribution to the empirics of economic growth. *Quaterly Journal of Economics*, 107:407–437.

Martin, R. (1998). Regional incentive spending for european regions. *Regional Studies*, 32:527–536.

Mur, J. (1996). A future for europe? result with a regional prediction model. *Regional Studies*, 30:549–565.

Nemes Nagy, J. (1998). *A tér a társadalomkutatásban*. Budapest.

Neven, D. – Gouyette, C. (1996). Regional convergence in the european community. *Journal of Common Market Studies*, 32:47–65.

Pack, H. (1994). Endogenous growth theory: Intellectual appeal and empirical shortcomings. *Journal of Economic Perspectives*, 8:55–72.

Persson, J. (1997). Convergence across the swedish counties. *European Economic Review*, 41:951–958.

Quah, D. T. (1993a). Empirical cross-section dynamics in economic growth. *European Economic Review*, 37:426–434.

Quah, D. T. (1993b). Galton's fallacy and test of the convergence hypothesis. *Scandanavian Journal of Econonics*, 95.

Quah, D. T. (1996a). Convergence as distributional dynamics (with or without growth). Technical Report 134, LSE Working Paper.

Quah, D. T. (1996b). Empirics for economic growth and convergence. *European Economic Review*, 40:1353–1375.

Quah, D. T. (1996c). Regional convergence clusters across europe. *European Economic Review*, 40:951–958.

Quah, D. T. (1996d). Twin peaks: Growth and convergence in models of distributional dynamics. *The Economic Journal*, 106.

Quah, D. T. (1997). Empirics for growth and distribution: Stratification, polarization and convergence clubs. Technical Report 324, LSE Working Paper.

Romer, P. M. (1986). Increasing returns and long-run growth. *Journal of Political Economy*, 94.

Romer, P. M. (1994). The origins of endogenous growth. *Journal of Economic Perspectives*, 8.

Sala-i Martin, X. (1996a). The classical approach to convergence analysis. *The Economic Journal*, 106.

Sala-i Martin, X. (1996b). Regional cohesion: Evidence and theories of regional growth and convergence. *European Economic Review*, 40:1325–1352.

Shaked, M. – Shantikumar, J. G. (1994). *Stochastic Orders and Their Applications.* Probability and Mathematical Statistics. Academic Press, Inc., Boston.

Silverman, B. W. (1986). *Density Estimation for Statistics and Data Analysis.* Chapman & Hall, London.

Silverman, B. W. – Young, G. A. (1987). The bootstrap: To smooth or not to smooth? *Biometrica*, 32:537–546.

Siriopoulos, C. – Asteriou, D. (1998). Testing for convergence across the greek regions. *Regional Studies*, 32:537–546.

Solow, R. M. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *Quaterly Journal of Economics*, 70:65–94.

Solow, R. M. (1994). Perspectives on growth theory. *Journal of Economic Perspectives*, 8:45–54.

Summers, R. – Heston, A. (1991). The penn world table (mark 5): An expanded set of international comparisons. *Quaterly Journal of Economics*, 106:327–368.

Tamura, R. (1991). Income convergence in an endogenous growth model. *Journal of Political Economy*, 99.

Vinod, H. D. (1993). Bootstrap methods: Applications in econometrics. In *Handbook of Statistics*, volume 11, pages 629–661. Elsevier Science Publisher B.V.

Wand, M. P. – Jones, M. C. (1995). *Kernel Smoothing*. Chapman & Hall, London.