LIGETI ZSOMBOR

GAZDASÁGI NÖVEKEDÉS ÉS FELZÁRKÓZÁS

MAKROÖKONÓMIA TANSZÉK

Témavezető: Meyer Dietmar, kandidátus, egyetemi docens

BUDAPESTI KÖZGAZDASÁGTUDOMÁNYI ÉS ÁLLAMIGAZGATÁSI EGYETEM

KÖZGAZDASÁGI PH.D. PROGRAM

GAZDASÁGI NÖVEKEDÉS ÉS FELZÁRKÓZÁS

Ph.D. értekezés

LIGETI ZSOMBOR

BUDAPEST, 2002.

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke

Táblázatok jegyzéke

„Once one starts to think about [economic growth], it is hard to think about anything else.” (Robert Lucas [1988])

1. Bevezetés

1.1. Motiváló tényezők

[1]Az elmúlt évtizedben jelentős váltás történt a közgazdasági elméletek terén. A gazdasági összefüggések elemzésében és modellezésében a statikus szemlélettel szemben és egyben annak kiegészítéseként a dinamikus szemlélet egyre nagyobb teret nyert. Ez a megközelítés és módszertan a pillanatfelvétel helyett a gazdasági folyamatok nyomonkövetésére helyezi a hangsúlyt. Dolgozatom középpontjában a gazdasági dinamika, különösképpen a gazdasági növekedés áll. A gazdasági növekedés tárgya a nemzetek felemelkedése és gazdagodása okainak feltárása. A problémakör jellegénél fogva Adam Smith óta nem veszíthetett jelentőségéből, sőt egyre újabb dimenziói, megközelítései bontakoznak ki. Ez még akkor is igaz, ha időnként a „konjunkturális” témák elhomályosították aktualitását.

Az 1980-as évek második felétől azt tapasztalhatjuk, hogy a gazdasági növekedés elemzése és az eltérő fejlettségű országok összehasonlításának igénye ismét a közgazdasági elemzések homlokterébe került. Ennek több okát említhetjük:

- egyrészt a közgazdászok megoldást kerestek arra, hogy miként lehet helyreigazítani a hetvenes évek második felében lelassult növekedési ütemeket;
- másrészt köszönhető annak az igénynek, hogy a növekedéselmélet új tényezőit, mint például a humántőkét vagy a kutatás-fejlesztést, beépítsék a növekedéselmélet tárházába;
- továbbá inspirálta az elemzéseket a világ országainak egyre fokozódó gazdasági polarizációja;
- a napjainkban felgyorsult globalizáció szintén igényt támaszt az egyes térségek pontos helyzetértékelésére és az ott várható tendenciák meghatározására;
- végül a gazdaságelmélet felé nyomasztó igényként jelent meg, hogy az átalakuló térségek (mint például a rendszerváltáson átesett közép-kelet-európai országok csoportja) számára fel lehessen vázolni a jövő gazdasági lehetőségeit, különös tekintettel az egyes országok felzárkózási esélyeire, illetve a felzárkózáshoz szükséges időtávra.

[1]Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Meyer Dietmarnak és édesapámnak, Ligeti Istvánnak, bátorításukért, nélkülözhetetlen szakmai tanácsaikért és észrevételeikért. Köszönettel tartozom Gyurkovics Évának a matematikai és Major Klárának az informatikai problémákban nyújtott segítségért. A dolgozat tartalmáért természetesen kizárólag a szerző felelős.

Kutatásom az MTA–SYLFF (Sasakawa Fiatal Vezetők Ösztöndíja Alapítvány) támogatásával készült.

A témakör aktualitását tükrözi az is, hogy az elmúlt pár évben is jelentős számú publikáció jelent meg, amelyek a fenti okokra és problémákra keresik a választ.[2]

A dolgozat három, sajátos szakmai függetlenséggel és egyben szoros kapcsolódással jellemezhető témakörre koncentrál. Ezek a területek a növekedés- és konvergencia elmélet és a technikai haladás témaköre. A három nagy problémakört tárgyalásuk során önálló szerkezeti egységekbe csoportosítom. Bízom benne, hogy az így vállalt kisebb gondolati átfedések az Olvasó érdekeit szolgálják. Célom, hogy a fenti problámakörök és kapcsolódási pontjaik elméleti és módszertani áttekintésén túl a témakört új eredményekkel gazdagítsam. Természetesen a témakörök túlságosan tágak és széleskörűek, így azok teljeskörű elemzése nem lehet a célom. Vizsgálataimat ezért a következő három, egymáshoz szorosan kapcsolódó problémakörre öszpontosítom:

- az első a hosszú távú növekedés üteme, egyenletessége és fenntarthatósága;
- a második a gazdasági felzárkózást (konvergenciát)[3] meghatározó tényezők elemzése;
- a harmadik az endogén technikai haladás és endogén termelési szerkezet vizsgálata, azaz amikor a technikai haladás, és ezen keresztül a termelési szerkezet, teljes egészében a termelési tényezők kombinált hatásának az eredménye, és az időnek csak közvetett függvénye.

A gazdasági növekedés hosszú távon fenntartható egyenletes ütemét (a modelleket jól jellemző módszertani szempontokon túl) azért keressük, mert ez a gazdasági felzárkózás egyik feltételének tekinthető. Az országok többsége nekilódul, majd megáll, egyfajta stop-go periodicitás van jelen. Ez a hektikusság a gazdasági folyamatokat kiszámíthatatlanná teszi, társadalmi, gazdasági szempontból romboló hatású.

A legfejlettebb országokhoz történő gazdasági felzárkózás minden országnak természetes vágya. A gazdasági felzákózáshoz nélkülözhetetlen a gazdaság dinamikus bővülése. A meghatározó közgazdasági iskolák elméleti modelljei és empirikus elemzései szerint a bővülés igazi motorja a technikai haladás. A technikai haladás azonban szorosan összefügg a gazdaságok adott állapotával, fejlettségi szintjével. Ez utóbbi kapcsolódási mechanizmus az elméletek hiányzó láncszeme, azaz nincs kidolgozva, hogy mely tényezők alakítják és miként a technikai haladást. Dolgozatomban ennek a hiányzó láncszemnek a feltárására törekszem. Az elmúlt tíz év növekedéselméleti irodalma a humántőke és a kutatás-fejlesztés figyelembevételében látta a megoldás kulcsát. Megmutatom, hogy a termelési szerkezet endogenizálása hasonló megoldás lehet a hiányosság pótlására. Az

[2] A teljesség igéyne nélkül: Romer [1994], Solow [1994], Barro–Sala-i-Martin [1995], Aghion–Howitt [1998], Darvas–Simon [1999a, b], Erdős [2000], Ámon–Hoós–Ligeti [2000], Ligeti–Ligeti [2000], Valentinyi [2000], Dedák [2000], Kolodko [2001], Szilágyi [2001], Horváth–Szalai [2001], Simon [2001], Mellár [2001].

[3] A dolgozatban a gazdasági felzárkózás és gazdasági konvergencia kifejezéseket szinonimaként használom.

eddigi közgazdasági elemzések ugyanis arra az implicit feltevésre támaszkodtak, hogy a gazdasági változók tetszőleges alakulása és a tetszőlegesen hosszúnak tekintett időtáv érintetlenül hagyja a termelés szerkezetét, azaz a termelési függvényt.

1.2. A dolgozat szerkezete

A dolgozat nyolc fejezetből és függelékből áll. A fejezetek pontokra, a pontok alpontokra tagolódnak. Az 1. Fejezet bemutatja a kutatás fő irányát és a kutatást motiváló tényezőket.

A 2. Fejezet négy fogalom definiálásával indul, amelyek felhasználásával arra keresem a választ, hogy milyen tényezők befolyásolják a gazdaságok hosszú távú pályáját, és ezek a tényezők miként magyarázzák a gazdaságok egy főre vetített jövedelmének egyenletes növekedését. Megmutatom, hogy a post-keynesi (2.1.), a neoklasszikus (2.2., 2.4.) és az endogén (2.3.) növekedéselméleti modellek egyike sem magyarázza kielégítően az egy főre jutó tényezők bővülését. Ennek a pontnak az újdonsága a matematikai precizitásra törekvő tárgyalásmód, amelyet a további fejezetekben is igyekszem megtartani.

A 3. Fejezet a technikai haladás modellbeli leképezéseit tekinti át. Az általános elemzést (3.1.) az exogén (3.2.) és endogén (3.3.) technikai haladás típusainak bemutatása követi. Megmutatom, hogy bár — a növekedési tényezők körét növelve — az exogén technikai haladás beépítésével magyarázatot adhatunk az egy főre jutó mutatók bővülésére, a bővülés tényleges okai feltáratlanok maradnak. Rámutatok arra, hogy ugyan a technikai haladás endogén leképezései magyarázzák a gazdaságok bővülésének forrásait, a növekedési pályák egyenletességének kívánalma nem teljesül.

A 4. Fejezetben a konvergencia elmélet alapvető fogalmait és összefüggéseit ismertetem. A konvergencia típusok ismertetését (4.1.) a gazdasági felzárkózás forrásainak elemzése követi (4.2.). A 4.3. pont az úgynevezett béta és szigma konvergencia közötti kapcsolatot mutatja be. A fejezet a konvergencia elmélet empirikus vizsgálata eredményeinek bemutatásával zárul (4.4.).

Az 5. Fejezetben megmutatom, hogy a neoklasszikus modellkeret jól illeszkedik az úgynevezett feltételes konvergencia elmélethez, a gazdaságok egymáshoz történő tényleges felzárkózását azonban egyik modell sem magyarázza (5.1-5.4.). Az 5.5. és 5.6. pontokban rámutatok, hogy a kapott eredmények a feltételezett termelési szerkezet (termelési függvény) következményei.

A 6. Fejezetben a standard termelési szerkezetet, illetve annak paramétereit vizsgálom, bemutatva a skálahozadék (6.1.), a helyettesítési rugalmasság (6.2.) és a tőkerészesedés (6.3.) növekedés- és konvergencia elméleti hatását.

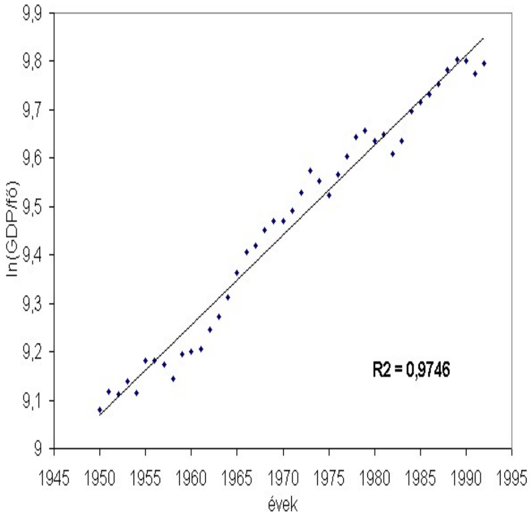
A 7. Fejezetben, az előző fejezetek eredményeinek összefoglalásaként, érveket sorakoztatok fel, amelyek rámutatnak a termelési függvény módosításának szükségességére. A 7.1. pontban definiálom az endogén termelési függvény fogalmát, amely a további elemzés tárgya lesz. Ezt követően Jánossy Ferenc trendelméletéből kiindulva (7.2.) megmutatom, hogy a humántőke beépítése önmagában nem elegendő ahhoz, hogy a gazdaságilag fejlett országok növekedését megfelelően leírjuk. A 7.3. pontban három szorosan egymáshoz kapcsolódó vezérlési feladat felhasználásával rámutatok arra, hogy a termelési szerkezet módosítása lehetőséget ad a gazdaság fejlődésének pontosabb leírására. Ezen részek újdonsága a vezérlési feladat pontos felírása és megoldása. A 7.4. és 7.5. pontokban olyan modelleket ismertetek, amelyek több-kevesebb sikerrel már lépéseket tettek a részesedési paraméter endogenizálására. A 7.6. pontban megmutatom, hogy az endogén részesedési paraméter jelentősen módosítja a standard növekedéselméleti eredményeket, mind a hosszú távú egyenensúly, mind az ahhoz történő konvergencia tekintetében.

A 8. Fejezet az eredmények rövid összefoglalását tartalmazza.

A 9. Fejezet egy matemetikai függelékbe foglalja össze azokat a tételeket, következményeket, amelyek a tárgyalt témának szerves részét képezik, ugyanakkor nem illeszkednek szorosan a dolgozat gondolatmenetébe.

2. Növekedéselméleti modellek

A standard növekedéselméletek azt vizsgálják, hogy milyen egy gazdaság hosszú távú növekedési pályája, tehát az az út, amelyen egy ország a múltban haladt és a jövőben haladni fog. A legtöbb elméleti növekedési modell egydimenziós, azaz mérőszáma egy gazdaság jövedelemi mutatója. A leggyakrabban használt mutatók a bruttó hazai össztermék, vagy más néven GDP, és a bruttó nemzeti össztermék, azaz GNP.[4] Ezek alapján első megközelítésben a gazdasági növekedés alatt egy ország (terület) jövedelmének alakulását értjük. Ha megvizsgáljuk például az Amerikai Egyesült Államok egy főre jutó GDP természetes alapú logaritmusának időbeli alakulását, akkor azt tapasztalhatjuk, hogy az értékekhez illesztett trend, amint azt az 1. ábra mutatja[5], egy enyhén emelkedő egyenes. A trend meredeksége 0,0186, azaz közel 0,02. Az USA egy főre vetített GDP-je tehát évente körülbelül 2 százalékkal növekszik.



1. ábra. Az USA hosszú távú növekedési trendje

A növekedéselméleti vizsgálatoknak és modelleknek nemcsak az a céljuk, hogy megmagyarázzák a múlt eseményeit, hanem annak feltárása is, hogy miként tudjuk meghatározni egy gazdaság jövőbeni pályáját. Ezek alapján, kicsit leegyszerűsítve, a növekedéselméleti kutatások a következő *két* kérdésre keresik a választ:

[4]Az egydimenziós mérőszámra használnak más SNA mutatót is. Hasonlóképpen választhatjuk az egy főre jutó jövedelmi mutatókat, illetve azok tetszőleges monoton transzformáltját, mint például az egy főre jutó GDP természetes alapú logaritmusát, továbbá a jövedelem növekedési üteme is megfelelő mérőszám lehet számunkra.

[5]Az ábra adatainak forrása Summers–Heston [1994].

1. *Milyen* gazdasági és nem gazdasági *tényezők* befolyásolják egy gazdaság növekedését?

2. A befolyásoló tényezők *miként magyarázzák* egy gazdaság egyensúlyi, és *pozitív* ütemű (mint például az USA 2 százalék körüli) egyenletes növekedési pályáját?[6]

Ahhoz, hogy pontosan értsük, mit takar a második kérdés, meg kell magyaráznunk, hogy mit értünk egyensúlyi és egyenletes növekedési pályán.

1. Definíció. *Egyensúlyi növekedés alatt olyan pályát értünk, amely mentén minden piacon egyensúly van, azaz a kereslet megegyezik a kínálattal.*

Szeretnénk ugyanis a gazdaságot egy olyan hosszú távú pályára állítani, ha ez lehetséges, amely mentén minden piac egyensúlyban van.[7] Az egyensúly természetes igénye minden racionálisan viselkedő gazdasági szereplőnek, hiszen akkor minden gazdasági szereplő — adott árak mellett — maximálisan kielégíti szükségleteit.[8]

2. Definíció. *Az X változó egyenletesen változik, ha minden t-re az $X(t)$ növekedési rátája $\gamma_X = \frac{\dot{X}(t)}{X(t)} = c$ konstans. A c ekkor az X egyenletes változásának üteme.*

Az egyenletes változást állandó ütemű változásnak vagy tartós állapotnak (*steady state*-nek) is nevezik, ezért a továbbiakban ezeket szinonimaként fogom használni.[9] Egyenletes egy változó időbeli pálya, ha értéke folyamatosan egy állandó konstans ütemben nő vagy csökken vagy nem változik az időben, azaz ha a megfelelő c konstans értéke rendre pozitív, negatív vagy nulla. A növekedéselméletek ezek közül nem foglalkoznak a negatív ütemű egyenletes változással.[10] Jelentőségüknél fogva azonban a pozitív és a zérus ütemű egyenletes változásnak külön nevet adunk. A szétválasztásnak közgazdasági szempontból van jelentősége, hiszen egyáltalán nem mindegy, hogy egy adott gazdaság (ha X például az egy főre jutó jövedelem) hosszú távon egy bővülő vagy egy stagnáló pályán halad.

[6] Természetesen a növekedéselmélet tárgya tágabb, hiszen az kiterjed a nem egyensúlyi helyzetek vizsgálatára is.

[7] A termelési tényezők piacán ez azt jelenti, hogy nincs kihasználatlan kapacitás, azaz a gazdaság rendelkezésére álló összes termelési tényező felhasználásra kerül a termelésben. Ezt a megfogalmazást használjuk ki a 2.1. pontban.

[8] A dolgozatban mindvégig feltételezzük, hogy a gazdasági szereplők magatartása racionális, azaz céljuk az elérhető haszon és profit maximalizálása. A dolgozatban folytonos időkezelést alkalmazunk. Feltesszük, hogy az elemzésre kerülő változók az idő folytonos függvényei, tehát egy X változóra a $t \in [0, \infty)$ intervallumon $t \to X(t) \in \mathbb{R}^1$. Továbbá legyenek a változók a teljes $t \in [0, \infty)$ intervallumon az idő szerint folytonosan differenciálhatóak. A következő jelöléseket fogjuk használni: a változó feletti pont az idő szerinti deriválást jelenti, azaz $\dot{X}(t) = \frac{dX(t)}{dt}$; az X változó növekedési rátáját γ_X-szel jelöljük, azaz $\gamma_X(t) = \frac{\dot{X}(t)}{X(t)}$; ha a növekedési ráta konstans akkor elhagyjuk a t argumentumot, azaz $\gamma_X = \gamma_X(t) = c$, ha c egy tetszőleges konstans.

[9] Az egyenletes változás egyben azt jelenti, hogy az X változó exponenciális pályán halad, azaz ha $X(0) = X_0$, akkor minden t-re $X(t) = X_0 e^{ct}$.

[10] Ennek vizsgálata a konjunktúraelméletek témakörébe tartozik.

3. Definíció. *Az X változó egyenletes vagy állandó ütemű növekedéséről, bővüléséről beszélünk, ha minden t-re $\gamma_X = \frac{\dot{X}(t)}{X(t)} = c > 0$.*

4. Definíció. *Az $X(t) = X^*$ az $\dot{X}(t) = h[X(t), t]$ dinamikus rendszernek stacionárius megoldása, ha minden t-re $h[X^*, t] \equiv 0$, azaz ha $\gamma_X = \frac{\dot{X}(t)}{X(t)} = 0$.*

Tehát az egyenletes növekedés és a stacionárius megoldás a tartós állapot (steady state) alesetei.[11]

A továbbaikban célunk kettős. Először feltárni, hogy mi gyakorol hatást a növekedésre, másodszor megmagyarázni, hogy miként. A fentebb megfogalmazott második kérdés arra keresi a választ, miként alakítsuk a feltárt tényezőket, hogy a gazdaságot egy kitüntetett pályára állítsuk, amely mentén minden piac egyensúlyban van, és a gazdaság bővül.[12] Talán a leghangsúlyosabb a pozitív növekedési ütem, hiszen ha nincs is egyensúly és a gazdaság növekedése sem egyenletes, a gazdasági szereplőkre akkor is jótékonyan hathat a gazdasági növekedés realizálása.

Amint azt a 2. Fejezet további része és a 3. Fejezet alapján látni fogjuk, az állandó ütemű növekedés vizsgálata szorosan összekapcsolódik a technikai haladás problémakörével. Elméleti szempontból fontos lesz vizsgálnunk, hogy az egy főre jutó jövedelem egyenletes növekedési ütemét a technikai haladás exogén beépítésével (azaz ha a technikai haladás az idő közvetlen függvénye) vagy anélkül sikerül elérnünk. A következő definíció ez utóbbi eset jelentőségét kívánja hangsúlyozni.

5. Definíció. *Endogén növekedési ütemnek nevezzük az egy főre jutó kibocsátás egyenletes növekedési ütemét, ha az exogén technikai haladás hiányában valósul meg.*

A továbbiakban négy növekedéselméleti modellt[13] mutatunk be és azt vizsgáljuk, hogy ezek a modellek milyen válaszokat adnak az általunk megfogalmazott két növekedéselméleti kérdésre.

Az első modell (2.1. pont) a post-keynesi (Harrod–Domar) modell. Megmutatjuk, hogy ez a modell nem biztosítja az egy főre jutó kibocsátás egyenletes növekedését, sőt egyensúlyi növekedést sem biztosít. A 2.2. pontban a neoklasszikus modellről mutatjuk meg, hogy bár egyensúlyi növekedést biztosít, a gazdaság egy főre vetített bővülésére nem ad magyarázatot. A harmadik modell (2.3. pont) az úgynevezett AK modell, amely az előbbi kettővel szemben képes magyarázni az állandó ütemű növekedést, ennek azonban feltétele a termelési függvény speciális alakja. A 2.4. pontban bemutatjuk Mankiw–Romer–Weil modelljét amely figyelembe veszi a humántőke szerepét is a gazdasági növekedésben. Megmutatjuk, hogy ebben a modellben is — a humántőke beépítése

[11]Mankiw [1999] (4. fejezetében) a stacionárius megoldás esetén stacionárius növekedési pályáról beszél. Tallós [1999] az X^* konstans megoldást nevezi egyensúlyi állapontnak.

[12]Természetesen itt nem Pareto elmozdulásról van szó, hiszen aggregált szinten növekedhet úgy az egy főre jutó jövedelem, hogy közben valakinek a részesedése csökken.

[13]Mivel mind a négy modell a tőkeállomány bővülésének hatását vizsgálja a kibocsátásra, ezért tőkeakkumulációs modelleknek is nevezzük azokat.

ellenére — az egy főre jutó mutatóknak csak stacionárius megoldása található, a modell azonban nem magyarázza a gazdaság bővülését.

2.1. Post-keynesi növekedéselméleti modell

A most bemutatásra kerülő modell az úgynevezett Harrod–Domar modell, amely valójában csak Harrod modellje.[14] Harrod eredeti modelljétől is eltérünk abban, hogy feltételezzük egy termelési függvény létezését, továbbá folytonos időkezelést alkalmazunk.

Feltevések.

1. Egy egyszektoros zárt gazdaság modelljét tekintjük, azaz a megtermelt jövedelmet, Y, lehet csak elfogyasztani, C, és megtakarítani, S:
$$Y(t) = C(t) + S(t). \tag{1}$$

2. Csak két piac van:
$$\text{az áru és a munkapiac.} \tag{2}$$

3. A megtakarítás megegyezik a beruházással és a jövedelem állandó konstans hányada:
$$I(t) = S(t) = sY(t), \tag{3}$$
ahol $0 < s < 1$ megtakarítási hányad.[15]

4. A beruházás a reáltőkeállományt növeli:
$$I(t) = \frac{dK(t)}{dt} = \dot{K}(t). \tag{4}$$

5. A tőkeigényesség vagy másnéven tőkekoefficiens[16] időben állandó és pozitív:
$$\frac{K(t)}{Y(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{\dot{Y}(t)} = \kappa > 0. \tag{5}$$

[14] Domar [1946], szemben Harrod [1939] modelljével, nem a jövedelem egyenletes növekedési ütemét keresi, hanem olyan beruházási pályát, amely mellett a már elért potenciális kibocsátás fenntartható. Továbbá Domar nem foglalkozik a népesség alakulásával, sőt kritizálja azt a megközelítést, amely arra épít, hogy a jövedelem növekedési ütemét a népesség számának alakulása határozza meg. Szerinte ez csak rövid távon elfogadható megközelítés. Az elméleti probléma abban rejlik, hogy munkaerő és termelékenységének alakulása csak az aggregált kínálatra gyakorol hatást, a keresletre nem. Más eltérések is említhetők: a munkakereslet Domarnál nem a tőkeállomány növekedése, hanem az úgynevezett kapacitáskihasználtsági koefficiens függvénye; az exogén megtakarítási ráta Domarnál egy aszimptotikusan stabil pályát határoz meg és nem pedig instabilt, mint a Harrod modellben.

[15] A növekedési modellekben a hosszú távú vizsgálatok miatt eltekintünk az autonóm tényezőktől, így a megtakarítási hányad egyben a megtakarítási határhajlandóság is.

[16] Az irodalomban találkozhatunk még az akcelerátor elnevezéssel is.

6. A termelést egy kéttényezős, első fokon homogén Leontief-típusú termelési függvény írja le[17], amelyben a tőke és a munka egymás tökéletes kiegészítői:

$$Y(t) = \min\left\{\frac{K(t)}{\kappa}; \frac{L(t)}{\nu}\right\}, \tag{6}$$

ahol $\kappa, \nu > 1$ konstans.

7. A népesség növekedési üteme, amit természetes növekedési rátának nevezünk, állandó és pozitív:

$$\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n > 0. \tag{7}$$

A modell célja egy olyan pozitív hosszú távú növekedési ráta meghatározása, amely egyensúlyt jelent a gazdaságban, azaz minden piacon. A következő állítás alapján megmutatjuk, hogy a post-keynesi modell nem képes magyarázni az egy főre vetített mutatók egyenletes növekedését.

6. Állítás. *Tegyük fel, hogy a* (1)-(7) *fennáll és* $L_0 = K_0$, *ahol* $K(0) = K_0$, *és* $L(0) = L_0$. *Ekkor* $Y(t)$ *egyenúlyi növekedésének szükséges és elégséges feltétele, hogy teljesüljön, hogy*

$$\frac{dY(t)/dt}{Y(t)} = \frac{s}{\kappa} = n > 0.$$

Bizonyítás. Először lássuk be, hogy az egyensúlyi növekedésből következik, hogy a kibocsátás növekedési rátája megegyezik a népesség növekedési rátájával. Az $Y(t)$ egyensúlyi növekedésének feltétele, hogy minden piacon (a (2) feltétel szerint az áru- és munkapiacon) egyensúly legyen. Tekintsük először az *árupiac*ot. Az (1) és (3) feltételek szerint az árupiacon akkor valósul meg egyensúly, ha a következő egyenlőség teljesül

$$Y(t) = C(t) + I(t),$$

ahol a baloldal az árupiaci kínálat, a jobboldal az árupiaci kereslet. A (3) és a (4) feltételekből következik

$$Y(t) = (1-s)Y(t) + \dot{K}(t)$$
$$Y(t) = (1-s)Y(t) + \kappa\dot{Y}(t),$$

ahonnan azt kapjuk, hogy az úgynevezett garantált növekedési ráta, $\frac{dY(t)/dt}{Y(t)} = G_w$, amelyet a modell exogén paraméterei garantálnak az árupiac számára:

$$G_w = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{s}{\kappa} > 0.$$

[17]Erről részletesebben lásd a Függelék CES függvényekre vonatkozó részét.
Ez a termelési szerkezet azt az implicit feltevést takarja, hogy a gazdaság kibocsátását csak egyfajta technológiával állítják elő.

Az (5) feltétel miatt ez a növekedési üteme a tőkeállománynak is, hiszen, ha $Y(t) = \kappa \cdot K(t)$ és $\dot{Y}(t) = \kappa \cdot \dot{K}(t)$, akkor

$$G_w = \frac{s}{\kappa} = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)}.$$

A (6) feltétel termelési függvénye miatt kihasználatlan tőke kapacitás akkor nincs, ha

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} \leq n.$$

Ellenkező esetben a tőke jobban nőne, mint a munka, ami gazdasági stagnáláshoz vezetne kihasználatlan tőkekapacitás mellett.

A *munkapiac* kínálata adott a (7) feltétel által. A keresletet, a Leontief-típusú termelési függvény miatt, a tőkeállomány alakulása jelenti. A népességnek azonos ütemben kell növekednie a tőkeállománnyal, ahhoz, hogy a jövedelem növekedhessen. Továbbá ahhoz, hogy ne legyen munkanélküliség a keresletnek legalább olyan ütemben kell növekednie, mint a kínálatnak, azaz munkapiaci egyensúly akkor áll fenn, ha

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} \geq n.$$

Tehát mind a két piacon (azaz a gazdaságban) csak akkor van egyensúly, ha

$$\frac{dY(t)/dt}{Y(t)} = G_w = \frac{s}{\kappa} = n > 0.$$

Most lássuk a bizonyítás másik irányát, azaz amikor $\frac{dY(t)/dt}{Y(t)} = \frac{s}{\kappa} = n$ akkor abból következik-e az egyensúlyi növekedés. Mivel $\kappa = \frac{K(t)}{Y(t)}$ időben állandó, ebből következik, hogy

$$\frac{dK(t)/dt}{K(t)} = \frac{dY(t)/dt}{Y(t)} = \frac{s}{\kappa} = n = \frac{dL(t)/dt}{L(t)}.$$

Mivel $K_0 = L_0$ a $t = 0$ időpontban a gazdaságban nincs kihasználatlan kapacitás a munkapiacon, továbbá minden későbbi időpontban a tőkeállomány éppen akkora keresletet támaszt a munkaerővel szemben, mint amekkora a természetes szaporulat következtében előálló kínálat növekedés. Tehát a munkapiacon megvalósul az egyensúly. Továbbá

$$\dot{K}(t)/K(t) = I(t)/K(t) = \frac{s}{K(t)/Y(t)},$$

$$\dot{K}(t) = I(t) = S(t) = sY(t),$$

$$Y(t) = C(t) + I(t) = C(t) + S(t),$$

tehát az árupiacon is megvalósul az egyensúly. ∎

7. Következmény. *A Harrod–Domar modellben $Y(t)$ egyenletes növekedésének elégséges feltétele az egyensúlyi növekedés.*

Mint láthattuk a Harrod–Domar modell egy olyan hosszú távú növekedési pályát jelöl ki, amely mentén minden piac egyensúlyban van, és a gazdaság pozitív ütemben növekszik. Több probléma is említhető azonban a kapott eredménnyel kapcsolatban:

1. Észrevehetjük, hogy e pálya mentén az egy főre jutó jövedelem nem növekszik. Mivel $\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \gamma_L = n = \gamma_Y = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)}$, így $\gamma_{Y/L} = 0$.
2. Semmi sem garantálja, hogy három exogén tényező kapcsolatára fennálljon a $\frac{s}{\kappa} = n$ egyenlőség. A hosszú távú pálya megvalósulása csupán véletlen esemény lehet.
3. Hosszú távon fennállhat árupiaci egyensúly tartós (növekvő) munkanélküliség mellett, ha $\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{s}{\kappa} < n$. Ezt nevezzük ***első harrodi problémá***nak. Ezért is nevezhetjük ezt a modellt post-keynesinek, hiszen hosszú távon sem érvényesül — ebben az esetben — a Walras törvény, azaz n-1 darab piaci egyensúlyából nem feltétlen következik az n. piac egyensúlya.
4. Mégha véletlenül teljesül is az egyensúly feltétele, $\frac{s}{\kappa} = n$, ez a pálya instabil. Ezt nevezzük *második harrodi problémá*nak. A pályáról letérve ugyanis a multiplikátor és akcelerátor hatás egymást erősítve egyre jobban eltérít az egyensúlytól. Az ilyen pályát hívjuk kés- vagy borotvaélnek.[18]

2.2. Neoklasszikus növekedéselméleti modell

Neoklasszikusnak nevezzük azokat a tőkeakkumulációs növekedési modelleket, amelyek olyan termelési függvényt tételeznek fel, amelyben a tőke és a munka folytonosan, minden határon túl egymással helyettesíthető[19], továbbá a termelési függvény jól viselkedő[20]. Egymástól függetlenül, lényegében egy időben, ilyen modellt dolgozott ki Robert Solow [1956] és Trevor Swan [1956], ezért Solow–Swan modellnek is szokták nevezni az ilyen típusú modelleket.[21]

Feltevések.

1. Egyszektoros zárt gazdaság modelljében a megtermelt jövedelmet fogyasztásra és megtakarításra használják fel.

$$Y(t) = C(t) + S(t) \tag{8}$$

[18] Harrod az instabilitás bizonyítását nem formalizálja. Formalizált bizonyítását lásd például Ramanathan [1982] 27-30.o.

[19] Ez a feltevés azt az implicit feltevést takarja, hogy a kibocsátás adott szintje végtelen sok technológiával előállítható.

[20] Ennek részletesebb kifejtését lásd alább a feltevéseknél.

[21] Az alábbiak sokkal inkább Solow tárgyalásmenetét követik. Swan elemzésének középpontjában a jövedelem növekedési rátájának dekompozíciója áll.

$$y(t) = c(t) + \frac{S(t)}{L(t)},$$

ahol $y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)}$, és $c(t) = \frac{C(t)}{L(t)}$, azaz a kisbetűk az egy főre vetített egységeket mutatják.

2. A termelési függvény olyan tényezőnként kétszer folytonosan differenciálható, monoton növekvő függvény amelyre minde t esetén

$$Y(t) = F[K(t); L(t)],$$

továbbá

(a) első fokon homogén, azaz tetszőleges $\lambda > 0$ esetén

$$\lambda Y(t) = F(\lambda K(t); \lambda L(t)); \tag{9}$$

(b) parciális deriváltjaira[22] fennállnak, hogy

$$F_K(t), F_L(t) > 0; F_{KK}(t), F_{LL}(t) < 0.$$

Azaz $F(.)$ olyan kétváltozós konkáv függvény, amely mindkét változójában monoton növekvő, de érvényes rá a csökkenő hozadék elve;

(c) kielégíti az Inada feltételeket:

$$\lim_{K\to\infty} F_K = 0, \text{ és } \lim_{K\to 0} F_K = \infty$$

$$\lim_{L\to\infty} F_L = 0, \text{ és } \lim_{L\to 0} F_L = \infty.$$

Azaz az origóban a termelési függvény meredeksége végtelen és a tényezők növelésével tart a nullához.

3. A népesség növekedési üteme pozitív konstans:

$$\gamma_L = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n > 0.$$

4. A megtakarítás, ami megegyezik a beruházással, a jövedelem konstans $(0 < s < 1)$ hányada:

$$S(t) = I(t) = sY(t). \tag{10}$$

5. A bruttó beruházás két részből áll; egyrészt a tőkeállomány bővítéséből, $\dot{K}(t) = dK/dt$, másrészt a tőkeállomány pótlásából (amortizáció):

$$I(t) = \dot{K}(t) + \delta K(t), \tag{11}$$

ahol $\delta > 0$ egy konstans amortizációs kulcs.

[22] A továbbiakban a következő jelöléseket fogom használni:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = F_K(t); \quad \frac{\partial F}{\partial L} = F_L(t);$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} = F_{KK}(t); \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} = F_{LL}(t).$$

A neoklasszikus modell célja olyan hosszú távú pálya meghatározása, amely esetén minden piac egyensúlyban van, továbbá amely mentén minden változó állandó (pozitív) ütemben bővül.

Mivel a tőke és a munka folytonosan helyettesíthetők, így a gazdasági racionalitás feltevésével biztosított a tényezők teljes kihasználtsága.[23] Elegendő tehát az árupiac egyensúlyát vizsgálnunk.

8. Állítás. *Tegyük fel, hogy az* (8)-(11) *feltételek teljesülnek. Ekkor a neoklasszikus modellben az* $Y(t)$ *egyensúlyi és egyenletes növekedésének szükséges és elégséges feltétele, hogy teljesüljön*

$$\gamma_{Y/L} = \gamma_y = 0.$$

Bizonyítás. Először lássuk be, hogy ha egyensúly van minden piacon és $Y(t)$ egyenletes növekszik, akkor az egy főre vetített kibocsátás, $y(t)$, csak akkor változik egyenletesen, ha növekedési üteme nulla. Legyen az egy főre jutó bruttó beruházás i

$$i(t) = \frac{I(t)}{L(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} + \delta\frac{K(t)}{L(t)}.$$

Jelölje az egy főre jutó tőkeállományt, *tőkeintenzitást*, $k(t)$:

$$k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}.$$

Ekkor az (8), (10) és (11) feltételekből:

$$\begin{aligned} y(t) &= Y(t)/L(t) = C(t)/L(t) + I(t)/L(t) \\ &= c(t) + i(t) = (1-s)\cdot y(t) + i(t). \end{aligned}$$

Kihasználva, hogy az egy főre jutó beruházást felírhatjuk

$$i(t) = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} + \delta k(t) = \dot{k}(t) + nk(t) + \delta k(t)$$

formában[24], kapjuk:

$$s\cdot y(t) = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} + \delta k(t) = \dot{k}(t) + nk(t) + \delta k(t).$$

Innen megkapjuk az úgynevezett *alapegyenlet*et[25]:

$$\dot{k}(t) = s\cdot y(t) - (n+\delta)\cdot k(t). \tag{12}$$

[23] Például állandó tőkeállomány mellett a gazdaság tetszőleges létszámot képes foglalkoztatni . Ezt meg is teszi, hiszen a létszám növelése mindvégig növeli a jövedelmet.

[24] Hiszen $\dot{k}(t) = d\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)/dt = \frac{\dot{K}(t)L(t)-\dot{L}(t)K(t)}{L^2(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - nk(t)$, ahonnan $\frac{\dot{K}(t)}{L(t)} = \dot{k}(t) + nk(t)$.

[25] Nevezik még ezt az összefüggést a gazdasági növekedés Ramsey-féle differenciálegyenletének is. (Tallos [1999] 94.o.)

A termelési függvény első fokú homogenitása miatt (lásd a (9) feltevést):

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)} = F\left(\frac{K(t)}{L(t)}; 1\right) \circeq f(k(t)),$$

amely alapján a határtermékek:

$$F_L(t) = \frac{\partial Y}{\partial L} = [f(k(t)) - k(t) \cdot f'(k(t))] > 0, \tag{13}$$

$$F_K(t) = \frac{\partial Y}{\partial K} = L(t)\frac{f'(k(t))}{L(t)} = f'(k(t)) > 0. \tag{14}$$

Írjuk át az alapegyenletet növekedési rátára:

$$\gamma_k(t) = \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = s\frac{f(k(t))}{k(t)} - (n + \delta).$$

Mikor lesz ez a növekedési ütem konstans? A legutólsó egyenlet jobb oldalának második tagja konstans és definició szerint a megtakarítási ráta, s, is konstans. Így γ_k akkor és csak akkor lesz konstans, ha $\frac{f(k(t))}{k(t)}$ konstans, tehát az szükséges, hogy $\frac{f(k(t))}{k(t)}$ időben ne változzon, azaz idő szerinti deriváltja legyen nulla.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\left(\frac{f(k(t))}{k(t)}\right)}{\partial t} &= \frac{f^{'}(k(t))\,\dot{k}(t)}{k(t)} - \frac{f(k(t))}{k(t)}\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} \\ &= -\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}\left[\frac{1}{k(t)}\left(f(k(t)) - k(t)\cdot f^{'}(k(t))\right)\right] = 0. \end{aligned}$$

Ez a kifejezés csak akkor lehet, nulla, ha $\dot{k}(t) = 0$, hiszen a belső zárójelben a munka határterméke áll (lásd a (13)-et), amely, feltevésünk szerint a neoklasszikus esetben mindig pozitív. Azaz egyenletes növekedési ütem esetén

$$\gamma_k = \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = s\frac{f(k(t))}{k(t)} - (n + \delta) = 0.$$

Mi azonban az egy főre jutó kibocsátásra vagyunk kíváncsiak. A termelési függvény tőke szerinti parciális rugalmassági együtthatójának, $\varepsilon_K^Y(t)$, segítségével felírható a keresett növekedési ráta:[26]

$$\gamma_y(t) = \frac{\frac{dy(t)}{dt}}{y(t)} = \frac{f'(k(t)) \cdot \dot{k}(t)}{f(k(t))}\frac{k(t)}{k(t)} = \left[f'(k(t))\frac{k(t)}{f(k(t))}\right] \cdot \gamma_k = \varepsilon_K^Y(t) \cdot \gamma_k(t), \tag{15}$$

Így (15) szerint, ha $\gamma_k = 0$, akkor az egyenletes egy főre jutó kibocsátás növekedési üteme

$$\gamma_y = 0.$$

[26] $\varepsilon_K^Y(t) = \frac{dY}{dK}\frac{K(t)}{Y(t)} = f'(k(t))\frac{K(t)/L(t)}{Y(t)/L(t)} = f'(k(t))\frac{k(t)}{y(t)} = \varepsilon_k^y$. Itt kihasználtuk, hogy (14) szerint a tőke határterméke $F_K(t) = \frac{dY}{dK} = f'(k(t))$.

A bizonyítás másik, csak akkor részéhez lássuk be, hogy ha $\gamma_y = 0$, akkor egyensúlyi pályát kapunk és $Y(t)$ egyenletesen növekszik. Az egyenletes növekedés azonnal adódik a 3. Definíció alapján. Ekkor ugyanis $\gamma_Y = n > 0$.

A $\gamma_y = 0 = \varepsilon_K^Y(t) \cdot \gamma_k$ egyenlőségből látszik, hogy $\gamma_k = 0$, azaz $\dot{k}(t) = 0$. Ekkor (12) alapegyenletből kapjuk

$$s \cdot y(t) = nk(t) + \delta k(t).$$

Másrészt $\dot{k}(t) = 0 = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - nk(t)$ alapján $nk(t) = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)}$, így

$$s \cdot y(t) = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} + \delta k(t).$$

Mindkét oldalhoz $y(t)$-t adva és kivonva $s \cdot y(t)$-t

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = y(t) = (1-s) \cdot y(t) + \frac{\dot{K}(t) + \delta K(t)}{L(t)} = \frac{C(t)}{L(t)} + \frac{I(t)}{L(t)}.$$

Az egyenletet szorozva $L(t)$-lel megkapjuk a keresett árupiaci egyensúlyt. $\gamma_k = 0$ miatt $\gamma_K = \gamma_L = n$, azaz a munka ugyanolyan ütemben nő, mint a tőkeállomány. A tényezők közti folytonos helyettesíthetőség mindig biztosítja a munkaerő teljes felhasználását, azaz a munkapiaci egyensúlyt. ■

A 4. Definíció szerint az egy főre jutó tényezők esetén az egyenletes növekedés egyben a rendszer stacionárius megoldása is. Így a stacionárius esetben létezik olyan k^*, amelyre $\gamma_k = 0$ és

$$s \cdot f(k^*) = (n + \delta) \cdot k^*.$$

Könnyen beláthatjuk a következő állításokat[27]:

9. Következmény. *Az neoklasszikus modellnek $k(t) > 0$ esetén egy és csak egy stacionárius megoldása van.*

10. Következmény. *A neoklasszikus modell k^* stacionárius megoldása lokálisan aszimptotikusan stabil.*

11. Következmény. *A neoklasszikus modell $y^* = f(k^*)$ stacionárius pontja lokálisan aszimptotikusan stabil.*

A Harrod modellel összehasonlítva megállapíthatjuk, hogy a tényezők közötti helyettesíthetőség bevezetése hozzájárult a modell stabilitási tulajdonságainak javulásához. Mint azonban említettük a Harrod modell instabilitását a gazdasági szereplők feltételezett várakozásai is befolyásolják, így a két modell nem tökéletesen összehasonlítható.[28] A neoklasszikus modell mentes a első és második harrodi problémától.

---

[27] Az állítások bizonyítását lásd a Függelék 9.1. pontjában.

[28] „Annak oka, hogy Solow modellje stabil, Harrodé pedig instabil, nem az, hogy Solow megengedi a tőke munkával tőtrénő helyettesítését, hanem, hogy ... Harrod modelljében a kibocsátás változása a vállalkozói magatartással és várakozásokkal kapcsolatos speciális föltevésektől függ." Stiglitz és Uzawa [1969]

A neoklasszikus modell azonban nem oldja meg azt a problémát, hogy az egy főre jutó kibocsátás növekedési rátája pozitív legyen, csak a kibocsátás növekedési üteme lesz pozitív, hasonlóan a Harrod modellhez:

$$\begin{aligned}\gamma_y &= \gamma_Y - \gamma_L = 0,\\ \gamma_Y &= n > 0.\end{aligned}$$

A pozitív növekedési rátát, mint azt később megmutatjuk, a technikai haladás beépítése teszi lehetővé a neoklasszikus modellben.

Továbbá számos kritika fogalmazódott meg az eredeti neoklasszikus növekedési modell azon hiányosságaival kapcsolatban, hogy eltekint számos lényeges tényező hosszú távú változásától, mint például a megtakarítási ráta vagy a népesség növekedés.

2.2.1. Neoklasszikus modell és tökéletes verseny

A neoklasszikus modellkeret feltételezi az árrendszer teljes rugalmasságát, és ezen keresztül a piacok tökéletes működését. A tökéletesen rugalmas árrendszer és profitmaximalizásás feltevése mellett mindig teljesül, hogy piaci egyensúly esetén a termelési tényezők határterméke megegyezik a termelési tényezők árával.[29]

Legyen az egységnyi munka ára (azaz az egységnyi munkabér) w, az egységnyi tőke ára (a tőke hozadékrátája[30]) r. Ekkor egyensúlyban a piactisztító árrendszer esetén a fenti jelöléseket használva fenn kell, hogy álljanak a következő egyenlőségek

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y}{\partial L} &= F_L(t) = w(t)\\ \frac{\partial Y}{\partial K} &= F_K(t) = r(t).\end{aligned}$$

Tehát a termelési függvény tényezők szerinti parciális deriváltjai, azaz a határtermékek megeggyeznek a tényezőárakkal.

A későbbiekben[31] használni fogjuk a tényezőárak-arányát, amelyet ω-val fogunk jelölni. Tehát

$$\omega(t) = \frac{w(t)}{r(t)}.$$

Az előzőek alapján a tényezőárak-aránya egyensúlyban megegyezik a tényező határtermékek arányával.

[29] Ezt az összefüggést nevezik Gossen második törvényének.

[30] A tőke hozadékrátáját nevezik még profitrátának, ezeket az elnevezéseket a következőkben szinonimaként használom. Tökéletes verseny esetén minden tőketípus hozadékarátája kiegyenlítődik, így megegyezik a pénztőke hozadékrátájával, azaz a kamattal.

[31] Erre a 3. Fejezetben kerül sor a technikai haladás osztályozásának elemzésénél.

2.2.2. A növekedés maradéktagja

Tudjuk, hogy a termelés alakulását számtalan sok tényező befolyásolja. Legyen $\tau(t)$ azon tényezők hatása a kibocsátás alakulására, amelyeket nem a tőke és a munka gyarapodása határoz meg. Ezt a tényezőt nevezik Solow-féle maradéktagnak vagy *reziduum*nak.[32] Mivel $\tau(t)$ azon hatások összességét foglalja magában, amelyek kívül esnek az elemzési kereten, ezért Balogh és Sreeten [1963] a $\tau(t)$-t a tudatlanságunk koefficiensének is nevezi. Legyen a $\tau(t)$-vel módosított neoklasszikus termelési függvényünk a következő alakú minden t időpontban:

$$Y(t) = \tau(t) \cdot F[K(t), L(t)].$$

Ennek a felírásnak az alapján a $\tau(t)$-t nevezik még *teljes tényező termelékenységnek* (TFP)[33] is, mert ekkor $\tau(t)$, mint szinttényező, a termelési tényezők együttes hatását méri. Ennek a függvénynek a segítségével meghatározhatjuk, hogy mely tényezők, milyen mértékben gyakorolnak hatást a jövedelem növekedési rátájára.

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{\dot{\tau}(t)}{\tau(t)} + \varepsilon_K^F(t) \cdot \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} + \varepsilon_L^F(t) \cdot \frac{\dot{L}(t)}{L(t)},$$

ahol $\varepsilon_K^F(t)$ és $\varepsilon_L^F(t)$ rendre a módosított neoklasszikus termelési függvény tőke és munka szerinti parciális rugalmassági együtthatói.

A jövedelem, a munka- és a tőkeállomány gyarapodásának ütemei statisztikailag mérhetőek. Továbbá az elsőfokú homogenitás miatt a konstansnak feltételezett rugalmassági együtthatók kielégítik a következő egyenlőséget[34]:

$$\varepsilon_K^F(t) + \varepsilon_L^F(t) = 1.$$

Ezek ismeretében kiszámítható az „egyéb" tényezők hatása a kibocsátás növekedési ütemére.

$$\frac{\dot{\tau}(t)}{\tau(t)} = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} - \varepsilon_K^F(t) \cdot \left[\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}\right]$$

A növekedéselmélet és termelékenység elemzés irodalmában a jövedelem növekedési ütemének[35] ilyen típusú meghatározásával a növekedés számbavétele (*growth accounting*) foglalkozik[36]. Az első számításokat Moses Abramovitz

[32] A $\tau(t)$-t gyakran hívják technikai haladásnak is, ennek okát és részletes elemzését lásd a 3. Fejezetben.

[33] A TFP a „total factor productivity" rövidítése. Mivel a magyar közgazdasági szakirodalom is átvette ezt a jelölést, a későbbiekben mi is ezt a rövidítést fogjuk használni.

[34] A neoklasszikus modellben az Euler-féle kimerítési tétel és a feltételezett egyensúlyi állapot alapján a tőkeállomány rugalmassági együtthatója $\varepsilon_K^F(t) = \frac{F_K(t)K(t)}{Y(t)} = \frac{r(t)K(t)}{Y(t)}$. Azaz $\varepsilon_K^F(t)$ a tőkejövedelmek teljes jövedelemhez viszonyított arányával becsülhető. Az $\varepsilon_K^F(t)$ becsült értéke körülbelül 1/3.

[35] Mint láthattuk, hosszú távon a termelés növekedési ütemét nem befolyásolja a tőkeállomány bővülése, az csak rövidtávon, két egyensúlyi pont közti átmenet idején, gyakorol hatást.

[36] Mankiw [1999] (150.o.) ezt növekedés-számvitelnek Samuelson–Nordhaus [2000] (515.o.) növekedési tényezők számbavételének nevezi.

1. táblázat.
Az USA kibocsátás növekedési rátájának összetétele, százalékban 1948-79 között

		Denison	Jorgenson	Samuelson
1.	Kibocsátás[a]	100	100	100
2.	Teljes munkaóra	27	20	24
3.	Munka minőség	15	10	6
4.	Tőkeállomány[b]	22	34	32
5.	Tőke minőség	–	12	–
6.	Teljes munka input (2+3)	42	30	30
7.	Teljes tőkeinput (4+5)	22	46	32
8.	Teljes tényező input (6+7)	64	76	62
9.	Teljes tényező termelékenység (TFP) (1-8)	36	24	38

[a]Denison: nettó kibocsátás, Jorgenson, Samuelson: bruttó kibocsátás.
[b]Tartalmazza a föld tényezőt. Forrás: Abramovitz [1989], Samuelson [2000].

[1956] és Rober Solow [1957] végezték. Az empirikus vizsgálataik során a maradéktag (TFP) magyarázó ereje 90 százalékhoz közeli volt. Tehát pusztán a munka-, és tőkefelhalmozás csak kis mértékben volt képes magyarázni a jövedelemalakulást.

A számításokat Edward Denison [1967] és Dale Jorgenson [1995] pontosították. Denison számításaiban az egyszerű tőke és munka nagyságát felbontotta különböző munka és tőke típusokra. A munka tényező változását felbontotta a munkaórák, a munkaerő nemek szerinti összetételének és a munkaerő képzettségének változására. A tőketényező változását pedig felbontotta az ingatlanok, készletek, és külföldi tőkeállomány változására. Jorgenson, Denisonnal szemben mereven ragaszkodott a neoklasszikus termelési függvényhez, de annak traszlog alakját használta. Jorgenson a tőkeállomány elemzése során figyelembe vette a tőkeállomány évjáratát[37]. Így nála a technikai haladás egy része a tőkeállományban jelenik meg.

Kettejük munkájának összehasonlítására lásd a 1. táblázatot.[38] Összehasonlítva a két eljárást azt mondhatjuk, hogy Denison megmagyarázta a Solow-féle maradéktag (TFP) egyes részeit, és ezáltal a közel 90 százalékos részesedését leszorította 36 százalékra, de nem növelte a tőkeállomány magyarázó erejét a kibocsátás alakulásában; Jorgenson szintén csökkentette a maradéktag értékét (24 százalékra), de növelte a tőkeállomány magyarázó szerepét (46 százalékra).

A maradéktag felbontásának létezik egy másik módja is. Ekkor a maradéktagot, mit sztochasztikus folyamatot bonthatjuk két részre, stacionárius és nem

[37]Jorgenson, a következő fejezetben bemutatásra kerülő évjáratmodelleknek megfelelően, az időben később előállított tőkeállományt termelékenyebbnek tekintette.
[38]A harmadik adatsor Samuelson–Nordhaus [2000] adatait tartalmazza.

stacionárius folyamatokra. Jelölje a maradéktag logaritmusát $u(t)$, ekkor

$$u(t) = u^s(t) + u^p(t),$$

ahol $u^s(t)$ és $u^p(t)$ rendre maradéktag stacionárius és nem stacionárius összetevőit folyamatokat jelöli. A nem stacionárius komponenst nevezik még permanens összetevőnek, a stacionárius komponenst átmeneti összetevőnek. A permanens esetben a külső hatás iránya és nagysága a következő időszakra nem változik meg, az átmeneti hatás esetén várhatóan egyik hatást a következő időszaki hatás kioltja. Azaz a stacionárius esetben a sokkhatások eredője (várható értéke) egy konstans, míg a permanens esetben a hatások eredője egy emelkedő trend.

A permanens hatás egyik fő meghatározója a technikai haladás, amelynek hatása tartósan fennmarad. Ha tehát sikerül a maradéktagról leválasztani a stacionárius folyamatot, akkor pontosabban tudjuk meghatározni, hogy mennyiben járul hozzá a technikai haladás a kibocsátás bővüléséhez.[39]

2.3. Az AK modell

A most bemutatásra kerülő modell a neoklasszikus növekedési modell speciális esetének tekinthető annyiban, hogy eltekint a munkaállomány explicit figyelembevételétől. A modell kiinduló feltevése az, hogy a termelési szerkezetet az úgynevezett AK típusú termelési függvény írja le:

$$Y(t) = F[K(t)] = AK(t), \; A > 0, \tag{16}$$

ahol az A egy konstans szinttényező. Ez a modell tehát a termelési függvény konkrét specifikációját alkalmazza. A termelési függvény (16) alakjára nem érvényes a tényezőnkénti csökkenő hozadék. A csökkenő hozadék hiánya irreális feltevésnek tűnhet, ha azonban a K a szélesebb értelemben vett tőkeállományt, azaz a fizikai és humántőkét jelenti, akkor a modell már jobban védhetővé válik.[40] A termelési függvény intenzív alakban felírva a következő kifejezést kapjuk:

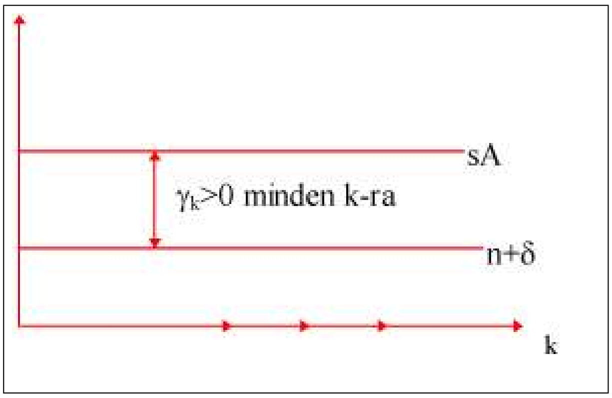
$$y(t) = f[k(t)] = Ak(t). \tag{17}$$

Ennek a függvényformának további sajátossága — a standard neoklasszikus termelési függvénnyel szemben —, hogy az A konstans szinttényező miatt a tőkeintenzitás szerinti átlag-, és határterméke minden pozitív $k(t)$ értékre megegyezik:

$$\frac{f[k(t)]}{k(t)} = f'[k(t)] = A.$$

[39]Ennek részletesebb elemzését lásd például Simon [1999], 128-143.o.

[40]Elmélettörténeti visszatekintésként utalhatunk Domar [1946] cikkére, amelyben a vázolt termelési szerkezet talán éppen olyan mértékben tekinthető Leontief-típusú termelési függvénynek, mint AK típusúnak. Ez utóbbit támasztja alá, hogy Domar nem foglalkozik a munkapiaccal, nem tekinti szűk erőforrásnak. Továbbá az egyensúlyi pályát is csak a tőkeállomány bővülésének üteme határozza meg.



2. ábra. Az AK modell

Írjuk be a (17) termelési függvényt a neoklasszikus modellben meghatározott tőkeakkumulációs összefüggésbe. A modell alapegyenletére a következő adódik:

$$\gamma_k = \dot{k}(t)/k(t) = sf(k(t))/k(t) - (n+\delta) = sA - (n+\delta). \qquad (18)$$

A (18) alapján láthatjuk, hogy a növekedési ütem minden $k(t)$ esetén konstans. A γ_k pozitív (Ezt az állapotot mutatja az 2. ábra.), ha $sA > (n+\delta)$, negatív ha $sA < (n+\delta)$ és zérus, ha $sA = (n+\delta)$.

Mint az a 2. ábráról látszik, az AK modell két lényeges ponton különbözik a neoklasszikus modelltől. *Egyrészt* különbözik abban, hogy az $sf(k(t))/k(t) = sA$ kifejezés nem csökkenő függvénye $k(t)$-nek, hanem egy konstans. Így tehát a γ_k, az sA és $n+\delta$ konstansok különbségeként adódik $k(t)$ minden értéke esetén. Másképpen fogalmazva ez azt jelenti, hogy $k(t)$ állandó ütemben nő: $\gamma_k^* = sA - (n+\delta) > 0$. Mivel azonban $y(t) = Ak(t)$, és $c(t) = (1-s)y(t)$ ezért $\gamma_y^* = \gamma_c^* = \gamma_k^*$ is teljesül, azaz az egyfőre jutó fogyasztás és kibocsátás is ugyanazzal a konstans ütemmel növekszik.

Másrészt eltér a Solow modelltől abban, hogy itt teljesül az az összefüggés, hogy minél magasabb a megtakarítási hányad, s, annál nagyobb lesz a hosszú távú egy főre jutó kibocsátás növekedési üteme. Hasonlóan, ha valamilyen oknál fogva a termelés szintjét kifejező A nő, akkor a növekedési ütem is nő, továbbá, ha n vagy δ csökken, akkor az szintén a növekedési ütem növekedését jelenti.

Tehát az AK modell esetén létezhet a kibocsátásnak pozitív hosszú távú növekedési üteme, amelyet — exogén technikai haladás nélkül — maga a modell endogén módon határoz meg. Tehát az AK modell képes magyarázni endogén növekedési ütemet. Ezért az AK modellt *endogén növekedéselméleti modell*nek is nevezik.

2.4. A Mankiw–Romer–Weil modell

Mankiw–Romer–Weil [1992] általánosították a Solow–Swan modellt a humántőke beépítésével a termelési függvénybe. A modellben az eddigieken túl a következő **jelöléseket** használjuk:

$H(t)$: az emberi (humán-) tőke nagysága;
s_k : a kibocsátás fizikai tőke beruházásra fordított konstans nagysága;
s_h : a kibocsátás humántőke beruházásra fordított konstans nagysága;
δ : a fizikai és humántőke állomány konstans amortizációs rátája;
$h(t)$: az egy főre jutó humántőke állomány, azaz $h(t) = \frac{H(t)}{L(t)}$.

A modell a következő első fokon homogén termelési függvényből indul ki

$$Y(t) = K^{\alpha}(t) \cdot H^{\beta}(t) \cdot [L(t)]^{1-\alpha-\beta},$$

ahol $\alpha + \beta \leq 1$. A termelési függvényt intenzív formában felírva kapjuk:

$$y(t) = k^{\alpha}(t) \cdot h^{\beta}(t). \tag{19}$$

Továbbá mind a fizikai, mind a humántőke bővülésére a neoklasszikus modell feltevései érvényesülnek

$$\dot{K}(t) = s_k \cdot Y(t) - \delta K(t),$$

$$\dot{H}(t) = s_h \cdot Y(t) - \delta H(t).$$

Ekkor a gazdaság fejlődését a Solow–Swan modell analógiája alapján a

$$\dot{k}(t) = s_k \cdot y(t) - (n+\delta) \cdot k(t) \tag{20}$$

$$\dot{h}(t) = s_h \cdot y(t) - (n+\delta) \cdot h(t) \tag{21}$$

egyenletek írják le. A következő állítás azt fogalmazza meg, hogy Az MRW modellnek létezik lokálisan aszimptotikusan stabil stacionárius megoldása.

12. Állítás. *A (20), (21) differenciálegyenlet-rendszernek létezik (k^*, h^*) lokálisan aszimptotikusan stabil stacionárius megoldása.*

Bizonyítás. Vezessük be a következő jelölést: $a = (n+\delta)$. Fejezzük ki a $k(t)$ és a $h(t)$ változók növekedési ütemét a (20), (21) és (19) felhasználásával:

$$\gamma_k(t) \equiv \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = s_k \cdot \frac{h^{\beta}(t)}{k^{1-\alpha}(t)} - a$$

$$\gamma_h(t) \equiv \frac{\dot{h}(t)}{h(t)} = s_h \cdot \frac{k^{\alpha}(t)}{h^{1-\beta}(t)} - a.$$

A stacionárius esetben, a $\gamma_k = 0$ és $\gamma_h = 0$. Ekkor tehát

$$\begin{aligned} s_k \cdot h^{\beta}(t) \cdot k^{\alpha-1}(t) &= a \\ \left[\frac{a}{s_k \cdot k^{\alpha-1}(t)}\right]^{\frac{1}{\beta}} &= h(t) \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} s_h \cdot k^{\alpha}(t) \cdot h^{\beta-1}(t) &= a \\ s_h \cdot k^{\alpha}(t) \cdot \left[\frac{a}{s_k \cdot k^{\alpha-1}(t)}\right]^{\frac{\beta-1}{\beta}} &= a. \end{aligned}$$

Innen $k(t)$-re rendezve kapjuk k^* értékét:

$$k^* = \left(\frac{s_k^{1-\beta} \cdot s_h^{\beta}}{a}\right)^{1/(1-\alpha-\beta)}.$$

Az eredményt visszahelyettesítve (22) kifejezésbe kapjuk h^* értékét:

$$h^* = \left(\frac{s_k^{\alpha} \cdot s_h^{1-\alpha}}{a}\right)^{1/(1-\alpha-\beta)}.$$

A rendszer egyensúlyi megoldásának lokális stabilitás vizsgálatához tekintsük a rendszer elsőfokú Taylor közelítését az egyensúlyi pontban. A rendszer Jacobi mátrixa:

$$J(k^*, h^*) = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial \dot{k}}{\partial k} & \frac{\partial \dot{k}}{\partial h} \\ \frac{\partial \dot{h}}{\partial k} & \frac{\partial \dot{h}}{\partial h} \end{array}\right]_{(k^*,h^*)}$$

$$= \left[\begin{array}{cc} \alpha s_k h^{\beta}(t) k^{\alpha-1}(t) - a & \beta s_k h^{\beta-1}(t) k^{\alpha}(t) \\ \alpha s_h h^{\beta}(t) k^{\alpha-1}(t) & \beta s_h h^{\beta-1}(t) k^{\alpha}(t) - a \end{array}\right]_{(k^*,h^*)}$$

$$= \left[\begin{array}{cc} \alpha s_k \left[\frac{s_h^{1-\alpha} s_k^{\alpha}}{a}\right]^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \left[\frac{s_h^{\beta} s_k^{1-\beta}}{a}\right]^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha-\beta}} - a & \beta s_k \left[\frac{s_h^{1-\alpha} s_k^{\alpha}}{a}\right]^{\frac{\beta-1}{1-\alpha-\beta}} \left[\frac{s_h^{\beta} s_k^{1-\beta}}{a}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \\ \alpha s_h \left[\frac{s_h^{1-\alpha} s_k^{\alpha}}{a}\right]^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \left[\frac{s_h^{\beta} s_k^{1-\beta}}{a}\right]^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha-\beta}} & \beta s_h \left[\frac{s_h^{1-\alpha} s_k^{\alpha}}{a}\right]^{\frac{\beta-1}{1-\alpha-\beta}} \left[\frac{s_h^{\beta} s_k^{1-\beta}}{a}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} - a \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc} a(\alpha-1) & a\beta\frac{s_k}{s_h} \\ a\alpha\frac{s_h}{s_k} & a(\beta-1) \end{array}\right].$$

A Jacobi mátrix nyoma:

$$-tr[J] = -[a(\alpha-1) + a(\beta-1)] =$$

$$= a(2-\alpha-\beta) > 0.$$

A Jacobi matrix determinánsa:

$$\det[J] = a(\alpha-1)\cdot a(\beta-1) - a\alpha\frac{s_h}{s_k}\cdot a\beta\frac{s_k}{s_h} = a^2(1-\alpha-\beta) > 0.$$

Mivel mind a negatív nyom és a determináns pozitív, ebből következik, hogy a Jacobi mátrix sajátértékeinek valós részei negatívak. Azaz a rendszer (k^*, h^*) pontja lokálisan aszimptotikusan stabil. ■

Az MRW modell (k^*, h^*) stacionárius pontjában azonban, hasonlóan a Harrod–Domar és a Solow–Swan modellekhez, az egy főre jutó kibocsátás nem növekszik:

$$\gamma_y = \alpha \cdot \gamma_k + \beta \cdot \gamma_h = 0.$$

Tehát az MRW modell sem képes magyarázni az egy főre jutó kibocsátás pozitív növekedési rátáját.

Ebben a fejezetben két kérdésre kerestük a választ: milyen tényezők befolyásolják egy gazdaság növekedését és ezek a tényezők miként magyarázzák egy gazdaság hosszú távú bővülését. A fejezetben bemutatott standard növekedéselméleti modellek szerint a gazdaság motorja a beruházás, amely történhet a fizikai és/vagy a humántőkébe. Megmutattuk azonban, hogy ezek a modellek nem adnak magyarázatot az egy főre jutó mutatók bővülésére. A következő fejezetben azt mutatjuk be, hogy ha bővítjük a növekedési tényezők körét a technikai haladással, akkor a modellek említett hiányossága eltűnik.

3. Gazdasági növekedés és technikai haladás

Az eddig tárgyalt növekedéselméleti modellekben a növekedést kizárólag a termelési tényezők mennyiségének bővülése biztosította. A rendelkezésre álló munka mennyisége a természetes szaporodás során, a tőkeállomány pedig a beruházások következtében gyarapodott. Ezek eredőjeként emelkedett a kibocsátás szintje. A továbbiakban a technikai haladás hatását is figyelembe fogjuk venni a kibocsátás alakulására. A technikai haladás vizsgálatai alapvetően négy kérdés köré csoporosulnak:

1. Mit értünk technikai haladás fogalma alatt?
2. Miként tudjuk a technikai haladás folyamatát megjeleníteni modelleinkben?
3. Miként befolyásolja a technikai haladás a különböző tényezőket? Tradicionálisan a technikai haladás egy részét munkamegtakarítónak, más részüket tőkemegtakarítónak tartják. Miként lehet ezen fogalmakat formalizálni és mi határozza meg, hogy egy technikai haladást munkamegtakarítónak vagy tőkemegtakarítónak tekintünk?
4. Mi határozza meg a technikai haladás ütemét?

Ebben a fejezetben ezekre a kérdésekre adunk választ.[41]

A technikai haladás csoportosítására, elméleti elemzéseire már az 1930-as évek végén sor került.[42] A növekedéselméleti modellekbe való beágyazásuk az 1950-es évekig váratott magára. Az ötvenes-hatvanas évek fordulóján olyan empirikus elemzések, mint Solow [1957] vagy Kendrick [1961] a technikai haladás elemzését a közgazdaságtani elemzések homlokterébe emelték. A Solow-féle reziduum (amelyet technikai haladásnak szoktak nevezni) nagysága rávilágított arra, hogy a termelés növekedésében sokkal nagyobb szerepet játszik a termelékenység alakulása, mint a termelési tényezők gyarapodása.

Annak érdekében, hogy az eddig bemutatott modellek elemzését teljessé tegyük meg kell vizsgálnunk, mit értünk technikai haladáson, és miként tudjuk a technikai haladást beépíteni ezekbe a modellekbe.

13. Definíció. *Technikai haladásról akkor beszélünk, ha a kibocsátás növekedése nem a felhasznált termelési tényezők (tőke- és munka-) mennyiségének emelkedése révén megy végbe, hanem új termelési eljárások alkalmazásának eredményeképpen.*

Az eddig tárgyalt modellek központi fogalma a termelési függvény volt. Miként illeszthető be a technikai haladás a termelési függvénybe? A legáltalánosabb módja ennek a következő: legyen minden t-re

$$Y(t) = F[K(t), L(t), t],$$

[41] A fejezet tartalma támaszkodik Ramanathan [1982], Bessenyei [1995] és Romer [1996] műveire.

[42] Lásd például Harrod [1937], Robinson [1938].

ahol $F(.)$ folytonos és kétszer folytonosan differenciálható függvény, továbbá $\frac{\partial F}{\partial j} > 0$ $(j = K, L, t)$, $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \geq 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial i^2} < 0$ $(i = K, L)$. Ez a függvény annyiban általánosabb, mint az eddigiek, hogy az idő direkt módon befolyásolja a termlés alakulását. A technikai haladás esetén „ceteris paribus" a függvény t-ben szigorúan monoton növekvő, annak hiányában t-ben konstans. A korábban használt termelési függvények alakja tehát annyiban speciális, hogy azok mind t-ben konstansok voltak.

Tegyük fel a továbbiakban is, hogy a termelési függvény K-ban és L-ben első fokon homogén, azaz

$$\lambda Y(t) = F[\lambda K(t), \lambda L(t), t], \forall \lambda > 0.$$

A termelési függvény intenzív formája ekkor

$$y(t) = f[k(t), t],$$

ahol $\frac{\partial f}{\partial k} > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial k^2} < 0$, $\frac{\partial f}{\partial t} > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \geq 0$, továbbá $k(t)$ és $y(t)$ közgazdasági tartalma változatlan. Tudjuk, hogy a kibocsátás a technikai haladás hatására, rögzített inputok mellett, növekszik. Geometriailag ez azt jelenti, hogy a technikai haladás olyan módon tolja felfelé az intenzív formában ábrázolt termelési függvényt, hogy az minden tőkeintenzitás mellett a korábbinál nagyobb egy főre jutó kibocsátást eredményez.[43]

3.1. Tényezőnövelő technikai haldás

A továbbiakban elemzésünket olyan termelési függvényekre koncentráljuk, melyek az úgynevezett tényezőnövelő technikai haladást jelenítik meg. Ennek oka, — mint azt később megmutatjuk —, hogy a neoklasszikus elemzési keretben a technikai haladás az ilyen típusú termelési függvényformát implikálja. Ekkor a technikai haladás hatása megegyezik azzal a hatással, amelyet a technikai haladás hiányában az alkalmazott termelési tényezők mennyiségének növelése okozna.

14. Definíció. *Tényezőnövelő technikai haladásról akkor beszélünk, ha a termelési függvény a következő alakban írható fel:*

$$Y(t) = F[\eta(t) \cdot K(t), \tau(t) \cdot L(t)] = F\left[\hat{K}(t), \hat{L}(t)\right], \tag{23}$$

ahol $\eta(t)$ és $\tau(t)$ az idő monoton függvényei, továbbá, $t = 0$ időpontban értékük egységnyi.[44]

15. Definíció. *A $\hat{K}(t) = \eta(t) \cdot K(t)$ mennyiséget hatékony tőkének, az $\hat{L}(t) = \tau(t) \cdot L(t)$ mennyiséget pedig hatékony munkaegységnek fogjuk nevezni.*

[43] Emögött az az implicit feltevés húzódik meg, hogy a technikai haladás minden technológiai eljárást egyformán érint. Ha ez nem így lenne, akkor az a termelési függvény „kipúposodásához" vezethetne.

[44] Ez utóbbi kikötés csak egy egyszerűsítő feltevés, amely a későbbi számításokat teszi átláthatóbbá.

16. Definíció. *A (23) termelési függvény esetén tisztán tőkekiterjesztő*[45] *(vagy munkamegtakarító) technikai haladásról beszélünk, ha $\eta(t)$ az idő szigorú monoton függvénye, miközben $\tau(t)$ konstans. Tisztán munkakiterjesztő*[46] *(tőkemegtakarító) technikai haladásról beszélünk, ha konstans $\eta(t)$ mellett $\tau(t)$ az idő szigorú monoton növekvő függvénye. Amennyiben, mind az $\eta(t)$, mind $\tau(t)$ az idő szigorúan monoton függvénye, akkor egyaránt tőke- és munkakiterjesztő a technikai haladás.*

17. Definíció. *A technikai haladás növekedési rátája alatt a kibocsátás változatlan tőke- és munkafelhasználás mellett tapasztalható növekedési rátáját értjük:*

$$\gamma_t(t) = \frac{\partial F/\partial t}{Y(t)}.$$

A tisztán tőkekiterjesztő technikai haladás esetén a technikai haladás növekedési rátája[47]

$$\gamma_t(t) = \varepsilon^Y_{\hat{K}}(t) \cdot \frac{\dot{\eta}(t)}{\eta(t)},$$

ahol az $\varepsilon^Y_{\hat{K}}$ a kibocsátás hatékony tőke szerinti parciális rugalmassági együtthatója. A technikai haladás rátája tehát megegyezik az $\eta(t)$ és a $\tau(t)$ növekedési rátájának konstansszorosával. Emiatt az irodalomban gyakran magát az $\eta(t)$ vagy a $\tau(t)$ növekedési rátáját nevezik a technikai haladás növekedési rátájának.

Tekintsük a termelési függvény t szerinti totális deriváltját, majd osszuk el $Y(t)$-vel

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \left[F_K(t) \cdot \frac{K(t)}{Y(t)}\right] \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} + \left[F_L(t) \cdot \frac{L(t)}{Y(t)}\right] \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} + \frac{\partial F/\partial t}{Y(t)} =$$

$$= I_K(t) \cdot \gamma_K + (1 - I_K(t)) \cdot \gamma_L + \gamma_t, \tag{24}$$

ahol $I_K(t) = \frac{F_K(t) \cdot K(t)}{Y(t)}$ a *tőkejövedelmek aránya az összjövedelemből.*[48] Ezek alapján látható, hogy miként befolyásolja a kibocsátás növekedését a termelési tényezők és a termelékenység változása.

Miként modellezzük a technikai haladást? Gondolatmenetünk kiindulópontja az, hogy a technikai haladás és a termelékenységemelkedés szinonim fogalmak. A technikai haladás modellbeli leképezésének számos módja létezik, ezek közül

[45] Nevezhetjük még tőkenövelőnek.

[46] Hívhatjuk munkanövelőnek is.

[47] Tudjuk, hogy $\dot{K}(t) = \dot{L}(t) = 0$, így

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(t)}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial \hat{K}} \cdot K(t) \cdot \dot{\eta}(t) = \frac{\partial F}{\partial \hat{K}} \cdot \hat{K}(t) \cdot \frac{\dot{\eta}(t)}{\eta(t)} = \\ & \frac{\partial F/\partial \hat{K}}{Y(t)/\hat{K}(t)} \cdot Y(t) \cdot \frac{\dot{\eta}(t)}{\eta(t)}.\end{aligned}$$

ahonnan kapjuk, hogy $\gamma_t(t) = \frac{\partial F(t)/\partial t}{Y(t)} = \varepsilon^Y_{\hat{K}}(t) \cdot \frac{\dot{\eta}(t)}{\eta(t)}$.

[48] Ha csak kétfajta jövedelem képződik, akkor a munkajövedelmek aránya az összjövedelemből: $1 - I_K(t)$.

a legegyszerűbb az úgynevezett exogén technikai haladás. A korai növekedéselméleti modellek többsége ezt a fajta megjelenítést alkalmazta.[49] Ezek a modellek a termelékenységemelkedést közvetlenül az idő függvényében ábrázolták, és azzal az egyszerű feltevéssel éltek, hogy technikai haladás rátája a gazdaság számára egy külső adottság és nagysága konstans. Így a termelési tényezők növekedése következtében fellépő termelésnövekedés egyértelműen elválasztható a termelékenység-növekedés hatásaként fellépő termelésnövekedéstől. A problémát az jelenti, hogy ebben az esetben azok az okok, illetve tényezők, amelyek a technikai haladást biztosítják rejtve maradnak. Ezen modelleket nevezzük *exogén technikai haladás*t feltételező modelleknek.

*Endogén technikai haladás*ról akkor beszélünk, ha a technikai haladás- és a kibocsátást üteme egyaránt a modell keretein belül határozódik meg. A technikai haldást *semleges*nek mondjuk, ha minden termelési tényezőt azonosan érint. Ha a technikai haladás bizonyos tényezőket előnyösebben érint, akkor ezen tényezők esetén *tényezőnövelő-*, a többi tényező esetén *tényező megtakarító* technikai haladásról beszélünk. A pontos meghatározását lásd a 16., 18. és 19. Definíciókban.

A technikai fejlesztések csak az új gépekben jelennek meg, a régi gépekre nincs hatásuk. *Megtestesült technikai haladás*ról beszélük akkor, ha az új eszközökben ölt testet a technikai haladás. Ha a kibocsátásra a technikai haladás a gépek évjáratától függetlenül hat, akkor azt *meg nem testesült technikai haladás*nak nevezzük.

Az alábbiakban ezeket a fogalmakat elemezzük részletesen. Először megvizsgáljuk, hogy miként építhető be az exogén technikai haladás a korábban vázolt modellekbe, és mennyiben módosítják korábbi eredményeinket.

3.2. Exogén technikai haladás

Ebben a pontban azt vizsgáljuk, hogy miként hat az exogén technikai haladás figyelembevétele az előző fejezetben bemutatott növekedési modellekre. Az eddig vizsgált modellek központi fogalma az egyenletes (tartós) növekedés volt. Ezért azt kell tisztáznunk, hogy milyen feltételek mellett lehetséges állandó ütemű növekedés az exogén technikai haladás jelenlétében. A feltételek meghatározásához szükségünk lesz az exogén technikai haladás osztályozására.

3.2.1. Az exogén technikai haladás osztályozása

Az osztályozás többféle megközelítésből elvégezhető. Mi aszerint végezzük az osztályozást, hogy miként hat a technikai haladás a gazdaságban képződő tőke- és munkajövedelmek egymás közti megoszlására. Amint azt a (24) mutatja, a tőkejövedelmek $(I_K(t))$ és a munkajövedelmek $(1 - I_K(t))$ aránya az összkibocsátásból, befolyásolja a kibocsátás alakulását. Ösztönösen azt mondhatnánk, hogy amennyiben egy tényező jövedelemrészesedése csökken, abból arányosan

[49] Teljesen eltérő típusú formalizálásra lásd például Kaldor [1957] technikai haladás függvényének koncepcióját.

kevesebbet használunk fel. Ezt a megfogalmazást tesszük a következőkben pontosabbá.

Jelölje a $P(t)$ a tőkejövedelmek és munkajövedelmek arányát:

$$P(t) = \frac{F_K(t) \cdot K(t)}{F_L(t) \cdot L(t)} = \frac{I_K(t)}{(1 - I_K(t))}.$$

Ezt a hányadost a továbbiakban a *jövedelmek arányának* fogjuk nevezni.

A neoklasszikus modell egyik alapfeltevése, hogy a gazdaságban tökéletes verseny valósul meg. Tökéletes verseny esetén a határtermékek megegyeznek a tényezőárakkal. Azaz, ha $r(t)$ jelöli a tőke árát, azaz a profitrátát, és $w(t)$ a munka árát, azaz a bérrátát, akkor tökéletes verseny esetén

$$F_K(t) = r(t), \; F_L(t) = w(t).$$

A jövedelmek aránya tehát a tökéletes verseny feltevése mellett felírható a profit- és bérráta felhasználásával:

$$P(t) = \frac{F_K(t) \cdot K(t)}{F_L(t) \cdot L(t)} = \frac{r(t) \cdot K(t)}{w(t) \cdot L(t)} = \omega(t) \cdot k(t),$$

ahol $\omega(t) = \frac{r(t)}{w(t)}$ a *tényezőár-arány*okat jelöli.[50]

18. Definíció. *Munkamegtakarító technikai haladásról beszélünk akkor, ha a technikai haladás a jövedelmek arányát növeli, azaz $P(t)$ időben növekszik; tőkemegtakarítóról, ha csökkenti, azaz ha $P(t)$ időben csökken.*

A problémát az jelenti, hogy a jövedelmek aránya nem csak a technikai haladás eredményeképpen változhat. Ha tehát a $P(t)$ változását a technikai haladás osztályozására kívánjuk felhasználni, akkor ki kell kötnünk egyéb feltételek változatlanságát.

Geometriai reprezentáció. A 3. ábra segítségével könnyen leolvashatjuk, hogy mi a kapcsolat a tényezők határtermékei, jövedelemarányok, tényezőár-arányok között.

A 3. ábra alapján a következő összefüggéseket fogalmazhatjuk meg:

$$f'(k_0) = \tan\alpha = \frac{f(k_0)}{\omega + k_0}.$$

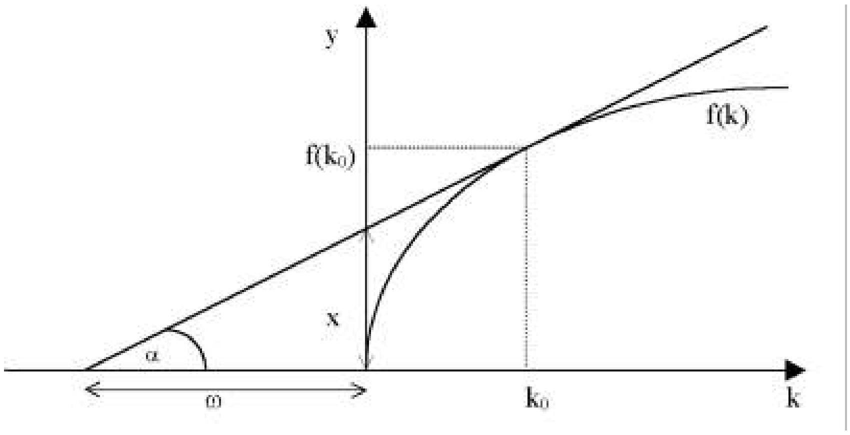
Ez utóbbiból átrendezéssel kapjuk:

$$\omega = \frac{f(k_0) - k_0 \cdot f'(k_0)}{f'(k_0)} = \frac{F_L}{F_K} = \frac{w}{r}.$$

Így ω nem más, mint a tényezőár-arány, amely általános alakban felírva

$$\omega(k(t)) = \frac{f(k(t)) - k(t) \cdot f'(k(t))}{f'(k(t))} = \frac{F_L(t)}{F_K(t)} = \frac{w(t)}{r(t)}. \tag{25}$$

[50]Az alábbi definíciók a feltételezett tökéletes verseny megvalósulása miatt a neoklasszikus modellre vonatkoznak.



3. ábra. A tényezőár-arány, a határtermék és a tőkeintenzitás kapcsolata

Az ábráról hasonlóan leolvasható, hogy

$$f'(k_0) = \tan\alpha = \frac{x}{\omega} = \frac{x}{\frac{f(k_0)-k_0\cdot f'(k_0)}{f'(k_0)}},$$

amit x-re kifejezve adódik, hogy

$$x = f(k_0) - k_0 \cdot f'(k_0).$$

Az x tehát nem más, mint a munka határterméke[51],

$$x(k(t)) = f(k(t)) - k(t) \cdot f'(k(t)).$$

3.2.2. Hicks-féle osztályozás

19. Definíció. *Hicksi értelemben munkamegtakarító technikai haladásról beszélünk, ha rögzített tőkeintenzitás, k, esetén a technikai haladás a tényezőár-arány, $\omega(t)$, csökkenését eredményezi. Semlegesről, ha a technikai haladás a tényezőárak változatlansága mellett megy végbe.*

Könnyen belátható, hogy a hicksi oszályozás a 18. Definíció szerinti osztályozással ekvivalens. Alkalmazva ugyanis a tőkeintenzitás és a tényezőár-arány definícióját azt kapjuk,

$$P(t) = \frac{r(t)\cdot K(t)}{w(t)\cdot L(t)} = \frac{k(t)}{\omega(t)}.$$

[51] Lásd a 2. Fejezet neoklasszikus modelljének (13) összefüggését.

A (25) egyenlőségből tudjuk, hogy $\omega(k(t)) = w(t)/r(t)$ ahol $\frac{d\omega(k)}{dk} > 0$.[52]

Grafikusan értelmezve a Hicks-semleges technikai haladást azt mondhatjuk, hogy a technikai haladás akkor és csak akkor semleges, ha bármely tőkeintenzitás esetén a t_0 és t_1 időpontokban érvényes intenzív termelési függvény érintői ugyanabban a pontban metszik a vízszintes tengelyt. Amint azt a 4. ábra mutatja a k_0 tőkeintenzitás esetén mind az A, mind a B pontban a termelési függvényekhez húzott érintők a D pontban metszik a vízszintes tengelyt. Hicks tőkeintenzitás változatlanságára vonatkozó kikötése, azt jelenti, hogy a technikai haladás során nem változik az alkalmazott technológia, csupán termelékenyebbé válik.[53]

A következő állítás, amelyet bizonyítás nélkül mondunk ki[54] rámutat, hogy milyen szoros kapcsolat található a termelési függvény alakja és a Hicks-semlegesség között.

20. Állítás. *Az $Y(t) = F(K(t), L(t), t)$ termelési függvénnyel reprezentált technikai haladás akkor és csak akkor Hicks-semleges, ha a termelési függvény felírható a következő alakban:*

$$F(K(t), L(t), t) = A(t) \cdot F(K(t), L(t)),\ A(t) > 0.$$

A tőkeintenzitás változatlanságának feltételezése azonban nem összeegyeztethető a neoklasszikus növekedéselméleti modellel. Ott ugyanis a tartós növekedés mellett mind t_0, mind t_1 időpontokban fenn kell állnia az

$$f(k(t), t) = \frac{n+\delta}{s} k(t)$$

összefüggésnek. Ez azonban csak a tőkeintenzitás k_0-ról k_1-re növekedése esetén állhat fenn. Tehát technikai haladás jelenlétében a kiegyensúlyozott növekedés csak akkor állhat fenn, ha a tőkeintenzitás megváltozik. Ez azonban lehetetlenné teszi a hicksi osztályozást.

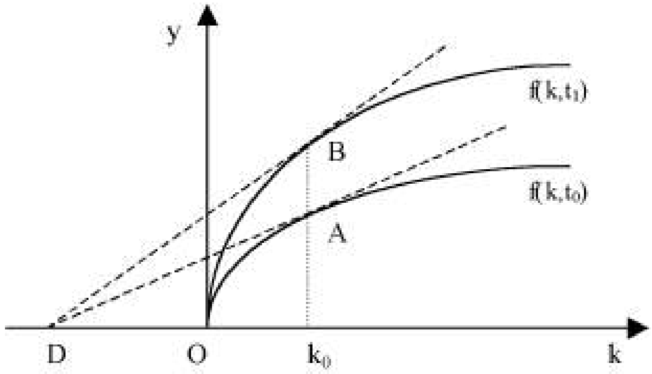
[52] Ez utóbbi reláció egyszerű deriválással előáll:

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dk} &= \left[\frac{fk(t) - k(t) \cdot f'(k(t))}{f'(k(t))}\right]' = \\
&= \frac{f'(k(t))\left[f'(k(t)) - f'(k(t)) - k(t) \cdot f''(k(t))\right]}{\left[f'(k(t))\right]^2} \\
&\quad - \frac{f''(k(t)) \cdot f(k(t)) + f''(k(t))\, k(t) \cdot f'(k(t))}{\left[f'(k(t))\right]^2} \\
&= \frac{-f''(k(t)) \cdot f(k(t))}{\left[f'(k(t))\right]^2} > 0,
\end{aligned}$$

hiszen a határtermék csökkenő, azaz $f''(k(t)) < 0$.

[53] Ez az álláspont jól illeszkedik az exogén technikai haladás koncepciójába, hiszen amennyiben valamennyi technológia termelékenysége növekszik, akkor kézenfekvő feltenni, hogy a t_0 időpontban leggazdaságosabb technológia lesz a leggazdaságosabb a t_1 időpontban is.

[54] Bizonyítást lásd például Ramanathan [1982] 77.o.



4. ábra. Hicks-semleges technikai haladás

3.2.3. Harrod-féle osztályozás

A harrodi osztályozás a neoklasszikus növekedéselméleti modellben állandó ütemű növekedés esetén is alkalmazható. Az egyenletes növekedési pályák összehasonlításához teljesülnie kell a következő összefüggésnek

$$\frac{n+\delta}{s} = \frac{f(k(t), t)}{k(t)} = \frac{Y(t)/L(t)}{K(t)/L(t)} = \frac{Y(t)}{K(t)}.$$

Tehát $\frac{Y(t)}{K(t)}$ konstans voltát kell kikötni. Az első egyenlőség állandó ütemű növekedés esetén fennáll, mind a Harrod–Domar, mind a Solow–Swan modellben. Harrod tehát a pont elején adott 18. Definíciónkat a tőkekoefficiens ($\kappa = Y(t)/K(t)$) konstans voltával egészíti ki.

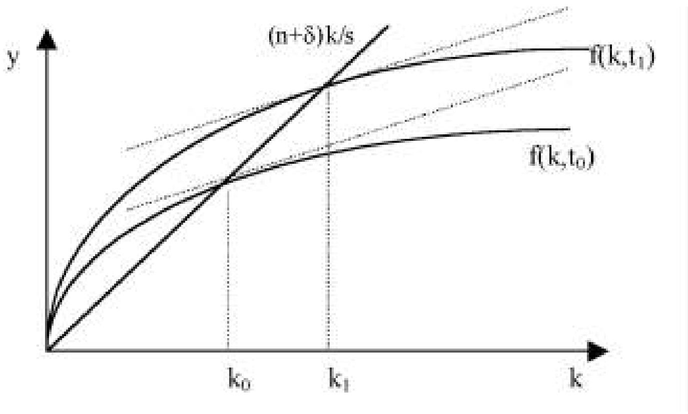
21. Definíció. *Harrodi értelemben semleges technikai haladásról akkor beszélünk, ha valamely konstans tőkekoefficiens, κ, mellett a technikai haladás eredményeként nem változik a jövedelmek aránya, azaz P konstans.*

Másrészt

$$P = \frac{r(t) \cdot K(t)}{w(t) \cdot L(t)} = \frac{r(t) \cdot K(t)}{Y(t) - r(t) \cdot K(t)} = r(t)\frac{1}{\kappa} - 1, \tag{26}$$

amiből látszik, hogy konstans tőkekoefficiens esetén a jövedelmek aránya akkor és csak akkor konstans, ha a profitráta (r) konstans. A Harrod-semleges technikai haladás 21. Definíciója (26) alapján a következő megfogalmazással ekvivalens:

22. Definíció. *Harrodi értelemben semleges technikai haladásról beszélünk, ha tetszőleges tőkekoefficiens esetén a technikai haladás hatására a profitráta nem változik.*



5. ábra. Harrod-semleges technikai haladás

Geometriailag ez azt jelenti (amint azt a 5. ábra mutatja), hogy semleges a technikai haladás, ha a $[k_0; f(k_0, t_0)]$ és $[k_1; f(k_1, t_1)]$ pontpárok rajta vannak az $\frac{n+\delta}{s}$ meredekségű sugáron. Továbbá az $f(k(t), t_0)$ és $f(k(t), t_1)$ termelési függvények és a sugár metszéspontjaiban — $[k_0; f(k_0, t_0)]$ és $[k_1; f(k_1, t_1)]$ — a függvényeknek azonos a meredeksége, azaz az érintők párhuzamosak.

Belátható,[55] hogy a Harrod-semleges technikai haladás a következő függvényformát implikálja:

$$Y(t) = F(K(t), L(t), t) = F[K(t), \tau(t) \cdot L(t)].$$

3.2.4. Solow-féle osztályozás

A technikai haladás osztályozásának harmadik típusa Solow nevéhez fűződik. Ebben az esetben az azonos munkakoefficienshez tartozó pontokban kerül összehasonlításra a jövedelmek aránya.

23. Definíció. *Solow-semleges technikai haladásról beszélünk, ha rögzített munkakoefficiens,* $\nu(t) = \frac{L(t)}{Y(t)}$*, esetén a technikai haladás a* $P = \frac{r(t) \cdot K(t)}{w(t) \cdot L(t)}$ *jövedelemarány változatlansága mellett megy végbe.*

Belátható, hogy ez a definíció a következő típusú termelési függvényt eredményezi:

$$Y(t) = F[\eta(t) \cdot K(t), L(t)].$$

Az ilyen típusú termelési függvényeket tőkekiterjesztőnek nevezzük, mert ha a technikai haladás a kibocsátást λ szorosára növeli,

$$\lambda Y(t) = F[\eta(t) \cdot K(t), \lambda L(t)]$$

[55] Legelőször Robinson [1938] mutatta meg, hogy a Harrod-semlegesség munkakiterjesztő technikai haladást jelent. A formális bizonyítás (amely a Függelék 9.3. pontjában megtalálható) Uzawától [1961] származik.

akkor a technikai haladás hiányában a tőkeállomány λ szoros növelése is ugyan azt eredményezné

$$\lambda Y(t) = F[\lambda \cdot K(t), \lambda L(t)].$$

A definíciók és a következmények megegyeznek a Harrod-semleges technikai haladásnál bemutatottakkal, csupán a tőke és a munka fogalmát kell felcserélni.

3.2.5. A technikai haladás osztályozásai közti kapcsolat

Az alábbi állítás az eddigeikben tárgyalt osztályozások között teremt kapcsolatot. Rávilágít arra, hogy miért is van kitüntetett szerepe a Cobb–Douglas típusú termelési függvényeknek a technikai haladás elemzésénél.[56]

24. Állítás. *Az $F(K(t), L(t), t)$ termelési függvénnyel reprezentált technikai haladás akkor és csak akkor Harrod- és Hicks-semleges, ha a termelési függvény a következő alakú*

$$F(K(t), L(t), t) = A(t) \cdot K^{\beta}(t) \cdot L^{1-\beta}(t),$$

ahol $A(t) > 0$, és $0 < \beta < 1$.

Bizonyítás. Elégséges azt megmutatni, hogy az $y(t) = f(k(t), t)$ termelési függvénnyel reprezentált technikai haladás akkor és csak akkor Harrod-, és Hicks-semleges, ha

$$y(t) = A(t) \cdot k^{\beta}, A(t) > 0,\ 0 < \beta < 1.$$

Legyen $f(k(t), t)$ Harrod-semleges, akkor[57]

$$f(k(t), t) = B(t) \cdot g\left[\frac{k(t)}{B(t)}\right],\ B(t) > 0. \tag{27}$$

Másrészt az $f(k(t), t)$ Hicks-semleges[58], ha

$$\frac{\partial^2 \ln f(k(t), t)}{\partial k \partial t} = 0, \forall k, t. \tag{28}$$

Definiáljuk a következő függvényt

$$\Psi(z) = \ln g(e^z),$$

ahol $z = \ln\left[\frac{k(t)}{B(t)}\right]$. A (27) alapján

$$\ln f(k(t), t) = \ln B(t) + \Psi\left[\ln\left(\frac{k(t)}{B(t)}\right)\right].$$

---

[56] Az állítás és bizonyítás Uzawa [1961]-tól (120-121.o.) származik.

[57] Ennek bizzonyítására lásd a Függelék 9.3. pontjának (132) összefüggését.

[58] A Hicks-féle semlegességhez az kell, hogy állandó k esetén $\frac{d\omega(k(t))}{dt} = \frac{d\left[\frac{f(k(t))}{f'(k(t))} - k(t)\right]}{dt} = 0$ egyenlőség fennálljon. Ez azonban csak akkor áll fenn, ha $\frac{d[f(k(t))/f'(k(t))]}{dt} = 0$. Ez utóbbi kifejezés baloldalát felírhatjuk a következő alakban: $\frac{\partial^2 \ln f(k(t),t)}{\partial k \partial t}$.

Deriváljuk a kapott egyenlőséget k, majd t szerint

$$\frac{\partial^2 \ln f(k(t), t)}{\partial k \partial t} = \frac{-B'(t)}{k(t) \cdot B(t)} \cdot \Psi'' \left[\ln \left(\frac{k(t)}{B(t)} \right) \right], \tag{29}$$

hiszen $\dot{k}(t) = 0$ a Hicks-semlegesség szerint. A (28) és (29) alapján

$$\Psi'' \left[\ln \left(\frac{k(t)}{B(t)} \right) \right] = 0, \forall k, t.$$

Ebből következik,hogy

$$\Psi(z) = \alpha + \beta z$$
$$g(k(t)) = e^{\alpha} \cdot k^{\beta}(t).$$

Tehát a termelési függvény formája

$$f(k(t), t) = e^{\alpha} \cdot B(t) \cdot k^{\beta}(t) = A(t) \cdot k^{\beta}(t),$$

ahol $A(t) = e^{\alpha} \cdot B(t)$.

Az állítás csak akkor részéhez tekintsük az $F(K(t), L(t), t) = A(t) \cdot K^{\beta}(t) \cdot L^{1-\beta}(t)$ termelési függvény intenzív formáját $y(t) = f(k(t), t) = A(t) \cdot k^{\beta}$. A Hicks semlegességhez kell, hogy állandó tőkeintenzitás esetén a tényezőár-arány ω se változzon.

$$\omega(k(t)) = \frac{f(k(t), t)}{f'(k(t), t)} - k(t) = \frac{A(t) \cdot k^{\beta}}{A(t) \cdot \beta k^{\beta-1}} - k(t) = \frac{k(t)}{\beta} - k(t)$$

Ez az a kifejezés $k(t) = k$ konstans esetén szintén konstans.

A Harrod-semlegességhez induljunk ki a tőkekoefficiensből:

$$\kappa(t) = \frac{K(t)}{Y(t)} = \frac{k(t)}{y(t)} = \frac{k(t)}{A(t) \cdot k^{\beta}} = \frac{1}{A(t)} k^{1-\beta}(t),$$

ahonnan átrendezés után adódik

$$k^{\beta-1}(t) = \frac{1}{\kappa(t) \cdot A(t)}.$$

Felhasználva, hogy a profitráta nagyságát a tőke határtermelékenysége határozza meg a 22. Definíciónak megfelelően megmutatjuk, hogy konstans tőkekoefficiens, $\kappa(t) = \kappa$, esetén a profitráta sem változik:

$$r = f'(k(t)) = A(t) \cdot \beta k^{\beta-1} = A(t) \cdot \beta \frac{1}{\kappa \cdot A(t)} = \frac{\beta}{\kappa}.$$

■

A Cobb–Douglas termelési függvényre hasonlóan belátható, hogy Solow-semleges technikai haladást is reprezentál.

3.2.6. Technikai haladás és egyenletes növekedés

Ebben a részben bemutatjuk, hogy a technikai haladás figyelembevétele esetén milyen feltételeknek kell fennállni ahhoz, hogy a gazdaság egyenletes növekedési pályán haladhasson. A feltételek függetlenek attól, hogy post-keynesi vagy neoklasszikus modellt tekintünk.

25. Állítás. *Az egyenletes növekedés szükséges és elégséges feltétele, hogy a tőkejövedelmek részesedése az összjövedelemből konstans legyen.*

Bizonyítás. Kiindulásként tekintsük a (23) termelési függvény (24) szerinti dekompozícióját:

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)}\left(\frac{K(t)}{Y(t)} \cdot F_K\right) + \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}\left(\frac{L(t)}{Y(t)} \cdot F_L\right) + \frac{\partial F/\partial t}{Y(t)} =$$

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} I_K(t) + \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}\left[1 - I_K(t)\right] + \frac{\partial F/\partial t}{Y(t)},$$

ahol $I_K(t)$ és $1 - I_K(t)$ rendre a tőke- és munkajövedelmek aránya az összjövedelemből. Mivel csak kétféle jövedelem van, így a munkajövedelem aránya az összjövedelemhez: $1 - I_K(t)$. Így az egy főre jutó jövedelem növekedési rátája meghatározható:

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = I_K(t) \cdot \left[\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}\right] + \frac{\partial F/\partial t}{Y(t)}$$

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = I_K(t) \cdot \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} + m, \tag{30}$$

ahol $m = \frac{\partial F/\partial t}{Y(t)}$ konstans az exogén technikai haladás növekedési rátája. Az egy főre jutó kibocsátás, és a tőkeintenzitás azonos növekedési rátája egyenletes növekedés esetén konstans $\gamma = \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \frac{\dot{k}(t)}{k(t)}$.

Egyenletes növekedés esetén a (30) alapján $I_K(t) = I_K$ konstans, hiszen

$$I_K = \frac{\gamma - m}{\gamma}.$$

Illetve, ha az I_K konstans, akkor a közös növekedési ráta is konstans

$$\gamma = \frac{m}{1 - I_K}.$$

■

26. Állítás. *A Harrod-semleges technikai haladás szükséges és elégséges feltétele az egyenletes növekedésnek.*

Bizonyítás. Egyenletes növekedés esetén $\gamma = \gamma_k = \gamma_y$ konstans. Tehát $\kappa = \frac{k}{y} = \frac{K}{Y}$ is konstans. Másrészt a 25. Állítás alapján I_K konstans. Így

$$I_K = \kappa \cdot r(t) \Longrightarrow r(t) = r.$$

Tehát egyenletes növekedés mellett rögzített tőkekoefficiens esetén a profitráta konstans, ami a 22. Definíció alapján pontosan Harrod-semlegességet jelent.

Harrod semlegesség esetén κ és r konstans, így $I_K = \kappa \cdot r$ is konstans. A 25. Állítás alapján azonban ez egyenletes növekedést jelent. ■

Tehát állandó ütemű növekedés csak akkor adódik, ha a technikai haladás Harrod-semleges. Ezek után jogosan merül fel a kérdés, hogy feltehető-e a technikai haladás Harrod-semlegessége. Erről az irodalomban megoszlanak a vélemények.[59]

Semleges technikai haladás alatt a továbbikaban Harrod-semleges technikai haladást fogunk érteni! Továbbá csak munkakiterjesztő technikai haladást fogunk figyelembe venni. Ennek oka, hogy a Harrod-semleges technikai haladás a termelési függvényre a következő alakot implikálta (lásd, Uzawa [1961])[60]:

$$Y(t) = F[K(t), \tau(t) \cdot L(t)].$$

Továbbá Barro–Sala-i-Martin [1995] megmutatta, hogy ha létezik egyensúlyi növekedési pálya, akkor minden tőkekiterjesztő technikai haladás felírható munkakiterjesző technikai haladásként.[61]

27. Definíció. *A* $\frac{K(t)}{\tau(t) \cdot L(t)} = \frac{K(t)}{\hat{L}(t)} = \hat{k}(t)$ *kifejezést hatékony munkaegységre eső tőkeállománynak vagy hatékony tőkeintenzitásnak, az* $\frac{Y(t)}{\tau(t) \cdot L(t)} = \frac{Y(t)}{\hat{L}(t)} = \hat{y}(t)$ *hányadost pedig hatékony munkaegységre eső kibocsátásnak fogjuk nevezzük.*

3.2.7. Technikai haladás a post-keynesi modellben

Induljunk ki egy olyan Leontief típusú termelési függvényből, amelybe munkakiterjesztő technikai haladást építünk be. Vizsgáljuk meg, hogy a technikai haladás beépítése mennyiben módosítja az előző fejezetben feltett két kérdésre adott válaszunkat, azaz képesek vagyunk-e tartós egyensúlyi növekedést leírni a Harrod–Domar modellel.

$$Y(t) = \min\left\{\frac{K(t)}{\kappa}, \frac{\tau(t) \cdot L(t)}{\nu}\right\} = \min\left\{\frac{K(t)}{\kappa}, \frac{\hat{L}(t)}{\nu}\right\}.$$

Most megismételhetjük a 2.1. pontban ismertetett gondolatmenetet, csak a munka fogalmát a hatékony munka kategóriájával kell helyettesítenünk. Tehát

[59] Erről részletesebben, lásd Bessenyei [1995] 109.o.

[60] A bizonyítást lásd a Függelék 9.3. pontjában.

[61] Barro–Sala-i-Martin [1995] 54-55.o. bebizonyítja, (bizonyítást lásd a Függelék 9.3. pontjában) hogy tetszőleges tőkekiterjesztő technológiai haladás átírható munkakiterjesztővé, ha létezik egyensúlyi megoldás a neoklasszikus modellben. Így elegendő csak ezt vizsgálni.

Van aki ezt a felírást hívja tőkekiterjesztőnek, lásd például Simon [1999].

az árupiaci egyensúlyt biztosító garantált növekedési rátára ugyanazt az összefüggést kapjuk, mint korábban

$$G_w = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{s}{\kappa},$$

ahol az s a konstans megtakarítási hányad, és κ a konstansnak feltételezett tőkekoefficiens. A munka- és árupiac egyensúlya akkor valósul meg, ha

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \gamma_{\hat{L}} = \frac{d\hat{L}(t)/dt}{\hat{L}(t)} = \frac{dL(t)/dt}{L(t)} + \frac{d\tau(t)/dt}{\tau(t)} = n + m,$$

ahol az n a népesség konstans természetes növekedési rátája, és az m a technikai haladás feltételezett konstans növekedési rátája. Tehát a teljes foglalkoztatás melletti állandó ütemű növekedés feltétele semleges technikai haladás esetén az, hogy a garantált növekedési ráta egyezzen meg a természetes növekedési ráta és a technikai haladás növekedési rátájának összegével.

Ezek alapján megállapíthatjuk, hogy ez a modell már alkalmas arra, hogy az egy főre jutó kibocsátás állandó ütemű növekedését leírja, hiszen

$$\gamma_{Y/L} = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} - \frac{dL(t)/dt}{L(t)} = \frac{d\tau(t)/dt}{\tau(t)} = m > 0.$$

A modellben felmerülő egyéb (első és második harrodi) problémákat azonban a technikai haladás exogén beépítése sem oldja meg. Továbbra sincs olyan mechanizmus, amely az exogén tényezők $\frac{s}{\kappa} = n + m$ egyenlőségét biztosítaná.

3.2.8. Technikai haladás a neoklasszikus modellben

A neoklasszikus modellbe hasonló módon beépíthető az exogén semleges technikai haladás. Ekkor a termelési függvény a következő alakot ölti

$$Y(t) = F(K(t), \tau(t) \cdot L(t)) = F\left(K(t), \hat{L}(t)\right),$$

ahol $\tau(t) = e^{mt}$, $m > 0$ exogén konstans.

28. Állítás. *Exogén technikai haladás esetén a 2.2. pontban bemutatott neoklasszikus modellben az $Y(t)$ egyensúlyi és egyenletes növekedésének szükséges és elégséges feltétele, hogy teljesüljön*

$$\gamma_y = m > 0.$$

Bizonyítás. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\hat{k}(t) = \frac{K(t)}{\tau(t) \cdot L(t)};\ \hat{y}(t) = \frac{Y(t)}{\tau(t) \cdot L(t)};\ \hat{c}(t) = \frac{C(t)}{\tau(t) \cdot L(t)};\ \hat{\imath}(t) = \frac{I(t)}{\tau(t) \cdot L(t)},$$

azaz a változó feletti kalap minden esetben az egy hatékony munkaegységre vetítést jelenti. Felírva az árupiac egyensúlyi feltételét ($\hat{y}(t) = \hat{c}(t) + \hat{\imath}(t)$) a korábbi módon eljutunk az alapegyenlethez[62]:

$$\gamma_{\hat{k}} = s \cdot \frac{f(\hat{k}(t))}{\hat{k}(t)} - (m + n + \delta).$$

Ez csak akkor lehet egyenletes növekedési ráta, mint azt a 8. Állítás bizonyításánál már beláttuk, ha $\gamma_{\hat{k}} = 0$. Mivel azonban $\gamma_{\hat{y}} = \varepsilon^{Y}_{\hat{K}} \cdot \gamma_{\hat{k}}$, így az egyenletes hosszú távú pálya mentén $\gamma_{\hat{y}} = 0$. Innen:

$$\gamma_y = \gamma_{\hat{y}} + \gamma_\tau = m > 0.$$

A bizonyítás megfordítása ugyan úgy igazolható, mint a 8. Állításnál. ■

Tehát a neoklasszikus modellben a technikai haladás bevezetése már garantálja a pozitív növekedési rátát. Ha az $m \approx$0,02, akkor azt kapjuk, hogy a hosszú távú trend 0,02 meredekségű, amint azt az 1. ábrán láthattuk az USA esetében. A problémát az jelenti, hogy m exogén tényező, és nem tudjuk a pontos értékét. Sőt a technikai haladás okai és forrásai továbbra is feltáratlanok maradnak. A technikai haladás forrásainak kutatása azonban roppant fontos, hiszen, mint az empirikus elemzések mutatták[63] ennek döntő jelentősége van a növekedés meghatározásában.

3.2.9. Technikai haladás az AK modellben

Ha az AK modellt bővítjük exogén technikai haladással, akkor a termelési függvényünk intenzív formája a következő lesz:

$$\hat{y}(t) = A\hat{k}(t).$$

Az AK modell alapegyenlete ennek megfelelően változik:

$$\gamma_{\hat{k}} = \frac{\frac{d\hat{k}(t)}{dt}}{\hat{k}(t)} = sf(\hat{k}(t))/\hat{k}(t) - (n + m + \delta) = sA - (n + m + \delta). \tag{31}$$

A (31) összefüggés annyiban változtatja meg a korábbi eredményeinket, hogy most az egy főre jutó kibocsátás növekedési rátája, γ_y, még akkor is pozitív, ha $sA = (n + m + \delta)$. Ekkor ugyan $\gamma_{\hat{y}} = 0$, de $\gamma_y = m > 0$ lesz.

Összegzésképpen azt mondhatjuk, hogy az AK modell esetén még akkor is létezhet a kibocsátásnak pozitív növekedési üteme, ha nincs technológiai haladás. Ebben az esetben a növekedési ütem magatartási tényezőktől függ, mint

---

[62] $\frac{d\hat{k}(t)}{dt} = d\left(\frac{K(t)}{\tau(t) \cdot L(t)}\right)/dt = \frac{\dot{K}(t) \cdot \tau(t) \cdot L(t) - \dot{\tau}(t) \cdot K(t) \cdot L(t) - \dot{L}(t) \cdot K(t) \cdot \tau(t)}{[\tau(t) \cdot L(t)]^2} = \frac{\dot{K}(t)}{\tau(t) \cdot L(t)} - m\hat{k}(t) - n\hat{k}(t)$,

ahonnan a bruttó beruházás

$$\hat{\imath}(t) = \frac{\dot{K}(t)}{\tau(t) \cdot L(t)} + \delta\hat{k}(t) = \frac{d\hat{k}(t)}{dt} + (m + n + \delta) \cdot \hat{k}(t).$$

[63] Erről részletesebben lásd a 2.2.2. alpontot.

például a megtakarítási hányad. Az exogén technikai haladás léte növeli az endogén, pozitív hosszú távú növekedési ráta megvalósulását.

3.2.10. Technikai haladás az MRW modellben

Mankiw–Romer–Weil modelljében — hasonlóan az eddigiekhez — a munkakiterjesztő technikai haladást jelenítjük meg:

$$Y(t) = K^{\alpha}(t) \cdot H^{\beta}(t) \cdot [\tau(t) \cdot L(t)]^{1-\alpha-\beta},$$

ahol, $0 < \alpha + \beta < 1$ és $\tau(t) = e^{mt}$, $m > 0$ konstans. Az egy hatékony munkaegységre jutó humántőke[64] állományát jelölje $\hat{h}(t) = \frac{H(t)}{\tau(t) \cdot L(t)}$. A termelési függvény intenzív formája ekkor:

$$\hat{y}(t) = \hat{k}^{\alpha}(t) \cdot \hat{h}^{\beta}(t).$$

A korábbiakhoz hasonlóan könnyen eljuthatunk a rendszer intenzív formában felírt alapegyenleteihez.

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = s_k \cdot \hat{y}(t) - (n + m + \delta) \cdot \hat{k}(t),$$

$$\frac{d\hat{h}}{dt} = s_h \cdot \hat{y}(t) - (n + m + \delta) \cdot \hat{h}(t).$$

Fejezzük ki a $\hat{k}(t)$ és a $\hat{h}(t)$ változók növekedési ütemét:

$$\gamma_{\hat{k}} \equiv \frac{d\hat{k}(t)/dt}{\hat{k}(t)} = s_k \cdot \frac{\hat{h}^{\beta}(t)}{\hat{k}^{1-\alpha}(t)} - (n + m + \delta)$$

$$\gamma_{\hat{h}} \equiv \frac{d\hat{h}(t)/dt}{\hat{h}(t)} = s_h \cdot \frac{\hat{k}^{\alpha}(t)}{\hat{h}^{1-\beta}(t)} - (n + m + \delta).$$

Ha $\hat{k}^*$ és $\hat{h}^*$ jelöli a stabil stacionárius állapotot, azaz amikor a $\gamma_{\hat{k}} = 0$ és $\gamma_{\hat{h}} = 0$, akkor $\hat{k}^*$ és $\hat{h}^*$ explicit formái a következők:

$$\begin{aligned} \hat{k}^* &= \left(\frac{s_k^{1-\beta} \cdot s_h^{\beta}}{n + m + \delta} \right)^{1/(1-\alpha-\beta)}, \\ \hat{h}^* &= \left(\frac{s_k^{\alpha} \cdot s_h^{1-\alpha}}{n + m + \delta} \right)^{1/(1-\alpha-\beta)}. \end{aligned}$$

Ebben az esetben, hasonlóan a Harrod–Domar és a Solow–Swan modellhez, azt tapasztalhatjuk, hogy a technikai haladás beépítése esetén az egy főre jutó

[64] Nevezhetjük még intenzív humántőke állománynak is.

kibocsátás növekedési rátája a tartós növekedési pálya mentén pozitív lesz. Hiszen

$$0 = \gamma_{\hat{k}} = \gamma_k - \gamma_\tau \Longrightarrow \gamma_k = \gamma_\tau = m > 0,$$

$$0 = \gamma_{\hat{h}} = \gamma_h - \gamma_\tau \Longrightarrow \gamma_h = \gamma_\tau = m > 0.$$

A termelési függvény intenzív formájából adódik, hogy a stacionárius megoldás esetén

$$\gamma_{\hat{y}} = \alpha \cdot \gamma_{\hat{k}} + \beta \cdot \gamma_{\hat{h}} = 0 = \gamma_y - \gamma_\tau \Longrightarrow \gamma_y = \gamma_\tau = m > 0.$$

A 2. Fejezet 12. Állításához hasonlóan beláthatjuk, hogy ebben a modellben létezik olyan lokálisan aszimptotikusan stabil megoldás, amely esetén a gazdaság pozitív egyenletes növekedési ütemet realizál az egy hatékony munkásra jutó kibocsátás esetén is. Ekkor az egy főre jutó kibocsátás növekedési rátája már eltérhet az exogén technikai haladás növekedési rátájától!

Problémák az exogén technikai haladással. Az exogén technikai haladás feltételezése roppant kényelmes, azonban elméleti szempontból nehezen elfogadható, és a gyakorlat sem igazolja. Továbbá a technikai haladás tényezőnövelő megjelenítési formájából semmiféle következtetést nem tudunk levonni a technikai haladás okaival és forrásaival kapcsolatban. A technikai haladás okai nyilvánvalóan magában a gazdaságban (annak szerkezetében, fejlettségi fokában, stb.) rejlenek, azaz a technikai haladás ütemét a gazdaság endogén módon határozza meg. Tehát a technikai haladásnak az időtől nem közvetlenül, hanem közvetve kell függnie, azaz a termelési tényezők változásain keresztül.

3.3. Endogén technikai haladás

3.3.1. Évjáratmodell

Az eddigiekben tárgyalt meg nem testesült technikai haladás csak akkor tekinthető a valóságot megfelelően leíró modellnek, ha feltételezzük, hogy valamennyi termelési tényezőre állandóan és azonos mértékben hatással van. Mivel azonban a több tíz éve használatban levő gépek termelékenységét a műszaki fejlődés legújabb eredményei nem javítják, a technikai haladás kizárólag a legújabb gépekben ölt testet. Ezt nevezzük megtestestesült technikai haladásnak. A megtestesült technikai haladás első modellje Robert Solowtól [1960] származik. Solow szerint a régi gépek alacsonyabb termelékenységűek, mint az új gépek. Solow a tőkejavak életkorát használja fel a technikai haladás szintjének meghatározásához. Az ilyen típusú modelleket hívjuk *évjáratmodell*eknek.

A ν ($\nu \leq t$) évjáratú gépek állománya a t. időpontban

$$K(\nu, t) = e^{-\delta(t-\nu)} \cdot I(\nu),$$

azaz a ν. időpontban beruházások során előállított tőkeállomány, $I(\nu)$, és a konstans, δ, ütemű amortizáció eredőjeként határozható meg. Ekkor a termelési függvény a ν. időpontban

$$Y(\nu, t) = A \cdot e^{m\nu} \cdot K^{1-\alpha}(\nu, t) \cdot L(\nu, t)^{\alpha}.$$

Az $A \cdot e^{m\nu}$ tényező azt mutatja, hogy a technikai haladás növekedési ütemének exogén rátája a konsans m. Az $L(\nu, t)$ a $K(\nu, t)$ tőkeállomány mellett foglalkoztatott munkamennyiség. Az összkibocsátás egy $[\nu_0, t]$ idő intervallumban

$$Y(t) = \int_{\nu_0}^{t} Y(\nu, t)\, d\nu.$$

Ez az integrál azt jelenti, hogy valamennyi, a ν_0 évjáratnál korábban üzembe helyezett gép már kikerült a termelésből a t-időpontra. Solow feltételezte, hogy a tökéletesen versenyző munkapiacon a munka (ellentétben a tőkeállománnyal) homogén, azaz minden időpontban minden egysége teljesen azonos tulajdonságú. Ha $L(t)$ jelöli a gazdaságban a t időpontban alkalmazott összes munka mennyiségét, akkor ez felírható a következő formában

$$L(t) = \int_{\nu_0}^{t} L(\nu, t)\, d\nu,$$

hiszen ez utóbbi azt jelenti, hogy a különböző évjáratú tőkejavak mellett mekkora a felhasznált munka mennyisége. A modellből levezethető aggregált termelési függvény Cobb–Douglas formát ölt:

$$Y(t) = A \cdot e^{-\delta(1-\alpha)\cdot t} \cdot L^{\alpha}(t) \cdot \left[\int_{\nu_0}^{t} e^{\rho\cdot\nu} \cdot I(\nu)\, d\nu\right]^{1-\alpha},$$

ahol $\rho = \delta + \frac{m}{1-\alpha}$ és a szögletes zárójelben álló kifejezés a gazdaságban működő tőkejavak olyan súlyozott összege, mely a korábban előállított tőkejavaknak kisebb, az újabb tőkejavaknak nagyobb súlyt ad. Ez a súlyozás tehát figyelembe veszi a tőkeállomány évjárat szerinti heterogenitását.

Az évjáratmodellre azonban már nem alkalmazható a technikai haladás korábbi elemzése, hiszen az nem a termelési függvény felfelé tolódásaként jelenik meg, hanem a tőkeállomány növekedési ütemében. Így a technikai haladásra adott korábbi 13. Definíciónkat módosítanunk kell.

Technikai haladáson most azt a jelenséget értjük, amikor egységnyi beruházás kibocsátás-növelő hatása annál nagyobb, minél később eszközlik azt, vagy másképpen megfogalmazva, ha a tőke-kibocsátás határráta $\left(\lim_{t\to\infty} \frac{K(t)}{Y(t)}\right)$ időben csökkenő. Ez azonban ellentmond a harrodi osztályozásnak, amely szerint ez a nagyság állandó.

További problémát okoz, hogy az egyenletes növekedés sem tartható fenn ebben a modellben állandó megtakarítási ráta esetén. Egyenletes növekedés esetén ugyanis fenn áll a következő összefüggés

$$\dot{K} = \frac{s}{\kappa} - \delta.$$

A tőkekoefficiens, κ, azonban időben csökken, így a tőkeállomány csak akkor növekedhet konstans ráta szerint, ha vagy s is csökken vagy δ növekszik.

Solow modelljében a technikai haladás rátája továbbra is exogén, m, de hatása a gazdaság belső folyamataitól, pontosabban a beruházások alakulásától függ. Ebből a megközelítésből már az endogén technikai haladás koncepciója felé mutat.

3.3.2. Arrow modellje

Arrow [1962] kritizálja a munka időbeli homogenitásának feltevését. Szerinte, ha minden egyes évjáratban a gépek kapacitása azonos, akkor az egymást követő évjáratokban az egyes gépekhez szükséges munka mennyiség csökkenő tendenciát mutat. Arrow szerint ugyanis minden korábbi beruházással nyert tapasztalat („*learning by doing*") hozzájárul a termelékenység szintjének javulásához. Ezek alapján a munkatermelékenység az idők kezdete óta eszközölt beruházások kumulált nagyságával közelíthető:

$$G(t) = \int_{-\infty}^{t} I(\nu)\, d\nu,$$

ahol $I(\nu)$ a ν. évjáratban eszközölt bruttóberuházások nagysága és $G(t)$ a beruházások kumulált nagysága. A munkatermelékenység időbeli alakulását szerinte az alábbi összefüggés adja meg:

$$y(t) = b \cdot G^{\mu}(t), \; b > 0, 0 < \mu < 1.$$

Modelljében az állandó ütemű növekedés rátája $\frac{n}{1-\mu}$ exogén nagyság, ahol n a népességnövekedés exogén rátája. Ez ellentmond a modell endogén jellengének!

3.3.3. Colinsk modellje

A következő modellben a technikai haladás üteme függ az egy főre jutó kibocsátástól. Colinsk [1967] szerint egy gazdagabb országban több erőforrás vehető igénybe oktatásra, és kutatásra, amelyek végső soron meghatározzák a termelékenység alakulását. Colinsk eredménye abban is eltér a neoklasszikus modellektől, hogy nála a megtakarítási ráta növelése a jövedelem növekedési ütemére is hatást gyakorol. Így az állam által előidézett megtakarítási ráta növekedése hatásos politikának bizonyul a gazdaság hosszú távú élénkítéséhez.

A modell termelési függvénye a már megismert munkakiterjesztő technikai haladást tartalmazó elsőfokon homogén termelési függvény

$$Y(t) = \tau(t) \cdot L(t) \cdot f(k(t)).$$

A technikai haladás időbeli alakulását azonban nem egy exogén tényező, hanem a következő összefüggés határozza meg[65].

$$\dot{\tau}(t) = \mu \frac{Y(t)}{L(t)} + \lambda \cdot \tau(t).$$

[65] A hatékony munkaállomány deriválásával kapjuk

$$\frac{d\hat{L}(t)}{dt} = L(t) \cdot \dot{\tau}(t) + \dot{L}(t) \cdot \tau(t) = \mu Y(t) + \lambda \hat{L}(t) + n\hat{L}(t)$$

vagy ezzel ekvivalens

$$\frac{d\hat{L}(t)/dt}{\hat{L}(t)} = n + \mu \frac{Y(t)}{\hat{L}(t)} + \lambda.$$

A hatékony munka változásának két komponense: az exogén népesség növekedési üteme és egy endogén tényező, amely a hatékony munka átlagtermékétől függ.

A népesség és a tőkeállomány alakulását a már korábban ismertetett összefüggések[66] határozzák meg. A tőkeállomány alakulását leíró egyenlet

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{sY}{K(t)} - \delta = s\frac{f(k(t))}{k(t)} - \delta.$$

A hatékony munka definíciójából adódik, hogy

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{\tau}(t)}{\tau(t)} = s\frac{f(k(t))}{k(t)} - \delta - n - \mu f(k(t)) - \lambda.$$

A rendszer alapegyenlete tehát

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = s\frac{f(k(t))}{k(t)} - \mu f(k(t)) - (\lambda + n + \delta) \stackrel{\circ}{=} \psi(k(t)) - (\lambda + n + \delta).$$

Egyenletes növekedés akkor és csak akkor valósul meg, ha

$$\frac{d\left[\frac{f(k(t)) - \frac{\mu}{s}\cdot k(t)\cdot f(k(t))}{k(t)}\right]}{dt} = 0.$$

A deriválás elvégzése és a tagok megfelelő rendezése után azt kapjuk, hogy

$$-\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}\left[\frac{f(k(t)) - k(t)\cdot f'(k(t))}{k(t)} + \frac{\mu}{s}f'(k(t))\right] = 0.$$

Mivel a zárójel első tagja mindig határozottan pozitív (a munka határterméke miatt, ami a számláló) a második tagja nem negatív, így az egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha $\dot{k}(t) = 0$. Ez az alapegyenlet stacionárius megoldását jelenti.

Mivel $f(k(t))$ kielégíti a neoklasszikus tulajdonságokat, $\psi(k(t))$ folytonos a $(0, \infty)$ intervallumon és monoton csökkenő függvénye $k(t)$-nak, $\psi'(k(t)) < 0$. Továbbá $\psi(0) = \infty$, $\psi(\infty) = -\infty$. Így a rendszer stacionárius megoldása, k^*, létezik és egyértelmű. Továbbá, mivel $\psi'(k(t)) < 0$, a rendszer globálisan stabil. Az egyensúlyi és stacionárius megoldás esetén

$$\gamma = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = s\frac{f(k^*)}{k^*} - \delta = \mu f(k^*) + n + \lambda.$$

Az $s\frac{f(k^*)}{k^*} - \delta$ a jól ismert garantált növekedési ráta, azaz az a növekedési ráta, amellyel mind a kibocsátás, mind a tőkeállomány bővül az egyenletes növekedési pálya mentén. A jobboldalt nevezhetjük „természetes növekedési rátá"-nak. Ez ugyanis pontosan az a nagyság, amellyel a hatékony munkamennyiség bővül. Mivel a technikai haladás endogén, így növekedési üteme függ a gazdaság adott állapotától, az adott tőkeintenzitástól.

Milyen eltéréseket fogalmazhatunk meg ezek alapján a neoklasszikus modellel szemben:

[66] Lásd például a neoklasszikus modellnél.

1. A megtakarítási ráta növelése növeli a garantált növekedés rátáját.
2. Az amortizációs kulcs (javítási költségek) növekedése csökkenti a garantált növekedési ütemet.
3. A kibocsátás növekedési ütemét nem egy exogén hanem egy endogén tényező határozza meg.
4. Az egy főre jutó kibocsátás csökken, ha n, azaz a népesség növekedési üteme nő, hiszen n növekedése csökkenti k^* értékét, ezen keresztül γ_y-t is.

Colinsk empirikus vizsgálata (56 országra 1950-től 1963-ig) alátámasztotta, hogy a növekedési rátát pozitívan befolyásolja a megtakarítási ráta és negatívan a népesség növekedési rátájának növekedése. Továbbá vizsgálata igazolta, hogy n növekedése csökkenti γ_y értékét.

3.3.4. A kutatás és fejlesztés szerepe

A kutatás és fejlesztés (K+F) új termelési eljárások tervszerű, céltudatos kidolgozását jelenti. Eredményük a technikai haladás, más néven innováció, a találmányok alkalmazását jelenti a termelési folyamatokban. A K+F tevékenységek modellszerű vizsgálatánál a vizsgálat tárgya az, hogy milyen tényezők befolyásolják a technikai fejlődés ütemét. A modellek kiinduló feltevése az, hogy ha egy gazdaság több erőforrást csoportosít a K+F tevékenységekre, akkor az gyorsabb ütemű technikai haladást eredményez az adott gazdaságban. Tehát a gazdaságot nemcsak a reál kibocsátással lehet jellemezni, hanem a gazdaság általal elért, „előállított" technikai fejlettségel.[67] A technikai fejlettség forrása a K+F tevékenységek. A K+F tevékenységgel a gazdaságnak egy önálló szektora foglalkozik, amely erőforrásokat használ fel a technikai haladás érdekében. Az ilyen gazdaság — az eddigi modellektől eltérően — két termelő szektorral rendelkezik. A két szektor feltevése a szűkös erőforrások allokációs problémáját veti fel, azaz az erőforrások mekkora részét használja fel a gazdaság a reál kibocsátáshoz, és mekkora részét fordítsa a kutatásra és fejlesztésre. Az elemzések további feltevése, hogy a technikai fejlettség szintjének növelését biztosító önálló ágazat önmaga is felhasznál tőke, munka tényezőket és kiaknázza a már meglévő technikai fejlettség szintjét. Ezek alapján a kétszektoros gazdaságot a következő egyenletekkel írhatjuk fel:[68]

$$Y(t) = [(1-a_K)\,K(t)]^{\alpha}\,[\tau(t)\cdot(1-a_L)\,L(t)]^{1-\alpha}\,,\ 0<\alpha<1$$

$$\dot{\tau}(t) = B\,[a_K K(t)]^{\beta}\,[a_L L(t)]^{\gamma}\cdot\tau(t)^{\theta}\,,\ B>0,\ \beta,\gamma\geq 0,$$

ahol B egy szintparaméter, a_K és a_L rendre a teljes tőke-, és munkaerőállománynak a K+F tevékenységekben alkalmazott hányadát jelenti. Észrevehetjük, hogy a második egyenlet nem feltétlen teljesíti a konstans skálahozadékot

[67] Az „előállított" technikai eredményeket például az elfogadott szabadalmak számával jellemezhetjük.

[68] A továbbiakban az egyszerűség kedvéért konkrét termelési függvényeket tekintünk, amelyek általános Cobb–Douglas típusú termelési függvények lesznek. Ebbe az elemzési keretbe illeszkednek bele például Paul Romer [1990] és Grossman és Helpman [1991] modelljei.

és a tényezőnkénti csökkenő hozadékot. Továbbá látszik, hogy a technikai haladás változása (bővülése) arányos a már elért szintjével. Ha $\theta = 1$ akkor $\dot{\tau}(t)$ egyenesen arányos $\tau(t)$-vel; ha $\theta > 1$ akkor a hatás erősebb, ha pedig $\theta < 1$ akkor a hatás egyengébb. Megtartva a neoklasszikus modell azon feltevéseit, hogy $\dot{K}(t) = sY(t)$, ahol s konstans és $\dot{L}(t) = nL(t)$ $n \geq 0$, belátható,[69] hogy a rendszer dinamikáját a következő két egyenlet határozza meg:

$$\gamma_K = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = c_K \left[\frac{\tau(t) L(t)}{K(t)}\right]^{1-\alpha},$$

$$\gamma_\tau = \frac{\dot{\tau}(t)}{\tau(t)} = c_\tau K(t)^\beta L(t)^\gamma \cdot \tau(t)^{\theta-1}$$

ahol $c_K = s(1-a_K)^\alpha (1-a_L)^{1-\alpha}$, és $c_\tau = B \cdot a_K^\beta \cdot a_L^\gamma$. Az így meghatározott differenciál egyenletrendszernek csak két esetben létezik tartós állapotú megoldása. Az első, hogy ha $\beta + \theta < 1$, ami azt jelenti, hogy $\theta < 1$, azaz a technikai szint változása, $\dot{\tau}(t)$, nem egyenesen arányos a már meglévő technikai szinttel, $\tau(t)$-vel, hanem annál kisebb mértékben. A második esetben $n = 0$ és $\beta + \theta = 1$, azaz stagnáló népesség és $\theta < 1$ (ha $\beta > 0$) esetén valósul meg. Belátható, hogy ezekben az esetekben az a_K és a_L nagysága, azaz hogy mennyi erőforrást csoportosítunk a K+F tevékenységekre, nem gyakorol hatást a gazdaság kibocsátásának hosszú távú növekedési ütemére. Más esetben a rendszernek nincs tartós állapotú megoldása. Sőt ezekben az esetekben az a_K és a_L növekedése a gazdaság fokozódó gyorsulásához vezet.[70] Ezek alapján azt állapíthatjuk meg, hogy az erőforrások szektorok közötti allokációjának hatása a gazdaság növekedési ütemére nem egyértelmű.

Összefoglalásként elmondhatjuk, hogy a kutatások jelentős erőforrás szükséglete felveti a szűkös erőforrások allokációs problémáját térben és időben. Ez azonban csak egy kiragadott probléma a K+F vizsgálatok köréből. A K+F tevékenységek elemzése során számos más probléma is felmerül:

- A K+F tevékenységek szintje gyakran a társadalmilag kívánatos szint alatt marad.
- A kutatások eredményei gyakran bizonytalanok, továbbá a kutatások és eredményeik alkalmazása között jelentős idő telhet el. Így nehezen mérhető a kutatások hatékonysága és eredményessége.
- A K+F tevékenység akkor kifizetődő, ha az innováció magántulajdonban marad és megvalósítójának pozitív gazdasági profitot eredményez. Társadalmi szempontból azonban előnyösebb lehet, ha az új eljárásokhoz minél rövidebb idő alatt minél szélesebb kör hozzáfér.

Ebben a fejezetben azt vizsgáltuk, hogy miként tudjuk beépíteni modelleinkbe a technikai haladást, és hogy ez a bővítés mennyiben segít a gazdaságok egyenletes növekedésének leírásában. Az empirikus elemzések szerint a

[69] A levezetést lásd például Romer [1996] 98-105.o.

[70] További problémát jelent ebben az esetben az, hogy a kibocsátás véges idő alatt végtelenné válik.

gazdaságok igazi motorja a technikai haladás. Megmutattuk, hogy a technikai haladás legegyszerűbb leképezése — az exogén technikai haladás — esetén a 2. Fejezet modelljei magyarázatot adnak az egy főre jutó mutatók bővülésére. Rámutattunk azonban arra, hogy ekkor az egyenletes növekedés feltétele a Harrod-semleges technikai haladás (26. Állítás), ami azonban egyértelműen egy Cobb–Douglas típusú termelési függvényt implikál (24. Állítás). Az exogén technikai haladás esetén azonban azok az okok és tényezők, amelyek a technikai haladást (és annak ütemét) meghatározzák rejtve maradnak.

Bemutattuk a technikai haladás endogén leképezésének fő típusait.[71] Megmutattuk, hogy ezek a modellek jóllehet magyarázzák a gazdaságok bővülését de jellemzően nem egy egyenletességét pálya mentén.

[71] Más leképezési típusok is léteznek még, mint például Iwai [1984a, b] evolúciós megközelítése.

4. A gazdasági konvergencia

4.1. Konvergencia hipotézisek

Az 1930-tól 1960-ig terjedő időszak növekedéselméleti modelljei jellemzően egy ország kibocsátásának motorját próbálták meghatározni. A 2. és 3. Fejezetben ilyen típusú modelleket mutattunk be. Ezek alapján azt mondhatjuk, hogy egy gazdaság bővülésének két fő forrása van: egy extenzív és egy intenzív. Az extenzív bővítésbe tartozik a termelési tényezők akkumulációja, az intenzívbe a technikai haladás.

Ebben a fejezetben a növekedéselmélet és gazdasági felzárkózás, azaz gazdasági konvergencia kapcsolatát elemezzük. Célunk tehát annak bemutatása, hogy az eddig elemzett növekedési mechanizmusok mennyiben segít(het)ik elő egy ország számára, hogy (reál)gazdasági szempontból közeledjen a fejlettebb országokhoz. Megmutatjuk, hogy a jövedelem növekedése szükséges, de nem elégséges feltétele a gazdasági felzárkózásnak.

Elegendő a közelmúlt irodalmából néhány empirikus eredményt felidézni, és látni fogjuk, hogy a konvergencia kérdése igen vitatott még napjainkban is.

> ”Vannak olyan írások, amelyek elutasítják (Baumol [1986], The Economist [1992], Barro [1991], Barro–Sala-i-Martin [1992*a*]), vannak amelyek bizonyítják (Mankiw–Romer–Weil [1992], Sprout–Weawer [1992], Nelson–Wright [1992]) a fejlettségi szintek kiegyenlítődését. Valószínűleg az az árnyaltabb kép felel meg a realitásoknak, amely az országokat különböző csoportokra osztja.”[72]

Ahogy Plosser[73] [1992] is kihangsúlyozza, az óriási jövedelemkülönbségeknél is fontosabb az a tény, hogy jóllehet nem minden ország marad szegény, vannak olyanok, amleyek nem képesek növelni életszínvonalukat még a megélhetési szintre sem.[74] Plosser vizsgálatai a különböző országcsoportok tagadhatatlan divergenciáját mutatja. Quah [1993*b*] elemzése arra mutat rá, hogy egy gazdag ország 98 százalékban gazdag is marad, egy szegény ország pedig 95 százalékban szegény marad, azaz kicsi a mobilitás valószínűsége.

Az itt említett példák két fontos kérdéskörre irányítják a figyelmet:

- Az egyik, hogy miként lehet az országokat vizsgálva egyszer konvergenciáról, máskor divergenciáról beszélni?
- A másik, szorosan az előbbihez kapcsolódó kérdés, vajon függ-e a konvergenciát illető következtetésünk a vizsgált országok csoportjától, és ha igen, hogyan?

[72] Ligeti [1994], 367.o.

[73] Plosser [1992] , 57-59.o.

[74] Plosser [1992] (57.o.) szerint például olyan országokban, mint Bangadlesh, Etiópia, Haiti és Bolivia az egy főre jutó nemzeti jövedelem hosszú időn keresztül kevesebb volt, mint az USA 1989-es egy főre jutó jövedelmének 5 százaléka.

A vizsgált 97 ország közül 24 ország volt 1960-ban a legszegényebb kategóriában, ezek közül 18 még 1989-re is ugyanebben a kategóriában maradt, és 23 maradt a legyszegényebb 50 százalék között. ui. 84.o.

A felvázolt problémakörök elemzéséhez és a feltett kérdések megválaszolásához szükségünk van néhány fogalom tisztázására. Napjaink növekedéselméletének irodalma több konvergencia típust különböztet meg — még ha erről sokan nem is vesznek tudomást — az országok, illetve térségek időbeli összevetésénél.

A gazdasági felzárkózás elméleti megközelítései négy fő fogalom köré csoportosulnak. Történetileg a legkorábban megfogalmazott hipotézis, az úgynevezett *abszolút konvergencia hipotézis*. Ezen hipotézis szerint, a világ legfejletlenebb és fejlődő országai képesek felzárkózni a gazdaságilag legfejlettebbek csoportjához. Valójában ez a hipotézis tartalmazza az aktív gazdaságpolitikán alapuló tényleges felzárkózást, utolérést.

Az abszolút konvergencia fogalmát az utóbbi évtized irodalmában mind szélesebb körben a *σ konvergencia* elnevezés váltotta fel. Ennek fő oka, hogy a σ konvergencia tágabb fogalom, mint az abszolút konvergencia, így azt, mint aleset tartalmazza. Ez a fogalom annyiban tágabb, mint az abszolút konvergencia hipotézis, hogy elemzésének tárgyát nemcsak a világ összes országa, hanem tetszőleges ország csoport vagy országon belüli régiók képezhetik. Ez a fogalom az országok, ország csoportok vagy térségek fejlettségi mutatóinak keresztmetszeti szóródásának vizsgálatán alapszik.[75] Ezen koncepció szerint, akkor beszélünk konvergenciáról, ha a vizsgált mutató szórása az időben csökkenő tendenciát mutat.

Mind az abszolút, mind a σ konvergencia csak a felzárkózás tényét, mértékét vizsgálja, és nem foglalkozik a felzárkózás ütemével. A konvergencia sebességét megragadó fogalom a *β konvergencia*. β konvergenciáról beszélünk abban az esetben, ha a szegényebb országok növekedése gyorsabb, mint a gazdagoké, és így képesek a felzárkózásra. Amint azt látni fogjuk a felzárkózás sebességének, ütemének becsült paramétere lesz a β szám.[76] A β konvergencia vizsgálata alatt a továbbiakban két dolgot értünk:

- Egyrészt annak elemzését, hogy kimutatható-e fordított arányosság egy gazdaság növekedési rátája és egy kitüntetett pályájától[77] vett távolsága között.
- Másrészt a kitüntetett pályájához történő felzárkózás átlagos ütemének, azaz β értékének, meghatározása.

Két kérdés merül fel: (1) Milyen tényezők biztosíthatják a gyorsabb növekedést a szegényebb országokban? (2) Mi a kapcsolat a felzárkózás mértéke és üteme között, azaz a σ konvergencia és a β konvergencia között?

A negyedik, napjainkban legtöbbet használt konvergencia fogalom az úgynevezett *feltételes konvergencia*. Ezen konvergencia hipotézis szerint a világ országai nem egy meghatározott fejlettségi szinthez, illetve nem egy közös növekedési trendhez tartanak. Minden országnak egyedi hosszú távú növekedési szintje és trendje van, amit hosszú távú egyensúlynak nevezhetünk. Ezt az

[75]Innen származik az elmélet neve is, hiszen a szórás jele a szigma.
[76]Ezért a β számot a konvergencia sebességének vagy ütemének nevezzük.
[77]A kitüntetett pálya lehet például az adott ország hosszú távú egyensúlyi pályája, de lehet tetszőleges, elérni kívánt más ország növekedési pályája is.

egyedi szintet az országok sajátos természeti, gazdasági és társadalmi adottságai határozzák meg. Két vagy több országnak csak akkor egyezhet meg teljes mértékben a hosszú távú egyensúlyi állapota, ha minden paraméterükben megegyeznek. A feltételes konvergencia hipotézise szerint az egyes országokra érvényesül a β konvergencia, abban az értelemben, hogy minden ország konvergál a saját hosszú távú egyensúlyi állapotához, és a konvergencia üteme fordítottan arányos a végállapottól való távolsággal. A feltételes konvergencia azonban nem mond semmit arról, hogy a különböző országok hosszú távú egyensúlyai közelednek-e egymáshoz vagy sem, azaz nem mond semmit a σ konvergenciáról.

A feltételes konvergencia esetén a felzárkózás mértéke nem más országokhoz mérődik, mint a σ konvergencia esetén, hanem a saját egyensúlyi pályához. A feltételes konvergencia elemzéseknek ebből adódóan van egy lényeges *elméleti vetülete* is. Jogosan kérdezhetnénk, hogy miért is vizsgáljuk a feltételes konvergenciát, illetve annak sebességet, miért nem elégszünk meg egy dinamikus modell azon jó tulajdonságával, hogy lokálisan vagy globálisan stabil vagy aszimptotikusan stabil. A válaszadás nem túl bonyolult, mégis sokáig mellőzött volt. Ha ugyanis érvényesül az egyensúlyhoz való konvergencia és a konvergencia sebessége gyors, akkor reálisan koncentrálhatunk a stacionárius állapotra — mint azt a neoklasszikus modellek teszik —, hiszen ekkor a gazdaság általában a stacionárius állapothoz közel helyezkedik el. Ha azonban a kovergencia lassú — mint ahogyan az a fejlődő országok vagy mint egyes átmeneti gazdaságok felzárkózása a fejlett világhoz —, akkor a gazdaságok jellemzően távol lesznek stacionárius állapotuktól, tehát az egyes tényezőkre, illetve növekedési ütemükre domináns hatást gyakorol az átmenet dinamikája.

Összefoglalva ez a fejezet a következő kérdésekre keresi a választ.

1. Milyen tényezők biztosíthatják a gyorsabb növekedést a szegényebb országokban? (4.2. pont)
2. Mi a kapcsolat a felzárkózás mértéke és üteme között, azaz a σ konvergencia és a β konvergencia között? (4.3. pont)
3. Alátámasztják-e az empirikus elemzések a különböző típusú konvergenciák megvalósulását? (4.4. pont)

4.2. Konvergencia hipotézis és gazdasági növekedés

Az első kérdésre, hogy milyen tényezők biztosíthatják a szegény országok gyorsabb növekedését egy történeti visszatekintés keretében adunk választ. A gazdasági növekedés és felzárkózás problémakörének elemzései ugyanis éppen ezeknek a tényezőknek a feltárását tűzték ki célul.

A szegény országok gyorsabb ütemű felzárkózásának több tényezője azonosítható. Ezen tényezők között kell megemlítenünk a 2. és 3. Fejezetben elemzett tényezőakkumulációt és a technikai haladást. Az 1950-es évek végétől azonban olyan új tényezők elemzésére került sor a konvergencia hipotézisek[78] vizsgálata

[78]Azért nem a konvergencia elméletek kifejezést használjuk, mert ekkor még sokkal inkább hipotetikus volt a konvergencia léte, mint általánosan elfogadott és bizonyított tény.

során, mint például a technológia transzfer vagy a társadalmi adottság. Ebben a pontban röviden ezeket a tényezőket mutatjuk be.

Az első *konvergencia hipotézis*ről szóló írások Alexader Gerschenkronig [1952], Simon Kuznetsig [1930, 1966, 1968], Moses Abramovitzig [1956, 1957, 1989], és Edward Denisonig [1967] nyúlnak vissza. Hipotézisük lényege, hogy ha egy ország (vagy országok csoportja) fejlettebb, mint a többi, mert technikai fejlettsége sokkal magasabb (például ebből a szempontból az USA tekinthető úgynevezett vezetőnek, míg a többi ország követőnek), akkor azok az országok, amelyek lemaradása a vezetővel szemben nem túl nagy, rendelkeznek egy úgynevezett *lemaradásból származó előnnyel*, azaz olyan pozícióban vannak, ahonnan gyors felzárkózásra képesek. A legtöbb ország, amely lemaradott pozícióban van, megkezdi a felzárkózási folyamatot. A felzárkózás egészen addig tart, amíg a követők képesek a vezető országtól újat tanulni. Ebből következően a felzárkózási folyamat korlátos, hacsak valamilyen teljesen új fejlesztés, innováció nem jelentkezik folyamatosan a vezető ország technológiájában[79]. Azok az országok azonban, amelyek lemaradása túl nagy, mint például a legtöbb afrikai és ázsiai ország, nem tudják átlépni a felzárkozás kritikus küszöbét.[80]

Mi segíti elő a felzárkózási folyamatot? Az elméletet legjobban alátámasztó hatás, a világgazdaságban folyamatosan jelenlevő *technológia transzfer*. Ennek egyik leghatékonyabb eszköze az imitáció, azaz már meglévő intézmények, gazdasági struktúrák vagy technológiák egyszerű lemásolása. Ez a követőknek jelentős előnyt biztosít, hiszen mentesülnek az invenció és innováció jelentős idő, költség és kockázati vonzatától. A felzárkózási folyamat másik hatékony eszköze a nemzetközi piacokon tevékenykedő vállalkozások, multinacionális cégek jelenléte, amelyeknek csaknem közönbös, honnan ered egy ötlet, és hogy azt melyik országban hasznosítják. Ezek az intézmények biztosítják a fejlett technológiák gyors elterjedését, asszimilációját.

Továbbá az országok rendelkeznek egy úgynevezett *társadalmi adottsággal*[81], amely az új technológiák gyors abszzorbcióját segítheti elő. A társadalmi adottságot Abramovitz[82] a következőképen definiálja: egy ország lakosságának technikai szakértelme — amelynek durva közelítéséül szolgál az oktatási évek száma —, politikai, kereskedelmi, ipari és pénzügyi intézményrendszere.

A felzárkózási folyamat felgyorsításában segíthetnek a vezető ország(ok) és követők közötti *közvetlen interakciók*. Ilyen interakciók mehetnek végbe például:

- a migráció,
- a tőketranszfer és
- az alkalmazott ismeretek terjedésén keresztül.[83]

[79] Erről lásd például Iwai [1984*a*, *b*].
[80] Baumol és szerzőtársai [1989] (89-90.o.).
[81] Az angol „social capability” magyar megfelelőjeként a továbbiakban a társadalmi adottság elnevezést fogjuk használni.
[82] Abramovitz [1989] 223.o.
[83] Abramovitz [1989] 234.o.

Láthatjuk tehát, hogy a lemaradt országokat több tényező segítheti abban, hogy gyorsabb ütemű növekedést érjenek el a vezető(k)höz képest. Ehhez „csak" ki kell aknázniuk e tényezőkben lévő lehetőségeket.

4.3. A konvergencia üteme

Ebben a pontban arra a kérdésre keressük a választ, hogy mi a kapcsolat a felzárkózás mértéke és üteme között, azaz a σ és β konvergencia között. Az az érzésünk támadhat, hogy az alacsonyabb szintről induló országok — kihasználva a hátrányból származó előnyüket — a realizált magasabb növekedési ráta segítségével idővel felzárkóznak a gazdagabbakhoz. Azaz az országok adott mutató[84] szerinti keresztmetszeti szóródása csökken.

Ebben a pontban megmutatjuk, hogy a β konvergencia hozzájárul az országok jövedelm szórásának (σ) csökkenéséhez, azaz a σ konvergenciához, de a σ konvergenciára hatást gyakorolhatnak még egyéb zavaró tényezők, váratlan események, amelyek a szórás növekedését idézhetik elő. Tehát a β konvergencia szükséges, de nem elégséges feltétele a σ konvergenciának.

Az állítás belátásához az egyszerűség kedvéért a neoklasszikus modellkeretől indulunk ki és egy Cobb–Douglas típusú termelési függvényt fogunk használni. A Cobb–Douglas függvényt egyrészt azért használjuk, mert a számításokat egyszerűbbé és átláthatóbbá teszi, másrészt zárt alakú megoldást eredményez, amely jobban és könnyebben értelmezhető.

Feltevések.

1. Legyen a neoklasszikus termelési függvény a következő alakú:
$$Y(t) = AK^{\alpha}(t)\left[\tau(t) L(t)\right]^{1-\alpha},$$
ahol $A > 0$, $0 < \alpha < 1$ konstansok, $Y(t)$ a kibocsátás (GDP), $K(t)$ a tőke-, $L(t)$ a munkaállomány és $\tau(t)$ az exogén, konstans ütemű technikai haladást mutatja, azaz $\tau(t) = e^{mt}$, ahol $m > 0$. Ekkor a termelési függvény intenzív formája:
$$\hat{y}(t) = A\hat{k}^{\alpha}(t), \tag{32}$$
ahol $\hat{k}(t) = \frac{K(t)}{\tau(t)L(t)}$, és $\hat{y} = \frac{Y(t)}{\tau(t)L(t)}$ a hatékony munkaegységre vetített változók.

2. Tegyük fel, hogy a folyamat már a hosszú távú egyensúly közelében van. Ekkor az egyensúlyi pont környezetében a rendszer linearizált alakja jó közelítésként szolgál. Egy $f(z)$ függvény, első fokú Taylor közelítése egy z^* pontjában:[85]
$$f(z) \cong f(z^*) + \frac{df}{dz}\left.\right|_{z^*}(z - z^*). \tag{33}$$

[84] A leggyakrabban használt fejlettségi mutató az országok vagy térségek logaritmizált egy főre jutó nemzeti jövedelme.

[85] A probléma vizsgálata elvégezhető az idő-eliminációs módszerrel, lásd Barro–Sala-i-Martin [1995] 82-87. o.. Ennek előnye, hogy nem tartalmaza a lineáris közelítésből származó hibát, hátránya azonban, hogy a megoldásnak nem lesz zárt alakja.

A (32) és (33) egyenletekkel megadott feltételek mellett megmutatjuk, hogy az egy hatékony munkaegységre jutó tőkeállomány és kibocsátás az egyensúly környezetében $\beta = (1-\alpha)(n+m+\delta)$ ütemben közeledik az egyensúlyi értéke felé.

29. Állítás. *A (32) és a (33) kikötések mellett, ha $t = 0$ időpontban $\hat{y}(t) = \hat{y}(0)$ és az egyensúlyban $\hat{y}(t) = \hat{y}^*$ akkor*

$$\gamma_{\hat{k}} \cong -\beta \ln\left(\frac{\hat{k}(t)}{\hat{k}^*}\right),$$

és

$$\ln[\hat{y}(t)] \cong \ln(\hat{y}^*) + e^{-\beta t}[\ln \hat{y}(0) - \ln(\hat{y}^*)].$$

ahol $\beta = (1-\alpha)(n+m+\delta)$. Azaz az egy hatékony munkaegységre jutó tőkeállomány és kibocsátás esetén a konvergencia koefficiens értéke azonos.

Bizonyítás. A 8. Állítás alapján a neoklasszikus modell stacionárius növekedési pályáját meghatározó összefüggésre a következőt kapjuk:

$$\gamma_{\hat{k}} = sA\hat{k}^{-(1-\alpha)} - (n+m+\delta) = 0, \tag{34}$$

ahol kihasználtuk a (32) feltételt. A (33) feltétel alapján határozzuk meg az egyensúly kis környezetében a rendszer növekedési rátáját. Ehhez vezessük be a következő jelöléseket: $f(z) = \gamma_{\hat{k}}$, $z = \ln\left(\hat{k}(t)\right)$, $z^* = \ln\left(\hat{k}^*\right)$, azaz a rendszer loglinearizált formáját írjuk fel. Ekkor

$$\gamma_{\hat{k}} = \frac{d\ln\left(\hat{k}(t)\right)}{dt} \cong f(z^*) + \frac{df}{dz}\,|_{z^*} \cdot (z - z^*) = \frac{d\gamma_{\hat{k}}}{d\ln \hat{k}(t)}\,|_{\ln \hat{k}^*} \cdot \left(\ln \hat{k}(t) - \ln \hat{k}^*\right), \tag{35}$$

hiszen az egyensúlyi pálya mentén a növekedési ráta nulla, azaz $f(z^*) = \gamma_{\hat{k}^*} = 0$. Az utólsó kifejezés meghatározásához használjuk fel a kövtkező egyenlőséget:

$$\hat{k}^{-(1-\alpha)}(t) = \exp\left[-(1-\alpha)\ln \hat{k}(t)\right].$$

Ekkor a deriváltra a következő kifejezés adódik:

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma_{\hat{k}}}{d\ln \hat{k}(t)} &= \frac{d\left[sA \cdot \exp\left[-(1-\alpha)\ln \hat{k}(t)\right] - (n+m+\delta)\right]}{d\ln \hat{k}(t)} \\ &= -(1-\alpha)sA \cdot \exp\left[-(1-\alpha) \cdot \ln \hat{k}(t)\right].\end{aligned} \tag{36}$$

A (34) egyenlet alapján a stacionárius pálya mentén $\hat{k} = \left(\frac{n+m+\delta}{sA}\right)^{\frac{-1}{1-\alpha}}$. Így a (36) derivált értéke az egyensúlyi pontban

$$\frac{d\gamma_{\hat{k}}}{d\ln \hat{k}(t)}\,|_{\ln \hat{k}(t)^*} = -(1-\alpha)sA \cdot \frac{n+m+\delta}{sA} = -(1-\alpha)(n+m+\delta).$$

Tehát az egyensúlyi pont közelében a növekedési ráta felírható a következő formában

$$\gamma_{\hat{k}} \cong -(1-\alpha)(n+m+\delta) \cdot \left[\ln \hat{k}(t) - \ln \hat{k}^*\right] = -\beta \ln\left(\frac{\hat{k}}{\hat{k}^*}\right), \tag{37}$$

ahol $\beta = (1-\alpha)(n+m+\delta)$. Ezzel beláttuk az állítás első részét.

A (32) feltétel $\hat{y}(t) = A\hat{k}^{\alpha}(t)$ alakjából adódik, hogy

$$\ln \hat{y}(t) = \ln A + \alpha \ln \hat{k}(t)$$

$$\ln \hat{y}^* = \ln A + \alpha \ln \hat{k}^*$$

$$\ln \hat{y}(t) - \ln \hat{y}^* = \alpha\left(\ln \hat{k}(t) - \ln \hat{k}^*\right) = \ln\left(\frac{\hat{y}(t)}{\hat{y}^*}\right) = \alpha \ln\left(\frac{\hat{k}}{\hat{k}^*}\right). \tag{38}$$

Amint azt korábban beláttuk, a Cobb–Douglas termelési függvény esetén

$$\gamma_{\hat{y}} = \varepsilon_K^Y \gamma_{\hat{k}} = \alpha\gamma_{\hat{k}}. \tag{39}$$

A (37), (38) és (39) egyenletekből kapjuk, hogy

$$\gamma_{\hat{k}} \cong -\beta \ln\left(\frac{\hat{k}}{\hat{k}^*}\right),$$

$$\frac{\gamma_{\hat{y}}}{\alpha} \cong -\beta\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{\hat{y}(t)}{\hat{y}^*}\right),$$

$$\gamma_{\hat{y}} \cong -\beta \ln\left(\frac{\hat{y}(t)}{\hat{y}^*}\right), \tag{40}$$

ahol $\beta = (1-\alpha)(n+m+\delta)$.

Tudjuk, tehát, hogy

$$\gamma_{\hat{y}} = \frac{d \ln \hat{y}(t)}{dt} \cong -\beta\left[\ln \hat{y}(t) - \ln(\hat{y}^*)\right], \tag{41}$$

ami nem más, mint $\ln \hat{y}(t)$-re egy differenciálegyenlet. Legyen $x(t) = \ln \hat{y}(t)$, $x(0) = x_0 = \ln \hat{y}(0)$ és $x^* = \ln \hat{y}^*$ ekkor a fenti egyenlet alakja $\dot{x}(t) + \beta x(t) = \beta x^*$. Az $e^{\beta t}$ integráló faktorral megszorozva mindkét oldalt és integrálva kapjuk a jobboldalra:

$$\int e^{\beta t}\left[x(t) + \beta x(t)\right] dt = x(t)\, e^{\beta t} + c_1,$$

a baloldalra:

$$\int e^{\beta t} \beta x^* dt = x^* e^{\beta t} + c_2,$$

ahol c_1 és c_2 egy konstansok. Ha $c = c_2 - c_1$ akkor egyenlővé téve a két oldat $x(t) = ce^{-\beta t} + x^*$ adódik. Felhasználva a kezdeti feltételt, hogy $x(0) = x_0$

kapjuk, hogy $c = x_0 - x^*$. Így a megoldás $x(t) = (x_0 - x^*) e^{-\beta t} + x^*$. A jelölések visszaírásával kapjuk:

$$\ln [\hat{y}(t)] \cong \ln (\hat{y}^*) + e^{-\beta t} [\ln \hat{y}(0) - \ln (\hat{y}^*)], \tag{42}$$

ami pont a keresett alak. ∎

Ez a felírás azt mutatja, hogy egy kezdeti állapotból, $\ln \hat{y}(0)$, tartunk az egyensúlyi szint, $\ln \hat{y}^*$, felé. A kettő közötti távolság csökkenésének ütemét a β kitevő nagyság határozza meg. Tehát a hosszú távú egyensúlyhoz történő felzárkózás ütemét, azaz a *konvergencia sebességét* β mutatja meg. Ezért hívják a β-át a konvergencia sebesség koefficiensének. Például az út felének megtétele azt jelenti, hogy $e^{-\beta t}$=0,5, azaz a megtételhez szükséges idő (ha m=0,02, n=0,01, δ=0,05) $\alpha = 1/3$ esetén t=14 év, és α=3/4 esetén t=35 év.[86]

Számos empirikus vizsgálatot végeztek arra vonatkozóan, hogy a felzárkózás üteme mennyiben képes magyarázni az országok keresztmetszeti sűrűsödését. Ezeket a 4.4 pontban mutatom be.

4.3.1. A β és σ konvergencia kapcsolata

Ebben az alpontban két célunk van.

1. Egyrészt megmutatni, hogy a konvergencia ütem empirikus becsléséhez milyen alak használható.
2. Másrészt a becslő egyenletbe egy ország index és egy hibatag bevezetésével megmutatni, hogy a (becsült) nagyobb konvergencia sebesség hozzájárul ahhoz, hogy az országok keresztmetszeti jövedelemmutatói sűrűsödjenek. A különböző gazdasági és nem gazdasági sokkok azonban megakadályozhatják a teljes felzárkózást, sőt átmenetileg divergenciát is okozhatnak az országok között.

(1) Először tehát vezessük le azt az egyenletet, amely a konvergencia sebesség becslésére szolgál. Ehhez első lépésben határozzuk meg a $t = 0$ és $t = T$ időpontok között az *átlagos növekedési rátát,* $\bar{\gamma}_y$-át, a (42) alapján. A (42) egyenlet mindkét oldalából vonjunk ki $\ln [\hat{y}(0)]$-át. Továbbá használjuk fel a következő összefüggést $\ln (\hat{y}(t)) = \ln (y e^{-mt}) = \ln (y) - mt$. Ekkor a következő egyenlőség adódik:

$$\ln [y(T)] - Tm - \ln [y(0)] = \left(1 - e^{-\beta T}\right) \ln (\hat{y}^*) - \left(1 - e^{-\beta T}\right) \ln [\hat{y}(0)]$$

$$\bar{\gamma}_y = \frac{1}{T} \ln \left[\frac{y(T)}{y(0)}\right] = m + \frac{\left(1 - e^{-\beta T}\right)}{T} \ln \left[\frac{\hat{y}^*}{\hat{y}(0)}\right]. \tag{43}$$

[86] Az elméleti elemzések legyakrabban az α =1/3 értéket tételezik fel. A fejlett gazdaságokra empirikusan megfigyelt konvergencia sebesség β ≈2%, ez azt eredményezi, hogy ha m=0,02, n=0,01, δ=0,05, akkor α-nak 0,75-nek kellene lennie.

Legyen a kezdeti időpillanat a $t-1$, azaz $y(0) = y(t-1)$. Tekintsünk előre összesen *egy* időszakra. Ekkor az átlagos növekedési ráta megegyezik a növekedési rátával, $\bar{\gamma}_y = \gamma_y$. Ekkor a következőt kapjuk az egy főre jutó kibocsátás növekedési ütemére:

$$\gamma_y = \ln\left[\frac{y(t)}{y(t-1)}\right] = m + \left(1-e^{-\beta}\right)\ln(\hat{y}^*) - \left(1-e^{-\beta}\right)\left[\ln[y(t-1)] - m(t-1)\right].$$

$$\gamma_y = \ln\left[\frac{y(t)}{y(t-1)}\right] = a - \left(1-e^{-\beta}\right)\ln[y(t-1)], \tag{44}$$

ahol $a = m + \left(1-e^{-\beta}\right)\left[\ln(\hat{y}^*) + m(t-1)\right]$. A keresztmetszeti elemzések ezt a formát alkalmazzák a konvergencia sebesség, β, becslésére.[87]

(2) Második lépésként vezessünk be egy ország indexet és egy véletlen hibatagot (u_{it}). A hibatag azt mutatja, hogy az i. országot a t. évben egy u_{it} nagyságú sokkhatás érte, amelyet a modell nem magyaráz. Tehát az u_{it} a nem várt változásokat mutatja a termelésben és preferenciákban. Így megkapjuk az i. ország növekedési ütemének alakulását a konvergencia sebesség, és a sokkhatás függvényében:

$$\gamma_{y_i} = \ln\left(\frac{y_i(t)}{y_i(t-1)}\right) = a - \left(1-e^{-\beta}\right)\ln[y_i(t-1)] + u_{it}. \tag{45}$$

Tegyük fel, hogy a hibatag várható értéke nulla, szórása véges és ismert, σ_{ut}, továbbá u_{it} független $\ln[y_i(t-1)]$-től, u_{jt}-től[88] és minden korábbi értékétől. Ha feltesszük, hogy minden országra az a paraméter[89] és $\beta > 0$ azonos[90] és állandó, akkor a (45) egyenletből következik, hogy a $(t-1)$. időszakban a szegényebb országok $\frac{y_i(t)}{y_i(t-1)}$ hányadosa nagyobb, és így a logaritmus függvény monotonitása miatt növekedési rátája, γ_{y_i}, is nagyobb lesz, mint a gazdagoké. Ez a tulajdonság nem más, mint a már korábban ismertetett β konvergencia. Természetesen az itt vázolt modell a feltételes konvergencia kritériumnak is megfelel.[91]

Bővítsük a fenti kifejezés mindkét oldalát $\ln[y_i(t-1)]$-vel:

$$\ln[y_i(t)] = a + e^{-\beta}\ln[y_i(t-1)] + u_{it}. \tag{46}$$

Legyen σ_t^2 az országok $\ln[y_i(t)]$ értékeinek keresztmetszeti varianciája a t. időpontban. Tekintsük a (46) egyenlet mindkét oldalának országok szerinti szórásnégyzetét:[92]

$$\sigma_t^2 = e^{-2\beta}\sigma_{t-1}^2 + \sigma_{ut}^2. \tag{47}$$

[87] Bővítve a (44) egyenlőséget $\ln y(t-1)$-gyel és egy hibataggal adódik: $\ln y(t) = a + b_t \ln y(t-1) + u_t$, ahol $b_t = e^{-\beta}$. A továbbiakban feltételezett kikötések mellett ez az egyenlet torzítatlanul becsülhető.

[88] Ahol u_{jt} a j. országot a t. évben ért sokkhatás nagysága. $(i \neq j)$

[89] Az a paraméter konstans volta azt jelenti, hogy minden országra azonos az egyensúlyi érték, $\hat{y}^*$, és az idő trend $x(t-1)$ is. Ez a feltevés reálisnak tűnhet egy ország különböző régióinak összevetésénél, megkérdőjelezhető azonban az országok nemzetközi összehasonlításánál.

[90] A (45) kifejezésben és a továbbiakban a β és az a paramétereknek ezért nincs indexük.

[91] Hiszen a kezdeti értéktől eltekintve minden más — paraméterek, termelési függvény — megegyezik az feltételezett országokra.

[92] Denkinger [1989] 106 − 107.*o.* alapján legyen egy valoszínûségi változó várható értéke $M(.)$, $D^2(.)$ a szórás négyzete, továbbá jelölje $cov(\xi,\eta) = M(\xi,\eta) - M(\xi)M(\eta)$ a két

Ez azonban nem más, mint σ_t^2-ben egy első rendű inhomogén differencia egyenlet. Legyen $\sigma_{ut}^2 = \sigma_u^2$ minden t-re konstans. Ekkor[93] a (47) fixpontja $\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^2 = \sigma_e^2 = \frac{\sigma_u^2}{1-e^{-2\beta}}$ lesz, amelyre:

$$\sigma_e^2 = e^{-2\beta}\sigma_e^2 + \sigma_u^2. \tag{48}$$

Ha most bevezetünk egy eltérésváltozót $\hat{\sigma}_t^2 = \sigma_t^2 - \sigma_e^2$ és a (47) egyenlőségből kivonjuk a (48) egyenlőséget, akkor a következő homogén differencia egyenlethez jutunk:

$$\hat{\sigma}_t^2 = e^{-2\beta}\hat{\sigma}_{t-1}^2. \tag{49}$$

A (49) megoldása $\hat{\sigma}_t^2 = e^{-2\beta t}\hat{\sigma}_0^2$, ahol $\hat{\sigma}_0^2$ a $t = 0$ kezdeti időpontban a $\ln[y_i(0)]$ varianciája. Ekkor az eredeti (48) egyenlet megoldása:

$$\sigma_t^2 - \frac{\sigma_u^2}{1-e^{-2\beta}} = e^{-2\beta t}\left[\sigma_0^2 - \frac{\sigma_u^2}{1-e^{-2\beta}}\right],$$

amit átrendeze kapjuk

$$\sigma_t^2 = \frac{\sigma_u^2}{1-e^{-2\beta}} + e^{-2\beta t}\left[\sigma_0^2 - \frac{\sigma_u^2}{1-e^{-2\beta}}\right]. \tag{50}$$

A (50) alapján a σ_t^2 monoton tart az egyensúlyi állapotához $\sigma_e^2 = \frac{\sigma_u^2}{1-e^{-2\beta}}$. Az σ_e^2 egyensúlyi szóródás σ_u^2 növekvő, β csökkenő függvénye. A σ_t^2 időben csökken, ha a kezdeti érték, σ_0^2, nagyobb, mint az egyensúlyi érték; illetve nő, ha kezdeti értéke kisebb az egyensúlyinál, amint azt a 6. ábra is jól mutatja. A $\beta > 0$ (azaz β konvergencia), nem eredményezi feltétlenül a σ_t^2 csökkenését, azaz a β konvergencia szükséges de nem elégséges a σ konvergencia létéhez. A $\ln[y_i(t)]$ varianciája érzékeny a sokkhatásokra. A 6. ábrán az is jól látható, hogy az országok teljes felzárkózása sem garantált, ha a hibatag szorása pozitív. Az országokra egy megadott különbség lesz mindig jellemző a sokkhatások miatt. Ilyen sokkhatás volt például az USA-ban a mezőgazdasági termékek árának drasztikus csökkenése az 1920-as években, a két olajár robbanás az 1970-es években és az olajárak csökkenése az 1980-as években[94]. Ezen véletlen tényezők hozzájárulhatnak a σ_t^2, azaz az országok közötti eltérések növekedéséhez.

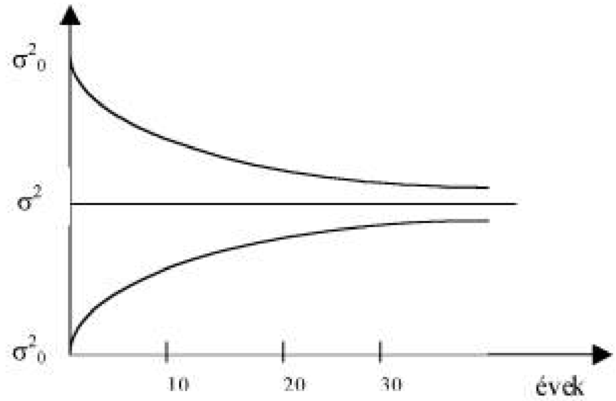
A β és σ konvergencia kapcsolatának összefoglalásaként elmodhatjuk, hogy a β konvergencia és a σ konvergencia szoros kapcsolatban vannak egymással. Ahhoz, hogy az országok keresztmetszeti adatai „sűrűsödhessenek", nélkülözhetetlen, hogy a szegényebbek gyorsabban növekedjenek. Így tehát, a β konvergencia elengedhetetlen feltétele a σ konvergenciának, de nem elégséges feltétele. Az

---

valószínűségi változó (ξ, η) kovarianciáját, ami nulla, ha a két változó független egymástól. Ekkor $D^2(c\xi + b) = c^2D^2(\xi^2)$ továbbá $D^2(c\xi + \eta) = c^2D^2(\xi^2) + D^2(\eta^2) + 2cov(\xi, \eta)$, ahol valószínûségi változók, (c, b) konstansok. A (46) egyenlet bal oldalán legyen $c = e^{-\beta}$, $\xi = \ln[y_i(t-1)]$, $\eta = u_{it}$, $b = a$, és $D^2(.) = \sigma^2$. A $cov[\ln[y_i(t-1)], u_{it}] = 0$ a tényezõk függetlenségére tett feltevés miatt.

[93] A differencia egyenlet megoldásánál a Simonovits [1998] 27-29.o. általános megoldásmenetét követem.

[94] Barro–Sala-i-Martin [1995] 386.o.



6. ábra.
A szórás elméleti alakulása, ahol a σ_0^2 a kezdeti varianciát és σ^2 az egyensúlyi értéket jelöli

országok felzárkózását ugyanis megzavarhatják olyan gazdasági és gazdaságon kívüli sokkhatások, mint például az olajárrobbanás vagy a természeti katasztrófák, amelyek az országok tartós divergenciáját idézhetik elő. A σ konvergencia, azaz az országok keresztmetszeti mutatóinak szórása nagyon érzékeny a sokkhatásokra.

4.4. A konvergencia empirikus vizsgálata

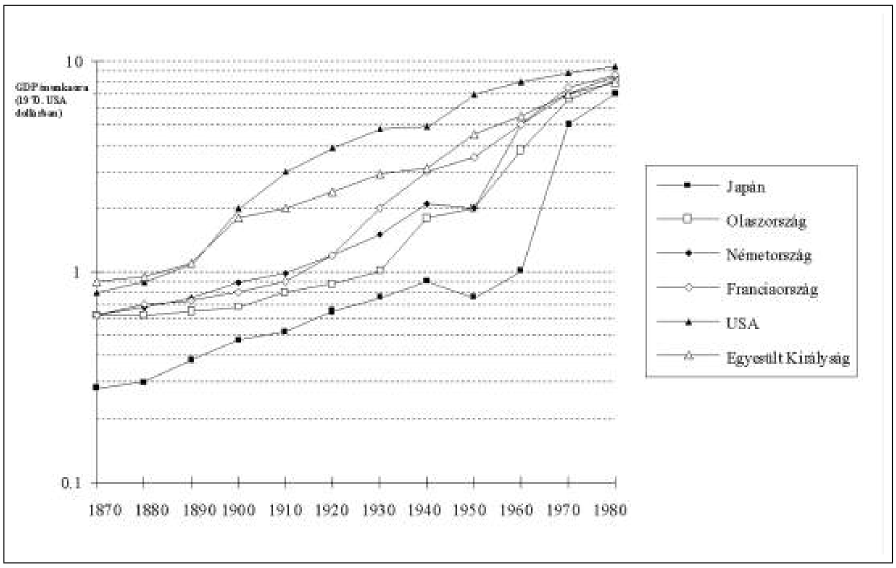
Ebben a pontban arra a kérdésre keressük a választ, hogy az empirikus elemzések alátámasztják-e a különböző konvergencia típusok létezését. Az elméleti elemzésekkel párhuzamosan számos empirikus tanulmány jelent meg a gazdasági felzárkózás-leszakadás tárgykörében. Ezen eredmények egyik része alátámaszotta az elméleti hipotéziseket, másik része ellent mondott az elméleti modelleknek. Néhány tanulmány nemcsak az alkalmazott módszereket és eredményeket, de még a vizsgálatokhoz használt mutatók (az egy főre jutó konstans nemzetközi árakon mért GDP) alkalmasságát is megkérdőjelezte.

Az 1990-es évekig végzett empirikus elemzések[95] látszólag alátámasztották az abszolút konvergencia hipotézist, amely szerint a világ országai közelednek egymáshoz. Három ábrát mutatunk be, amelyek a konvergencia folyamat létezéséről tanúskodnak.[96]

A 7. ábrán azt láthatjuk, hogy az egy munkórára jutó GDP termelés a világ különböző országaiban jelentősen közeledett a vezető országokéhoz, tehát a vizsgált országok csoportjára érvényes az abszolút (de legalábbis σ) konvergencia.

[95] A felzárkózási folyamat korai empirikus eredményeiről részletesen tájékozódhat az Olvasó Denison [1967] és Baumol–Blackman–Wolff [1989] és Baumol [1986] műveiből.

[96] A következő három ábra és részletes elemzése megtalalható Baumol–Blackman–Wolff [1989]-ben (91-96.o.)



7. ábra. Munkatermelékenység (GDP/munkaóra) alakulása 1870-től 1980-ig

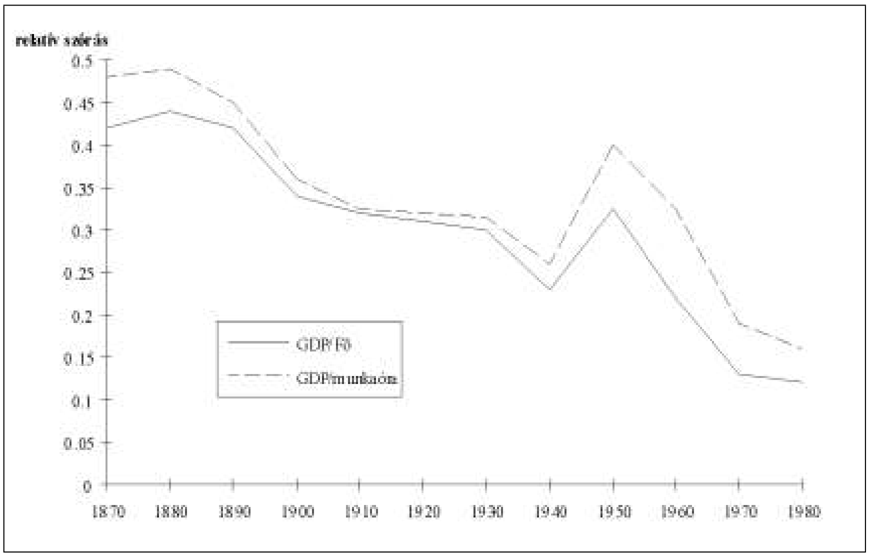
A 8. ábrán a statisztikában használt relatív szórást láthatjuk. Minél kisebb az értéke, annál kisebb az országok közötti különbség. Mint azt az ábra is mutatja a vizsgált 16 ország esetén mind az egy munkaórára, mind az egy főre jutó GDP nagysága jelentősen közeledett.

A 9. ábra egy úgynevezett „Barro-féle regressziót" mutat be. Az ilyen típusú regressziók egy tényező átlagos növekedési rátájának és egy konkrét, fix időpontban vett szintértékének kapcsolatát mutatja. Ez az ábra a β konvergencia megvalósulását sugallja, amely szerint a kezdetben fejletlen országok átlagosan nagyobb növekedési ütemet realizálva képesek a felzárkózásra. Az ábrán 16 ország munka-termelékenységének (egy munkaórára jutó GDP-ben mérve) átlagos növekedési rátáját állítottuk szembe az országok 1870-es munkatermelékenységi színvonalával. A két ismérv közötti erős fordított arányosság jól látható.

Az 2. táblázat alapján észrevehetjük, hogy ez a felzárkózási folyamat még a 90-es években is megfigyelhető. A 2. táblázatból látszik, hogy a legalacsonyabb munkatermelékenysége 1870-ben (első számoszlop) Japánnak volt (0,46) és a legmagasabb Ausztráliának (3,32). Ezek hányadosa (min / max), azt mutatja meg, hogy mekkora volt a relatív elmaradottsága a legfejletlenebbnek a legproduktívabb országhoz viszonyítva.

Ez az arány 0,138 volt 1870-ben. Ugyanez az arány 1973-ban 0,475,[97] és 1992-ben 0,675 volt. A növekvő érték azt mutatja, hogy a teljes utolérés (aminek az 1 érték felelne meg) megvalósítása egyre jobban sikerült a legkevésbé

[97]Ekkor a maximális produktivitást már az USA 23,45-ös értéke jelenti.

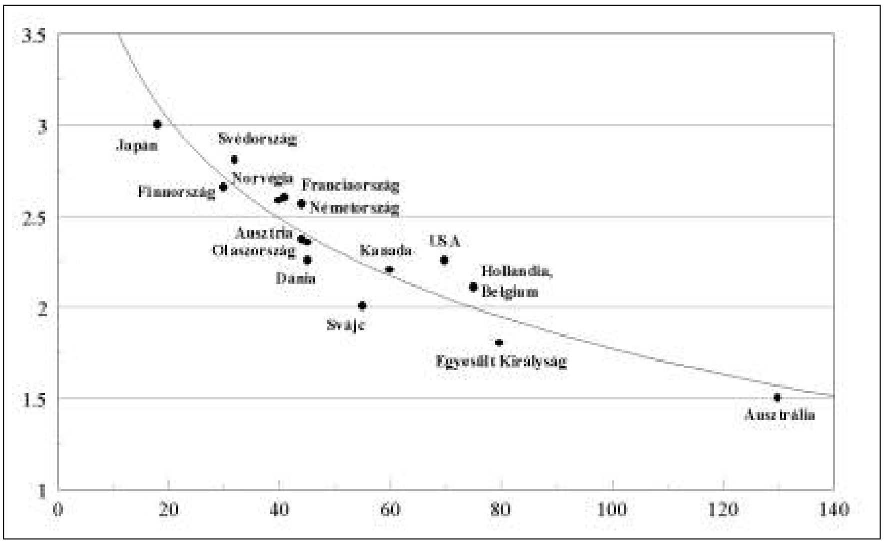


8. ábra.
Az egy munkaórára jutó GDP és az egy főre jutó GDP relatív szórásának alakulása 1870-től 1980-ig 16 ország esetén

2. táblázat.
A munkatermelékenység változása 1870-től 1992-ig (az egy munkaórára jutó GDP-ben mérve)

Országok	**1870**	**1913**	**1929**	**1938**	**1950**	**1973**	**1992**
Ausztria	1,39	2,93	3,31	3,36	4,07	15,27	24,21
Belgium	2,12	3,60	4,81	5,27	6,06	16,53	28,55
Dánia	1,51	3,40	5,11	5,31	5,85	15,94	21,81
Finnország	0,84	1,81	2,57	3,07	4,00	13,42	20,45
Franciaország	1,36	2,85	4,15	5,35	5,65	17,77	29,62
Németország	1,58	3,50	4,37	4,84	4,37	16,64	27,55
Olaszország	1,03	2,09	2,89	3,79	4,28	15,58	24,59
Hollandia	2,33	4,01	6,32	6,28	6,50	19,02	28,80
Norvégia	1,90	2,19	3,42	4,30	5,41	14,05	25,61
Svédország	1,22	2,58	3,29	4,27	7,08	18,02	23,11
Svájc	1,75	3,25	5,38	5,90	8,75	18,28	25,37
Egyesült Királyság	2,61	4,40	5,54	5,98	7,86	15,92	23,98
Ausztrália	3,32	5,28	6,47	7,16	8,68	16,87	22,56
Kanada	1,61	4,21	5,21	5,28	9,78	19,09	25,32
USA	2,26	5,12	7,52	8,64	12,66	23,45	29,10
Japán	0,46	1,03	1,78	2,19	2,03	11,15	20,02

Forrás: Maddison [1995]



9. ábra.
A munkatermelékenység átlagos változása 1870-től, az akkori szinthez viszonyítva

produktív országnak is. Tehát a vizsgált országok körében az 1990-es évek elején is ténylegesen megvalósult a felzárkózás, azaz a konvergencia.[98]

Az 1990-es évektől a konvergencia és a konvergencia sebesség empirikus vizsgálatai a neoklasszikus növekedéselméleti modellt vették alapul. Ennek megfelelően azt feltételezték, hogy a gazdaságok termelési szerkezete egy Cobb–Douglas termelési függvénnyel írható le. A 4.3.1. alpontban bemutatott elméleti keret felhasználásával a következő egyenlet határozza meg az átlagos növekedési ütemet egy $[0, T]$ intervallumban, mint azt a (43) és (44) egyenlőségekből könnyen meghatározhatjuk:

$$\frac{1}{T} \cdot \ln \left[\frac{y_i\,(T)}{y_i\,(0)} \right] = a - \left[\frac{\left(1 - e^{-\beta T}\right)}{T} \right] \cdot \ln \left[y_i\,(0) \right] + \bar{u}_i, \tag{51}$$

ahol $a = m + \left[\left(1 - e^{-\beta T}\right) / T \right] \ln \hat{y}^*$ egy konstans és $\bar{u}_i$ hibatag a $[0, T]$ intervallumba eső u_{it}-k átlaga. Az (51) kifejezés $\frac{\left(1-e^{-\beta T}\right)}{T}$ együtthatója állandó β esetén a T időtáv növelésével csökken. Azaz ha egy lineáris regressziót becsülünk a növekedési ütem és a kezdeti jövedelem logaritmusa között, akkor az együttható várhatóan annál kisebb lesz, minél hosszabb az időtáv. Ennek oka,

[98]Az 1990-es évek talán legsikeresebb felzárkozási példája világviszonylatban Kínáé, ahol az éves növekedési ütem közel egy évtizedig kétszámjegyű volt, európai viszonylatban Írországé, amely közel tíz éven keresztül 7 százalék feletti növekedési ütemével jelenleg mára meghaladja a EU tagországok egy főre jutó GDP mutatójának átlagát. (HVG [2000])

hogy a növekedési ütem csökken a jövedelemszint növekedésével. A $\frac{\left(1-e^{-\beta T}\right)}{T}$ együttható tart nullához, ha $T \to \infty$, és tart β-hoz, ha $T \to 0$. Az (51) egyenletben a nemlineáris legkisebb négyzetek módszerével becsülhetjük a β értékét, amely azonban független lesz attól, hogy milyen hosszú időtávot tekintünk. A vizsgálatokat országok, ország csoportok és országokon belüli régiók között vizsgálták, különböző időperiódusok esetén, keresztmetszeti, idősoros és panelvizsgálatokkal egyaránt. Barro és Sala-i-Martin eredményei[99] egy közel 2 százalékos felzárkózási ütemet mutatnak ki az országon belüli régiók esetén.

Quah [1996*b*] szerint meglepőnek kellene találni az azonos (2 százalékos) felzárkózási ütemeket, hiszen az egyes országok, régiók jelentősen különböznek egymástól, és az egyszerű feltevésekkel a heterogenitás csak néhány legnyilvánvalóbb jellemzőit tudják kiküszöbölni. Quah rámutat arra, hogy az univerzálisnak tűnő 2 százalékos konvergencia sebesség eredhet a becslések statisztikai tulajdonságaiból is függetlenül a gazdasági növekedés dinamikájától. Amint azt a 4.3.1. alpontban láttuk a (44) egyenletetet használják a konvergencia sebesség empirikus tesztelésére, ha csak egy időszakot tekintünk előre. Ekkor a (44) rendezésével és egy hibatag[100], u_t, hozzáadásával azt kapjuk, hogy

$$\ln y\left(t\right) = a + b_t \cdot \ln\left[y\left(t-1\right)\right] + u_t,$$

ahol $b = e^{-\beta}$. Ennek az egyenletnek a becslése felveti az egységgyök problémáját, azaz, ha b_t=1, akkor $\ln y\left(t\right)$, egy véletlen bolyongási folyamat, azaz csak a hibatagok függvénye lesz. Quah rámutat arra, hogy amikor β=0,02 akkor b_t=0,98. Ez a b_t érték nem szignifikánsan különbözik egytől azaz, amikor egységgyök adódik. Quah Monte Carlo szimuláció segítségével megmutatja, hogy az időhorizont növelése esetén is ha a minta nagysága nem túl nagy a β 2 százalékhoz közeli értéke nem atipikus. Quah egy másik tanulmányában [1993*b*] megmutatja, hogy a keresztmetszeti adatokra illesztett úgynevezett „Barro-féle regresszió" (mint amilyet a 9. ábra is mutat) eredményei egyáltalán nem támasztják alá a β konvergenciát. Ez az úgynevezett Galton-féle tévedés[101], amely szerint a szélső értékek időben tartanak az átlagértékhez. Ezek alapján a Barro-féle regresszió negatív együtthatója alátámasztaná a β konvergenciát. Quah azonban megmutatja, hogy a keresztmetszeti adatokra illesztett Barro-féle regresszió együtthatója akkor is lehet negatív, ha az adatok szóródása[102] állandó vagy akár növekvő. Amint azt a 5.6.2. alpontban részletesebben bemutatjuk, Quah konvergencia klubok elmélete szerint az országokra hosszabb távon inkább a polarizáció lesz a jellemző és nem a konvergencia. Quah szerint tehát túl sok megkérdőjelezhető pontja van a standard konvergencia becslésének, így szerinte nehezen hihető, hogy a 2 százalékos érték egy univerzális érték lenne. Véleménye szerint olyan modellt kell kidolgozni, amely az országok eloszlásának időbeli változását tárja fel.

Weber [1998] az Egyessült Államok államainak konvergenciáját kérdőjelezi meg, felhívva a figyelmet arra, hogy ezt a korábbi tanulmányok a közös amerikai

[99] Barro [1991], Barro és Sala-i-Martin [1991, 1992*a*, *b*, 1995].

[100] Az u_t tehát a rendszert t. időpontban ért külső (véletlen-) sokkhatások összesége.

[101] „Galton's Fallacy".

[102] Pontosabban a keresztmetszeti adatok eloszlása állandó vagy divergáló.

árindex segítségével mért egy főre jutó GDP alapján vizsgálták. Megállapítja, hogy a vizsgált időszakok alatt az államok közötti relatív árak éppen olyan ütemben konvergáltak (azaz az alacsonyabb jövedelmű államok relatív árarányai közeledtek a fejlettebbekhez), mint a becsült konvergencia, azaz volumenhatásokat nézve nem egyértelmű, hogy volt-e egyáltalán konvergencia.

Az elemzések nagyobb része csak a második világháború utáni időszakot vizsgálja, mert az adatbázisok (Summers–Heston [1994][103], World Bank) csak 1950 utánra tartalmaznak összehasonlítható adatokat a világ több, mint 150 országára. Ennek legjelentősebb oka, hogy sokan — mint ahogyan azt Quah is tette — rámutatak az addig használt Maddison-féle keresztmetszeti adatok szelekciós torzítására. A szelekciós torzítás azt jelenti, hogy csak az országok szűk körét, az OECD országokat elemezték. Jelenleg azonban azon országok tartoznak az OECD országok közé, amelyek valóban felzárkóztak, így a főként OECD országokra koncentráló vizsgálatok nyilván nem vezetnek a konvergencia elutasításához. Indokoltabb lenne szélesebb mintát vizsgálni, és a közös kiinduló-szintről indulókat mindenképpen bevonni: például a világháborúkat megelőzően számos, ma fejlődőek közé tartozó ország azonos szinten volt Japánnal, ugyanakkor ezek közül csak Japán emelkedett ki és csak Japánt vizsgálják a tanulmányok többségében. Néhány szerző kiterjesztette ilyen irányban a számításokat, és bár ki tudtak mutatni konvergenciát, a kritikus paraméter abszolút nagysága és szignifikanciája jelentősen esett.

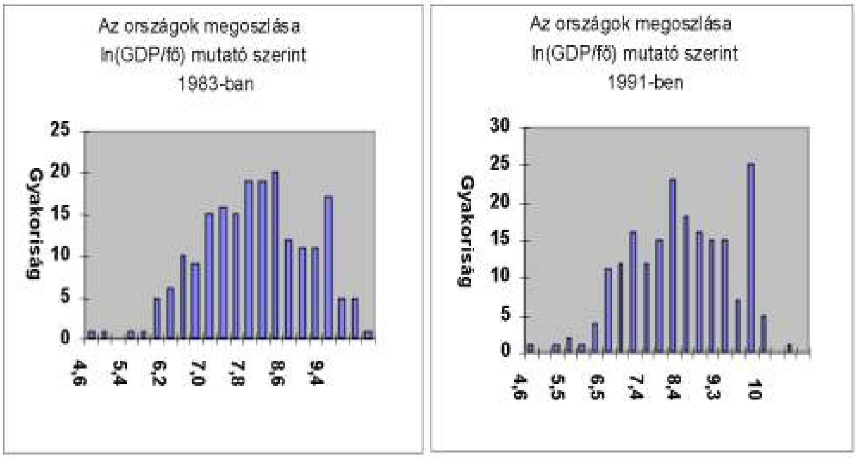
Az elméleti kritikák és az empirikus vizsgálatok hatására megrendült a neoklasszikus növekedéselméleti modellek magyarázó erejébe vetett bizalom. Egyre népszerűbbek lettek azon elméletek, amelyek a „két- vagy többpólusú világ” elképzelése mellett szóltak. Ezek elméleti keretét — a konvergencia klubokat, és a szegénysegi csapdát — a 5.6. fejeteztben mutatjuk be. Megmutatjuk majd, hogy a feltételes konvergencia elmélet ezeknek a modelleknek is az alapja. Tehát minden ország számára létezik egy egyedi hosszú távú egyensúlyi helyzet, és minden ország ehhez konvergál, és nem az országok átlagához. A többpólusú világ kifejezés is arra utal, hogy a világ országai gazdag és szegény csoportokra oszthatók és ezen csoportok országai egymáshoz konvergálnak és nem a csoportok konvegrálnak egymáshoz. Mint az a 10. ábra[104] mutatja 1983-ban legalább két kiugró érték jellemzi az országokat (8$\approx \ln 2980$, 9,5$\approx \ln 13360$). 1991-re a két móduszúság továbra is jellemző (7,9$\approx \ln 2700$, $10 \approx \ln 22000$), látható azonban egy harmadik kiemelkedés is ($7 \approx \ln 1100$), amely mintha a legszegényebb országokat vonzaná.[105]

Paap–van Dijk [1998] az egy főre jutó jövedelmek együttes eloszlását becsülve megállapítja, hogy 1960-89 között markánsan fokozódott az eloszlás kétpolusú jellege, egyre kevesebb ország veszi fel a középső értékeket, és a középtől való leszakadás értéke nagyobb, mint a gazdag csoporthoz törénő felzárkózás. Mad-

[103]Ezt az adatbázist nevezik még Penn world tables-nek (PWT) is.

[104]A 10. ábra adatai vásárlóerőparitáson számolt GDP/fő mutatók USA dollárban meghatározva. Adatok forrása: Statistical Yearbook [1988], 96-100.o. [1994] 191-215.o.

[105]A 10. ábra adatai alapján az országok polarizálódásának és együttmozgásának egy alternatív, evolúciós, megközelítését tárgyalja Ligeti [1998].



10. ábra. A kétpólusú világ empirikus alapjai

dison [1995] hosszú távú adatok és széles országminta alapján egyértelműen rámutat, hogy az elmúlt kétszáz év folyamán növekedtek az országok/régiók közötti egyenlőtlenségek.

Dowrick–Quggin [1997] a felhasznált mérőszámokat elemezték. Vizsgálatuk alapján ők nem a konvergencia létét[106], hanem a mérőszámokból levezetett konvergencia mértékét kérdőjelezik meg. A probléma a klasszikus indexproblémára vezethető vissza. Hogyan lehet összehasonlítani két különböző összetételű és relatív árarányú ország GDP mutatóját? Mind a Summers–Heston adatbázis, mind az ENSZ által kölünböző években folytatott ICP (International Comparison Project) programok a változatlan nemzetközi áron számított egy főre jutó GDP adatokat használja az országok fejlettségének mérésére. Kérdéses azonban, hogy vajon milyen mértékben kielégítő az összehasonlításokhoz az a konstans nemzetközi árvektor, amelyet a fejlett országok árarányai dominálnak. A problémát jól szemlélteti Darvas–Simon példája[107]: "ha az Egyesült Államokat és Portugáliát vetjük össze, és a portugál árakat használjuk, akkor 1980-ban és 1990-ben az egy főre jutó jövedelem 3,5-ször és 2,7-szer volt magasabb Amerikában, míg az amerikai árakat használva a két évben 2,6-szoros és 2,2-szeres az érték. A két árvektor alapján mért konvergencia jelentősen eltér egymástól: portugál árak esetén az éves felzárkózási ütem 2,6 százalék, amerikai árak esetén évente csak 1,7 százalék." Dowrick–Quggin ezért létrehoz egy olyan „igazi" mérőszámot, amely független az önkényes árvektortól. Pontosabban az „igazi" index alsó és felső értékére adnak korlátot, és a kettő átlagaként definiálják az általuk kívánatosnak tartott indexet. Eredményeiket összevetették a Summers–Heston adatbázisból számított relatív ár és mennyiségi arányokkal. A vizsgált 16 OECD

[106]Erre alapjuk nem is lenne, hiszen csak 16 OECD ország adatait vizsgálták.
[107]Darvas–Simon [1999*a*] 37.o.

ország esetén jelentős eltérést találtak. Az elmúlt évek során azonban ezen országok realtív árarányai közeledtek egymáshoz, így az árvektor meghatározása egyre kisebb jelentőséggel bír. Következtetéseik azonban fontosak lehetnek az alacsony jövedelmű országok fejlettségi szintjének és dinamikájának méréséhez.

A konvergencia empirikus vizsgálatainak összefoglalásaként elmodhatjuk, hogy amíg olyan országoknak vagy régióknak csak egy olyan szűk csoportját vizsgálták, amelyek esetén a növekedést meghatározó tényezők megegyeztek vagy legalábbis közel hasonlóak voltak, addig igaznak bizonyulhatott az abszolút konvergencia hipotézis. Ezt támasztják alá az USA tagállamaira Barro–Sala-i-Martin [1992*a*] és Japán tagállamaira Barro–Sala-i-Martin [1992*b*] vagy az OECD tagországokra Quah [1996*a*], Barro–Sala-i-Martin [1995], végzett elemzései. Az országok szélesebb körű elemzése azonban ellentmond az abszolút konvergenciának (lásd például Plosser [1992]). Az ebben a pontban tárgyalt elemzések mind elvetik az abszolút konvergencia létét sőt még a β konvergencia megvalósulását is megkérdőjelezik. Éppen ezért az utóbbi években egyre nagyobb hangsúlyt kapott a feltételes konvergencia vizsgálata, amely szerint az országok az egyedi sajátosságaikat figylembe vevő saját hosszú távú egyensúlyi pályájukhoz tartanak, amely nem feltétlenül egyezik meg a legfejlettebb, de még a fejlett országok átlagos szintjével sem.

5. Konvergencia és a növekedéselméleti modellek

Az előző fejezetben ismertettük a szakirodalomban használt különböző konvergencia típusokat, majd bemutattuk, hogy az empirikus elemzések nem egyértelműen támasztják alá az eltérő konvergencia hipotéziseket. Ebben a fejezetben a növekedéselmélet és konvergencia elmélet kapcsolatát elemezzük. Megmutatjuk, hogy a növekedéselméleti modellek nem szolgálnak megfelelő kiindulópontul az eltérő gazdasági fejlettségű országok felzárkózási folyamatának elemzéséhez. Rámutatunk arra, hogy a növekedéselméleti modellek nem nyújtanak lehetőséget az abszolút és σ konvergencia elemzésére. Ez utóbbit csak annyiban magyarázzák, amennyiben (az előző fejezet 4.3.1. alpontjában bemutatottaknak megfelelően) a β konvergencia képes magyarázni a σ konvergenciát. A β és a feltételes konvergencia elemzésére azonban alkalmasak a növekedéselméleti modellek.

Amint azt látni fogjuk a növekedés és konvergencia kapcsolatának problémaköre szorosan összefügg a termelési függvények specifikációjával. Ezért az eddig vizsgált modelleink mellett (5.1-5.4. pontok) külön pontban (5.5.) elemezzük az általános CES típusú termelési függvények kapcsolatát a gazdasági konvergenciával. Megmutatjuk, hogy a β és a feltételes konvergencia léte a termelési függvény konkrét alakjától függ. A fejezetet egy olyan pont zárja (5.6.), amelyben az elméleti modellek a gazdasági konvergenciával szemben az országok potenciális divergenciájára hívják fel a figyelmet. A kapott eredmények ebben az esetben is szoros kapcsolatot mutatnak a termelési függvény feltételezett alakjával.

5.1. Konvergencia a post-keynesi modellben

Az úgynevezett Harrod–Domar modell egy instabil hosszú távú növekedési pályát határoz meg. Ennek megfelelően ebben az esetben nem beszélhetünk konvergenciáról. Abszolút és σ konvergenciáról azért nem, mert az országok tartósan vagy felfelé vagy lefelé eltérnek stacionárius állapotuktól, így semmi sem biztosítja, hogy az országok keresztmetszeti adatai „sűrűsödjenek”. Hasonlóan az instabilitás kizárja a feltételes konvergenciát, hiszen az országok nem tartanak saját hosszú távú pályájuk felé. Az azonban igaz, hogy az országok a stacionárius állapotuktól egyre gyorsabb ütemben távolodnak, tehát az ütem és a harrodi pályától vett távolság egyenesen arányos. Ezt azonban sokkal inkább β divergenciának, mint konvergenciának kellene neveznünk.

Ha azonban a Harrod–Domar modell Leontief típusú termelési függvényét beillesztjük a neokalsszikus tőkeakkumulációs modellkeretbe, akkor az lehetőséget teremt a konvergencia elméletek elemzésére.[108] Legyen a termelési függvényünk a következő:

$$Y(t) = F[K(t), L(t)] = \min[AK(t), BL(t)], \tag{52}$$

ahol $A > 0$, $B > 0$ konstansok[109]. Ez valójában a — későbbiekben rész-

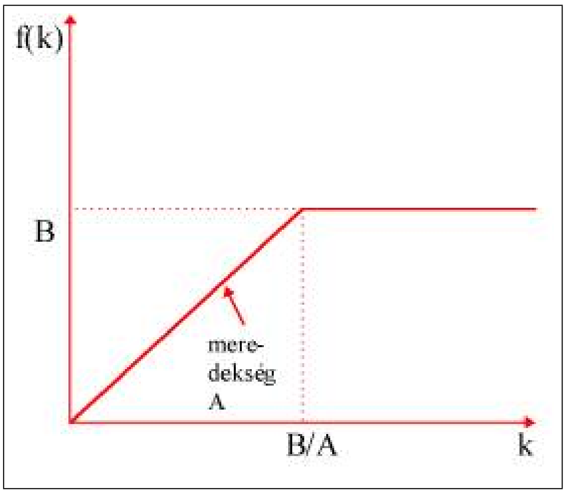
[108] Az alábbiakban Barro–Sala-i-Martin [1995] gondolatmenetét követem.

[109] Az $\frac{1}{\kappa} = A$ és $\frac{1}{\nu} = B$ helyettesítéseket elvégezve az (52) termelési függvényben megkapjuk a 2.1. pontban ismertetett post-keynesi termelési függvényt. Mivel a továbbiakban nem

letesen bemutatásra kerülő — CES függvények egy speciális alakja[110]. Ebben az esetben csak akkor használnak fel a termeléshez minden munkát és tőkét, ha $AK(t) = BL(t)$. Tehát a tényezőarányok rögzítettek, $\frac{K(t)}{L(t)} = \frac{B}{A}$. Ha például $AK(t) > BL(t)$, akkor csak $(B/A)L(t)$ mennyiségű tőkét fognak haszálni, a fennmaradó hányad kihasználatlan marad. Ellenkező esetben, ha $AK(t) < BL(t)$, akkor csak $(A/B)K(t)$ mennyiségű mukaerőre lesz szükség a termeléshez, a fennmaradó rész munka nélkül marad.[111]

Átírva a modellt az egy főre jutó mutatókra kapjuk:

$$y(t) = \min[Ak(t), B].$$



11. ábra. A Leontief termelési függvény a tőkeintenzitás függvényében

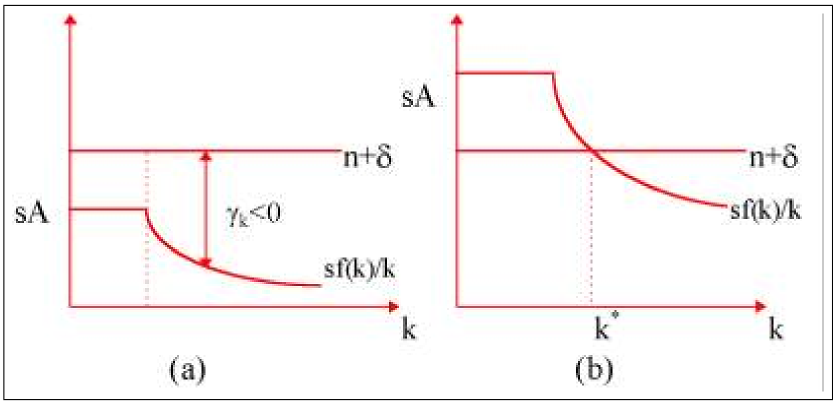
Ha $k(t) < B/A$, akkor a tőkét teljesen felhasználják és ekkor a termelési függvény a $y(t) = Ak(t)$ alakra egyszerűsödik. Ez nem más mint egy A meredekségű egyenes a $k(t)$ függvényében, mint ahogy ezt a 11. ábra mutatja. Ha $k(t) > B/A$, akkor a munka lesz a szűk keresztmetszet, azaz a teljes munkaerőt foglalkoztatják, de a tőkeállomány egy része kihasználatlan marad. Ekkor a termelési függvény $y(t) = B$ konstans értéket veszi fel a $k(t)$ függényében (lásd 11. ábra). Felírva az egyensúlyt meghatározó ismert összefüggést kapjuk:

$$\gamma_k = s \cdot [\min(Ak(t), B)] / k(t) - (n + \delta). \tag{53}$$

lesz szükségünk a tőke-, és munkaigényesség explicit megjelenítésére, ezért az egyszerűbb átláthatóság kedvéért jelöljük azokat A-val és B-vel.

[110]Az az eset amikor $\Psi \to -\infty$. Ennek belátását lásd a Függelék 9.2. pontjában.

[111]Egy gazdaság reális leírásánál, annak feltevése, hogy a tőke és a munka egyáltalán nem képes egymást helyettesíteni, irreális feltevésnek tűnik, hiszen ez azt jelenti, hogy folytonosan nő(het) a felesleges kapacitás.



12. ábra.
A Harrod–Domar modell (Az (a) résznél az $sA < n + \delta$, a (b) résznél $sA > n + \delta$)

A 12. ábra (a) és (b) részén jól megfigyelhető, hogy az $s \cdot [\min(Ak(t), B)] / k(t)$ kifejezés egy vízszintes egyenes, sA konstans nagyság, amíg $k(t) \leq B/A$. Amikor $k(t) > B/A$, akkor ez a kifejezés $k(t)$-nak csökkenő függvénye lesz, amely tart nullához $k(t)$ növekedésével. Az (53) kifejezés második tagja, $n + \delta$, egy konstans nagyság. Két eset lehetséges, ahogyan azt a 12. ábra (a) és (b) részei mutatják.

Az első esetben (12. ábra (a) része) $sA < n + \delta$, azaz $\gamma_k < 0$. Ekkor nem lesz egyensúlyi megoldás, és a gazdaság folyamatosan szűkülni fog. Tehát, mind $k(t)$, mind $y(t)$ és $c(t)$ tart nullához. Ebben az esetben $k(t)$ lecsökken B/A nagyság alá, azaz állandó és növekvő munkanélküliség fogja jellemezni ezt a gazdaságot. Tehát nem érvényesülhet a feltételes konvergencia, hiszen nincs egyensúlyi pont, amelyhez tarthatna a rendszer.

A második esetben (12. ábra (b) része) ha $sA > n+\delta$, akkor $k(t) > k^*$ esetén a $\gamma_k > 0$, és $k(t) < k^*$ esetén pedig $\gamma_k < 0$ lesz. Ekkor lesz egy stabil stacionárius megoldás. Tehát lesz egy $k^* > B/A$ megoldás, amely mellett azonban állandó kapacitás kihasználatlanság fogja jellemezni a gazdaságot. (A modell feltevése szerint a gazdasági szereplők ekkor is megtartják a rögzített s megtakarítási hányadot, ami ellentmond a gazdasági racionalitásnak.) Ez az úgynevezett első harrodi probléma. Ekkor a k^* stacionárius, de nem egyensúlyi megoldás abban az értelemben, hogy a hosszú távú pálya mentén minden piac egyensúlyban van.

Az elmélet szerint az egyetlen eset, amikor mind a munka, mind a tőke állományt teljesen kihasználják, amikor $sA = n + \delta$, azaz amikor $\gamma_k = 0$. Mivel azonban ezen tényezők a modell exogén paraméterei, nem tudjuk garantálni az egyensúly megvalósulását. Éppen ezt fogalmazta meg Harrod és Domar insatabil növekedési pályája, miszerint a „borotvaél” kivételével (aminek valószínűsége kicsi) a gazdaságokban vagy állandó és növekvő munkanélküliséget vagy állandó és növekvő kihasználatlan tőke kapacitást fogunk tapasztalni.

Mint láttuk a Harrod–Domar modell feltevései támadhatók. Az első problémát a merev tényezőarányok jelentik, amelyre már a Solow–Swan modell is megadja a megoldást. A neoklasszikus modellben a tőke határterméke F_K a tőkeintenzitás, $k(t)$, függvénye és így endogén módon képes megvalósítani a $s \cdot f(k(t))/k(t) = n + \delta$ egyenlőség által meghatározott egyensúlyt. A másik problematikus feltevés a gazdasági szereplők merevsége, ami ellentmond a gazdasági szereplők racionális magatartásának. A Harrod–Domar modellben ugyamis a kihasználtalan kapacitások tartóssá válhatnak.

A Harrod–Domar modellben tehát vagy nem valósul meg feltételes konvergencia vagy ha igen, akkor csak egy nem-egyensúlyi pályához való konvergenciát jelent.

5.2. Konvergencia a neoklasszikus modellben

A továbbiakban áttekintem, hogy a különböző típusú konvergencia hipotézisek és a neoklasszikus növekedéselméleti modell kapcsolatát. Amint azt látni fogjuk a neoklasszikus modellkeret sem biztosítja az abszolút, illetve a σ konvergenciát, csak a feltételes és a β konvergencia vezethető le belőle. Induljunk ki a 2.2. pontban bemutatott neoklasszikus növekedéselméleti modellből.

Tudjuk, hogy a modell egyenletes változásának üteme nulla, amelyhez, mint megmutattuk, egyetlen stacionárius és lokálisan aszimptotikusan stabil megoldás, k^*, tartozik, amelyre

$$sf(k^*) = (n+\delta)k^*.$$

Továbbá tudjuk, hogy minden pozitív k esetén

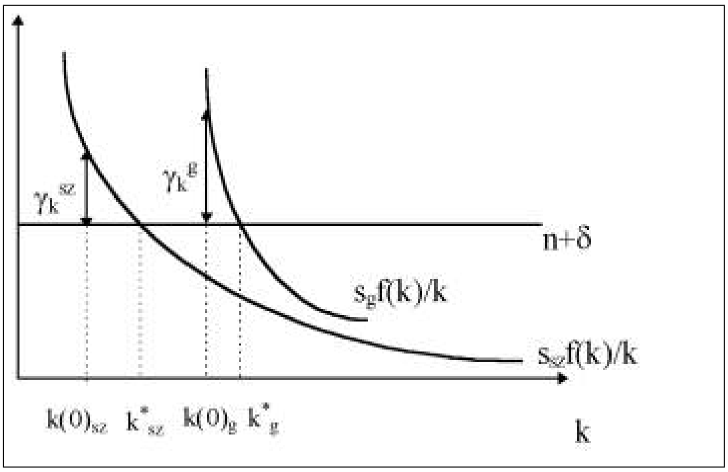
$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial k} = -\frac{s}{k^2(t)}\left[f(k(t)) - k(t) \cdot f'(k(t))\right] < 0, \forall t, \tag{54}$$

hiszen a szögletes zárójelben a munka pozitív határterméke áll.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen következtetéseket vonhatunk le ezek alapján arra vonatkozólag, hogy egy szegény ország, amelynek az egy főre jutó tőkeállománya, kisebb, mint az egyensúlyi érték, azaz $k(t) < k^*$, képes-e felzárkózni a fejlettebb társaihoz. Ennek elemzéséhez tekintsük az (54) egyenlőtlenséget, amely azt mutatja, hogy minél szegényebb egy ország, azaz $k(t)$ értéke minél kisebb, akkor annál nagyobb növekedési rátája van. Tehát a növekedési ráta, γ_k, és az egy főre jutó tőkeállomány között fordított arányosság van, ami β konvergenciát jelent. Ez elméletileg lehetőséget biztosít arra, hogy azok az országok növekedjenek gyorsabban (egy főre jutó tőkeállomány tekintetében), amelyek alacsonyabb szintről indulnak.

Legyen a termelési függvényünk — az egyszerűség kedvéért — egy Cobb–Douglas alakú függvény, azaz

$$Y(t) = F[K(t), L(t)] = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$
$$\frac{Y(t)}{L(t)} = y(t) = Ak^{\alpha}(t),$$



13. ábra. Feltételes konvergencia a neoklasszikus modellben

ahol $0 < \alpha < 1$, és $A > 0$ konstans. Ekkor az egy főre jutó kibocsátás tekintetében is fennállnak előző megállapításaink, mivel

$$\gamma_y(t) = \frac{\frac{dy(t)}{dt}}{y(t)} = \varepsilon_K^Y \cdot \gamma_k(t) = \alpha \cdot \gamma_k(t),$$

hiszen $\varepsilon_K^Y = \alpha$ a Cobb–Douglas termelési függvény tőke szerinti parciális rugalmassági koefficiense.

A feltételes konvergencia hipotézis szerint az országok saját egyensúlyi pályájuk felé konvergálnak, és a konvergencia üteme fordítottan arányos az egyensúlytól való távolsággal. A feltételes jelző ebben az esetben azt jelenti, — két ország esetére szűkítve a vizsgálatot —, hogy azoknak csak a kezdeti értéke térhet el egymástól (például $k(0)_{sz} < k(0)_g$), minden más tényezőjüknek meg kell egyeznie (tehát azonos s, n, δ, $F(.)$, A) ahhoz, hogy köztük a konvergencia megvalósuljon.[112] Ezt az esetet illusztrálja a 13. ábra, ahol a szegényebb ország alacsonyabb szintről indul ($k(0)_{sz}$), mint a gazdagabb ország ($k(0)_g$) és a szegényebb ország megtakarítási rátája eltér a gazdag országétól, de termelési szerkezete, az n, A és δ értékei megegyeznek.

A kezdeti értékek különbözősége mellett, ha csak egy paraméterben is különbséget engedünk meg, például a megtakarítási rátában ($s_{sz} \neq s_g$), belátható, hogy az egyensúlyi értékek nem lesznek azonosak, azaz $k_g^* > k_{sz}^*$. Ez azt jelenti, hogy mind a szegény, mind a gazdag ország tart a saját egyensúlyi értékéhez (54) szerint. Tehát a feltételes konvergencia hipotézis érvényesül. Semmi sem biztosítja azonban, hogy a szegény ország utól éri a gazdagabbat. Ha, mint azt a 13. ábra mutatja, a gazdagabb ország megtakarítási rátája nagyobb ($s_{sz} < s_g$),

[112]Az „sz" indexe egy szegény ország, a „g" indexe egy gazdagabb ország tényezőit jelöli a továbbiakban.

akkor előfordulhat, hogy azonos távolságra a megfelelő egyensúlyi pontoktól a gazdagabb ország növekedési rátája nagyobb lesz, mint a szegény országé ($\gamma_k^{sz} < \gamma_k^{g}$), azaz ekkor az országok nem közelednek, hanem távolódnak egymástól. Összefoglalásként azt mondhatjuk, hogy a neoklasszikus modell feltételes konvergenciát mutat, de nem mond semmit az abszolút konvergenciáról.

Barro–Sala-i-Martin [1992a, b, 1995] szerint az OECD országok és az USA vagy Japán tagállamainak felzárkózási folyamatára a feltételes konvergencia jó közelítéssal alkalmazható. Mit jelent ez a jó közelítés? Azt, hogy ezen országok mindegyike a saját egyensúlyi értékéhez tart, de ezen értékek nagyon közel vannak egymáshoz. A 13. ábra alapján ez azt jelenti, hogy $k_g^* \approx k_{sz}^*$. Ez természetesen azt az implicit feltevést takarja, hogy ezen országok egyéb változói (s, n, δ, $F(.)$, A) azonosak vagy legalábbis nem térnek el számottevően egymástól. Ez a feltétel nem túl erős a példaként említett csoportoknál, hiszen az erős és jelentős gazdasági kapcsolatok elmossák a fő gazdasági kükönbségeket. A legerőteljesebb kiegyenlítő hatást — mint azt korábban elemeztük — a szabad fizikai és pénztőke áramlás, a munkaerő mobilitás és a gyors technológiai transzferek biztosítják.

5.3. Konvergencia az AK modellben

Tudjuk, hogy az AK modell esetén

$$\gamma_k = \dot{k}(t)/k(t) = sf(k(t))/k(t) - (n+\delta) = sA - (n+\delta),$$

azaz az egy főre jutó tényezők növekedési rátája konstans, amint azt a 2. ábra is mutatja. Ha két ország teljesen hasonló paraméterekkel rendelkezik, és csak a kiinduló $k(0)$ értékeik térnek el, akkor a szegényebb ország ugyanakkora növekedési ütemet fog realizálni, mint a gazdagabb, így a felzárkózás nem fog megtörténni. Ez a modell tehát nem mutat feltételes konvergenciát. Ha a 29. Állítás eredményét felhasználva a konvergencia sebbesség nagyságát vizsgáljuk, akkor ugyanehhez a végeredményhez jutunk:

$$\beta = (1-\alpha)(n+\delta) = 0,$$

hiszen az AK modell nem más mint a Cobb–Douglas termelési függvény egy speciális esete, ahol $\alpha = 1$. A konvergencia sebesség tehát nulla, $\beta = 0$, azaz a β konvergencia sem valósul meg.

Az AK modellt számos bírálat érte, mert az empirikus vizsgálatokkal ellentétben nem mutatja a feltételes konvergencia tulajdonságát. A bírálatok szerint elképzelhető ugyan, hogy van a fejlődésnek egy olyan szakasza, amelyben nem történik felzárkózás (sőt divergencia figyelhető meg), de $k(t)$ illetve $y(t)$ bizonyos szintje felett ez már irreálisnak tűnik.

5.3.1. Az AK modell és feltételes konvergencia

Ahhoz hogy biztosítsuk a konvergenciát, a termelési függvényt kicsit módosítanunk kell. Az állandó ütemű növekedés azt jelenti, hogy γ_k konstans és pozitív, ami $k(t)$ minden határon túli növekedését jelenti. Azt kell tehát biztosítanunk, hogy a tőke határterméke, $f(k(t))/k(t)$, maradjon mindig $(n+\delta)/s$ értéke felett $k(t)$ tart végtelenhez esetén. Másként fogalmazva, ha az átlagtermék tart egy alsó korláthoz, úgy, hogy

$$\lim_{k\to\infty}[f(k(t))/k(t)] > (n+\delta)/s, \tag{55}$$

akkor ez elégséges feltétele annak, hogy az endogén hosszú távú növekedés továbbra is megvalósuljon. (Lásd a 14. ábrát.)

Ha az egy főre jutó tőkeállomány nagysága tart a végtelenhez ($k(t)\to\infty$), akkor az egy főre jutó kibocsátás is végtelenhez tart ($f(k(t))\to\infty$). Az (55) baloldalát a L'Hôpital szabály alkalmazásával meghatározva azt kapjuk, hogy az átlagtermék határátmenetben megegyezik a határtermékkel, $f'(k(t))$. (Tegyük fel, hogy $\lim_{k\to\infty}[f(k(t))/k(t)]$ kifejezés létezik.) Ekkor tehát az endogén egyensúlyi növekedés feltétele, hogy:

$$\lim_{k\to\infty}[f(k(t))/k(t)] = \lim_{k\to\infty}[f'(k(t))] > (n+\delta)/s > 0$$

Ez azonban azt jelenti, hogy a neoklasszikus növekedési modellnél feltételezett $\lim_{k\to\infty}[f'(k(t))] = 0$ Inada feltétel sérül. Tehát a termelési függvény $k(t)$ kis értékei esetén mutathat csökkenő és/vagy növekvő hozadékot, de $k(t)$ nagy értékeire a tőke határtermékének alulról korlátosnak kell lenni. Ilyen termelési függvény például a következő:

$$Y(t) = F(K(t), L(t)) = AK(t) + BK^{\alpha}(t)\,L^{1-\alpha}(t),$$

ahol $A > 0$, és $B > 0$, $0 < \alpha < 1$. Vegyük észre, hogy ez a termelési függvény az AK és a Cobb–Douglas függvény kombinációja. Az így kapott függvény továbbra is első fokon homogén, tényezőiben csökkenő határhozadékú. Az Inada feltételek azonban itt is sérülnek, hiszen $\lim_{k\to\infty}[F_K] = A > 0$. Ha átírjuk a termelési függvényt egy főre jutó értékekre:

$$y(t) = f(k(t)) = Ak(t) + Bk(t)^{\alpha}.$$

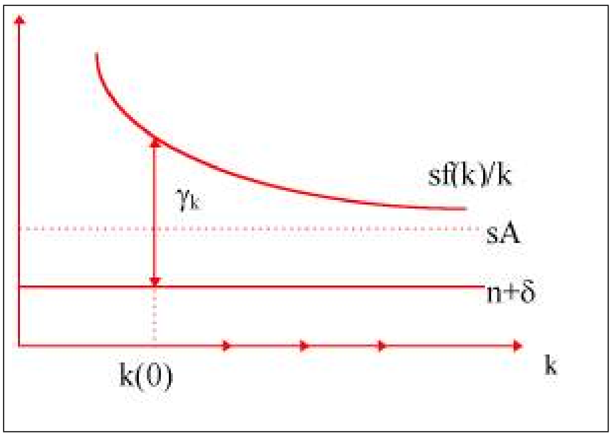
Ekkor a tőke átlagterméke:

$$f(k(t))/k(t) = A + Bk(t)^{-(1-\alpha)},$$

ami $k(t)$-ban csökkenő, de tart A-hoz, ha $k(t)$ tart végtelenbe. A modell dinamikáját az ismert összefüggés alapján elemezhetjük:

$$\gamma_k = sf(k(t))/k(t) - (n+\delta).$$

Amint azt a 14. ábra mutatja az $sf(k(t))/k(t)$ függvény egy csökkenő függvény, amely hozzásímul az sA pozitív konstans értékű horizontális aszimptotához. Ha $sA > (n+\delta)$, mint ezt a 14. ábra mutatja, akkor létezik tartós pozitív növekedési ütem. Ez a modell nemcsak endogén növekedést határoz meg, hanem biztosítja a feltételes konvergencia feltételét is. Ennek az az oka, hogy az



14. ábra. Endogén növekedési modell és feltételes konvergencia

átlagtermék, $f(k(t))/k(t)$, csökkenő a $k(t)$ növekvő értékeire. Mint azt a 14. ábrán is láthatjuk, ha két gazdaság csak kiinduló paramétereikben különbözik, akkor az egy főre jutó tőkeállomány növekedési üteme a szegényebb országban lesz nagyobb, azaz a megvalósul a β konvergencia is.

5.4. Konvergencia az MRW modellben

A 2.4. pont 12. Állításában beláttuk, hogy az MRW modellnek léteszik egy (k^*, h^*) nem triviális megoldása, amely lokálisan aszimptotikusan stabil. Tehát bármilyen irányba mozdulunk is ki a stacionárius pontból a rendszer konvergálni fog a saját stacionárius megoldáshoz.

Az eredeti modellben vizsgáljuk a feltételes konvergencia megvalósulását. Ehhez tekintsük a modell dinamikáját leíró egyenletrendszert.

$$\gamma_k(t) = \frac{dk(t)/dt}{k(t)} = s_k \cdot \frac{h^\beta(t)}{k^{1-\alpha}(t)} - (n+m+\delta) \tag{56}$$

$$\gamma_h(t) = \frac{dh(t)/dt}{h(t)} = s_h \cdot \frac{k^\alpha(t)}{h^{1-\beta}(t)} - (n+m+\delta). \tag{57}$$

Az (56) és (57) kifejezések rendre $k(t)$ és $h(t)$ csökkenő függvényei. Teljesülnek a feltételes konvergencia feltételei, azaz minden gazdaság a maga egyensúlyi pontjához tart és az egyensúlyhoz közeledve a növekedési ütem fokozatosan csökken.[113] Ez a rendszer tehát mutatja a feltételes konvergenciát. Az MRW modell azonban szintén nem mond semmit a σ konvergenciáról.

[113]Ezek a pályák nem mutatnak törést. Tehát ezek a modellek a humántőke beépítésével sem alkalmasak a fejlett országok II. Világháború utáni időszakának pontos leírására. Ennek részletesebb elemzésére a 7. Fejezetben térünk ki.

A konvergencia sebesség meghatározásához tekintsük a rendszer loglinearizált közelítését a stacionárius pont környezetében:

$$\left[\begin{array}{c} \frac{d\ln k(t)}{dt} \\ \frac{d\ln h(t)}{dt} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial\gamma_k}{\partial\ln k(t)} & \frac{\partial\gamma_k}{\partial\ln h(t)} \\ \frac{\partial\gamma_h}{\partial\ln k(t)} & \frac{\partial\gamma_h}{\partial\ln h(t)} \end{array}\right]_{(\ln k^*,\ln h^*)} \cdot \left[\begin{array}{c} \ln\left(\frac{k(t)}{k^*}\right) \\ \ln\left(\frac{h(t)}{h^*}\right) \end{array}\right] \tag{58}$$

Jelölje az (58) rendszer mátrixát $\mathbf{M}$, ekkor

$$\mathbf{M} = \left[\begin{array}{cc} s_k(\alpha-1)A^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}B^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha-\beta}} & s_k\beta A^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}B^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha-\beta}} \\ s_h\alpha A^{\frac{\beta-1}{1-\alpha-\beta}}B^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} & s_h(\beta-1)A^{\frac{\beta-1}{1-\alpha-\beta}}B^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \end{array}\right],$$

ahol $A = \left[\frac{s_k^{\alpha}\cdot s_h^{1-\alpha}}{n+\delta}\right]$, és $B = \left[\frac{s_k^{1-\beta}\cdot s_h^{\beta}}{n+\delta}\right]$. Mivel $(\alpha-1)$ és $(\beta-1)$ negatívok, így az $\mathbf{M}$ mátrix nyoma negatív, $tr[\mathbf{M}] < 0$. A paraméterekre tett $(1-\alpha-\beta) > 0$ kikötés miatt az $\mathbf{M}$ mátrix determinánsa pozitív, hiszen

$$\det[\mathbf{M}] = s_k s_h(\alpha-1)(\beta-1)A^{\frac{2\beta-1}{1-\alpha-\beta}}B^{\frac{-1}{1-\alpha-\beta}} - s_k s_h\beta\alpha A^{\frac{2\beta-1}{1-\alpha-\beta}}B^{\frac{-1}{1-\alpha-\beta}} =$$

$$= (1-\alpha-\beta)s_k s_h A^{\frac{2\beta-1}{1-\alpha-\beta}}B^{\frac{-1}{1-\alpha-\beta}} > 0.$$

Tehát a rendszer sajátértékeinek valós része negatív. A rendszer karakterisztikus polinomja:

$$-\lambda^2 - \lambda tr[\mathbf{M}] + \det[\mathbf{M}] = 0$$

A sajátértékek:

$$\lambda_1,\lambda_2 = \frac{-s_k s_h(\beta-1)(\alpha-1)A^{\frac{2\beta-1}{1-\alpha-\beta}}B^{\frac{-1}{1-\alpha-\beta}}}{2} \pm \frac{\sqrt{\left[s_k s_h(\beta-1)(\alpha-1)A^{\frac{2\beta-1}{1-\alpha-\beta}}B^{\frac{-1}{1-\alpha-\beta}}\right]^2 - 4(1-\alpha-\beta)s_k s_h A^{\frac{2\beta-1}{1-\alpha-\beta}}B^{\frac{-1}{1-\alpha-\beta}}}}{2}.$$

Legyenek a λ_1, λ_2 sajátértékekhez tartozó sajátvektorok rendre $\mathbf{s}_1 = \left[\begin{array}{c} s_1^1 \\ s_1^2 \end{array}\right]$ és $\mathbf{s}_2 = \left[\begin{array}{c} s_2^1 \\ s_2^2 \end{array}\right]$. Ekkor megoldásként kapjuk:

$$\left[\begin{array}{c} \ln k(t) \\ \ln h(t) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \ln k^*(t) \\ \ln h^*(t) \end{array}\right] + \psi_1\left[\begin{array}{c} s_1^1 \\ s_1^2 \end{array}\right]e^{\lambda_1 t} + \psi_2\left[\begin{array}{c} s_2^1 \\ s_2^2 \end{array}\right]e^{\lambda_2 t},$$

ahol ψ_1 és ψ_2 a kezdetiértékek által meghatározott konstansok. Tegyük fel, hogy $\mathrm{Re}(\lambda_1) < \mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$. A rendszer $\mathbf{s}_2$ irányából közeledik leglassabban a megoldáshoz. Ekkor a rendszer konvergencia sebessége az $\mathrm{Re}(\lambda_2)$ értékkel becsülhető alulról. [114] Legyen $\psi_1 = 0$, ekkor a kezdeti feltételek felhasználásával adódik, hogy

$$\left[\begin{array}{c} \ln k(0) \\ \ln h(0) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \ln k^*(t) \\ \ln h^*(t) \end{array}\right] + \psi_3\left[\begin{array}{c} 1 \\ s_2^2/s_2^1 \end{array}\right],$$

[114] Pontrjagin [1972] 203.o.

ahol $\psi_3 = s_2^1 \cdot \psi_2$. A tőkeintenzitás konvergencia sebességének felső becslésére kapjuk

$$\psi_3 = \ln k(0) - \ln k^*$$

$$\ln k(t) = \ln k^* + e^{-\beta t}\left[\ln k(0) - \ln k^*\right], \tag{59}$$

ahol $\beta = -\operatorname{Re}(\lambda_2)$. Tehát láthatjuk, hogy a rendszer a stacionárius pontból, $\ln k^*$, kimozdulva ismét tart ahhoz. A közeledés üteme pedig legalább β nagyságú. Az (59) kifejezésből a növekedési ráta

$$\frac{d\ln k(t)}{dt} = -\beta \ln\left(\frac{\ln k(t)}{\ln k^*}\right).$$

Mivel a növekedési ráta fordítottan arányos a stacionárius ponttól vett távolsággal, így érvényesül a β konvergencia.[115]

5.5. Konvergencia CES termelési függvények esetén

Ebben a pontban célunk annak bemutatása, hogy a konstans helyettesítési rugalmasságú (CES) termelési függvényeknek létezik olyan típusa, amely az AK modellhez hasonlóan endogén egyensúlyi növekedést mutat. Tehát a Cobb–Douglas termelési függvény és a hozzá tartozó (eddig tárgyalt) tulajdonságok nem általanos érvényűek, sokkal inkább egy speciális esetnek tekinthetők. Az elemzéshez induljunk ki a CES függvények egy általanos alakjából[116]:

$$Y(t) = F(K(t), L(t)) = A\left\{a\left[bK(t)\right]^{\Psi} + (1-a)\left[(1-b)L(t)\right]^{\Psi}\right\}^{h/\Psi}, \tag{60}$$

ahol $0 < a < 1$, $0 < b < 1$,[117] és $\Psi \leq 1$ a tőke és munka helyettesítési rugalmasságát meghatározó tényező, a h a homogenitás fokát mutatja, ami a továbbiakban egységnyi lesz ($h = 1$). Ekkor a parciális helyettesítési rugalmasság a tőke és a munka között $|\sigma| = 1/(1-\Psi)$.[118]

Írjuk át a termelési függvényt egy főre jutó tényezőkre:

$$y(t) = f(k(t)) = A \cdot \left[a \cdot (bk(t))^{\Psi} + (1-a)\cdot(1-b)^{\Psi}\right]^{1/\Psi},$$

[115] A fenti gondolatmenetet követve $h(t)$-re hasonló eredményre juthatunk.

[116] A CES függvények részletes elemzését lásd a Függelék 9.2. pontjában.

[117] A standard formulában általában nem szerepel a b paraméter. Ennek hiánya azt eredményezi, hogy a $K(t)$ és $L(t)$ részesedése a teljes kibocsátásból egyketted-egyketted, ha $\Psi \to -\infty$, ami egy Leontief-típusú termelési függvény. A mi fomulánkban azonban $\Psi \to -\infty$ esetén $K(t)$ és $L(t)$ részesedési aránya b illetve $1-b$. (Levezetést lásd a Függelék 9.2. pontjában.)

[118] Ennek belátásátra lásd például Zalai [1989] 4. fejezetét, 104-105.o.

Ha $\Psi \to -\infty$, akkor a termelési függvény tart a fix-arányos Leontief-féle termelési függvényhez, $Y(t) = \min\left[bK(t), (1-b)L(t)\right]$, ahol a helyettesítési rugalmasság $|\sigma| = 0$. Ha $\Psi \to 0$, akkor Cobb–Douglas termelési függvényt kapunk, $Y = CK^{\alpha}(t)L^{1-\alpha}(t)$, ahol C egy konstans és a helyettesítési rugalmasság $|\sigma| = 1$. Ha $\Psi = 1$, akkor a termelési függvény lineáris lesz, $Y(t) = A \cdot \left[abK(t) + (1-a)(1-b)L(t)\right]$, ahol a tényezők közti helyettesítési rugalmasság végtelen ($|\sigma| = \infty$), azaz a munka és a tőke egymás tökéletes helyettesítői. (Erről részletesebben lásd a Függelék 9.2. pontját.)

és határozzuk meg a tőke átlagtermékét és a határtermékét:

$$f(k(t))/k(t) = A\left[ab^{\Psi} + (1-a)(1-b)^{\Psi} k^{-\Psi}(t)\right]^{1/\Psi},$$

$$f'(k(t)) = Aab^{\Psi}\left[ab^{\Psi} + (1-a)(1-b)^{\Psi} k^{-\Psi}(t)\right]^{(1-\Psi)/\Psi}.$$

Mind a $f'(k(t))$ és mind $f(k(t))/k(t)$ pozitív és $k(t)$ csökkenő függvénye, minden $\Psi < 1$ értéke esetén. A dinamika tárgyalásához ismét tekintsük a már ismert neoklasszikus alapegyenletet:

$$\gamma_k(t) = sf(k(t))/k(t) - (n+\delta).$$

A növekedési ütem függvénye lesz a Ψ paraméternek, azaz a $K(t)$ és $L(t)$ helyettesítési rugalmasságának.

1. Tekintsük azt az esetet, amikor $\mathbf{0} < \mathbf{\Psi} < \mathbf{1}$, azaz amikor a helyettesítés nem tökéletes, de mégis jól helyettesíthető a két termelési tényező. Ekkor az átlag és határtermékek értéke $k \to \infty$ esetén:

$$\lim_{k\to\infty}[f'(k)] = \lim_{k\to\infty}[f(k)/k] = Aba^{1/\Psi} > 0$$
$$\lim_{k\to 0}[f'(k)] = \lim_{k\to 0}[f(k)/k] = \infty.$$

   Tehát $k \to \infty$ esetén, mind az átlag termék, mind a határtermék egy pozitív konstanshoz tart, és nem nullához. Ha tehát $0 < \Psi < 1$, akkor a határ- és átlagtermékek aszimptotikusan tartanak egy pozitív konstanshoz, hasonlóan, mint azt a 14. ábra mutatja[119]. Ez azt eredményezi, hogy ha a megtakarítási ráta elég nagy, azaz teljesül a $sAba^{(1/\Psi)} > (n+\delta)$ összefüggés, akkor a CES függvények ezen csoportja teljesíti az endogén növekedés feltételét:

$$\gamma_k^* = sAba^{(1/\Psi)} - (n+\delta) > 0,$$

   ahol a csillag a növekedési ütem az egyensúlyi voltára utal.

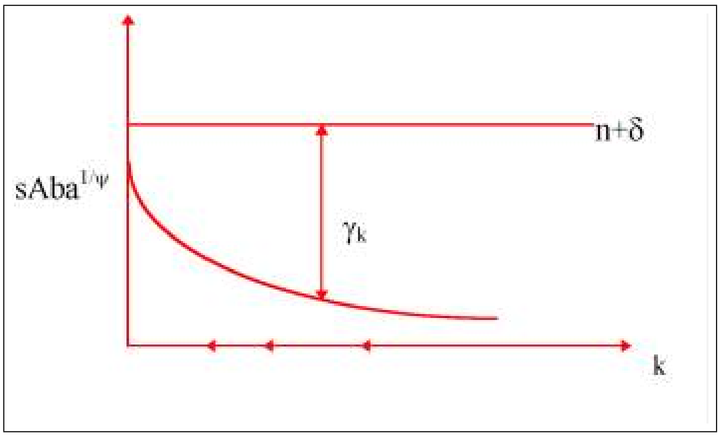
2. Ha azonban a tényezők közti helyettesítés alacsonyabb szintű, $\mathbf{\Psi} < \mathbf{0}$, akkor más eredményt kapunk.

$$\lim_{k\to\infty}[f'(k)] = \lim_{k\to\infty}[f(k)/k] = 0$$

$$\lim_{k\to 0}[f'(k)] = \lim_{k\to 0}[f(k)/k] = Aba^{1/\Psi} < \infty.$$

   Mivel az átlag- és határtermékekre a $k \to \infty$ esetén teljesül az Inada feltétel, így a CES függvények ezen csoportja nem mutat endogén növekedést.

[119] Az egyetlen különbség, hogy most az aszimptota nem az sA egyenes, hanem $sAba^{(1/\Psi)}$ konstans által adott vízszintes egyenes.



15. ábra. A CES termelési függvény $\Psi < 0$, és $sAba^{1/\Psi} < n + \delta$ esetén

> A $k \to 0$ esetén azonban nem teljesül az Inada feltétel, ami problémákat okozhat. Tegyük fel, hogy a megtakarítási ráta olyan alacsony, hogy $sAba^{(1/\Psi)} < (n + \delta)$ egyenlőtlenség fennáll. Ekkor az $sf(k(t))/k(t)$ függvény $n + \delta$ érték alól indul és csökken $k(t)$ növekedésével. Ezt mutatja a 15. ábra. Ebben az esetben a gazdaság folytonosan szűkülne és mind $k(t)$, mind $y(t)$ és $c(t)$ tartana 0-hoz.

Fontos kiemelni, hogy a CES függvények esetén a tőke átlagterméke, $f(k(t))/k(t)$, $k(t)$-nak mindig csökkenő függvénye minden $\Psi < 1$ értéke esetén, így γ_k is $k(t)$ csökkenő függvénye. Mint láthattuk ez elégséges ahhoz, hogy *a CES típusú termelési függvények biztosítsák a feltételes konvergencia létét,* ha létezik hosszú távú egyensúly.

Ha feltesszük, hogy létezik egyensúlyi megoldás, akkor annak környezetében a konvergencia sebbességet vizsgálva a következőt kapjuk[120]:

$$\beta = (x + n + \delta) \cdot \left[1 - a \cdot \left(\frac{bsA}{x + n + \delta}\right)^{\Psi}\right]. \tag{61}$$

Cobb–Douglas esetben, $\Psi = 0$, $a = \alpha$, a (61) képlet a már ismert $\beta = (1 - \alpha)(x + n + \delta)$ formára redukálódik. Ha $\Psi \neq 0$, akkor a konvergencia sebesség a (61) képlet alapján függ a megtakarítási hányadtól és a technológia szintjét meghatározó A paramétertől. Ha $\Psi > 0$, (jelentős a helyettesíthetőség a tényező között) akkor β csökken sA növekedésével, és fordítva, ha $\Psi < 0$. Így a konvergencia sebesség, β, csak a Cobb–Douglas esetben ($\Psi = 0$) független s-től és A-tól.

Összegzésként megállapíthatjuk, hogy a növekedéselméleti modellek a feltételes konvergencia szempontjából nem mutatnak egységes képet. Továbbá

[120] Levezetést lásd a 6.2. pontban.

az elemzésekből kitűnik, hogy a termelési függvény Cobb–Douglas kezelése — jóllehet számításainkat jelentősen leegyszerűsíti — számos tényezőről eltereli a figyelmet.

5.6. Konvergencia klubok és szegénységi csapda

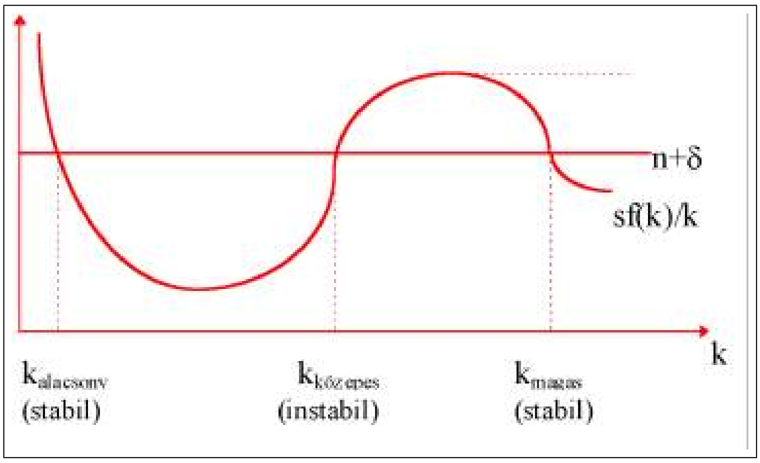
Az előző pontban olyan eseteket tárgyaltunk, amelyek egyrészt megkérdőjelezték a feltételes konvergenca létét, másrészt kritizálták a neoklasszikus modellt, hogy annak eredményei ellentmondanak a tapasztalati tényeknek, azaz annak, hogy a legfejletlenebb országok nem képesek a felzárkózásra. Ebben a pontban két olyan modellt mutatunk be, amelyek *egyrészt* igyekeznek magyarázni a tartós jövedelemegyenlőtlenségeket, *másrészt* rámutatnak a feltételes konvergencia elmélet szélesebb körű felhasználhatóságára.

5.6.1. Szegénységi csapda

Szegénységi csapda alatt azt az állapotot értjük, amikor egy gazdaságra olyan erők hatnak, amelyek nem engedik kimozdulni egy alacsony szintű egy főre jutó kibocsátási szintről (amely, mint látni fogjuk lehet stabil egyensúlyi állapot). Az első modell Lewis [1954] „big-push" modellje, amely a harmadik világ országaira koncentál, de a problémakör aktualitását mutatja, hogy mind a nyolcvanas években (Murphy–Shliefer–Vishny [1989]), mind a kilencvenes években (Todaro [1994]) felbukkan a témakör a fejlődő országok vizsgálatánál.

Az alapfeltevés az, hogy a tőkeállomány átlagterméke, $f(k(t))/k(t)$, a $k(t)$ növekedésével nem csak csökkenhet, hanem nőhet, mint ahogy ezt a 16. ábra mutatja. A 16. ábra a neoklasszikus alapegyenlet $\gamma_k = s \cdot f(k(t))/k(t) - (n + \delta)$ stacionárius megoldásait ábrázolja abban az esetben, amikor a tőke átlagterméke, $f(k(t))/k(t)$, ciklikusan változik az egy főre jutó tőkeállomány függvényében. Tegyük fel, hogy három stacionárius állapot (k_{alacsony}, $k_{\text{közepes}}$, k_{magas}) alakul ki. Tehát $s \cdot f(k(t))/k(t)$ függvény kezdetben szigorúan monoton csökkenő, majd monoton növekvő, végül ismét csökkenő. Az $s \cdot f(k(t))/k(t)$ és az $n + \delta$ függvények közötti távolság, az alapegyenletnek megfelelően, a rendszer növekedési ütemét határozza meg.

Mi magyarázhatja egy ilyen állapot kialakulását? Tegyük fel, hogy egy gazdaság egy alacsony szintről indul és termelésében elsődleges szerep jut a mezőgazdaságnak. A termelés növelése a tőke átlagtermékében csökkenő hozadék mellett valósul meg. Ez eredményezheti a k_{alacsony} egyensúlyi megoldást. Ha azonban egyre több erőforrást fordítanak az ipari termelésre, akkor a termelésnek lehet egy olyan (korai) szakasza, amely során a különböző „spillover" hatások és/vagy a „learning-by-doing" folyamatokon keresztül a gazdaság növekvő hozadékot realizál. Majd az ipari termelés fokozatos előtérbekerülése ismét a tőkeállomány csökkenő hozadékát vonja maga után. Ennek következtében a gazdaságban megvalósulhat egy magasabb, k_{magas}, termelési szintű egyensúlyi állapot, vagy (ahogy azt a szaggatot vonal jelzi) megvalósulhat egy endogén növekedési pálya.



16. ábra. A szegénységi csapda és a konvergencia klubok

Mint azt a 16. ábra is sugallja, a probléma kulcsa abban rejlik, vajon sikerül-e a gazdaságot átlendíteni az instabil egyensúlyon, $k_{\text{közepes}}$. Tegyük fel, hogy nem, azaz a gazdaság elér ugyan egy $k(t)$ ($k_{\text{közepes}} > k(t) > k_{\text{alacsony}}$) szintet, ekkor azonban $sf(k(t))/k(t) < n + \delta$ tehát

$$\gamma_k(t) = s \cdot f(k(t))/k(t) - (n + \delta) < 0, \tag{62}$$

azaz a rendszer dinamikája visszahúzó hatást fejt ki. Így a gazdaság vissza fog süllyedni a k_{alacsony} alacsonyabb egyensúlyi állapotba. Erre utal a csapda elnevezés. Ilyen esetben ugyanis feleslegesen fordítanak erőforrásokat a kitörésre, annak pozitív hosszú távú hatása elmarad.

Tegyük fel, hogy a gazdaságot akkora lökés éri, hogy $k(t) > k_{\text{közepes}}$ (de $k(t) < k_{\text{magas}}$) fog teljesülni. Ekkor $\gamma_k > 0$, azaz a gazdaságnak sikerült kitörni az alacsonyabb állapot vonzásából. Mint említettük ekkor két lehetőség állhat elő:

1. a gazdaság egy magasabb kibocsátási szintű *neoklasszikus egyensúly*i állapothoz (k_{magas}), fog konvergálni vagy
2. hosszabb rövidebb ideig endogén növekedést realizál. Ez úgy valósulhat meg, ha a tőke átlagterméke nem fordul át csökkenő szakaszba, hanem egy bizonyos szinten és idejig beáll egy adott szintre (lásd a 16. ábrán a vízszintes szaggatott vonalat). Ebben az esetben a növekvő átlaghozadékú szakaszban, az országok között nem a feltételes konvergencia, hanem éppen ellenkezőleg a divergencia fog megjelenni.

Vizsgáljuk meg röviden, milyen *gazdaságpolitikai vonatkozása* van ennek a modellnek! Ha elő akarjuk segíteni egy ország felzárkozását nem biztos hogy tetszőleges nagyságú egyszeri támogatás sikerrel jár. A modell szerint csak jelentős támogatás segítheti elő, hogy a gazdaság sikeresen ráálljon egy hosszú távú fejlődési útra. Tehát fokozatos segélyek juttatása nem feltétlenül eredményez tényleges elmozdulást az alacsony szintről, ha az nem ér el egy meghatározott kritikus tömeget.

Mit tehet egy ország a saját fejlődésének előmozdítása érdekében? A növekedési ütemre hatással van a népesség növekedési üteme, n. Minél alacsonyabb n, annál nagyobb lehet az egy főre jutó tőke (és azon keresztül a kibocsátás) növekedési üteme. Ez azonban csak a legszegényebb országok problémája, mint például India, Bangadlesh, és a közép-kelet-afrikai országok zöme. Az amortizációs kulcs csökkentése szintén kedvezőleg hathat a növekedési rátára. Ekkor ugyanis az adott nagyságú megtakarításból, a szervíz költség csökkenésével[121], egyre nagyobb összeg jut a nettó beruházás (új gépek termelésbe történő bevonása). Jellemzően azonban a δ a fejlett országokban alacsonyabb és a szegényebb országokban magasabb. Így adott nagyságú megtakarításból a szegényebb országok kevesebbet tudnak fordítani a tőkeállomány bővítésére, azaz a szegény területeken jellemzően hosszabb ideig használnak egységnyi tőkét. A legjelentősebb tényező a megtakarítási hányad, s.[122] Az s növekedése a $sf(k(t))/k(t)$ függvényt feljebb tolja, így növelve a k_{alacsony} értékét. Amennyiben sikerül oly mértékben megnövelni s-t, hogy a $\frac{sf(k(t))}{k(t)} \geq n + \delta$, akkor az a szegénységi csapdából való kitörést jelenti, illetve endogén növekedést biztosíthat. Vegyük észre hogy ezen tényezők rövid idejű kedvező alakulása is elősegítheti, hogy kiszakadjon a gazdaság az alacsony egyensúly vonzásából. A legkönnyebben azonban a megtakarítási hányad, azaz a hazai beruházások GDP-hez viszonyított értéke javítható, hiszen ez elméletileg megvalósítható rövidtávú nemzetközi kölcsönök igénybevételével.

Az itt bemutatott modell legjelentősebb kritikája, hogy kevés empirikus elemzés mutatja a növekvő hozadék létét.[123] Az itt vázoltak ezért sokkal inkább tekintendők kiérleletlen gondolatoknak, mint követendő útmutatásoknak.

5.6.2. Konvergencia klubok

A konvergencia klubok elméletének kidolgozása Danny Quah névéhez köthető. Quah empirikus elemzéseiben arra mutat rá, hogy az országok egy főre jutó nemzeti jövedelme nem egy kitüntetett értékhez tart, hanem az adatok egyfajta csoportosulást mutatnak. Quah [1993*a*] Markov láncok matematikai modelljével mutaja meg, hogy a σ konvergencia nem érvényesül, ezzel szemben a közepes jövedelmi szinttel rendelkező országok száma egyre csökken és a jövedelmek eloszlását egyre inkább egy magas és egy alacsony jövedelmi szint jellemzi. Ezzel szemben a jövedelmek eloszlásfüggvénye kétmóduszúvá vált. Ilyen esetet szemléltet a 10. ábra. Későbbi empirikus elemzéseiben Quah [1993*b*, 1996*a*] a

[121] A növekedéselméleti modellekben az amortizációs kulcs értelmezése eltér a hétköznapi megközelítéstől. Az amortizáció ugyanis a modellekben nem forrása az új tőkeállománynak, éppen ellenkezőleg a forrásokat szűkíti. Éppen ezért amortizáció helyett helyesebb lenne a régi gépek szervíz költségéről beszélni.

[122] Ahogy azonban arra Galor és Ryder [1989] rámutat változó megtakarítási hányad mellett is létezhet a szegénységi csapda.

[123] Habár az irodalomban található a növekvő hozadék bemutatására példa, lásd például Arthur [1990], ennek vizsgálati köre nem makro, hanem mikroszintű.

jövedelemeloszlás folytonos becslésére támaszkodva igazolja korábbi állításának robosztusságát. Továbbá Quah [1996*b*] rámutat arra, hogy a jövedelemegyenlőtlenségek szempontjából a nemzeti sajatosságoknál fontosabb a földrajzi tényező, azaz a földrajzi közelség a fejlettebb régióhoz.

A konvergencia klubok modelljének bemutatásához tekintsük ismét a 16. ábrát! A modell, hasonlóan a szegénységi csapda elmélethez azt emeli ki, hogy létezhet két eltérő szintű stabil egyensúlyi helyzet, k_{alacsony}, és k_{magas}. Azon országok, amelyek tőkeintenzitása nem haladja meg a $k_{\mathrm{közepes}}$ értéket idővel a k_{alacsony} egyensúlyhoz konvergálnak, mint ahogyan azt a (62) egyenlőtlenség elemzésénél már bemutattuk. Azon országok, amelyek tőkeintenzitása magasabb a kritikus $k_{\mathrm{közepes}}$ értéknél, azok a magasabb, k_{magas}, egyensúlyi ponthoz fognak tartani. A modell következtetése tehát, hogy az alábbi termelési szerkezet esetén a közepes jövedelmű országok számossága csökken és az országok két csoportba, klubba fognak sűrűsödni.

Quah [1993*b*] számításai alpján a gazdag országok 98 százalékban a következő időszakban is gazdagok maradnak, a szegények meg 95 százalékban szegények lesznek. Ezek alapján érvényesnek bizonyul az előző alpontban ismertetet szegénységi csapda problémája is.

6. A termelési függvény paraméterei

Az előző fejezetben arra mutattunk rá, hogy az elméleti modellek feltételezett termelési függvény szerkezete jelentősen befolyásolja a modellek növekedés-, és konvergencia elméleti eredményeit. Láthattuk, hogy a paraméterek különböző értékei más és más következtetésekhez vezetnek. Jogosan merül fel a kérdés, melyek a tényleges paraméter értékek. Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy az empirikus elemzések nem támasztják alá egyetlen paraméter rögzített értékét sem, azaz a rögzített termelési szerkezetet. Ezek alapján nem tűnik elfogadhatónak, hogy egy gazdaság hosszú távú fejlődését egyetlen rögzített termelési szerkezettel jellemezzük.

> *"... elsősorban a fejlődő, de bizonyos mértékig a fejlett országok tapasztalatai ..., egyre határozottabban arra az eredményre vezet, hogy a gazdasági fejlődés sokkal sokoldalúbb folyamat, mint ahogyan ezt — legalábbis az absztrakt közgazdasági elemzésekben — korábban feltételezték és hogy ez a kérdés ennek folytán semmiképpen sem korlátozható az akkumulációs folyamat elemzésére. ... az akkumuláció mellett egyrészt döntő fontossága lehet a műszaki fejlődésnek, másrészt azoknak a kulturális, emberi és szociológiai tényezőknek, melyek egyes esetekben megsokszorosítják a tisztán gazdasági erőfeszítések hatékonyságát, más esetekben pedig meggátolják ezek érvényesülését."*[124]

Mint azt az idézet is kiemeli a növekedés tényezőinek feltárása a hetvenes évekig nem fejeződött be. Az 1980-as évek második felétől újra az érdeklődés középpontjába kerülő, és napjainkig ott levő növekedéselméleti írások rámutatnak arra, hogy a növekedési tényezők kutatása máig élénken foglalkoztatja a közgazdászokat. Moses Abramovitz 1955. decemberében az Amerikai Közgazdasági Társaság közgyűlésén előadásában[125] nemcsak áttekinti az elmúlt időszak irányzatait, hanem egyben megadja a következő időszak (évtizedek) növekedéselméleti kutatási programját is. Megállapításait és észrevételeit az 1870-1953 közötti időszak empirikus eredményeire támaszkodva fogalmazta meg. Ezen időszak alatt az egy főre jutó kibocsátás megnégyszereződött, az egy főre jutó tőkeállomány megháromszorozódott, míg az egy főre jutó nyersanyag felhasználás csak 14 százalékkal növekedett. Tehát az egységnyi termelésre jutó fajlagos állóalap igény folyamatosan csökkent és a termelékenység növekedése körülbelül 250 százalékos volt. Abramovitz arra keresi a választ, hogy mi magyarázza és hozza létre ezt a termelékenység-növekedéset — amit a ráfordítások növelésével nem tudnak magyarázni —, amely nyilvánvalóan a gazdasági növekedés egyik legfontosabb forrása. Abramovitz szerint a magyarázat az alábbi három tényezőben keresendő:

1. növekvő volumenhozadék, azaz a termelés gyorsabban nő, mint a ráfordítások;

[124] A gazdasági növekedés feltételei. Szakolczai [1967] 7.o.
[125] Ennek írott változata Abramovitz [1956] 1956. májusában jelent meg.

2. a munkaerő minőségében és összetételében bekövetkezett változás;[126]

3. tudományos kutatás és fejlesztés.[127]

Az első ponttal a termelési függvénnyel foglalkozó irodalom; a második és a harmadik ponttal a technikai haladás irodaloma foglalkozik. Ez utóbbi elemzésével foglalkoztunk a 3. Fejezetben.[128] Ezért a továbbiakban csak az első pontra koncentrálunk, azaz a termelési függvényre és annak paramétereire.

Ebben a pontban vázoljuk a neoklasszikus modell azon hiányosságait, amelyek rámutatnak arra, hogy a gazdasági fejlődés, transzformáció leírásához szükség lenne a változatlan termelési függvény feltevéssel szemben, egy olyan termelési szerkezet kidolgozására, amelyben a termelési függvény szerkezete is fejlődik.

A termelési függvényre adott általános képlet, $Y(t) = F(K(t), L(t))$ csak általánosságban fejezi ki, hogy a termelés függ a felhasznált tőke és munka mennyiségétől.[129] Az $F(.)$ függvény konkrét alakjára több elképzelés született, amelyek közül a legáltalánosabban elterjedt a matematikus C.W. Cobb és a közgazdász P.H. Douglasról elnevezett Cobb–Douglas típusú termelési függvény.[130] Megalkotóik eredetileg a nemzeti jövedelem tényezőtulajdonosok közötti megoszlását kívánták elemezni az általuk ökonometriailag levezetett termelési függvény segítségével. Továbbá ennek segítségével kívánták igazolni a határtermelékenységi elv érvényességét. Tehát a termeléssel kapcsolatos összefüggéseket csak

[126] Abramovitz szerint a hagyományos tőkébe történő beruházás fogalmát ki kellene szélesíteni az egészségügyre, közoktatásra, szakképzésre, kutatásra fordított összegekkel.

[127] Abramovitz szerint a tudományos fejlesztések a növekedés közel 90 százalékát magyarázzák. Abramovitz azonban eltekintett a termelési szerkezet változásától. Így a termelési struktúra változásának hatása — amelyre mi dolgozatunkban koncentrálunk — nem válik el a tudományos fejlesztések (egyéb tényezők) hatásától.

[128] A második és haramadik pontokról lásd még például Aghion–Howitt [1998], magyar nyelven például Bessenyei [1995], Meyer [1995] és Valentinyi [1995] . A humántőke elemzéséhez a Jánossy-féle trendelmélet bemutatásánál még visszatérünk.

[129] Itt kell megjegyeznünk, hogy többen vannak akik kétségbe vonják, hogy makroökonómiában egyáltalán helyénvaló a termelési függvény használata. Lásd például Kaldor [1957] vagy Aukrust–Bjerke [1959].

> „Egészen más kérdés azonban, elvárhatjuk-e, hogy a makroanalízisben is létezzenek ugyanolyan egyszerű alakú és az időben változatlan termelési függvények. Még mélyebbre menve, ez a kérdés nemcsak a függvény alakját érinti." Aukrust-Bjerke [1959] 71.o.

Igaz később a függvény létezése mellett érvelnek:

> „Számítási eredményeink nem igen utalnak arra, hogy egy ilyen makrotípusú termelési függvény nem lehet hasznos hipotézis, inkább ennek ellenkezője látszik igaznak."

Mások ugyan elfogadják a termelési függvény használatát, de túlságosan aggregáltnak tartják.

> „... az institucionális és technológiai tényezők ... bele vannak fogalalva a beruházás nemzeti jövedelmi együtthatójába. ... oly aggregált és általános összefüggés formájában ..., amely elrejti, és ... elvonja a figyelmet azoktól a leglényegesebb és leginkább stratégiai jellegű tényezőktől, amlyeket elkülönítve kell figyelembe venni ..." William Kapp [1965] 11.o.

[130] Lásd például Cobb–Douglas [1928].

azért vizsgálták, hogy segítségükkel bepillantást nyerjenek a jövedelemelosztás folyamatába. A Cobb–Douglas típusú termelési függvények jövedelemelosztási aspektusa az idők során vesztett jelentőségéből, és egyre inkább a termelésben mutatkozó összefüggések feltárására haszálták fel. Alkalmazási területe jelentősen bővült a növekedéselmélet elterjedésével és formalizálódásával.

A Cobb–Douglas termelési függvényt ért kritikák igényt támaszottak új szerkezetű függvény kidolgozására. 1961-ben Arrow, Chenery, Minhas és Solow [1961] 19 ország 24 iparágának keresztmetszeti elemzése alapján egy új termelési függvényt szerkesztettek. Ez volt az úgy nevezett CES (konstans helyettesítési rugalmasságú)[131] függvény.

Mivel a CES (mint látni fogjuk) speciális esetként tartalmazza a Cobb–Douglas függvényt, így kiindulási pontként a CES alakot fogjuk tekinteni. Sok esetben a könnyebb számolás és tradicionális okok miatt azonban megtartjuk a Cobb–Douglas alakot.

6.1. A skálahozadék

30. Definíció. *Egy termelési függvényt tényezőiben h-ad fokon homogénnak nevezünk, ha egy $\lambda > 0$ skalár esetén a termelési tényezők mindegyikét λ-szorosára bővítve a kibocsátás λ^h-szorosára nő, azaz ha*

$$\lambda^h Y(t) = F(\lambda K(t), \lambda L(t)).$$

Ha $h = 1$, akkor a termelési függvény első fokon homogén[132] vagy másnéven konstans (skála) volumenhozadékú; ha $h > 1$, akkor a termelési függvény növekvő hozadékú; és ha $h < 1$, akkor csökkenő hozadékról beszélünk.

Ha például $\lambda = \frac{1}{L(t)}$, akkor konstans volumenhozadékról beszélünk, ha $\frac{Y}{L(t)} = F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right)$ azaz $F(K(t), L(t)) = Y(t) = L(t) \cdot F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right)$. Növekvő hozadék esetén, azaz amikor $h > 1$, $\frac{Y}{L(t)^h} = F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right)$

$$Y = F(K(t), L(t)) = L(t)^h \cdot F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right) > L(t) \cdot F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right). \quad (63)$$

Induljunk ki abból az esetből, amikor az $F(.)$ függvény konkrét alakja egy általános CES függvény:

$$Y = F(K(t), L(t)) = A\left\{a(bK(t))^{\Psi} + (1-a)[(1-b)L(t)]^{\Psi}\right\}^{\frac{h}{\Psi}}. \quad (64)$$

Az (64) kifejezésben a Ψ ($\Psi \neq 0$) a helyettesítési rugalmasságot meghatározó tényező[133], h a homogenitás foka, az a, és b paraméterek a termelési tényezők

[131] Constant elasticity of substitution, (CES). A szerzők vezetéknevének kezdőbetűi alapján is szokták nevezni: SMAC függvény.

[132] Nevezik még lineárisan homogénnek vagy állandó mérethozadékúnak is.

[133] A helyettesítési rugalmasság nagysága ekkor $\sigma = \frac{1}{1-\Psi}$, ami megmutatja, hogy ha a tényzőfelhasználás (jelen esetben K/L) aránya egy százalékkal változik, akkor hány százalékkal változik a tényezők határtermékeinek aránya (itt F_K/F_L).

részesedési mutatói[134], $A > 0$ a termelés szintjét meghatározó paraméter.

Átírva ezt azt egyenletet a Cobb–Douglas alakra kapjuk[135], hogy

$$Y = AK^{\alpha}(t)\, L^{\beta}(t),$$

ahol $\alpha = h \cdot a$, $\beta = h(1-a) = 1-\alpha$. Itt az első fokú homogenitás feltétele az, hogy $\alpha + \beta = 1$.

Az elméleti elemzésekben leggyakrabban azzal a feltevéssel találkozhatunk, hogy a vizsgált termelési függvény első fokon homogén. Cobb és Douglas, később Solow és mások[136] szívesen tételezték fel az konstans skálahozadékot, mert számításaikat jelentősen leegyszerűsítette. Modelljeik végső következtetésénél azonban elfelejtették elemezni a megszorítás következményeit. Az $\alpha + \beta = 1$ megkötés, kiegészítve a $0 < \alpha, \beta < 1$ kritériummal a szép számítási eredmények mellett még egy nagyon fontos jó tulajdonsággal bír. Ez pedig nem más, mint hogy az ilyen típusú termelési függvény teljesíti a mikroökonómiai csökkenő hozadék elvét. A termelési függvény jellemzőit tovább finomították az Inada feltételek, amelyek biztosították, hogy egy ilyen függvényt tartalmazó neoklasszikus modell egy és csak egy (nem triviális) hosszú távú egyensúlyt határozzon meg. Így a neoklasszikus modell elemzése során az az érzésünk támadhat, hogy a szép eredmények érdekében jelentős áldozatot kellett hoznunk. Ez az áldozat nem más, mint egyre messzebb kerülni a valóságtól.

Nem csodálkozhatunk tehát, hogy az 1960-as években a legtöbb empirikus vizsgálat is Cobb–Douglas termelési függvényből indult ki, és ezt próbálták a valós adatokhoz illeszteni. A problémát az jelentette, hogy az illesztések ellent mondtak a $\alpha + \beta = 1$ feltevésnek. Aukrust és Bjerke [1959] a norvég gazdaság tendenciáinak becsléséhez egy kibővített Cobb–Douglas függvényt használt:

$$Y = AK^{\alpha}(t)\, L^{\beta}(t)\, e^{\gamma t},$$

ahol az $e^{\gamma t}$ rész a technológia alakulását mutatja. Aukrust és Bjerke szerint az α és β összege lehet ugyan egyenlő eggyel, de jellemzően annál nagyobb vagy kisebb, iparágtól függően. Sőt megjegyzik, számításaik α-ra nagyon kicsi számot adnak[137] (α=0,203) azaz jelentősen különbözik a Solow modell alapján végzett számítások $\alpha = 1/3$-os értékétől.

Kuhilo [1962] egy alternatív termelési függvényt ír fel és becsül. Két lényeges szempontból különbözik modellje az eddigiektől. Egyrészt nem magát a termelési függvényt, hanem az abból levezetett növekedési ráták kapcsolatát vizsgálja.[138] Másrészt figyelembe veszi a föld és az import alakulásának hatását.

[134] Ha $\Psi \to -\infty$, akkor a tőke és munka részesedése rendre b, $1-b$ és nem ötven-ötven százalék lesz, mint lenne a b hiányában. Részletesebben lásd a Függelékben.

[135] A levezetést lásd a Függelékben.

[136] Lásd például Swan [1956], Griliches [1964] és Krelle [1965].

[137] Az 1900-39 és 1946-55-ös időszakra vonatkozó megfigylések alapján készült számítások az α=0,203 becsült értéket adták. Tehát a reáltőke 1 százalékos növekedése *ceteris paribus* 0,2 százalékkal növeli a nemzeti terméket.

[138] A kibocsátás növekedési rátája $\gamma_Y = \sum_{i=K,L,A,IM} \gamma_i\ e^{it}$. Ez az elemzés már közelebb van Swan [1956] modelljéhez, mint Solow elemzéséhez.

Kuhilo szerint a volumenhozadék nem szükségképpen állanó, lehet növekvő, lehet csökkenő. Kuhilo szerint a termelésnek a termelési tényezők által meg nem magyarázott növekménye jórészt a volumen növekvő hozadékénak tudható be. Kuhilo becslése α-ra nagyobb (α=0,471) a Aukrust–Bjerke becsült értékénél.[139]

Walters [1963] szerint a kényelmi okokból használt konstans volumenhozadék ellentétes nemcsak a tapasztalatokkal, hanem a közgazdaságtan évszázados hagyományaival is. Érvelését azzal támasztja alá, hogy a feldolgozó iparra végzett elemzések jellemzően 1-nél nagyobb hozadékot adnak, azaz a nagybani termelésből externális előny származik. Másrészt az iparágak fejlődése is sok esetben kedvezően hat más iparágak fejlődésére a külső megtakarítások folytán és így ezek az összefüggések az egész gazdaság vonatkozásában általában még hangsúlyosabbak, mint egyes iparágak esetén.[140] Walters szerint a termelés növekedésének 27-35 százalékét biztosítja a növekvő hozadék.[141] Walters (aki ugyanolyan termelési szerkezetet vizsgál, mint Aukrust és Bjerke) empirikus elemzése alapján a volumenhozadékról aggregált szinten a követekzőt állapítja meg:

> „A meglevő adatok alapján valószínűleg egy 1,3 körüli szám a legjobb becslés a függvény homogenitásnak fokáról.”[142]

Vannak azonban akik kétségbe vonják a növekvő hozadék makro szintű megvalósulását. Kuznetz [1961] szerint a technológia csak egyes iparágakon belül vagy csak nagy újítások idején hat, így nem biztosíthat növekvő hozadékot. Krelle [1965] szerint „a műszaki fejlődés egy részét a volumen növekvő hozadékának formájában mutatják ki”.[143] Krelle azoknak az empirikus kutatásoknak az eredményeit, melyek szerint a volumen hozadéka növekvő, rövid távra is kétségbe vonja, hosszú távra pedig tarthatatlannak tekinti.

Az 1980-as évek második felében újra előtérbe kerülő növekedéselmélet még tovább feszegeti ezt a problémakört. Paul Romer [1986], [1987] és Robert Lucas [1988] a humántőke beépítésével ismét teret engednek a növekvő volumenhozadéknak.

A volumenhozadékkal kapcsolatos kérdéskör még napjainkban is nyitott. Például David Romer [1996] megjegyzi[144], hogy létezhet növekvő skálahozadék egy gazdaságban, ha az nem elég nagy, azaz amelyben a gazdasági specializációban rejlő hozamok nincsenek teljesen kiaknázva. Felhívja azonban arra is a figyelmet, hogy a csökkenő hozadék is reális, amennyiben figyelembe vesszük a természeti erőforrásokat.

A konvergencia elméletek is az elemzés homlokterébe helyezték a skálahozadék problémakörét. Amint azt már az AK modell tárgyalásakor bemutat-

[139] Becslései két értéket adtak, α=0,304 illetve α=0,471. Ez utóbbit kapta a növekdési ráták alapján végzett becslés alapján. A kibocsátás teljes volumenrugalmassági koefficiense Kuhilonál körülbelül 1,381.

[140] Igaz Walters nem zárja ki a csökkenő hozadék jelenlétét sem. Erre példaként említi a bányászatot.

[141] Azaz szerinte a Solow-féle reziduumot ekkora értékkel csökkenteni kell.

[142] Walters [1963] 206.o. Walters becsült értékei: $\hat{\alpha}$ =0,167-0,231; $\hat{\alpha}+\hat{\beta}$=1,22-1,419.

[143] Krelle [1965] , in: Szakolczai [1967] 444.o.

[144] Romer [1996] 8.o.

tuk, a növekvő skálahozadék több problémát is okozhat. Könnyen belátható ugyanis, hogy például az AK modellben érvényesül a növekvő skálahozadék. Ha a $y(t) = f(k(t))$ intenzív formában megadott termelési függvény első fokon homogén, akkor a hozzá tartozó kétváltozós (mindkét változóban monoton növekvő) $F(.)$ termelési függvény növekvő skálahozadékú. Legyen

$$f(k(t)) \doteq F(k(t), 1) = F(\frac{K(t)}{L(t)}, 1).$$

Ekkor egy pozitív konstans $\lambda > 0$ esetén

$$f\left(\lambda \frac{K(t)}{L(t)}\right) = \lambda f(k(t)) = \lambda F(\frac{K(t)}{L(t)}, 1) = F(\lambda \frac{K(t)}{L(t)}, 1).$$

Legyen most $\lambda = L(t) > 1$, ekkor

$$f\left(L(t) \frac{K(t)}{L(t)}\right) = L(t) f(k(t)) = L(t) F(\frac{K(t)}{L(t)}, 1) = F(K(t), 1).$$

Így azt kapjuk az $F(.)$ függvény tényezőnkénti monotonitása miatt, hogy

$$F(K(t), L(t)) > F(K(t), 1) = L(t) F(\frac{K(t)}{L(t)}, 1),$$

ami a (63) egyenlet szerint éppen azt mutatja, hogy az $F(.)$ kétváltozós függvény növekvő skálahozadékú. Az AK modell esetén — amint azt korábban megmutattuk — a növekvő skálahozadék nem biztosít hosszú távú egyensúlyt, sőt a feltételes konvergencia sem valósul meg. Amint azt a 5.3.1. alpontban bemutattuk ebben az esetben csak a termelési függvény megfelelő átalakításával tudtuk bizosítani a feltételes konvergenciát.

Tehát egy gazdaság termelési szerkezetét leíró termelési függvény homogenitási foka döntő tényezőnek mutatkozik a gazdasági felzárkózás tekintetében. Erre további példaként említhetjük a már korábban bemutatott konvergencia klubbok és a szegénységi csapda modelleket, amely modellekben nélkülözhetetlen elem a (legalább időszakonként érvényesülő) növekvő hozadék, hiszen ezen modellekben ez biztosítja a több egyensúly létezését.

A témakörrel kapcsolatban kielégítő eredmény máig nem született. Az α paraméter meghatározására és nagyságrendjének vizsgálatára a tőkerészesedés elemzésénél még visszatérünk. Ennek az az oka, hogy, mint láttuk a Cobb–Douglas esetben az α paraméter nem más, mint a volumenhozadék és a részesedési paraméter szorzata $(\alpha = h \cdot a)$, így a két terület összekapcsolódik.

6.2. Helyettesítési rugalmasság

Ebben a pontban megmutatjuk, hogy ha a Cobb–Douglas termelési függvény helyett egy általános CES termelési függvény írja le a gazdaság szerkezetét, akkor a már kimutatott egyensúlyi szint és az ahhoz történő konvergencia sebessége is jelentősen módosul. Mint látni fogjuk a Cobb–Douglas alak számos tényező hatását elrejti (figyelmen kívül hagyja) így nem alkalmas általános érvényű következtetések levonására.

Továbbá bemutatunk még egy elméleti és egy empirikus problémát, amelyek a helyettesítési rugalmasság pontosabb figyelembevételére hívják fel a figyelmünket.

Először tekintsük a konvergenciára gyakorolt hatást a következő általános CES függvény esetében:

$$Y(t) = F(K(t), L(t)) = A\left\{a(bK(t))^{\Psi} + (1-a)\left[(1-b)L(t)\right]^{\Psi}\right\}^{\frac{h}{\Psi}}, \quad (65)$$

ahol Ψ $(0 \neq \Psi)$ a helyettesítési rugalmasságot meghatározó tényező, h a homogenitás foka, amit a továbbiakban egységnyinek $(h = 1)$ fogunk tekinteni, az a, és b paraméterek a termelési tényezők részesedési mutatói. Átírva a (65) egyenletet az egy főre jutó tényezőkre kapjuk:

$$y(t) = A\left[a(bk(t))^{\Psi} + (1-a)(1-b)^{\Psi}\right]^{\frac{1}{\Psi}}. \quad (66)$$

Legyen az exogén munkakiterjesztő technológiai haladás konstans növekedési üteme m, a népességé n, és legyen $\delta > 0$ amortizációs kulcs.

31. Állítás. *Egy a 2.2. pontban ismertetett neoklasszikus modellben ha a termelési függvény* (66) *szerkezetű, akkor*

$$\gamma_{\hat{k}}(t) \simeq -\beta\left[\ln\left(\hat{k}(t)/\hat{k}^*\right)\right],$$

ahol $\beta = (n+m+\delta)\left[1 - a\left(\frac{bsA}{n+m+\delta}\right)^{\Psi}\right]$.

Bizonyítás. Állandó megtakarítási hányad, s, esetén a neoklasszikus egyensúlyi, azaz a stacionárius pálya mentén az egy hatékony munkaegységre jutó tőkeállomány $\left(\hat{k}(t)\right)$ idő szerinti deriváltjának zérusnak kell lennie:

$$\frac{d\hat{k}(t)}{dt} = sf\left(\hat{k}(t)\right) - (n+m+\delta)\hat{k}(t) = 0.$$

$$\frac{d\hat{k}(t)}{dt} = sA\left[a\left(b\hat{k}(t)\right)^{\Psi} + (1-a)(1-b)^{\Psi}\right]^{\frac{1}{\Psi}} - (n+m+\delta)\hat{k}(t) = 0.$$

Innen $\hat{k}(t)$ növekedési rátája, $\gamma_{\hat{k}}$:

$$\gamma_{\hat{k}} = sA\left[ab^{\Psi} + (1-a)(1-b)^{\Psi}\hat{k}(t)^{-\Psi}\right]^{\frac{1}{\Psi}} - (n+m+\delta) = 0,$$

$$\gamma_{\hat{k}} = sA\left[ab^{\Psi} + (1-a)(1-b)^{\Psi}e^{-\Psi\ln\hat{k}(t)}\right]^{\frac{1}{\Psi}} - (n+m+\delta), \quad (67)$$

ahol kihasználtuk, hogy $e^{\ln \hat{k}(t)} = \hat{k}(t)$. A neoklasszikus növekedéselméleti modell feltevései miatt létezik egy $\hat{k}^*$ egyensúlyi érték, amelyre:

$$ab^{\Psi} + (1-a)(1-b)^{\Psi} \hat{k}^{*-\Psi} = \left[\frac{n+m+\delta}{sA}\right]^{\Psi},$$

$$\hat{k}^* = (1-a)^{\frac{1}{\Psi}}(1-b)\left\{\left[\frac{n+m+\delta}{sA}\right]^{\Psi} - ab^{\Psi}\right\}^{\frac{-1}{\Psi}}. \tag{68}$$

Az egyensúly környezetében elvégezve egy log-lineáris közelítést megkapjuk, hogy milyen tényezők befolyásolják az egyensúlyhoz történő konvergencia sebességét, amelyet β-val jelölünk. Belátható ugyanis, hogy

$$\gamma_{\hat{k}}(t) = \frac{d\ln\left(\hat{k}(t)\right)}{dt} \simeq -\beta\left[\ln\left(\hat{k}(t)/\hat{k}^*\right)\right], \tag{69}$$

azaz a log-linearizát formából azt kapjuk, hogy β határozza meg, milyen sebességgel tartunk egy $\hat{k}(t)$ értéktől az $\hat{k}^*$ egyensúly felé. A konvergencia sebesség meghatározásához, mint azt a (69) egyenlet mutatja, a növekedési ráta $\ln\left(\hat{k}(t)\right)$ szerinti deriváltját kell meghatároznunk. A számítás elvégzéséhez induljunk ki a (67) egyenletből.

$$-\beta = \frac{d\gamma_{\hat{k}}}{d\ln\left(\hat{k}\right)}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{\Psi} sA\left\{ab^{\Psi} + (1-a)(1-b)^{\Psi} e^{-\Psi \ln \hat{k}(t)}\right\}^{\frac{1}{\Psi}-1} \cdot \\ &\quad \cdot \Psi\left[(1-a)(1-b)^{\Psi} e^{-\Psi \ln \hat{k}(t)}\right] \end{aligned} \tag{70}$$

Az egyensúlyi állapot környezetében a konvergencia sebesség meghatározásához tekintsük a (70) kifejezést a (68) által meghatározott egyensúlyi pontban.

$$-\beta = \frac{d\gamma_{\hat{k}}}{d\ln\left(\hat{k}\right)}\,|_{\hat{k}^*}$$

$$\begin{aligned} &= -sA\left\{ab^{\Psi} + (1-a)(1-b)^{\Psi}(1-a)^{-1}(1-b)^{-\Psi}\left\{\left[\frac{n+m+\delta}{sA}\right]^{\Psi} - ab^{\Psi}\right\}\right\}^{\frac{1}{\Psi}-1} \cdot \\ &\quad \cdot\left[(1-a)(1-b)^{\Psi}(1-a)^{-1}(1-b)^{-\Psi}\left\{\left[\frac{n+m+\delta}{sA}\right]^{\Psi} - ab^{\Psi}\right\}\right] \\ &= -sA\left\{\left[\frac{n+m+\delta}{sA}\right]^{\Psi}\right\}^{\frac{1-\Psi}{\Psi}} \cdot \left\{\left[\frac{n+m+\delta}{sA}\right]^{\Psi} - ab^{\Psi}\right\} \\ &= -sA\left\{\frac{n+m+\delta}{sA} - ab^{\Psi}\left[\frac{n+m+\delta}{sA}\right]^{1-\Psi}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -(n+m+\delta)+sAab^{\Psi}\left[\frac{n+m+\delta}{sA}\right]^{1-\Psi} \\
&= -(n+m+\delta)+asA\frac{n+m+\delta}{sA}b^{\Psi}\left(\frac{sA}{n+m+\delta}\right)^{\Psi} \\
&= -(n+m+\delta)+a(n+m+\delta)\left(\frac{bsA}{n+m+\delta}\right)^{\Psi}.
\end{aligned}$$

Tehát a konvergencia sebesség

$$\beta=(n+m+\delta)\left[1-a\left(\frac{bsA}{n+m+\delta}\right)^{\Psi}\right]. \tag{71}$$

■

A (71) alapján láthatjuk, hogy a konvergencia sebesség számos tényező együttes függvénye.

Speciális esetben, ha egy Cobb–Douglas termelési függvényünk van ($Y(t)=K(t)^{\alpha}L(t)^{1-\alpha}$), akkor $\Psi=0$, és $a=\alpha$. Ekkor a konvergencia sebesség a következő kifejezésre egyszerűsödik: $\beta=-(1-\alpha)(n+m+\delta)$. Mint láthatjuk ez az eset sok tényező szerepét elfedi.

Felvetődhet a kérdés, hogy milyen érvek hozhatók fel a helyettesítési rugalmasság (illetve ezen keresztül a Ψ) elemzésének fontosságára. A következő két alpontban elméleti (6.2.1.) és empirikus (6.2.2.) érveket is bemutatunk. Az *első* (elméleti) példa arra vonatkozik, hogy a növekedéselmélet más területei is már megfogalmazták a rugalmassági mutatók modellezését. Azaz a neoklasszikus elméleti modellek és eredményeik csak akkor érvényesek, ha a priori feltevésekkel élünk a termelési függvényre. A *második* (empirikus) példa azt mutatja be, hogy egy gazdaság szerkezete jelentősen képes befolyásolni a gazdaság egészére érvényes helyettesítési rugalmasságot, ami jellemzően nem egységnyi lesz.

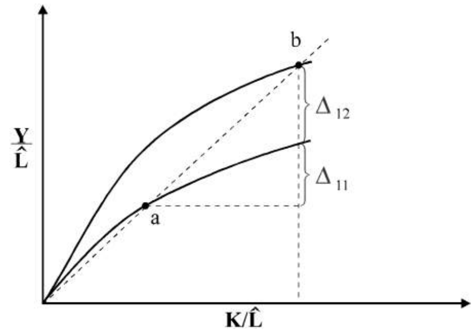
6.2.1. Egy elméleti példa

A termelési függvények állandósága a helyettesítési-, és tényező rugalmasságok állandóságát eredményezi. A következő példa[145] arra mutat rá, hogy a technikai haladás és a rögzített rugalmassági tényezők kapcsolata milyen kétértelműséget rejt magában.

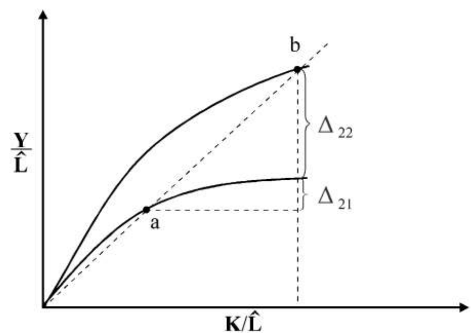
Tekintsük az 17. és 18. ábrákat. Az ábrák az eredeti termelési függvényekben (amelyek áthaladnak az \`a" ponton) bekövetkezett technikai haladást ábrázolják.

Tegyük fel, hogy mindkét esetben a termelési függvény helyettesítési rugalmassága kisebb egynél, a technikai haladás munkamegtakarító és a görbék meredeksége az \`$a$" és a \`b" pontokban azonos. Továbbá tegyük fel, hogy a technikai haladás eredményeképpen az \`$a$" pontból a \`b"-be jutunk. Ekkor a teljes egy hatékony munkaegységre jutó kibocsátás változás két részre bontható:

[145] A példa forrása Nelson–Winter [1982] 200.o.



17. ábra. Termelési függvény nagy helyettesítési rugalmasság esetén



18. ábra. Termelési függvény alacsony helyettesítési rugalmasság esetén

a Δ_{i1} eltérés megfelel az egy hatékony munkaegységre jutó tőkeállomány változásából eredő technológiai váltásnak (azaz a termelési függvény nem mozdul), a Δ_{i2} eltérés pedig a technológiai fejlődésnek tudható be. A 18. ábrán azonban a kisebb helyettesítési rugalmasság miatt kevesebb termelékenység-növekedés tulajdonítható a növekvő hatékony tőkeintenzitásnak (Δ_{21}) és nagyobb a technológiai váltásnak (Δ_{22}). A problémát az jelenti, hogy a priori feltevések nélkül nem tudjuk megmondani, hogy melyik helyzettel állunk szemben. Tehát fontos lenne modellezni a helyettesítési rugalmasságok alakulását is, ami nem más, mint Ψ paraméter.

6.2.2. Empirikus példák

Mint azt Mátyás[146] is kiemeli a Cobb–Douglas termelési függvény az eredeti formájában még olyan nyers, hogy az $Y(t)$, $K(t)$, $L(t)$ között még a technológia adott szintje mellett sem képes leírni a makrogazdaság viszonyait. A $K(t)$ és $L(t)$ adott mennyisége mellett is $Y(t)$ eltérő nagyságú lehet. Ezt az eltérést okozhatja például a beruházások ágazati megoszlása, a tőke kihasználtsági foka. Az ország gazdasági fejlettsége, a tőke ezt tükröző korösszetétele is befolyásolja $Y(t)$, $K(t)$ és $L(t)$ viszonyát, így „... a fejlett, vagy előrehaldott gazdaságok a tőke és munka adott inputjával többet képesek termelni, mint fejlődésükben visszamaradott gazdaságok”.[147]

> „A tőke és a munka termelési rugalmasságai a Cobb–Douglas-féle termelési függvényben a tőke-munka arány időbeli változásai során állandóak. A valóságban változniuk kell, állandóságuk azon alapul, hogy nagyságukat trendértékként határozták meg. Ez esetben azonban igen nagy körültekintést igényel a vizsgált időszak kiválasztása. Ügyelni kell arra, hogy ne legyenek benne olyan évek, amelyekben a gazdasági folyamatok lényegesen eltérnek az átlagos fejlődési úttól”.[148]

Douglas számításai egyszerűsítése érdekében feltételezte, hogy a termelési függvény elsőfokon homogén. Így csak az egyik kitevőt számította ki két idősor révén. Egy két dimenziós regressziós elemzést úgy mutatott be, mint egy háromdimenziós korreláció igazolását. Feltevését azonban bizonyítani kellett volna. Három idősor között kellett volna korrelációt keresnie. A feladat ekkor az lenne, hogy a háromdimenziós tér összes síkja közül ki kellene választani a ponthalmazhoz legjobban illeszkedőt. A legszorosabb illesztés ezuttal is a legkisebb négyzetek módszere révén történik. Három idősor révén Douglas nem próbált bizonyítani. Márpedig a bizonyítás során súlyos probléma vetődik fel, amire először Horst Mendershausen hívta fel a figyelmet.[149] Mendershausen a három idősor között majdnem teljesen tökéletes multikollinearitást talált. Az $\ln Y(t)$, $\ln K(t)$ és $\ln L(t)$ idősorában több, mint egy lineáris kapcsolat áll fenn,

[146] Az alábbiakban felhasználtam Mátyás [1993] 268-75.o.
[147] Ui.268-9.o.
[148] Mátyás [1999] 309.o.
[149] Mendershausen [1938] 147.o.

így nem létezik eme változók egyetlen meghatározott szisztematikus viszonya. Háromtengelyes koordináta-rendszerben ábrázolva a $\ln Y(t)$, $\ln K(t)$ és $\ln L(t)$ idősorát, azok gyakorlatilag egy vonalban helyezkednek el, így a regressziós felület nagymértékben meghatározatlan. Ennek oka két paraméterre vezethető vissza: az egyik a homogenitás foka (ezzel már foglalkoztunk); a másik a tényezők helyettesítési rugalmassága. Az alábbiakban csak ez utóbbit vizsgáljuk.

Vita zajlott le a helyettesítési rugalmasság Cobb–Douglas termelési függvényben feltételezett értéke körül. Arrow, Chenery, Minhas és Solow [1961] bírálták azt a tulajdonságot, miszerint a helyettesítési rugalmasság a technológiai lehetőségektől függetlenül egységnyi. 19 ország 24 iparágának összehasonlítás révén kísérletet tettek arra, hogy a helyettesítés rugalmasságát iparáganként nemzetközi szinten keresztmetszet-elemzéssel kiszámítsák. Mivel a tőke és jövedelem nagyságára csak kevés ország és iparág adata állt rendelkezésükre, ezért a szerzők ezek mellőzésével igyekeztek a kívánt számítást elvégezni. Az alapgondolatuk a következő volt:

A helyettesítési rugalmasság a tényezőárak százalékos változása, és a tőke-munka arány százalékos változása közötti viszonyt fejezi ki. Az egy főre jutó termelés viszont a tőke-munka arány függvénye. A szerzők a tőke-munka arány változása helyett az egy főre eső termék változását vették, amit a munkabér változásával hoztak kapcsolatba. Az egy főre jutó nettó termék és a munkabér százalékos változása közötti viszonyt igyekeztek meghatározni, azaz $\ln \frac{Y(t)}{L(t)}$-nek a $\ln w(t)$ szerinti deriváltját jelölték b-vel. Kimutatták, hogy b állandó skálahozadék esetén a helyettesítés rugalmasságával, σ-val azonos

Hiszen ha

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = y(t) = F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right) = f(k(t)),$$

akkor a határtermékekre kapjuk

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = f'(k(t)),$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = f(k(t)) - k(t) f'(k(t)).$$

Ekkor a technikai helyettesítési határrátája $\frac{\partial Y/\partial K}{\partial Y/\partial L}$ és a tényező közti helyettesítési rugalmasság[150]:

$$\sigma = \left[\frac{-d\left(\frac{K}{L}\right)}{d\left(\frac{\partial Y/\partial K}{\partial Y/\partial L}\right)} \frac{\frac{\partial Y/\partial K}{\partial Y/\partial L}}{\frac{K}{L}}\right]^{-1} = \frac{-f'(k(t))\left[f(k(t)) - k(t) f'(k(t))\right]}{k(t) f''(k(t)) \cdot f(k(t))}.$$

A 2.2.1. alpont alapján tudjuk, hogy a tökéletes verseny fététele mellett a határtermékek megegyeznek a hozadékokkal, azaz

$$f'(k(t)) = r(t), \tag{72}$$

[150] Az egyenlőség belátását lásd a Függelékben.

$$f\left(k\left(t\right)\right)-k\left(t\right)f'\left(k\left(t\right)\right)=w\left(t\right). \tag{73}$$

Deriváljuk a munka határtermékét azaz a (73) kifejezést a bér szerint:

$$\frac{d\left(f\left(k\right)-kf'\left(k\right)\right)}{dw}=f'\left(k\left(t\right)\right)\frac{dk}{dy}\frac{dy}{dw}$$

$$-k\left(t\right)f''\left(k\left(t\right)\right)\frac{dk}{dy}\frac{dy}{dw}-f'\left(k\left(t\right)\right)\frac{dk}{dy}\frac{dy}{dw}=1. \tag{74}$$

A (72) alapján

$$\frac{dk}{dy}=\frac{1}{f'\left(k\left(t\right)\right)},$$

a (74) átrendezésével pedig kapjuk, hogy

$$\frac{dy}{dw}=-\frac{f'\left(k\left(t\right)\right)}{k\left(t\right)f''\left(k\left(t\right)\right)}. \tag{75}$$

Ekkor a (75) egyenlőség felhasználásával az $y\left(t\right)$ $w\left(t\right)$ szerinti rugalmassága:

$$\frac{d\ln y}{d\ln w}=\frac{dy}{dw}\frac{w\left(t\right)}{y\left(t\right)}=\frac{-f'\left(k\left(t\right)\right)\left[f\left(k\left(t\right)\right)-k\left(t\right)f'\left(k\left(t\right)\right)\right]}{k\left(t\right)f''\left(k\left(t\right)\right)\cdot f\left(k\left(t\right)\right)}=\sigma\left(t\right). \tag{76}$$

Cobb–Douglas termelési függvény esetén a munka határterméke ($Y\left(t\right)=K^{\alpha}\left(t\right)L^{1-\alpha}\left(t\right)$)

$$\frac{\partial Y}{\partial L}=\left(1-\alpha\right)\frac{Y\left(t\right)}{L\left(t\right)}=w\left(t\right).$$

Ebből logaritmizálva kapjuk:

$$\ln\left(\frac{Y\left(t\right)}{L\left(t\right)}\right)=-\ln\left(1-\alpha\right)+b\ln w\left(t\right),$$

ahol $b=1$ a Cobb–Douglas esetben. Tekintsük b-t paraméternek. A b azt mutaja meg, hogy a munkabér egy százalékos változása hány százalékos változást idéz elő az egy főre jutó kibocsátásban. Amint azt a (76) mutatja ez nem más, mint a helyettesítési rugalmasság.

Az empirikusan becsült regresszió:

$$\ln\left(\frac{Y\left(t\right)}{L\left(t\right)}\right)_{ij}=\ln a_i+b_i\ln w\left(t\right)_{ij}+\varepsilon_{ij}$$

ahol $i=1,2,...,I$ az iparágak, $j=1,2,...,N$ az oszágok indexe, az $a=\left(1-\alpha\right)^{-1}$ és ε a hibatag. Minhas [1963] eredményei azt mutatják, hogy b értéke a huszonnégy iparág közül tizennégynél 90 vagy ennél is nagyobb százalékos konfidencia-szinten szignifikáns mértékben különbözik egytől.[151]

[151] A becslésekkel kapott helyettesítési rugalmasságok nagysága 0,7211 (tejipar) és 1,0114 (színesfémgyártás) közé estek. A becsült b paraméter értéke csak három iparág esetén haladta meg a 0,92-es értéket.

„Ez elégséges bizonyíték lehet ahhoz, hogy el kelljen vetnünk azt a feltevést, hogy a helyettesítési elaszticitás értéke minden iparágban egy. Nem meglepő, hogy a fix együtthatójú termelési függvény még kevésbe megfelelő. ... Így mind a Cobb–Douglas, mind a fix együttahtójú termelési függvényt el kell vetni."[152]

Victor Fuchs [1963] azonban azt igyekszik igazolni, hogy Minhas elmélete nem helyénvaló és hogy adatai — Arrow, Chenery, Minhas és Solow adatai ugyanazok — sem indokolják a CES-függvény alkalmazását. Szerinte indokolatlan az a feltevés, hogy ugyanabban az időpontban ugyanaz a termelési függvény tartozik a föld valamennyi elmaradt és fejlett országához. Szerinte sokkal helyesebb az a kiindulás, hogy más termelési függvény érvényes az országok egyik és másik csoportjára. Ha viszont külön termelési függvényt illeszt a kétféle csoporthoz, vagy ha bevezet egy eltolódási tényezőt, akkor a fejlett és fejlettlen országok csoportjára külön-külön meghatározott helyettesítési elaszticitás értéke már nem lesz egytől szignifikáns mértékben különböző. Ez azt jelenti, hogy az összefüggéseket kielégítő módon le lehet írni külön a fejlett országokra és külön a fejlettlen országokra felírt Cobb–Douglas termelési függvény segítségével. Fuchs azonban óvatosan fogalmaz a kapott eredménnyel kapcsolatban:

„Nem állítom azt, hogy az egységnyi elaszticitásra vonatkozó Cobb–Douglas feltételezés korrekt, csak azt, hogy az Arrow, Chenery, Minhas és Solow által közölt adatok nem cáfolják meg azt megfelelő módon."[153]

Leontief [1969] tanulmányában hangsúlyozza, hogy a különböző fejlettségű országok elsősorban a munkatermelékenységét illetően különböznek egymástól. A hatékonyabb felszerelést a gazdaságilag kevésbé fejlett ország is megvásárolhatja. Ezekben az országokban a szűk keresztmetszetet elsősorban a szakképzett munkaerő jelenti.[154] Tehát nem lehet, még adott tőke-munka arány esetén sem azonos a helyettesítés határrátája a különböző országok azonos iparágaiban. Nem lehet azonos ennek következtében a különböző országok azonos iparágainak isoquant alakja. Amennyiben a vizsgálatba bevont országok iparágai között technikai fejlettség színvonalában is különbség mutatkozik, az sem hagyja változatlanul a helyettesítési viszonyokat. Minél nagyobb a mechanizáció és az automatizáció foka egy iparágon belül, annál merevebb a tényezők közötti arány, annál meredekebb az isoquant, annál kisebb a helyettesítés rugalmassága. Ha tehát az automatizáció foka az idő előrehladtával nő egy iparágon belül, akkor a helyettesítési rugalmasság, $b(t) = |\sigma(t)| = \frac{1}{1+\Psi(t)}$, a sorozatgyártás során csökken, $\frac{db(t)}{dt} < 0$, azaz $\frac{d\Psi(t)}{dt} > 0$. Tehát az automatizáció hatásaként Ψ értéke jellemzően növekvő egy iparágon belül.

[152]Minhas [1963] in: Szakolczay [1967] 190-191.o.
[153]Fuchs [1963] 438.o.
[154]Ezt a megállapítást támasztja alá Romer [1996] (136.o.), aki szerint a technikai haladásból eredő növekvő hozadék nem játszik szerepet az országok fejlettségi kölönbségeiben szemben a humántőke nagyságával.

Az 1967-ben Yao-chi Lu által felállított *VES* függvény[155] feladja a helyettesítés állandó rugalmasságának feltevését. A helyettesítés ruagalmassága a termelési függvény eme típusában az átlagos tőke-munka aránnyal áll függvényszerű kapcsolaban, és vele együtt változik. A VES függvény regressziós egyenlete:

$$\ln\left(\frac{Y(t)}{L(t)}\right) = \ln a + b\ln w(t) + c\ln\frac{K(t)}{L(t)} + \varepsilon(t),$$

ahol $\varepsilon(t)$ a hibatag az a, b és c konstansok és c mutatja a tényezők közötti helyettesítési rugalmasság nagyságát. Amint azt Lu–Fletcher [1968] megmutatja az új függvény a CES függvénycsaládnál általánosabb forma, amely $c = 0$ esetben a CES formát adja. Lu–Fletcher az USA 17 ágazatára elvégzett empirikus vizsgálata nem támasztotta alá a $c = 0$ nullhipotézist. A VES függvényformával kapcsolatban azonban két jelentős probléma említhető:

- A VES függvény nehezen általánosítható kettőnél több inputtényezőre.
- Mivel a VES a paraméterekben nemlineáris, így csak nehezen becsülhető.

6.3. A tőkerészesedés

A következő három alpontban megmutatjuk, hogy már/még állandó skálahozadék esetén is $(h = 1)$ α $(= ha)$

- számos empirikus kritika fogalmazható meg a részesedési paraméter standard értékével szemben,

továbbá hogy a részesedési paraméter nagysága (változása) jelentős hatást gyakorol:

- a hosszú távú egyensúlyi pályára;
- és a hosszú távú pályához történő felzárkózás ütemére.

6.3.1. A részesedési paraméter empirikus kritikája

A II.Világháborút követő elméletek főként a fejlett országok gazdasági növekedésére koncentráltak. Ehhez a meglévő mikorökonómiai elméleteket és eszközöket használták. Azok a kísérletek, amelyek arra irányultak, hogy az alacsony és magas jövedelmű — azonos termelési függvénnyel rendelkező — országok között, egy munkásra jutó kibocsátás különbségeit magyarázzák, hamar arra a következetésre jutottak, hogy a kibocsátás akkor fog nőni, ha nő a tőke-munka rátája. Ez abból a tapasztalati tényből következett, hogy egy magas jövedelmű országnak egyszerűen több az egy munkásra jutó tőkeállománya, mint egy alacsonyabb jövedelműnek. Később az empirikus vizsgálatok kudarcai[156] szükségessé tették

[155] Variable elasticity of substitution, VES. Lásd Lu–Fletcher [1968].

[156] Amint azt már korábban elemeztük a Solow modell empirikus vizsgálata során a maradéktag (reziduum) magyarázó ereje 90%-hoz közeli volt. Tehát pusztán a tőkefelhalmozás csak kis mértékben volt képes magyarázni a jövedelemkülönbségeket.

más tényezők figylembevételét is, amelyekről úgy tűnt, hogy hatással vannak a termelékenység alakulására.

A Solow modell későbbi, módosított változatai már két forrást mutatnak arra, hogy mi magyarázhatja az országok közötti, illetve egy ország időbeli fejlettségének a különbségét. Az *egyik* a már említett egy főre jutó tőkeállomány alakulása, azaz a tőke akkumuláció, a *másik* a munka termelékenységének javulása, azaz a technikai haladás[157]. Mint láthattuk a Solow modellben az egy főre jutó tényezők növekedését csak az utóbbi, azaz a technikai haladás befolyásolta és csak ez biztosíthatta a tényezők egyenletes növekedését. Így érthető okok miatt a tőkefelhalmozásnak csak mérsékelt szerep jut: csak a hosszú távú egyensúly nagyságára van hatása, de a növekedés ütemére nincs. A Solow modell következtetése tehát az, hogy ha az a részesedési tényező, amennyivel a tőke részesedik a kibocsátásból egy durva közelítése annak, hogy mennyiben járul hozzá a kibocsátáshoz, akkor az országok eltérő fizikai tőke felhalmozása csak kis részét képes magyarázni a jelentős jövedelemkülönbségeknek.

Két szemléletes példával illusztráljuk a fentieket:

1. „Az Egyesült államok egy főre jutó GDP-je mintegy hússzorosa Kenya hasonló mutatójának. Ha a munka és a tőke termelési rugalmasságának ismert kétharmad-egyharmad értékeit vesszük alapul, akkor a Cobb-Douglas termelési függvény felhasználásával az $Y/L = 20 = (K/L)^{1/3}$ összefüggés áll fenn, melyből az egy főre jutó tőke (K/L) értéke $20^3 = 8000$. Tehát az Egyesült Államokban az egy főre jutó tőkének 8000-szer magasabbnak kellene lennie, mint Kenyában. A becslések szerint ez az arány 25. A becslés, mégha durva is, többszörös nagyságrendi eltérést mutat."[158]

   Tehát az egy főre jutó fizikai tőke különbségek messze elmaradnak a jövedelem különbségektől (GDP/fő mutatók alapján).[159]

2. A másik szemléletes példa (ahogyan arra Lucas [1990] rámutat), hogy ha technikai haladás nélkül, pusztán a tőkemennyiségek eltérésével kívánjuk magyarázni a kibocsátások különbségét, akkor az óriási eltéréseket eredményezne a tőke hozadékokban (profitrátában), azaz a kamatlábakban. Ha ugyanis a piacokon tökéletes verseny van, akkor a tőke hozadéka, a kamatláb megyezik az amortizációval (δ) csökkentett tőke határtermékével $(\ f'(k(t)))$. Tegyük fel, hogy a termelést egy Cobb–Douglas termelési függvény írja le, intenzív formában felírva $y = f(k(t)) = k(t)^{\alpha}$. Ekkor a

[157]Belátható, hogy neoklasszikus termelési függvény esetén, ha létezik stacionárius megoldás, akkor minden technikai haladás felírható munkakiterjesztő technikai haladásként. Lásd a Függelék 9.3. pontjában.

[158]Ligeti [1994] 367.o.

[159]Hasonló megállapításra jut például Romer [1996] 23.o. Az USA egy főre jutó kibocsátása közel tízszerese a száz évvel azelőttinek. Ez az egy főre jutó tőkeállományokban ezerszeres eltérést kívánna meg, holott a tőkeállomány (ahogy azt Kaldor [1961] is kiemelte, a kibocsátással közel azonos ütemben változott) csak körülbelül tízszeresére gyarapodott az elmúlt évszázad alatt. Mégha az $\alpha = 1/2$ lenne is, ami messze magasabb, mint amit a statisztikai adatok mutatnak, akkor is százszoros tőkeeltérést kellene tapasztalnunk.

határtermék és kibocsátás között a következő összefüggés áll fenn:

$$f'(k(t)) = \alpha k(t)^{\alpha-1} = \alpha y(t)^{(\alpha-1)/\alpha}$$

Ekkor a határtermék kibocsátás szerinti rugalmassága $-(1-\alpha)/\alpha$, hiszen:

$$\begin{aligned}\varepsilon_y^{f'} &= \frac{df'(k)}{dy}\frac{y(t)}{f'(k(t))} \\ &= \alpha\frac{\alpha-1}{\alpha}\frac{y^{(\alpha-1)/\alpha}(t)}{y(t)}\frac{y(t)}{\alpha y^{(\alpha-1)/\alpha}(t)} \\ &= \frac{\alpha-1}{\alpha} = \frac{-(1-\alpha)}{\alpha}\end{aligned}$$

Ha most az $\alpha = 1/3$, akkor az egy főre jutó kibocsátásban egy tízszeres eltérés a határtermékben százszoros eltérést kívánna meg.[160] Sőt mivel a $r = f'(k(t)) - \delta$, így a kamatlábakban az eltérés még nagyobb. Az empirikus elemzések azonban csak kis hozambeli eltéréseket mutatnak például a pénzügyi eszközök esetén. Ha a szegényebb országokban százszor nagyobb lenne a várható hozam, mint a gazdagokban, akkor ez óriási csábítás lenne a tőkeáramlás számára. Ekkora különbség képes lenne elhomályosítani az esetleges tőkepiaci tökéletlenségeket, kormányzati beavatkozásokat és más bizonytalansági tényezőket. Ekkor jeletős tőkeáramlásnak lennénk tanúi a legszegényebb országokba. A helyzet azonban nem ez.

Ha tehát a tőke kitevőjének (hozamának) arányában járul hozzá a kibocsátáshoz, akkor önmagában az egy főre jutó tőkeállomány-eltérés nem ad elégséges magyarázatot a kibocsátások jelentős különbségére.

A Solow modell azonban sem nem definiálja, sem nem modellezi elégségesen a munka termelékenységének alakulását, $\tau(t)$-t. A $\tau(t)$-ről ugyanis nem tudjuk, miért éppen úgy alakul ahogy, illetve figyelmen kívül hagy számos tényt, mint például, hogy egyes országokban az új technológiához jutás könnyebb, mint máshol, illetve, hogy térségenként eltérő lehet a technikai haladás üteme. Továbbá $\tau(t)$ nemcsak a termelékenység változásért felelős. A $\tau(t)$-be tartozik például a munkaerő tudásának alakulása, a tulajdonviszonyok átrendeződése, az infrastruktúra minősége, illetve a munkakultúra minősége. A $\tau(t)$ tehát sokkal inkább nevezhető egy gyűjtő paraméternek (reziduumnak), mintsem a munkatermelékenység mérőszámának.

A problémának egy másik megközelítése lehet azonban, hogy a tőkeakkumuláció sokkal fontosabb, mint ahogy azt a Solow modell mutatja. Például, ha a tőkefelhalmozásnak valamilyen pozitív extern hatása van. Ekkor azonban a tőke sokkal nagyobb szerepet kap a termelés alakulásában, mint azt az egyéni hozama (kitevője) mutatja.[161] Tehát a tőke kitevője nem mutatja kellő mértékben a kibocsátás időbeli alakulásának jelentőségét, így szükség és igény van pontosabb meghatározására, modellezésére.

[160] Ekkor ugyanis $\frac{-(1-\alpha)}{\alpha} = -2$, így $f'(k(t)) = 10^{-2} = \frac{1}{100}$. Tehát a tízszer gazdagabb országban a határterméknek 100-szor kisebbnek kellene lennie.

[161] Ennek elemzésére lásd például Romer [1996] 3. fejezetét, ahol Romer elemzi a tőketranszferek szerepét a nyitott gazdaságok keretei között.

6.3.2. Részesedési paraméter és egyensúly

Tekintsük át[162], milyen hatással van a megtakarítási hányad, s, a hosszú távú egyensúlyi pályára, $\hat{y}^*$. Ehhez határozzuk meg a két tényező rugalmassági mutatóját a hosszú távú egyensúlyi pálya mentén. Tudjuk, hogy a neoklasszikus modell egyensúlyi pályája mentén minden n, m és δ esetén fennáll:

$$\frac{d\hat{k}(t)}{dt} = s \cdot f\left[\hat{k}^*(s,n,m,\delta)\right] - (n+m+\delta)\cdot \hat{k}^*(s,n,m,\delta) = 0, \tag{77}$$

ahol $\hat{k}^*$ az egy hatékony munkaegységre jutó tőkeállomány egyensúlyi szintje. Deriváljuk ezt az egyenlőséget s szerint.

$$sf'\left(\hat{k}^*\right)\frac{\partial \hat{k}^*}{\partial s} + f\left(\hat{k}^*\right) = (n+m+\delta)\frac{\partial \hat{k}^*}{\partial s},$$

$$\frac{\partial \hat{k}^*}{\partial s} = \frac{f\left(\hat{k}^*\right)}{(n+m+\delta) - sf'\left(\hat{k}^*\right)}. \tag{78}$$

Tovább felhasználva a $\hat{y}^* = f\left(\hat{k}^*\right)$ összefüggést[163] kapjuk, hogy

$$\frac{\partial \hat{y}^*}{\partial s} = f'\left(\hat{k}^*\right)\frac{\partial \hat{k}^*}{\partial s}.$$

Ebbe az egyenletbe beírva a (78) egyenletet kapjuk:

$$\frac{\partial \hat{y}^*}{\partial s} = \frac{f'\left(\hat{k}^*\right)f\left(\hat{k}^*\right)}{(n+m+\delta) - sf'\left(\hat{k}^*\right)}$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt $s/\ \hat{y}^*$-gal, hogy megkapjuk a rugalmassági mutatót, és a (77) egyenletből felhasználva az $s = (n+m+\delta)\,\hat{k}^*/f\left(\hat{k}^*\right)$ helyettesítést kapjuk:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{y}^*}{\partial s}\frac{s}{\hat{y}^*} &= \frac{f'\left(\hat{k}^*\right)f\left(\hat{k}^*\right)}{(n+m+\delta) - sf'\left(\hat{k}^*\right)}\frac{s}{f\left(\hat{k}^*\right)} \\
&= \frac{f'\left(\hat{k}^*\right)(n+m+\delta)\,\hat{k}^*}{f\left(\hat{k}^*\right)\left[(n+m+\delta) - \frac{(n+m+\delta)\hat{k}^*}{f\left(\hat{k}^*\right)}f'\left(\hat{k}^*\right)\right]} \\
&= \frac{f'\left(\hat{k}^*\right)\hat{k}^*}{f\left(\hat{k}^*\right)\left[1 - \frac{\hat{k}^*}{f\left(\hat{k}^*\right)}f'\left(\hat{k}^*\right)\right]}.
\end{aligned}$$

[162] Az elemzés forrása Romer [1996] 20-21.o.
[163] Ahol tudjuk, hogy $k^*(s,n,m,\delta)$.

Mivel a $f'\left(\hat{k}^*\right)\hat{k}^*/f\left(\hat{k}^*\right)$ nem más, mint a termelési függvény tőke szerinti rugalmassága, amit jelöljünk $\alpha_K\left(\hat{k}^*\right)$-val, ezért

$$\frac{\partial \hat{y}^*}{\partial s}\frac{s}{\hat{y}^*} = \frac{\alpha_K\left(\hat{k}^*\right)}{1-\alpha_K\left(\hat{k}^*\right)}. \tag{79}$$

Ha tökéletes verseny jellemzi a piacokat az egyensúlyi pálya mentén, akkor a tőke részesedése a termelésből $f'\left(\hat{k}^*\right)\hat{k}^*$. Ennek a kibocsátásból való részesedése $f'\left(\hat{k}^*\right)\hat{k}^*/f\left(\hat{k}^*\right) = \frac{F_{\hat{K}}K(t)}{Y(t)}$, azaz $\alpha_K\left(\hat{k}^*\right)$. A legtöbb országban a fizikai tőke megközelítő részesedése $\alpha_K\left(\hat{k}^*\right) = 1/3$. Ebben az esetben a megtakarítási ráta 10 százalékos növelése (például 20%-ról 22%-ra) a hosszú távú növekedési szint 5%-os változását eredményezi. Míg ha a megtakarítást 50%-kal növeljük, akkor is $\hat{y}^*$ csak 25%-os változását eredményezi. Tehát jelentős megtakarítási hányad változásnak is csak mérsékelt hatása van az egyensúlyi szintre az egyensúlyi pálya mentén.

Ösztönösen azt mondhatnánk, hogy a kis $\alpha_K\left(\hat{k}^*\right)$ esetén a megtakarítási ráta változás csekély hatást gyakorol a kibocsátásra. Ennek két okát találhatjuk. Először ekkor az $sf\left(\hat{k}(t)\right)$ függvény erősen hajlik, így eltolásával nyert új egyensúlyi pont közel lesz a kiindulóállapothoz. Másrészt a kis $\alpha_K\left(\hat{k}^*\right)$ azt jelenti, hogy a $\hat{k}^*$ változása csak kis mértékben hat $\hat{y}^*$-ra.

Hasonlóan számítsuk ki $\frac{\partial \hat{y}^*}{\partial(n+m+\delta)}\frac{(n+m+\delta)}{\hat{y}^*}$ rugalmassági mutatót.[164] Ez nem más, mint $-\alpha/(1-\alpha)$.

Mankiw, Romer, és Weil [1992] becsülték a következő egyenletet az országok keresztmetszeti adataiból:

$$\ln \hat{y}^* \simeq a + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln s - \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(n+m+\delta).$$

A pontos specifikációjuk:

$$\ln \hat{y}_i = a + b\left[\ln s_i - \ln(n_i+m+\delta)\right] + \varepsilon_i,$$

ahol az i index az országindex. Az $\hat{y}$ a reál GDP/munkaképes korú lakosság 1985-ben. Az s a magán és állami szektor beruházási hányadának 1960-85 közötti átlaga. Az n értékek a munkaképeskorú lakkosság növekedési üteme. A

---

[164] $\frac{\partial \hat{y}^*}{\partial(n+m+\delta)}\frac{(n+m+\delta)}{\hat{y}^*} = f'\left(\hat{k}^*\right)\frac{\partial \hat{k}^*}{\partial(n+m+\delta)}\frac{(n+m+\delta)}{f\left(\hat{k}^*\right)}$.

ahol $\frac{\partial \hat{k}^*}{\partial(n+m+\delta)} = \frac{\hat{k}^*}{sf'\left(\hat{k}^*\right)-(n+m+\delta)} = \frac{1}{(n+m+\delta)}\frac{\hat{k}^*}{f'\left(\hat{k}^*\right)\hat{k}^*/f\left(\hat{k}^*\right)-1}$ ahol kihasználtuk az $s = (n+m+\delta)\,\hat{k}^*/f\left(\hat{k}^*\right)$ a (77) egyenletből. Így a rugalmasság $\varepsilon = f'\left(\hat{k}^*\right)\frac{1}{(n+m+\delta)}\frac{\hat{k}^*}{f'\left(\hat{k}^*\right)\hat{k}^*/f\left(\hat{k}^*\right)-1}\frac{(n+m+\delta)}{f\left(\hat{k}^*\right)} = \frac{\alpha_K}{\alpha_K-1} = \frac{-\alpha_K}{1-\alpha_K}$.

kapott eredmény:

$$\begin{aligned}\ln \hat{y}_i &= 6{,}87 + 1{,}48\,[\ln s_i - \ln(n_i + 0{,}05)] \\ & \qquad (0{,}12) \quad (0{,}12) \\ \bar{R}^2 &= 0{,}59,\end{aligned}$$

ahol a zárójelben a standard hibákat tüntettük fel. Mind a két paraméter szignifikáns, és jelentős részben magyarázza az országok közötti jövedelemkülönbséget. Ebben az értelemben a modell sikeres.

A problémát az jelenti, hogy a $\hat{b}$ becsült értékéből a $\hat{\alpha}$ becsült értéke 0,6 (0,02-es standard hibával[165]). Így a megtakarítási hányad és népesség növekedési ütem reál kibocsátásra gyakorolt hatása sokkal nagyobb, mint azt a Solow modell az α (tőkerészesedés) esetén becsüli. Ez az eredmény inkonzisztens azzal, hogy α egyharmadhoz közeli tartományba essen. Tehát ez a becslés megerősíti azt a megállapítást, hogy a Solow modell számos jeletős tényezőt nem vesz figylembe, amelyek befolyásolják a kibocsátás alakulását.

6.3.3. Részesedési paraméter és konvergencia

A konvergencia sebesség becslésénél is akkor kapunk jó eredményeket, ha α nem az egyharmados értéket veszi fel, hanem a α=0,75 körülit. Amint azt a 4.3. pontban elemzetük a konvergencia sebesség

$$\beta = (1 - \alpha)\,(n + m + \delta)\,.$$

Ha az n, m, δ értékei rendre[166] 0,01, 0,02 és 0,05 akkor $\beta \approx$0,02 értékhez α=0,75 adódik. Az eddigi elemzések mellőzték α pontos modellezését, pusztán feltették, hogy értéke 1/3-ál nagyobb, mondván, ekkor $K(t)$ a szélesebb értelemben vett (fizikai és humán) tőkét jelenti. Minden esetre látható, hogy α nagysága nemcsak a hosszú távú egyensúlyi jövedelemszintet (ha létezik ilyen) befolyásolja, hanem az egyensúlyhoz történő konvergencia sebességét is.

[165]Ennek belátására lásd például Romer [1996] 33.o.

[166]Amint azt korábban a 4.3. pont 86. lábjegyzetében Romer [1996] alapáján feltételeztük.

7. Endogén termelési függvény

7.1. Érvek az endogén termelési függvény mellett

A növekedéselméleti modellek arra helyezik a hangsúlyt, hogy milyen kapcsolat mutatható ki a jövedelem (GDP) és a különböző termelési tényezők között. Az első elemzésekben jellemzően két termelési tényező jelent meg: a tőke és a munka. Az első postkeynesi (Harrod és Domar) és neoklasszikus (Solow, Swan) modellek csak a tőkefelhalmozásnak a jövedelemre gyakorolt hatását vizsgálták. A későbbi modellek két szempontból bővítették az elemzések tárgykörét: *egyrészt* bővítették a figyelembe vett termelési tényezők körét (technikai haladás, humántőke, K+F, természeti erőforrások); *másrészt* igyekeztek a korábbi elemzések több exogén paraméterét (mint például a népesség növekedési üteme, megtakarítási ráta, amortizációs kulcs, technikai haladás növekedési üteme) endogenizálni vagy legalábbis hatásmechanizmusukat jobban megérteni. Mindezen elemzések azonban támaszkodtak egy nagyon fontos implicit feltevésre. Ez a feltevés az volt, hogy a változók tetszőleges alakulása és a tetszőlegesen hosszúnak tekintett időtáv érintetlenül hagyja a termelés szerkezetét. *A termelési függvény* tehát mindvégig *exogén* tényező maradt.

Az alábbiakban azon az elméletileg jóval kevésbé kidolgozott területen teszünk lépéseket, ahol a vizsgált időhorizonton a termelés szerkezete, azaz a termelési függvény változhat. Következésképpen megengedjük és feltesszük, hogy a technikai haladás képes megváltoztatni a termelési függvény azon elemeit is, amelyeket eddig konstans paraméterként kezeltünk. Mi az elemzésünkben a tőkekitevő konstans voltát oldjuk fel. A tőkekitevő endogenizálásán keresztül ragadjuk meg a technikai haladás potenciális hatását a termelés szerkezetére.

Uzawa szerint a leggyakrabban használt neoklasszikus termelési függvény a Cobb–Douglas temelési függvény. Az általa felírt alakja azonban eltér a megszokott alaktól abban, hogy a tőke-, és munkakitevő az idő függvénye.[167]

$$F\left[K(t), L(t), t\right] = A(t) K^{\alpha(t)}(t) L^{1-\alpha(t)}(t), \; A(t) > 0, \; 0 < \alpha(t) < 1.$$

Sajnos későbbi elemzéseiben nem tér ki az $\alpha(t)$ elemzésére. Hozzájárulhatott ehhez az az eredmény, hogy ha α konstans, akkor teljesül a 24. Állítás, azaz a Hicks és Harrod-féle technikai haladás egyszerre jeleníthető meg egy termelési függvénnyel. A továbbiakban Uzawa általános termelési függvényéből indulunk ki. Azt annyival bővítjük, hogy megengedjük, hogy a kitevő a termelési tényezők közvetlen függvénye lehessen.

32. Definíció. *Endogén termelési függvénynek nevezem az olyan*

$$Y(t) = F\left[K(t), L(t), t\right] = A(t) K^{\alpha}(t) L^{1-\alpha}(t)$$

termelési függvényt, amelyben α közvetlenül függ a termelési tényezőktől és az időtől, azaz

$$\alpha = \alpha\left[K(t), L(t), t\right].$$

[167] Lásd Uzawa [1961] 118.o.

A definíció adta keretben először áttekintjük, hogy milyen érvek szólnak az endogén termelési függvény elemzése mellett.

> „A probléma megítélésem szerint főként abból adódik, hogy oly módon történt a humántőke bekapcsolása a növekedéselméletbe, hogy közben *változatlan maradt a termelési függvény alapkonstrukciója*: a tényezők közötti kapcsolatok jellegére vonatkozó feltételezések. ... *Állítható, hogy a növekedéselmélet centrális problémája továbbra is a termelési függvény adekvált szerkezete: lényegében a technikai haladás mechanizmusa.* Ha e problémára sikerül az eddigieknél jobb megoldást találni, megnyílik az út az új növekedéselmélet átfogó kidolgozása előtt.”[168]

Ahogy az idézet is sejteti, a növekedéselmélet egyik jelenkori legnagyobb kihívása, hogy miként lehet modellezni a gazdaság termelési szerkezetének változását, illetve annak vizsgálata, hogy ez milyen új eredményekre vezethet. Kézenfekvőnek tűnik, hogy ha a legfejlettlenebb országok gazdasági átalakulását vagy akár csak a közép-kelet-európai országok gazdasági transzformációját kívánjuk elemezni, akkor nem tekinthetünk el a gazdaságnak a globális átalakulásától. Hiszen például egy fejletlen, alapvetően mezőgazdasági ország iparosodása többet kíván, mint a tőkeállomány növekedése vagy a legfejlettebb technológiák megszerzése. Hasonlóan a gazdasági transzformáción átesett országok jelentős gazdasági visszaesése sem csupán a fizikai és humántőke állomány visszaesését jelenti. A gazdaságtörténetben általánosan is tapasztalható, hogy az új szerkezetre történő átállást a korábbi eszközök erőteljes leépítése kíséri (előzi meg). Így összhatásában az első időben általában visszaesést okoz.

Itt említhetjük meg azt a folyamatot is, amely során egy fejlett ipari ország fokozatosan egyre magasabb szintű automatizáltságra áll rá. Ezen esetekben alapvetően két mechanizmus egészíti ki a tőkeakkumuláció folyamatát:

- Egyrészt az egységnyi kibocsátásban a gépek és az automatizáltság előtérbe kerülésével megnő a fizikai tőkeállomány szerepe;
- Másrészt a technikai haladás (léte vagy importja és igénye) növeli a humántőke szerepét egységnyi kibocsátásra vetítve. A bonyolult gépsorok továbbfejlesztése nélkülözhetetlenné teszi a K+F tevékenységek bővülését. (A szakképzetlen munkaerő gazdasági jelentősége tehát csökken.)

Amint azt a 5. Fejezetben bemutattuk, a növekedéselméleti modellek különböző termelési szerkezetek esetén más és más eredményekre vezettek a jövedelem hosszú távú pályájával és az ahhoz történő potenciális felzárkózással kapcsolatban. Itt utalhatnuk vissza a *szegénységi csapda* vagy a *konvergencia klubok* modelljeire. Ezen modellekben a több egyensúlyi pont létének feltétele az volt, hogy a termelési függvény bizonyos szakaszaiban növekvő hozadékot realizáljanak. Ezek a modellek is a gazdasági átalakulás folyamatával magyarázták, hogy

[168] Simon [1999] 429.o.

miként alakulhat ki ilyen hosszú távú termelési szerkezet. Legfontosabb üzenetük számunkra az lehet, hogy a gazdaságok hosszú távú fejlődését várhatóan nem írhatja le egy rögzített termelési függvény.

A 6. Fejezetben megmutattuk, hogy az empirikus elemzések sem támasztották alá a standard termelési függvények paramétereinek konstans voltát. Fuchs [1963] elemzése például azt sugallja, hogy az eltérő fejlettségű gazdaságok helyettesítési rugalmassága a fejlettség fokával változik. Lu–Fletcher [1968] *VES* termelési függvénye is azt modellezi, hogy egy gazdaság szektoraiban eltérő a tényezők közötti helyettesíthetőség foka. Tehát ha egy gazdaságban szerkezetváltás megy végbe bizonyos szektorok dominánsá válnak és ennek következtében a helyettesíthetőség is változni fog. Leontief [1969] szerint a mechanizáció és automatizáció fokának növekedése egy iparágon belül a tényezők közötti helyettesíthetőség csökkenését eredményezi. Kuhilo [1962] és Walters [1963] szerint a növekvő skálahozadék általánosan jellemző egy gazdaságra, ha bővítjük a figyelembe vett termelési tényezők körét. Romer [1996] kiemeli, hogy a gazdaságoknak a fejlődés korai szakaszaikban — amelyben a specializációban rejlő hozamok még nincsenek kiaknázva — elképzelhető a növekvő skálahozadék.

A tőkerészesedés elemzése során is láthattuk, hogy nincs egyértelmű érték amelyet az empirikus modellek alátámasztanának. A 3. táblázat röviden összefoglalja az áttekintett vizsgálatok eredményeit. Jellemzően a korábbi becslések kisebb, a későbbi becslések nagyobb értéket határoznak meg a tőkerészesedés értékére. Ebben döntő szerepet játszhat a tőketényező meghatározása. Ha $K(t)$ a tágabban értelmezett tőkét jelenti, akkor a humántőke termelésben betöltött relatív szerepének bővülése növeli a tőke részesedését. Romer [1996] a (79) kifejezéssel megmutatja, hogy a részesedési paraméter kapcsolatot teremt a hosszú távú egyensúly, $\hat{y}^*$, és megtakarítási ráta, s, között:

$$\frac{\partial \hat{y}^*}{\partial s}\frac{s}{\hat{y}^*} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

Konstans α esetén a megtakarításoknak 1 százalékos növekedése ugyanakkora százalékos növekedést okozna $\hat{y}^*$-ban, a gazdaságilag fejlettlen és a gazdaságilag fejlett országok esetén.

„A tőke és a munka termelési rugalmassága a Cobb–Douglas-féle termelési függvényben a tőke-munka arány időbeni változásai során állandó. A valóságban azonban változniuk kell, állandóságuk az elméletben azon alapul, hogy trendértékként számították ki őket 24 évre.”[169] Aukrust–Bjerke [1959] felhívják a figyelmet arra, „hogy néhány paraméter nagyon erősen függ attól az időszaktól, amelynek alapján számítottuk.”[170]

Az empirikus eredmények alapján arra a következtetésre juthatunk, hogy

[169] Mátyás [1999] 309.o.

[170] Aukrust–Bjerke [1959] 69.o. A 3. táblázatban Aukrust–Bjerke számításai közül csak az 1900-1955-ös időszakra becsült értékét tüntettük fel. A második világháború előtti időszakra α értékére 0,6-0,7-es adatokat kaptak, de megjegyzik: „a termelés tőke szerinti rugalmasságának szórása ér el viszonylag nagy értéket. 95%-os szignifikancia szinten nem vethetjük el azt a feltevést, hogy $\alpha = 0$.” Ui.:69.o.

3. táblázat.
A jövedelem tényezők szerinti parciális rugalmassági együtthatóinak becsült értéke

	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\alpha}+\hat{\beta}+\hat{\gamma}$
Douglas [1957]	0,33	–	–	1
Aukrust–Bjerke [1959]	0,203	0,763	–	0,966
Kuhilo [1962]	0,47	0,761	0,149	1,381
Walters [1963]	0,167-0,231	0,993-1,189	–	1,22-1,419
Mankiw–Romer–Weil [1992]	0,6	–	–	1
Romer [1996]	0,75	–	–	1
Tarján [1998]	0,82-0,91	–	–	1

Az $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ és $\hat{\gamma}$ rendre a jövedelem tőke, munka és föld szerinti termelési rugalmasságának becsült értéke.

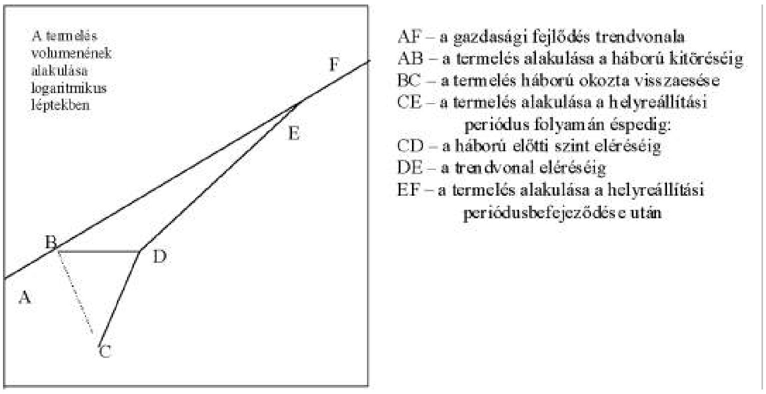
- vagy az eddigi számítások alul becsülik a tőkeállomány termelésben betöltött szerepét,
- vagy az eddigi termelési függvények nem nyújtanak kellő teret a gazdasági szerkezet időbeli alakulásának elemzésére.

A következő pontokban bemutatásra kerülő modellek ez utóbbi területen — azaz a termelési szerkezet változásának elemzése terén — tesznek lépéseket. Rámutatunk, hogy a gazdaság fejlődésével párhuzamosan módosítanunk kellene a termelési függvényt.

A *Jánossy-féle trendelméletből* indulunk ki (7.2.). A Jánossy modell két szempontból fontos a számunkra. Egyrészt kiemeli a humántőke kardinális szerepét a gazdasági felzárkózás folyamatában. Másrészt bemutatja, hogy a gazdasági felzárkózás pályája töréseket tartalmaz. Ezt követően ismertetjük Barro–Sala-i-Martin [1995] endogén növekedési modelljét (7.3.). Megmutatjuk, hogy ez a modell sem képes magyarázatot adni a felzárkózási folyamat töréseire, jóllehet a humántőke, mint termelési tényező megjelenik benne.[171] Tehát a modellek módosítására van szükség. A modell kiegészítését Tarján Tamás [1998, 2000] elemzésén keresztül mutatjuk be (7.4.).[172] Eredményei két szempontpól érdekesek számunkra. *Egyrészt* összeköti a Jánossy-féle trendvonalakat a modern növekedéselmélettel. A Tarján modell már jó empirikus illeszkedést mutat, azaz követni tudja a felzárkózási pálya törését. *Másrészt* azért érdekes, mert a termelési függvény α paramétere (a tőkeállomány kitevője), mint endogén paraméter jelenik meg. Így Tarján cikkének számunkra legfontosabb eredménye

[171] A korábban elemzett MRW modell szintén nem ad magyarázatot a felzárkózási folyamat töréseire. Amint azt az 5.4. pontban megmutattuk a felzárkozás törésmentesen egyenletes ütemben törénik.

[172] Tarján említett két cikke kis eltérésektől eltekintve lényegében azonos tartalmú. Tarján [1993], [1994] már több cikkében igyekezett választ adni arra a kérdésre, hogy a gazdasági fejlődés trendjéről szóló Jánossy-féle elméletet az utóbbi három évtized világgazdasági történései megerősítik-e vagy sem, és ha igen, milyen mértékben.



19. ábra.
A háborút követő helyreállítási periódus jellegzetes alakulásának vázlatos rajza

az, hogy még a gazdaságilag legfejlettebb országok II. Világháború utáni egyenletes fejlődése sem írható le egy neoklasszikus (rögzített paraméterű) termelési függvénnyel. Problémát jelent azonban, hogy a paraméterek közgazdaságilag nehezen értelmezhető értékeket vesznek fel. Ezt követően bemutatjuk Simon György [1998, 1999, 2001] modelljét, amely a technikai haladás megjelenítéséhez endogén termelési függvényt használ (7.5.). Az utólsó pontban az endogén termelési függvény elméleti elemzésével foglalkozunk (7.6.). Megmutatjuk, hogy az ilyen függvényforma olyan hosszú távú stabil pályát adhat, amely mentén exogén technikai haladás hiányában is megvalósul az egy főre jutó kibocsátás pozitív növekedési üteme.

7.2. A Jánossy-féle trendelmélet

Jánossy [1966, 1971, 2001] megvizsgálva a fejlett ipari országok II. Világháború utáni helyreállítási periódusát, arra a következtetésre jutott, hogy a helyreállítás „nem akkor ér véget, amikor a termelés ismét eléri a háború előtti szintet, hanem csak akkor, amikor a termelés volumene újból megfelel a gazdasági fejlődés trendvonalának."[173] Ezt követően olyan pályán halad, mintha egyáltalán nem is lett volna háború. Jánossy sematikusan felvázolja a helyreállítási periódus jellegzetes folyamatát. Ezt mutatjuk be a 19. ábrán.

Az AF egyenes a gazdaság hosszú távú növekedési pályáját jelzi. Az egyenes meredeksége utal arra, hogy hosszú távon a növekedési ütem egy pozitív konstans. Ezt az egyenest nevezzük *trendvonal*nak. A gazdasági fejlődés a háború kitöréséig zavartalan volt, a termelés tényleges alakulása a háborút megelőző időszakban egybeesik a trendvonallal. Ezt mutatja az AB szakasz. A háború kitörését jelzi a B pont. Ezt követően a gazdaság termelése egy mélypontig (C pontig) esik vissza. Mivel a visszaesési folyamatot általános érvényű mechaniz-

[173] Jánossy [1966] 19.o.

mus nem határozza meg, így az AC szakasz alakja ismeretlen (és számunkra érdektelen), erre utal a szaggatott vonal. A helyreállítási periódus a C pontban kezdődik. Ettől kezdve a termelés növekedésnek indul, és növekedési üteme meghaladja a hosszú távú trend ütemét. Majd hamarosan a termelés eléri a háború előtti szintet. Ez a CD szakasz. A helyreállítás azonban ebben az időpontban nem ér véget, mert a termelés növekedése továbbra is folytatódik, méghozzá a trend üteménél magasabb ütemben (Ezt mutatja a DE szakasz.) egészen az E pontig, amikor a gazdaság eléri a gazdasági fejlődés eredeti trendvonalát. A növekedés üteme csak ekkor fékeződik le és esik vissza — többé-kevésbé hirtelen módon — a hosszú távú növekedés jellegzetesen érvényesülő értékére. Ezt mutatja az E pont. Ezt követően a gazdaság visszatér a trendvonalához. (lásd EF szakasz).

Ahogy Tarján kiemeli[174]: „Jánossy ... elmélete alapján (a 60-as évek elején) minden bizonnyal a világon elsőként [175] megjósolta, a (70-es évek elejére elérkező) háború utáni konjunktúra végét (még akkor is, ha senki sem hallgatott rá)."

Jánossy trendvonal elméletének következménye, hogy „a gazdasági fejlődés folyamatában feltétlenül létezni kell valamilyen olyan döntő jelentőségű tényezőnek, amely csorbítatlanul túléli a háborút."[176] Szerinte „ez a stabil tényező maga az emberiség; nem az egyes ember, aki százezrével esik áldozatul a háborúnak, hanem az emberi társadalom, a maga teljességében, minden tapasztalatával, tudásával, ismeretével együtt. A népek ... mind a mai napig nemcsak túlélték az összes elmúlt háborúkat ..., hanem csaknem hiánytalanul megőrizték a múltból átmentett, legfontosabb örökségüket, felhalmozott tudásukat és ismereteiket; sőt ezeket — bizonyos területeken — még gazdagították is. ... A munkaerő, a termelőerők lényegi hordozója, a háború folyamatán ugyan számszerűen csökken, de struktúrája, fejlettsége nemcsak fennmarad, hanem szakadatlanul tovább is fejlődik. ... Ebből a tényből objektíven következik, hogy a trendvonal a háború folyamán és azt követően töretlenül tovább emelkedik. Ez a következtetésünk viszont már implicite tartalmazza azt a feltételezést, hogy a trendvonal meredeksége végső soron a munkaerő fejlődésétől függ."[177]

Jánossy bevezet egy saját fogalmat, a *szakmastruktúrát*, amely „egy ország teljes munkaerő-állományának szakmák szerinti tagozódását jelenti, éspedig aszerint, hogy egy-egy szakmával hányan rendelkeznek"[178] Tarján szerint a mai közgazdasági szóhasználattal élve a szakmastruktúrát a humántőke egy fajtájának tekinthetnénk. Szerintem a szakmastruktúra éppen olyan mértékben jellemzi egy ország termelési szerkezetét, technikai fejlettségét, hiszen az adott

[174]Tarján [1998] 300.o.

[175]„Ezzel kapcsolatban nem érdektelen idézni Samuelson tankönyvében 1988-ban:

≫Az 1970-es évekkel azonban beköszöntött a „stagfláció" korszaka, amely egyetlen tudós menetrendjében sem szerepelt — nem jelent meg Spengler, Toynbee, Schumpeter vagy Galbraith kristálygömbjében. Olyan világban élünk, amelyet soha egyetlen próféta sem jósolt meg!≪ (Samuelson, P.A.–Nordhaus, W.D. [1988] : Közgazdaságtan III. Alkalmazott közgazdaságtan a mai világban. KJK, Budapest. 1114.o.)" Kiemelés Tarján [2000] 457. oldaláról.

[176]Jánossy [1966] 112.o.

[177]Jánossy [1966] 112-113.o.

[178]Jánossy [1966] 234.o.

gazdaság technikai szintje szükségessé teszi a fizikai és humántőke megfelelő szintjét. Továbbá a szakmák szerinti tagozódás az iparágak súlyát is mutatja, azaz a termelés szerkezetét.

Jánossy négy pontban foglalta össze a legfontosabb összefüggéseket a szakmastruktúra-változás és a gazdasági fejlődés üteme között:

1. Valamely ország gazdasági fejlettsége — még ha átmenetileg nem is realizálódik a termelés tényleges volumenében, vagyis csak mint megvalósítható lehetőség létezik — elsősorban az összmunkaerő mindenkori szakmastruktúrájától (azaz a termelés szerkezetétől) függ.

2. A gazdasági fejlődés elválaszthatatlanul kapcsolódik a szakmastruktúra fogalmához. A gyorsabb gazdasági fejlődés előfeltétele a szakmastruktúra (gazdaság szerkezetének) gyorsabb változása.

3. Azok a korlátok, amelyek a szakmastruktúra változási sebességét behatárolják — hosszú távra — határt szabnak a gazdasági fejlődés ütemének is.

4. A szakmastruktúra változásának tehetetlensége, vagyis a múltbeli változások hatása az elkövetkezendő évek, sőt évtizedek változásaira, alapvetően megszabja a gazdasági fejlődés trendvonalának állandóságát.

Jóllehet e végkövetkeztetések még mindig nem adnak választ arra, hogy mitől is függ végső soron a gazdasági fejlődés üteme, mégis elmondhatjuk, „hogy Jánossy az elsők között alapozta meg elméletével a humántőke gazdasági növekedésre gyakorolt hatását”[179].

Ezért használunk olyan modellt a Jánossy elmélet elemzéséhez, amely figyelembe veszi a humántőkét.

7.3. Egyszerű endogén növekedési modellek

Ebben a részben először egy *zárt gazdaság* Ramsey típusú modelljét építjük fel, amelyben a termelés szerkezetét egy AK termelési függvény írja le. Megmutatjuk, hogy ebben a modellben technológiai haladás nélkül is (a modell feltételei mellett) létezik pozitív egyenletes növekedési ütem, azaz *endogén növekedési ütem*, és ez megegyezik a fogyasztás és a tőkeállomány növekedési ütemével. Megmutatjuk továbbá, hogy ebben a modellben az endogén növekedési ütem következményeként nem érvényesül a feltételes konvergencia.

Ezt követően bemutatunk egy humántőkével bővített Ramsey modellt[180], amelyről belátjuk, hogy az egyenletes növekedési pálya mentén átírható egyszektoros AK termelési függvényű Ramsey modellé. Ennek következtében a humántőkével bővített modellben is megvalósul az endogén növekedés.

[179]Tarján [2000] 460.o.

[180]A Ramesy modell leírását lásd például Barro–Sala-i-Martin [1995] második fejezetében vagy Romer [1996] második fejezetében.

A harmadik modell[181] azt vizsgálja, hogy az előző pontban vizsgált Ramsey modellben, ha (i) egy nem egyensúlyi helyzetből indulunk, és ha (ii) a bruttó humántőke beruházás[182] megszorító korlátként jelentkezik, akkor a rendszer konvergál az endogén hosszú távú növekedési ütemhez és ez a konvergencia feltételes konvergenciát mutat. Azaz a γ_Y annál nagyobb, minél nagyobb az eltérése a $K(t)/H(t)$ arányának az egyensúlyi arányuktól $(\omega^* = K(t)/H(t))$.

A negyedik modell Tarján Tamás [1998, 2000] modellje, amely azt mutatja meg, hogy miként kapcsolható össze az előző modell a Jánossy-féle trendvonalakkal. Tarján, modellje és eredményei alapján megállapítja, hogy az országok fizikai tőkeállományának részesedése, α, a modell endogén paramétere.

A fenti modellek közös kiinduló feltételeit az alábbiakban foglaljuk össze.

Feltételek.

1. Legyen L a munkások száma és legyen a munkások számának növekedési rátája $n = 0$. Normalizáljuk a modelleinket úgy, hogy
$$L(t) = \bar{L} = 1. \tag{f1}$$

2. Legyen $h(t)$ az egy munkásra jutó átlagos humántőke nagysága. Ekkor a humántőke nagyságát $H(t)$-val jelöljük és $H(t) = h(t) \cdot L(t)$. Továbbá a $h(t)$ és az $L(t)$ tökéletesen helyettesítők, abban az értelemben, hogy a termelésre csak $(h(t) \cdot L(t))$ hat, azaz például rögzített L nem okoz csökkenő hozadékot. Tehát például ha $\lambda > 0$ és L rögzített $\left(\bar{L}\right)$, akkor az első fokon homogén termelési függvényre
$$F\left[\lambda K(t), (\lambda h)\bar{L}\right] = \lambda Y(t). \tag{f2}$$

3. Legyen a termelési függvény Cobb–Douglas alakú:
$$Y(t) = AK^{\alpha}(t) H^{1-\alpha}(t), \tag{f3}$$
ahol $0 \leq \alpha \leq 1$ és $A > 0$.

4. Nem veszünk figyelembe exogén technológiai változást, azaz ha $\tau(t) = e^{mt}$, akkor[183]
$$m = 0. \tag{f4}$$

5. A jövedelmet csak fogyasztásra és beruházásra lehet elkölteni, azaz
$$Y(t) = C(t) + I_H(t) + I_K(t), \tag{f5}$$

[181] Amely nem más, mint Barro–Sala-i-Martin [1995] 5. fejezetében bemutatott modell kis változtatással.

[182] Pontosabban a bruttó humántőke beruházás, $I_H(t) = \dot{H}(t) + \delta_H H(t)$, nem negativitási feltétele.

[183] Ezt a feltételt azért tartjuk fontosnak kiemelni, mert rámutat az eredményeink azon speciális sajátosságaira, miszerint exogén technológiai haladás nélkül is létezhet az egy főre jutó kibocsátásnak pozitív egyenletes növekedési üteme.

ahol $C(t)$ a fogyasztás, $I_H(t)$ a bruttó humántőke beruházás és $I_K(t)$ a bruttó fizikai tőke beruházás. Ha a modellben nincs humántőke, akkor az egyenlet $Y(t) = C(t) + I_K(t)$ kifejezésre egyszerűsödik.

6. Legyen a fizikai és humántőke amortizációs kulcsa rendre:[184]

$$\delta_K > 0, \tag{f6a}$$

$$\delta_H > 0. \tag{f6b}$$

7. Legyen a nettó fizikai és humántőke akkumulációját leíró egyenlet rendre:

$$\dot{K}(t) = I_K(t) - \delta_K K(t), \tag{f7a}$$

$$\dot{H}(t) = I_H(t) - \delta_H H(t). \tag{f7b}$$

8. Legyen a (*végtelen ideig élő* és) *haszonmaximalizáló* háztartás hasznossági függvénye egy Stone-Geary-féle hasznossági függvény, ami nem más, mint egy CIES függvény[185]:

$$u(C(t)) = \frac{C^{(1-\theta)}(t) - 1}{(1-\theta)}, \quad \theta > 0, \quad \neq 1, \tag{f8}$$

ahol a határhaszon rugalmassága konstans $-\theta$, és a hasznossági függvény helyettesítési rugalmassága $\sigma = 1/\theta$. A θ nem más, mint a háztartások fogyasztási (egyben megtakarítási) időpreferenciája[186]. Minél nagyobb θ annál gyorsabban csökken a határhaszon ($u'(C(t)) = C^{-\theta}(t)$) a fogyasztás kis egységnyi változására, így a jövőbeni fogyasztás kisebb hasznot jelent számára, mint a jelenbeli. Tehát nagy θ esetén a háztartás jellemzően előre hozza a fogyasztását, és időben késlelteti a fogyasztását ha θ kicsi.

[184] A humántőke csökkenhet az elhalálozások során, illetve a tudásanyag elvesztésével, feledésbemerülésével.

[185] Constant intertemporal elasticity of substitution (konstans intertemporális helyettesítési rugalmasság), CIES. Jelölje σ a helyettesítési rugalmasságot. Ekkor

$$\sigma = \left[\frac{C(t_1)/C(t_2)}{-u'[C(t_1)]/u'[C(t_2)]} \frac{d\{u'[C(t_1)]/u'[C(t_2)]\}}{d\{C(t_1)/C(t_2)\}}\right]^{-1},$$

ahol $u'[C(t_1)]/u'[C(t_2)]$ az intertemporális közönbösségi görbe meredekségének nagysága. Ha $t_1 \to t_2$, akkor határátmenetben: $\sigma(t) = -u'(C(t))/[C(t) \cdot u''(C(t))]$. A fenti hasznossági függvényre $\sigma = 1/\theta$ konstans.

Vegyük észre, hogy ez a hasznossági függvény kielégíti az Inada feltételeket, azaz $\lim_{C\to 0} u'(C(t)) = \infty$; és $\lim_{C\to\infty} u'(C(t)) = 0$, továbbá ha $\theta = 1$ (azaz, ha $\theta \to 1$), akkor $u(C(t)) = \ln C(t)$. A Stone–Geary-féle hasznossági függvényekről részletesebben lásd Zalai [2000] 401-403.o.

[186] A θ nagyságának növekedéselméleti jelentőségéről lásd részletesebben Barro–Sala-i-Martin [1995] 2B függelékét. Amint arra a szerzők rámutatnak θ nagysága egy Ramsey modell nyeregpontján áthaladó stabil kar időbeli pályájának alakját befolyásolja.

9. Legyen a háztartások hasznosságra vonatkozó időpreferenciája ρ, úgy, hogy ha ρ nagy, akkor a háztartások a jelenbeli hasznosságot preferálják a jövőbenivel szemben, azaz
$$\rho > 0. \tag{f9}$$
A ρ és a θ paraméterek egymástól függetlenek. Bár jellemzően azt várhatnánk, hogy egy mohó háztartásnál θ nagy értékeihez ρ nagy értékei párosulnak.

Az $(f8)$ és $(f9)$ alapján a végtelen ideig élő háztartási szektor $[0, \infty)$ időszakra vonatkozó jelenértékre diszkontált összhaszna:
$$\int_0^\infty e^{-\rho t} u\left[C(t)\right] dt.$$

10. A háztartások fizikai tőkeállományának, $K(t)$, gyarapodását írja le a következő egyenlet:
$$\dot{K}(t) = wL(t) + rK(t) - C(t), \tag{f10a}$$
ahol r a tőke vagy hitelek kamatlába (a profitráta), w az egységnyi munka bére. A tőkeállomány tehát a bérrel és a kölcsöntőke hozadékával ($rK(t)$) bővül, de a fogyasztás csökkenti:[187]
$$\dot{K}(t) = Y(t) - \delta_K K(t) - C(t), \tag{f10b}$$

11. Tegyük fel, hogy a végtelen hosszú ideig élő háztartások vehetnek fel hitelt, de nincs lehetőségük hiteleiket folytonosan jövőbeli kölcsönökkel fedezni, azaz létezik egy tőkepiaci korlát:
$$\lim_{t\to\infty} \left\{K(t) \cdot e^{-rt}\right\} \geq 0, \tag{f11a}$$
$$r > 0, \tag{f11b}$$
ahol r a konstans kamatláb. Mint az az $(f10a)$ feltételből következik a háztartás tőkeállománya r ütemben gyarapszik. Az $(f11a)$ szerint a hitelezés (adósságállomány) maximálisan csak ezzel az ütemmel nőhet. Az $(f11b)$ feltétel szerint a kamatláb legyen időben állandó.[188]

---

[187] Mivel $w = \frac{\partial F}{\partial L} = \frac{1}{L(t)}\left[Y(t) - K(t) \cdot \frac{\partial F}{\partial K}\right]$ és $r = \frac{\partial F}{\partial K} - \delta_K$, így az $(f10a)$ feltételből
$$\begin{aligned}\dot{K}(t) &= \frac{1}{L(t)}\left[Y(t) - K(t) \cdot \frac{\partial F}{\partial K}\right] \cdot L(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial K} - \delta_K\right) K(t) - C(t) \\ &= Y(t) - \delta_K K(t) - C(t).\end{aligned}$$

[188] A háztartásoknak szuboptimális lenne r-nél nagyobb rátával növelni a tőkeállományukat, mert nagyobb hasznosságot jelentene számukra, ha azt véges időn belül elfogyasztanák.

12. Tegyük fel, hogy a termelési függvény produktív, de nem érhetünk el vele végtelen hasznosságot. Ennek biztosítása érdekében tegyük fel, hogy a paraméterekre fennáll a következő egyenlőtlenség[189]:

$$A\alpha\left(\omega^*\right)^{-(1-\alpha)} > \rho + \delta_K > \left[(1-\theta)/\theta\right] \cdot (A - \delta_K - \rho) + \delta_K, \qquad \text{(f12)}$$

ahol ω^* a $K(t)/H(t)$ egyensúlyi aránya. Az empirikus vizsgálatok alapján az $(f12)$ feltétel reális[190].

13. Tegyük fel, hogy

$$A \cdot \left(\frac{\theta - \alpha}{\theta}\right) < 1. \qquad \text{(f13)}$$

Vegyük észre, hogy ez csak úgy lehet, ha $\theta > \alpha$. Barro–Sala-i-Martin elemzése szerint ez egy elfogadható feltétel.[191]

33. Állítás. *Tegyük fel, hogy az f1-f12. feltételek teljesülnek. Ekkor* $\gamma_K = \gamma_C = \gamma_Y = \gamma^* > 0$ *enodogén növekedési ütem elégséges feltétele, hogy* $\alpha = 1$.

Bizonyítás. $\alpha = 1$ esetén a termelési függvény AK típusú:

$$Y(t) = AK(t).$$

A végtelen ideig élő háztartás jelenre diszkontált hasznosságfüggvénye $(f8)$ és $(f9)$ alapján:

$$U = \int_0^\infty e^{-\rho t} u\left[C(t)\right] dt = \int_0^\infty e^{-\rho t} \left[\frac{C^{(1-\theta)}(t) - 1}{(1-\theta)}\right] dt. \qquad (80)$$

A végtelen ideig élő háztartásnak ésszerű a kölcsön felvétele, azaz amikor $K(t)$ negatív, és annak soha vissza nem fizetése. Az $(f11a)$ feltétel azért kell, hogy kizárjuk ezt a lehetőséget, amikor az adósság r rátánál nagyobb ütemben nő. Mint azt majd később látni fogjuk (a kontroll probléma transzverzalitási feltételéből), egyetlen egy háztartás sem lesz hajlandó hogy növelje tőkeállományát r ütemnél jobban, azaz nem lesz olyan hitelező a gazdaságban, aki folyamatosan hitelt nyújtana. Így egyensúlyban nem lesz lehetőség a hitelek láncszerű finanszírozására.

[189]Ha ugyanis a későbbiekben meghatározott fogyasztási függvényt, (90)-t, beírjuk a hasznossági függvénybe, akkor azt kapjuk, hogy

$$U = \left[(1-\theta)/\theta\right] \int_0^\infty e^{-\rho t} \cdot \left[C^{1-\theta}(0)\, e^{[(1-\theta)/\theta](A-\delta_K-\rho)t}\right] dt,$$

ami csak akkor nem tart végtelenhez, ha $\rho > \left[(1-\theta)/\theta\right](A - \delta_K - \rho)$. Mindkét oldalhoz hozzáadva δ_K-t kapjuk

$$\rho + \delta_K > \left[(1-\theta)/\theta\right](A - \delta_K - \rho) + \delta_K.$$

Ha azonban nem teljesül, hogy $A > \rho + \delta_K$, akkor egy szűkülő gazdaságot kapunk. $(f12)$ ennél még erősebb feltétel. Az erősebb kirtérium azért kell, mert szükségünk lesz arra, hogy $A\alpha\left(\omega^*\right)^{-(1-\alpha)} - (\rho + \delta_K) > 0$, ellenkező esetben ismét egy szűkülő gazdaságot kapunk.

[190]Lásd például Barro–Sala-i-Martin [1995] 78.o.

[191]Lásd Barro–Sala-i-Martin [1995] 76.o. illetve 2. fejezetének 2B függelékét.

A háztartások haszonmaximalizáló magatartását leíró kontrollprobléma[192] a releváns $t \in [0, \infty)$ időintervallumon:

$$\max_{\{C(t)\}} \int_0^\infty e^{-\rho t} u\left[C(t)\right] dt$$

$$\dot{K}(t) = AK(t) - C(t) - \delta_K K(t)$$

$$K(0) = K_0$$

$$\lim_{t\to\infty} \left\{K(t) e^{-rt}\right\} \geq 0$$

$$0 \leq C(t) \leq AK(t),$$

ahol tehát a kontrollváltozó $C(t)$, az állapotváltozó $K(t)$. A maximum elv alapján keressük a megoldást[193]. A kontrollprobléma Lagrange függvénye:

$$\mathcal{L}(C, K, \lambda, \mu) = U + \int_0^\infty \lambda(t) \cdot \left[\left(AK(t) - C(t) - \delta_K K(t)\right) - \dot{K}(t)\right] dt + \mu \left[K(T) e^{-rT}\right],$$

ahol U a (80) által meghatározott függvény, $\lambda(t)$ és μ rendre a $\dot{K}(t)$-hoz és a $\lim_{t\to\infty} \{K(t) e^{-rt}\} \geq 0$ feltételhez tartozó árnyékárak, és $T \to \infty$.

A belső megoldás szükséges feltétele, hogy az úgynevezett Hamilton függvénynek szélsőértéke legyen a kontrollváltozó szerint, azaz

$$\frac{\partial J}{\partial C} = 0,$$

ahol a J-vel jelölt Hamilton függvény:

$$J[C, K, \lambda] = u\left[C(t)\right] e^{-\rho t} + \lambda(t) \left[AK(t) - C(t) - \delta_K K(t)\right],$$

továbbá hogy teljesüljenek az úgynevezett kanonikus egyenletek és az úgynevezett transzverzalitási feltétel[194]:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial J}{\partial \lambda} = \dot{K}(t), & K(0) = K_0, \\ \dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial J}{\partial K}, & \lim_{t\to\infty} \{\lambda(t) K(t)\} = 0. \end{array}$$

A szükséges feltételekből kapjuk, hogy

$$\frac{\partial J}{\partial C} = 0 \Longrightarrow \lambda(t) = u'\left(C(t)\right) e^{-\rho t} \tag{81}$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial J}{\partial K} \Longrightarrow \dot{\lambda}(t) = -r\lambda(t), \tag{82}$$

[192] A kontrollproblémák általános leírása megtalalható például Intriligator [1971], Chiang [1992], magyarul Simonovits [1998].

[193] Azért a maximum elvet használjuk, mert a kontrollváltozó korlátozott. Erről részletesebben lásd például Intriligator [1971] 344.o.

[194] A transzverzalitási feltételről lásd részletesebben: Barro–Sala-i-Martin [1995] 500-505.o. A szerzők megmutatják, hogy a $\mu \cdot e^{-rT} = \lambda(T)$ feltétellel ekvivalens a $\lambda(T) \cdot K(T) = 0$ feltétel. Ha nem véges időhorizontot tekintünk akkor pedig $\lim_{t\to\infty} \{\lambda(t) K(t)\} = 0$.

ahol $r = \frac{\partial Y}{\partial K} - \delta_K$.

Deriváljuk (81)-et t szerint

$$\dot{\lambda}(t) = u''(C(t)) \cdot \dot{C}(t) \cdot e^{-\rho t} - \rho u'(C(t)) e^{-\rho t} \tag{83}$$

és (81)-et írjuk be (82)-be $\lambda(t)$ helyére

$$\dot{\lambda}(t) = -r \cdot u'(C(t)) \cdot e^{-\rho t}. \tag{84}$$

A (83) és (84) egyenleteket megegyeznek

$$u''(C(t)) \cdot \dot{C}(t) \cdot e^{-\rho t} - \rho u'(C(t)) e^{-\rho t} = -r \cdot u'(C(t)) \cdot e^{-\rho t}.$$

$e^{-\rho t}$-vel egyszerűsítve adódik, hogy

$$-r = \frac{u''(C(t))}{u'(C(t))} \dot{C}(t) - \rho.$$

Átrendezve és a jobboldal első részét $\left(\frac{C(t)}{C(t)}\right)$-vel szorozva kapjuk, hogy

$$r = \rho - \left(\frac{du'/dt}{u'}\right) = \rho - \left[\frac{u''(C(t)) \cdot C(t)}{u'(C(t))}\right] \cdot \left(\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}\right). \tag{85}$$

Felhasználva az $(f8)$ alatti feltételezett hasznossági függvényt adódik, hogy

$$\left(\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}\right) = \left(\frac{1}{\theta}\right) \cdot (r - \rho), \tag{86}$$

hiszen $u'(C(t)) = C^{-\theta}(t)$, és $u''(C(t)) = -\theta C^{-\theta-1}(t)$.

A (85) szerint akkor optimális a fogyasztás, ha a kamatláb (r) megegyezik az időpreferencia (ρ) és a $\left[\frac{u''(C(t)) \cdot C(t)}{u'(C(t))}\right] \cdot \left(\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}\right)$ kifejezés különbségével. A $\left[\frac{u''(C(t)) \cdot C(t)}{u'(C(t))}\right] \cdot \left(\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}\right)$ kifejezés a fogyasztás (hasznosságban mért) hozamával arányos. Az r pedig arányos a megtakarítás hozamával. Egyensúlyban a két hozamtípus megegyezik.[195]

A profitmaximalizálás további feltétele, hogy a tőke határterméke fedezze a kölcsöntőke árát, azaz a kamatláb és amortizáció összegét

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial K} &= r + \delta_K \\ r &= A - \delta_K, \end{aligned}$$

[195] A háztartás két ok miatt fogyaszt a jelenben többet, mint a jövőben. Egyrészt, mert (i) $\rho > 0$, azaz az időpreferenciája kedvez a jelenbeli fogyasztásnak, másrészt (ii) ha tudja, hogy $\left(\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}\right) = \gamma_C > 0$, akkor a fogyasztását igyekszik kisimítani előre hozott fogyasztással.

Ha $\gamma_C = 0$, akkor $r = \rho$ és ekkor a háztartás időbeli fogysztása egyenletes. Ettől csak akkor hajlandó eltérni (például többet hagy a jövőre, $\left(\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}\right) > 0$), ha az r kamatláb megfelelően kompenzálja ($r > \rho$). Ennek a kompenzációnak a pontos nagysága: $\sigma^{-1}\left(\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}\right)$. ($\sigma$-vel kapcsolatban lásd a 185. lábjegyzetet) mivel az adott termelési függvény esetén $\frac{\partial Y}{\partial K}=A$. Továbbá az adott feltételek mellett a munka határterméke nulla, így $w=0$. Ekkor a következő rendszer adódik[196]

$$\dot{K}(t)=(A-\delta_K)K(t)-C(t), \tag{87}$$

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}=\left(\frac{1}{\theta}\right)\cdot(A-\delta_K-\rho), \tag{88}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left\{K(t)e^{-(A-\delta_K)t}\right\}=0. \tag{89}$$

A (88) egyenlet érdekessége, hogy a fogyasztás növekedési rátája nem függ sem $K(t)$-tól, sem $C(t)$-től. Legyen a 0. időpontban a fogysztás $C(0)$, ekkor a fogyasztási függvény

$$C(t)=C(0)\cdot e^{\left(\frac{1}{\theta}\right)\cdot(A-\delta_K-\rho)t}. \tag{90}$$

Felhasználva az $(f12)$ feltételt, $A>\rho+\delta_K>[(1-\theta)/\theta](A-\delta_K-\rho)+\delta_K$ azt kapjuk, hogy a fogyasztás növekedési rátája pozitív, $\gamma_C>0$.

Ha most (90)-t beírjuk a (87) egyenletbe kapjuk, hogy

$$\dot{K}(t)=(A-\delta_K)K(t)-C(0)\cdot e^{\left(\frac{1}{\theta}\right)\cdot(A-\delta_K-\rho)t},$$

ami nem más, mint $K(t)$-ban egy elsőrendű differenciál egyenlet, amelynek általános megoldása felírható a következő alakban[197]

$$K(t)=b\cdot e^{(A-\delta_K)t}+[C(0)/\varphi]\cdot e^{(1/\theta)\cdot(A-\delta_K-\rho)t},$$

ahol b egy konstans és $\varphi=(A-\delta_K)\cdot(\theta-1)/\theta+\rho/\theta=-(1/\theta)\cdot(A-\delta_K-\rho)+(A-\delta_K)$.

Írjuk be most $K(t)$-t a transzverzalitási feltételbe, azaz a (89) egyenletbe

$$\lim_{t\to\infty}\left\{b+[C(0)/\varphi]e^{-\varphi t}\right\}=0.$$

[196]A harmadik egyenlet a transzverzalitási feltétel, ahol a (82) alapján tudjuk, hogy $\lambda(t)$ növekedési rátája $-r$, így $\lambda(t)=\lambda_0 e^{-rt}$, ($\lambda_0$ konstans). Tehát

$$\lim_{t\to\infty}\{K(t)\lambda(t)\}=\lim_{t\to\infty}\left\{K(t)e^{-rt}\right\}=0.$$

Továbbá tudjuk, hogy $r=A-\delta$.

[197]Szorozzuk mindkét oldalt $e^{-(A-\delta_K)t}$-vel. Ekkor az integrálandó kifejezés:

$$\int e^{-(A-\delta_K)t}\left[\dot{K}(t)+-(A-\delta_K)K(t)\right]dt$$

illetve

$$-\int e^{-(A-\delta_K)t}\cdot C(0)\cdot e^{\left(\frac{1}{\theta}\right)\cdot(A-\delta_K-\rho)t}dt.$$

A megoldásra adódik

$$K(t)e^{-(A-\delta_K)t}=\frac{-C(0)}{1/\theta(A-\delta_K-\rho)-(A-\delta_K)}e^{\left(\frac{1}{\theta}\right)\cdot(A-\delta_K-\rho)t}+b,$$

ahol b egy konstans. Az integráló faktorral osztva a két oldalt kapjuk $K(t)$-t.

Mivel $\varphi > 0$,[198] így a kapcsos zárójel második tagja időben nullához tart. Ekkor az egyenlőség akkor állhat csak fenn, ha $b = 0$.

Tehát a tőkeállományt leíró egyenlet

$$K(t) = \frac{1}{\varphi} C(t),$$

ahonnan a (88) felhasználásával adódik, hogy

$$\gamma_K = \gamma_C = (1/\theta) \cdot (A - \delta_K - \rho).$$

Mivel $Y(t) = AK(t)$, így $\gamma_Y = \gamma_K = \gamma_C$. ■

34. Következmény. *A fenti rendszerben nem érvényesül a feltételes konvergencia.*

Bizonyítás. Hiszen ekkor a rendszer mindhárom változója egy $K(0)$, $C(0) = \varphi K(0)$ és $Y(0) = AK(0)$ helyzetből indulva azonos konstans $\left(\frac{A-\delta_K-\rho}{\theta}\right)$ ütemben növekszik. ■

35. Állítás. [*Barro–Sala-i-Martin modellje*] *Ha* $0 < \alpha < 1$ *akkor az f1-f12. feltételrendszer teljesülése elégséges ahhoz, hogy létezzen egy olyan endogén növekedési ütem, amelyre* $\gamma_i = \gamma^* > 0$ $(i = Y, C, K, H, I_K, I_H)$.

Bizonyítás. A feltételek alapján a modellt a következő kontrollprobléma írja le:

$$\max_{\{C(t), I_K(t), I_H(t)\}} \int_0^\infty e^{-\rho t} u[C(t)]\, dt$$

$$\dot{K}(t) = I_K(t) - \delta_K K(t)$$

$$\dot{H}(t) = I_H(t) - \delta_H H(t)$$

$$Y(t) = AK^\alpha(t) H^{1-\alpha}(t) = C(t) + I_K(t) + I_H(t)$$

$$K(0) = K_0,\ H(0) = H_0$$

$$\lim_{t\to\infty} \left\{K(t) e^{-rt}\right\} \geq 0$$

$$0 \leq C(t) \leq AK^\alpha(t) H^{1-\alpha}(t)$$

$$0 \leq I_K(t) \leq AK^\alpha(t) H^{1-\alpha}(t)$$

$$0 \leq I_H(t) \leq AK^\alpha(t) H^{1-\alpha}(t)$$

A kontrollproblémához tartozó Hamilton függvény:

$$\begin{aligned} J(C, I_K, I_H, K, H, \mu, \nu, \omega) &= u[C(t)] e^{-\rho t} + \lambda(t) \cdot [I_K(t) - \delta_K K(t)] \\ &\quad + \mu(t) \cdot [I_H(t) - \delta_H H(t)] \\ &\quad + \nu(t) \cdot \left[AK^\alpha(t) H^{1-\alpha}(t) - C(t) - I_K(t) - I_H(t)\right], \end{aligned}$$

[198] A $(f12)$ feltétel miatt $A > \rho + \delta_K > \delta_K$, így $\theta > 0$ miatt $\frac{A-(\rho+\delta_K)}{\theta} < A - \delta_K$.

ahol tehát a $\begin{bmatrix} C(t) & I_K(t) & I_H(t) \end{bmatrix}$ a szabályozási vektor a $\begin{bmatrix} K(t) & H(t) \end{bmatrix}$ az állapotvektor és $\begin{bmatrix} \lambda(t) & \mu(t) & \nu(t) \end{bmatrix}$ a korlátokhoz tartozó árnyékár vektor.

Az optimalizálás elsőrendű feltételei:

$$\frac{\partial J}{\partial C} = 0, \frac{\partial J}{\partial I_K} = 0, \frac{\partial J}{\partial I_H} = 0,$$

továbbá a kanonikus egyenletek

$$\begin{array}{lll} \dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial J}{\partial K}, & \frac{\partial J}{\partial \nu} = \dot{K}(t), & K(0) = K_0, \\ \dot{\mu}(t) = -\frac{\partial J}{\partial H}, & \frac{\partial J}{\partial \mu} = \dot{H}(t), & H(0) = H_0, \end{array}$$

továbbá, hogy fennálljon a $AK^{\alpha}(t) H^{1-\alpha}(t) = C(t) + I_K(t) + I_H(t)$ feltétel.

A $\frac{\partial J}{\partial I_K} = 0$, $\frac{\partial J}{\partial I_H} = 0$ egyenletekből adódik, hogy $\lambda(t) = \mu(t) = \nu(t)$. A $\frac{\partial J}{\partial C} = 0$ és $\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial J}{\partial K}$ egyenletekből a (85) kifejezéshez hasonlóan kapjuk, hogy

$$r = \rho - \frac{u'' \cdot C(t)}{u'} \frac{\dot{C}(t)}{C(t)}.$$

Felhasználva a hasznossági függvény alakjára tett $(f8)$ feltételt és hogy $r = A\alpha \left(\frac{K(t)}{H(t)}\right)^{-(1-\alpha)} - \delta_K$ kapjuk:

$$\gamma_C = \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{1}{\theta} \left[A\alpha \left(\frac{K(t)}{H(t)}\right)^{-(1-\alpha)} - \delta_K - \rho \right].$$

A $\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial J}{\partial K}$ és $\dot{\mu}(t) = -\frac{\partial J}{\partial H}$ egyenletekből $\lambda(t) = \mu(t)$ esetén azt kapjuk, hogy a fizikai és humántőke nettó határterméke megegyezik:

$$A\alpha \left(\frac{K(t)}{H(t)}\right)^{-(1-\alpha)} - \delta_K = A(1-\alpha) \left(\frac{K(t)}{H(t)}\right)^{\alpha} - \delta_H,$$

ahol $A(1-\alpha)\left(\frac{K(t)}{H(t)}\right)^{\alpha} - \delta_H$ a humántőke nettó határterméke.

Ebből adódik, hogy az egyenletes növekedési pálya mentén a $\left(\frac{K(t)}{H(t)}\right) = \omega^*$ arány adott, amelyre

$$A\alpha (\omega^*)^{-(1-\alpha)} - \delta_K = A(1-\alpha)(\omega^*)^{\alpha} - \delta_H.$$

Tehát a fizikai és humántőke megtérülési rátája is adott egyensúlyban (r^*):

$$r^* = A\alpha (\omega^*)^{-(1-\alpha)} - \delta_K.$$

Tehát, ha $K(t)$ és $H(t)$ azonos ütemben nő akkor a hozadékráta nem csökkenő, hanem konstans. Amikor a $\frac{K(t)}{H(t)}$ arány állandó, akkor a fogyasztás növekedési üteme is állandó:

$$\gamma_C = \frac{1}{\theta} \left[A\alpha (\omega^*)^{-(1-\alpha)} - \delta_K - \rho \right].$$

Az $(f12)$ feltétel miatt $A\alpha\left(\omega^*\right)^{-(1-\alpha)} - \delta_K - \rho > 0$, így $\gamma_C > 0$.

A pozitív növekedési ütem létezésének belátásához a rendszert visszavezetjük az egyváltozós AK modellre, amelyre már beláttuk a pozitív növekedési ráta létét. Írjuk be a $\left(\frac{K(t)}{H(t)}\right) = \omega^*$ arányt a termelési függvénybe:

$$Y(t) = AK(t)\left(\frac{1}{\omega^*}\right)^{(1-\alpha)} = \tilde{A}K(t),$$

ahol $\tilde{A} = A\left(\frac{1}{\omega^*}\right)^{(1-\alpha)}$. Ha tehát a transzverzalitási feltétel fennáll, akkor az előző állítás alapján létezik egy $\gamma^* > 0$ növekedési ütem, amelyre $\gamma^* = \gamma_Y = \gamma_K = \gamma_C$, továbbá, mivel $K(t)$ azonos ütemben nő, mint $H(t)$, így $\gamma^* = \gamma_H$. ■

36. Állítás. *Tegyük fel, hogy az f1-f13. igaz és $K(0)/H(0) < \omega^*$ és $I_H(t) = 0$. Ekkor létezik egy olyan $\gamma^* > 0$ növekedési ütem, amelyre $\gamma_i = \gamma^* > 0$ $(i = Y, C, K, H)$.*

Bizonyítás. Ha $K(0)/H(0) < \omega^*$, akkor egy visszarendeződés indul meg az egyensúlyi értékhez. Ez a visszarendeződés a fizikai tőke növekedésével és a humántőke csökkenésével történik, úgy, hogy közben a $K(t) + H(t)$ összeg állandó maradjon. Ha $I_H(t) = 0$, akkor a humántőke növekedési üteme

$$\gamma_H = \frac{\dot{H}(t)}{H(t)} = -\delta_H.$$

Továbbá ha $H(0) = H_0$ akkor

$$H(t) = H_0 \cdot e^{-\delta_H t}.$$

Ebben az esetben a háztartások haszonmaximalizáló kontrollproblémája:

$$\max_{\{C(t)\}} \int_0^\infty e^{-\rho t} u\left[C(t)\right] dt$$

$$\dot{K}(t) = AK^\alpha(t)\left[H_0 e^{-\delta_H t}\right]^{1-\alpha} - C(t) - \delta_K K(t)$$

$$K(0) = K_0$$

$$\lim_{t\to\infty}\left\{K(t)\, e^{-rt}\right\} \geq 0$$

$$0 \leq C(t) \leq AK^\alpha(t)\left[H_0 e^{-\delta_H t}\right]^{1-\alpha}.$$

Hamilton egyenlete is egyszerűbb formát ölt:

$$J(C, K, \nu) = u\left[C(t)\right] e^{-\rho t} + \lambda(t) \cdot \left[AK^\alpha(t)\left[H_0 e^{-\delta_H t}\right]^{1-\alpha} - C(t) - \delta_K K(t)\right],$$

ahol a $\lambda(t)$ a $\dot{K}(t)$-hoz tartozó árnyékár, amikor $I_H(t) = 0$.[199]

Az optimum elsőrendű feltételei, $\frac{\partial J}{\partial C} = 0$, $\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial J}{\partial K}$ az ismert fogyasztási függvényre vezetnek:

$$\gamma_C = \frac{1}{\theta}\left[A\alpha\left(\frac{K(t)}{H(t)}\right)^{-(1-\alpha)} - \delta_K - \rho\right], \tag{91}$$

ahol $r = A\alpha\left(\frac{K(t)}{H(t)}\right)^{-(1-\alpha)} - \delta_K$ a fizikai tőke nettó határterméke[200]. A (91) összefüggés és a következő költségvetési korlát

$$\dot{K}(t) = AK^{\alpha}(t)\left[H_0 e^{-\delta_H t}\right]^{1-\alpha} - \delta_K K(t) - C(t)$$

meghatározza a $C(t)$, $H(t)$, és $K(t)$ pályáját.[201]

Az $\omega(t) = \frac{K(t)}{H(t)}$ mellé vezessünk be egy új változót $\chi(t) = \frac{C(t)}{K(t)}$. A 35. Állítás alapján ezek az arányok az egyenletes növekedési pálya mentén konstansok ($\omega(t) = \omega$ és $\chi(t) = \chi$). A $\dot{C}(t)$ és $\dot{K}(t)$ kifejezések segítenek felírni az átmenet dinamikáját $\chi(t)$-re és $\omega(t)$-re.

$$\gamma_\omega = A\omega^{-(1-\alpha)}(t) - \chi(t),$$

$$\gamma_\chi = -A\left(\frac{\theta-\alpha}{\theta}\right)\cdot\omega^{-(1-\alpha)}(t) + \chi(t) + \delta_K(\theta-1)/\theta - \rho/\theta.$$

A 20. ábra az $(f13)$ feltétel szerint $\theta > \alpha$ esetet mutatja. Ha $\dot{\omega} = 0$, akkor

$$\chi(t) = A\omega^{-(1-\alpha)}(t). \tag{92}$$

A $\dot{\chi}(t) = 0$-nak a következő kifejezés felel meg:

$$\chi(t) = A\left(\frac{\theta-\alpha}{\theta}\right)\omega^{-(1-\alpha)}(t) - \delta_K(\theta-1)/\theta + \rho/\theta. \tag{93}$$

A $\dot{\chi}(t) = 0$ egy csökkenő függvényt határoz meg, ha $\theta > \alpha$. (Pozitív meredekségű, azonban, ha $\theta < \alpha$.) Az $\dot{\omega}(t) = 0$-hoz tartozó (92) függvény negatív meredekségű, és az $(f13)$ feltétel szerint meredekebb, mint a (93) függvény. A két görbe egy $\hat{\omega}$ pontban metszi egymást, ami ($\gamma^* > 0$ miatt) meghaladja az ω^* értéket.

---

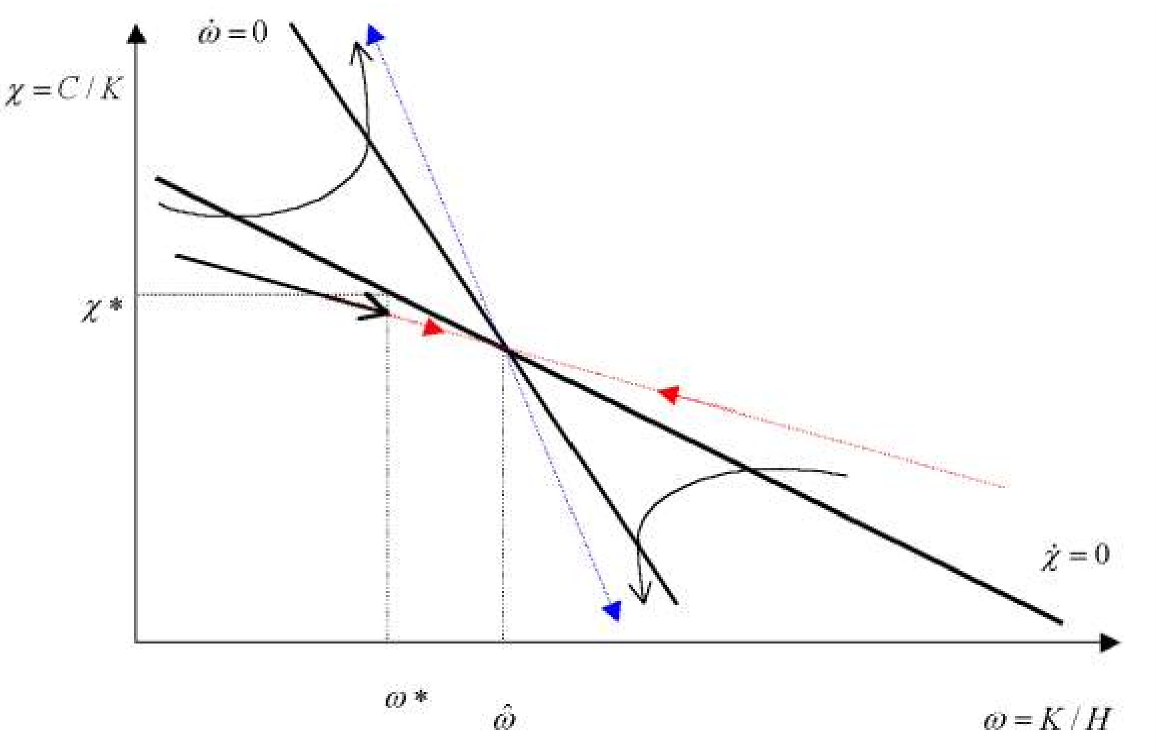
[199]Természetesen írhattuk volna azt is, hogy

$$\begin{aligned} J(C, I_K, K, \nu, \omega) &= u[C(t)]e^{-\rho t} + \lambda(t)\cdot(I_K(t) - \delta_K K(t)) \\ &\quad + \nu(t)\cdot\left(AK^{\alpha}(t)H^{1-\alpha}(t) - C(t) - I_K(t)\right). \end{aligned}$$

Az $(f5)$ feltétel miatt $I_H = 0$ mellett azonban adódik, hogy $I_K(t) = AK^{\alpha}(t)H^{1-\alpha}(t) - C(t)$.

[200]Az amortizációval csökkentett határterméket értem nettó határtermék alatt. $\left(\frac{\partial Y}{\partial K} - \delta_K\right)$

[201]A pontos meghatározást lásd később a 7.4. alpontban.



20. ábra. A $\chi = C/K$ és az $\omega = K/H$ tényezők fázisportréja $\theta > \alpha$ esetén

A 20. ábra az $\omega(t) < \omega^*$ esetet mutatja. Ebben a térrészben $\chi(t)$ monotonan csökken és $\omega(t)$ monotonan növekszik a stabil kar mentén.[202] Az $\omega(t)$ tart az $\hat{\omega}$ felé, de véges időn belül eléri ω^*-ot, amikor a $I_H(t) = 0$ már nem lesz tovább megszorító feltétel. Ekkor, az előző 35. Állítás szerint $\omega(t)$ értéke megmarad ω^*-nak és nem folytatja tovább útját az $\hat{\omega}$ felé, továbbá van egy olyan$\gamma^* > 0$, amelyre $\gamma^* = \gamma_i$ (i=Y, C, K, H). ■

Ez a modell lényegében a standard neoklasszikus modell, ahol a beruházás csak a fizikai, $K(t)$, tőkében ölt testet egy exogén technológiai haladás mellett, ami m rátával növeli a többi input nagyságát (itt ez a $H(t)$ lenne). A standard modellben a hatékony munka m ütemben nő (nulla népességnövekedés mellett), amíg itt most a többi input, $H(t)$, $-\delta_H$ rátával növekszik.

A legfontosabb különbség azonban az a két modell között, hogy itt a $K(t)/H(t)$ arány mindvégig növekszik a ω^* arányig, amikor a két tőke határterméke kiegyenlítődik, és onnantól a $I_H(t) \geq 0$ feltétel már nem lesz megszorító jellegű. Ezt követően azonban mind a kétfajta tőkeállomány mindvégig egy $\gamma^* > 0$ ütemben tovább növekszik. Jóllehet az átmenet során érvényesül a standard neoklasszikus felzárkózási dinamika, a hosszú távú növekedési ráta (még exogén technológiai haladás nélkül is) pozitív, mert a szélesebb értelemben vett tőkeállományra *nem érvényesül a csökkenő hozadék elve.*

37. Következmény. *A γ_Y fordítottan arányos $K(t)/H(t)$ aránnyal, amíg a $K(t)/H(t) < \omega^*$. Ezt nevezhetjük egy kiegyensúlyozatlansági hatásnak (imbalance effect). Minél nagyobb az eltérés $K(t)$ és $H(t)$ között a jövedelem annál nagyobb ütemben növekszik, azaz minél messzebb vagyunk a hosszú távú pályától, annál nagyobb a növekedési ráta. Azaz érvényesül a feltételes konvergencia.*

Amikor $K(t)/H(t) < \omega^*$ és $I_H(t) = 0$, akkor (a Cobb–Douglas termelési függvény mellett) a $K(t)$ és $Y(t)$ a neoklasszikus modellel összhangban változik. Tehát γ_Y, és γ_K, időben folytonosan csökken az egyensúlyi értékük felé. Ebben az esetben a hosszú távú növekedési ütem, amihez tartanak $\gamma^* > 0$. Így $K(t)/H(t)$ folyamatosan nő, részben azért, mert $H(t)$ csökken $-\delta_H$ rátával, másrészt $K(t)$ növekszik (egy γ^*-hoz tartó rátával). $K(t)/H(t)$ növekedése azt jelenti, hogy a fizikai tőke határterméke — így a megtérülési rátája is — csökken. Ez egyben a γ_C csökkenését jelenti.[203]

7.4. A Tarján modell

Mi okozhatja a K/H arány csökkenését? Például egy háború, amely zömével a fizikai tőkét pusztítja, így relatíve megnöveli a humántőke nagyságát. Erre jó példa Japán és a Német gazdaság a II. Világháború után. A Jánossy-féle elmélet szerint a háborút követően a növekedési ráta az egyensúlyi értéket meghaladó ütemben fog növekedni. Ezt használja fel Tarján a következő modelljében.[204]

[202] Ha $\alpha = \theta$ akkor χ konstans marad. Ha van egy olyan kétváltozós dinamikus rendszerem, amelynek létezik nyeregpontstabil egyensúlyi pontja, akkor *stabil kar*nak hívom a rendszernek azt a pályáját, amely áthalad az egyensúlyi ponton és amely mentén az egyensúlyi pont stabil.

[203] Hiszen lásd például a (88) egyenletet.

[204] Természetesen a K/H csökkenését előidézheti a humántőke gyorsabb ütemű növekedése, de ezzel az esettel nem foglalkozunk.

Vezessük be a következő **jelöléseket**:

T : Az az időtáv, amely szükséges ahhoz, hogy a fenti rendszer a jövedelem növekedési ütemét tekintve visszatér a visszaesés előtti növekedési ütemhez. $T > 0$.

κ : A jövedelemnagyság visszaesésének (kontrakciójának) mértéke valamilyen külső sokkhatás során. $\kappa > 1$. Visszaesés nélkül $Y(T) = Y(0)\, e^{\gamma^* T}$ egyenlőség állna fenn. A κ nagyságú kontrakció esetén a kiinduló pont nem $Y(0)$, hanem annak κ-ad része, azaz $\frac{Y(0)}{\kappa}$ lesz. Ekkor a felzárkózás pályája

$$Y(T) = \frac{Y(0)}{\kappa} e^{\gamma^* T}. \tag{f14}$$

s_0 : A kezdeti időszak megtakarítási rátája.

s_T : A végállapot megtakarítási rátája,

$$0 < s_0 < 1, 0 < s_T < 1.$$

A következő állításban azt vizsgáljuk, hogy mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy gazdaság visszatérjen a kontrakció előtti növekedési üteméhez.

38. Állítás. *Tegyük fel, hogy az f1-f14. igaz és* $I_H = 0$. *Ekkor* $\frac{\dot{Y}(0)}{Y(0)} = \frac{\dot{Y}(T)}{Y(T)}$ *egyenlőség fennállásának elégséges feltétele*

$$\frac{s_T}{s_0} = \left[\kappa \cdot e^{-(\gamma^* + \delta_H)T}\right]^{\frac{\alpha - 1}{\alpha}}.$$

Bizonyítás. A 36. Állításban láttuk, hogy ekkor a rendszert a következő egyenletek írják le:

$$Y = AK^{\alpha}(t)\, H^{1-\alpha}(t) \tag{95}$$

$$\gamma_C = \frac{1}{\theta}\left[A\alpha \left(\frac{K(t)}{H(t)}\right)^{-(1-\alpha)} - \delta_K - \rho\right] \tag{96}$$

$$\gamma_K = A\left(\frac{K(t)}{H(t)}\right)^{-(1-\alpha)} - \frac{C(t)}{K(t)} - \delta_K \tag{97}$$

$$H(t) = H(0)\, e^{-\delta_H t}. \tag{98}$$

Ha $\omega^* = \left(\frac{K(t)}{H(t)}\right)$ az egyensúlyi arányt jelenti, akkor

$$K(T) = \omega^* H(T) \tag{99}$$

A 36. Állítás alapján tudjuk, hogy ebben a modellben van egy endogén növekedési ráta, amelyre $\gamma^* = \gamma_C = \gamma_K = \gamma_Y > 0$.

A $K(0)$-at megkapjuk, ha az $(f14)$ feltételbe beírjuk (95)-et, (98)-et, és (99)-at:[205]

$$K(0) = \left[\kappa(\omega^*)^\alpha H(0)^\alpha e^{-(\gamma^*-\delta_H)T}\right]^{1/\alpha} \tag{100}$$

Ha feltételezzük, hogy s_t a bruttó fizikai tőke beruházási együtthatója a $t \in [0,T]$ időpontban, akkor $C(t)$-re:

$$C(t) = AK^\alpha(t) H^{1-\alpha}(t)(1-s_t),$$

míg a $C(t)/K(t)$-ra:

$$\frac{C(t)}{K(t)} = A\left[\frac{K(t)}{H(t)}\right]^{-(1-\alpha)}(1-s_t)$$

formulát kapjuk. Ezeket felhasználva (97)-ben

$$\gamma_K = \frac{\dot K(t)}{K(t)} = s_t A\left(\frac{K(t)}{H(t)}\right)^{-(1-\alpha)} - \delta_K.$$

A $t \in [0,T]$ intervallumra a kibocsátás növekedési rátája:

$$\frac{\dot Y(t)}{Y(t)} = \alpha\frac{\dot K(t)}{K(t)} - (1-\alpha)\delta_H =$$

$$= \alpha s_t A\left(\frac{K(t)}{H(t)}\right)^{-(1-\alpha)} - \alpha\delta_K - (1-\alpha)\delta_H.$$

[205] A $(f14)$-ből beírva a (95) termelési függvényt kapjuk:

$$AK^\alpha(0) H^{1-\alpha}(0) = \kappa AK^\alpha(T) H^{1-\alpha}(T)\cdot e^{-\gamma^* T}.$$

Felhasználva (99) összefüggést:

$$AK^\alpha(0) H^{1-\alpha}(0) = \kappa A(\omega^*)^\alpha H^\alpha(T)\cdot e^{-\gamma^* T}.$$

Ebbe beírva a (98)-et a $t=T$ helyen kapjuk

$$K(0) = \left[\kappa(\omega^*)^\alpha H^\alpha(0) e^{-(\gamma^*-\delta_H)T}\right]^{1/\alpha}.$$

A $t=0$ időpontbeli értékeket[206] a (100)-be, a $t=T$-hez tartozót pedig a (99)-be[207] helyettesítve kapjuk, hogy

$$\frac{\dot{Y}(0)}{Y(0)}=\alpha A(\omega^*)^{-(1-\alpha)}\kappa^{(\alpha-1)/\alpha}e^{-(\gamma^*+\delta_H)T(\alpha-1)/\alpha}s_0-\alpha\delta_K-(1-\alpha)\,\delta_H,$$

$$\frac{\dot{Y}(T)}{Y(T)}=\alpha s_T A(\omega^*)^{-(1-\alpha)}-\alpha\delta_K-(1-\alpha)\,\delta_H.$$

Tehát az intervallum két végén a kibocsátás növekedési rátája egyenlő, ha $\frac{\dot{Y}(0)}{Y(0)}=\frac{\dot{Y}(T)}{Y(T)}$, azaz ha

$$\frac{s_T}{s_0}=\kappa^{(\alpha-1)/\alpha}e^{-(\gamma^*+\delta_H)T(\alpha-1)/\alpha}.$$

■

39. Következmény. *Adott s_0, s_T, κ, γ^*, δ_H, és T esetén α-ra egy explicit formát kapunk:*

$$\alpha=1+\frac{\ln\left(\frac{s_T}{s_0}\right)}{\ln\kappa-\ln\left(\frac{s_T}{s_0}\right)-(\gamma^*+\delta_H)\,T}. \tag{101}$$

Mivel az α paraméter függ az felzárkózás idejétől T-től, így a termelési függvény közvetlenül függ az időtől. Ezek alapján azt mondhatjuk, hogy a Tarján modell egy endogén termelési függvényt határoz meg.

7.4.1. Tarján empirikus vizsgálatai

Tarján Maddison [1995] és más források alapján meghatározta a γ^*, κ, T; illetve az s_0 és s_T értékeit. Ezt követően a paraméterek feltételezett értékei mellett (Θ=3, δ_H=0,03, δ_K=0,06, $A(0)$=1) kiszámította a modell endogén változóit,

---

[206] Az (100)-ből átalakítva

$$\frac{K(0)}{H(0)}=\kappa^{1/\alpha}\cdot\omega^*e^{-\frac{(\gamma^*-\delta_H)}{\alpha}T}.$$

Ezt kell beírni a következő kifejezésbe

$$\frac{\dot{Y}(0)}{Y(0)}=\alpha s_t A\left(\frac{K(0)}{H(0)}\right)^{-(1-\alpha)}-\alpha\delta_K-(1-\alpha)\,\delta_H.$$

[207] A (99)-ből átalakítva

$$\frac{K(T)}{H(T)}=\omega^*.$$

Ezt kell beírni a következő kifejezésbe

$$\frac{\dot{Y}(T)}{Y(T)}=\alpha s_t A\left(\frac{K(T)}{H(T)}\right)^{-(1-\alpha)}-\alpha\delta_K-(1-\alpha)\,\delta_H.$$

4. táblázat. Öt kiemelt OECD-ország Hamilton-egyenletének paraméterei

	Japán	**Németország**	**Olaszország**	**Franciaország**	**Ausztria**
γ^*	0,0300	0,2000	0,0225	0,0185	0,0190
κ	0.29	0,34	0,43	0,51	0,28
T	26	26	23	28	28
s_0	0,28	0,22	0,2	0,22	0,19
s_T	0,37	0,31	0,31	0,3	0,28
δ_H	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
δ_K	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06
α	0,91	0,87	0,82	0,87	0,87
A	1	1	1	1	1
ω^*	9,58	6,64	4,44	6,25	6,51
Θ	3	3	3	3	3
ρ	0,59	0,57	0,51	0,56	0,57
Y(0)	1379	2503	2448	3819	1969
Y(T)	10378	12603	9359	13205	11736
C(0)	126	315	433	507	252
H(0)	2902	5253	5471	6245	5306
K(0)	1301	2288	2033	3769	1672

Forrás: Tarján [1998] 318.o.

így többek között (101) alapján α-t, a határtermékek egyenlőségéből[208] ω^*-ot, (96) alapján ρ-t. Így minden paraméter rendelkezésére állt, amely szükséges a Hamilton egyenlet ($I_H \geq 0$ kényszerfeltétel melletti) numerikus megoldásához. Ezek segítségével meghatározta a $Y(0)$, $C(0)$, $H(0)$, és $K(0)$ induló értékeket a következök alapján: $Y(0)$ értékét közvetlenül Maddison [1995]-ból vette, továbbá

$$C(0) = (1 - s_0)\, Y(0).$$

A (95) és (98)-ből kapjuk, hogy

$$H(0) = \frac{Y(T)}{A(\omega^*)^{\alpha}} e^{\delta_H T}.$$

Végül a (95) termelési függvényből

$$K(0) = \left[\frac{Y(0)}{A} H^{(1-\alpha)}(0)\right]^{1/\alpha}.$$

Ezen egyenletek alapján a numerikus integrálás segítségével a $[0, T]$ intervallumon Tarján meghatározta öt fejlett ipari ország (Japán, Németország, Olaszország, Franciaország, Ausztria) átmenet-pályáját. Jánossy szóhasználatával

[208] $A\alpha\left(\frac{K(t)}{H(t)}\right)^{-(1-\alpha)} - \delta_K = A(1-\alpha)\left(\frac{K(t)}{H(t)}\right)^{\alpha} - \delta_H$, ahol ez egyenletes növekedési pály mentén $\frac{K(t)}{H(t)} = \omega^*$.

élve a háborút követő helyreállítási periódus pályáját, azaz a 19. ábrán a CE szakaszt.

A numerikus modell illesztése alapján Japán esetére Tarján megállapítja:

> „Az átmenet pályája logaritmikus léptékben ábrázolva egy enyhén szinuszos S alakú, de majdnem egyenes szakasz. Elméletileg bizonyítható, hogy az egyenes nem megoldása a Hamilton egyenletnek. A numerikusan meghatározott pálya jól visszaadta a helyreállítási periódus azon karakterét, hogy az átmenet „képlete” gyors-lassú-gyors, majd egy hirtelen törés után rááll a gazdaság a Jánossy-féle trendvonalra.”[209]

Tarján számításait a 4. táblázat foglalja össze. A 4. táblázat két legérdekesebb változója ω^* és α. Figyelemreméltó, hogy az egyensúlyi fizikai-humántőke arány Japán esetében a legmagasabb. Az $\omega^* = K(t)/H(t)$ =9,58 érték azt sugallja, hogy Japán esetében nagyobb a fizikai tőkeállomány fejlődésben betöltött szerepe, mint a humántőkéé. Ez az eredmény nagyon furcsa.

A fizikai tőke volumenrugalmasságainak 0,8 feletti értéke szintén meglepő. Ezek a magas értékek szintén arra a következtetésre vezetnek, hogy fizikai tőke részesedése a kibocsátásból jelentősen meghaladja a humántőke részesedését. Japán α =0,91-es értéke különösen megdöbbentő. Közgazdasági szempontpól minden esetre nehezen magyarázható.

Összefoglalva Tarján cikkét a következő fontos megállapítást tehetjük:

- Ha feltételezzük, hogy egy gazdasági visszaesés során egy termelési tényező (a munkaerő, szakmastruktúra vagy humántőke) sértetlen maradt, akkor összevetve a neoklasszikus növekedéselmélet endogén modelljeit a Jánossy elméletéttel azt kapjuk, hogy ezek a modellek már képesek igazolni Jánossy azon törvényét, miszerint a helyreállítási periódus akkor ér véget, amikor a termelés szinvonala ismét eléri azt a trendet, amely akkor valósult volna meg, ha egyáltalán nem lett volna háború.
- Továbbá alátámasztják Jánossy másik fontos törvényét is, amely szerint a gazdaság erre a trendvonalra egy határozott törést követően tér rá.

7.5. A Simon modell

A modell első változatának kidolgozása Simon és Szamovol nevéhez köthető [1982]. A modell továbbfejlesztése és alkalmazása Simon György munkája [1998, 1999, 2001]. Simon a neoklasszikus növekedés- és árelméletből kiindulva vizsgálja meg a *fizikai és a humántőke együttes hatását*, a humán tényező centrális, determináló szerepét, a *növekedéselméleti mechanizmus evolúciós jellegét*, a technikai haladás és a monopolhelyzetek befolyását az árképződésre, valamint a bér-, és profitmechanizmusra. Simon kidolgozott egy modellrendszert, amely felöleli, a technikai haladás volumen- és értékfüggvényét, valamint az e függvényeket tartalmazó termelési függvényt, értékfüggvényt és ármodellt, továbbá a

[209]Tarján [1998] 319.o.

profit- és bérfüggvényt. Az elvi feltevéseket és modelleket a világgazdaságban domináns szerepet játszó országok (Egyesült Államok, Japán, NSZK, Anglia és Franciaország 1951-1992 közötti) fejlődésének ökonometriai analízise révén verifikálja.

Az alábbiakban az eredeti modellből mi csak a termelési függvény felépítését mutatjuk be. Az ár-, bér- és profitmechanizmus elemzését mellőzzük, e témakörök túlmutatnak elemzésünk tárgyán.

A modell itt bemutatásra kerülő részét két ok miatt tartom fonosnak: *egyrészt* azért, mert a technikai haladás figyelembevétele egy endogén termelési függvényen keresztül történik, így a technikai haladás konkrétabb leképezésére kerül sor, mint az eddigi modellek esetén; *másrészt* azért fontos, mert a későbbiekben bemutatásra kerülő elméleti modell bizonyos megszorítások mellett megegyezik ezzel a modellel.

A modell a humán tényező centrális és determináló szerepének elemzéséhez a következő feltevésekből indul ki:

1. Az alapvető növekedési tényezők a fizikai és a humántőke, a munka és a gazdaság szűkös természeti erőforrásai;
2. A fizikai tőke az állótőke, azaz lényegében a munkaeszközök;
3. A humán tényező stockja a humántőke, flowja pedig a munka. A humántőke három komponensől áll:
   (a) A képzettség nélküli munkaképeskorú lakosság — amit Simon a *humántőke alapkomponensének* hív —, és amely a dolgozók számával jellemezhető;
   (b) A dolgozók általános és szakmai képzettsége, amit a képzési évek számával jellemezhetünk;
   (c) A kutató-fejlesztő tevékenységet lehetővé tevő képességek és képzettség, amit a K+F tevékenységet végzők számával jellemezhetünk;
4. A munka mennyiségét közelítőleg a munkaórák számával jellemezhetünk.

A modell változói:
Y = a kibocsátás volumene: GDP összehasonlítható áron;
K = állótőke (bruttó) összehasonlítható áron;
L = dolgozók száma;
M = munkaórák száma;
H = képzési évek száma;
R = kutató-fejlesztő tudósok és mérnökök száma.

A modell minden változója az idő függvénye. Az időindexet nem írjuk ki. A modellben a nagybetű függvényt a kisbetű paramétert jelöl.

„A növekedési mechanizmus evolúciós jellegű, mivel az ember kreatív tevékenysége kutatói és vállalkozói-gazdaságfejlődési folyamatot generál, amelynek keretében változnak a termelési, illetve növekedési tényezők közötti kölcsönhatások, vagyis változik, fejlődik maga a növekedési mechanizmus. A humán tényező centrális, meghatározó szerepe folytán a változások olyan törvényszerűségek szerint mennek végbe, amelyek a többi növekedési tényezőnek a dolgozó emberhez viszonyított nagyságától függnek. Ezért szerepelnek modelljeinkben az ún. felszereltségi mutatók."[210]

„*Felszereltségi mutató*nak nevezzük valamely más termelési tényezőnek a humántőke alapkomponenséhez viszonyított nagyságát."[211]

A modell azonban közvetlenül nem a felszereltségi mutatókat használja, hanem a belőlük származtatott úgynevezett felszereltségi függvényeket. „*Felszereltségi függvény*: olyan kifejezés logaritmusa, amelyben a humántőke alapkomponense plusz valamely felszereltségi mutató szerepel (az utóbbit a normáló koefficienssel szorozzuk)."[212] A modell a következő felszereltségi mutatókat, illetve belőlük származó felszereltségi függvényeket használja:

Tőkefelszereltségi mutató: az egy dolgozóra jutó állótőke összehasonlítható áron; tőkefelszereltségi függvény[213]:

$$F_K = \ln\left[\left(L + n_K K\right)/L\right];$$

Képzettség mutató: a képzési évek száma egy dolgozóra; képzettség függvény:

$$F_H = \ln\left[\left(L + n_H H\right)/L\right];$$

Kutatásfelszereltségi mutató: a kutató-fejlesztő mérnökök száma az összes dolgozók számához viszonyítva; kutatásfelszereltségi függvény:

$$F_R = \ln\left[\left(L + n_R R\right)/L\right];$$

Munkaidő: az egyes dolgozó által teljesített munkaórák száma éves szinten; munkaidő függvény:

$$F_M = \ln\left[\left(L + n_M M\right)/L\right];$$

Az n_K, n_H, n_R, n_M, normáló koefficiensek. Az általuk nyert normált tényezők $K^* = n_K K$; $H^* = n_H H$; $R^* = n_R R$; $M^* = n_M M$. Továbbá $X^* = K^* + H^* + R^*$, azaz a teljes tőkeállomány normált volumene (a humántőke alapkomponense nélkül). A normálás értelme a szorosabb értelemben vett tőkekomponensek (K, H, R) tekintetében az, hogy összemérhetővé teszi az adott tényezőt a humántőke alapkomponensével, L-lel. Meg kell jegyezni, hogy az n_i (i=K, H, R, M) normáló koefficiens dimenziója nem más, mint a humán tényező alapkomponensének dimenziója osztva az i növekedési tényező dimenziójával. Ezek alapján például — Simon szerint — n_H értéke arra utal,

[210] Simon [1998] 175.o.

[211] Simon [1999] 429.o.

[212] Simon [1999] 430.o.

A logaritmus függvény bevezetése szükségessé tette a $\ln(.)$ függvény argumentumában szereplő tényező számlálójában az L alapkompnens szerepeltetését, hiszen ez biztosítja, hogy a felszereltségi mutatók ne lehessenek negatív számok. Azért van szükség a normáló koefficiensekre, hogy összeadható legyen az L és például a K tőkeállomány.

[213] A tőkefelszereltség valójában a tőkeintenzitásnak felel meg, de annál tágabb, így megtartjuk Simon eredeti jelölését és elnevezését.

hogy az iskolai képzés nélkül szerzett ismeretek hány évi iskolai képzés gazdasági hatásával ekvivalensek.[214]

A modell termelési függvénye:

$$Y = A\left(K^{*}+L\right)^{G_x} L^{1-G_x} M^{*} \tag{102}$$

$$\begin{aligned} y = Y/L &= \left\{A\left[\left(K^{*}+L\right)/L\right]^{G_x}\right\} M^{*} \\ &= G_0 \exp\left[G_X F_K\right], \end{aligned} \tag{103}$$

ahol A normált hatékonysági paraméter, amely modellünkben a humántőke alapkomponense által évi ezer munkaóra alatt állótőke nélkül előállított GDP értékét jelenti, továbbá $G_0 = AM^{*}$. Az (102) kifejezés analógnak tekinthető egy Cobb–Douglas termelési függvénnyel, ahol G_X függvény szerepét az α paraméter tölti be és ahol nem szerepel a munkaóra, M^{*}.[215]

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = A\left(K/L\right)^{\alpha} L,$$

Láthatjuk, hogy a Cobb–Douglas termelési függvény az (103) összefüggés határesete, ha teljesülnek a következő feltételek:

1. a G_X függvényt egy konstans helyettesíti (α);
2. ez a konstans mindig pozitív, vagyis $\alpha > 0$;
3. $\left(K^{*}+L\right)^{G_x}$ kifejezésben az L komponenst nem vesszük figyelembe;
4. az M^{*} változó helyébe L kerül.

„A gazdasági valóság adekvát és kellően általános modellbeli ábrázolásával a fenti feltételezések nem egyeztethetők össze. Miért? Az *első* feltételezés lényegében azt jelenti, hogy a teljes (fizikai és humán) tőke hatása nincs konkrétan figyelembe véve. Ez a legfontosabb különbség a két modell között. A *második* feltételezés nem teljesül a kezdeti állapot, illetve a bázismechanizmus tekintetében, ahol G_X értéke nulla, ... A *harmadik* feltételezés a fejlett országok esetében nem okoz számottevő torzítást, alacsony fejlettségi szintek esetén azonban igen. Elvileg mindenképpen elfogadhatatlan. A *negyedik* feltételezés azért elfogathatatlan, mert figyelmen kívül marad a munkaidő hossza.”[216]

„A modern növekedési mechanizmus legfontosabb sajátosságait a G_X függvény képezi le”.[217] Nézzük tehát hogy mi is határozza meg Simon szerint a G_X függvényt. Alapvetően két fő komponense van: az úgynevezett immobil hatás (G_I) és a mobil hatás (G_M), azaz

$$G_X = G_I + G_M. \tag{104}$$

[214]Az n_M koefficiensnek modellszerkezeti jelentősége van.

[215]Ahol az A paraméter most nincs normálva. Az A parapétert most nem kell normálni a munkaórák számával, hiszen most a termelési függvényben nem szerepel a munkaórák száma.

[216]Simon [1998] 180-81.o.

[217]Simon [1998] 181.o.

Immobil hatás (G_I) nem más, mint a technikai haladás azon része, amely „ma még többnyire nem domináns jellegű, az automatizált termelésre való áttérés folyamatában azonban fokozatosan dominálóvá, majd a távoli jövőben gyakorlatilag kizárólagossá válik. Azért nevezzük immobilnak, mert nagysága a gazdasági fejlődés folyamatában végig növekvő tendenciájú, ellentétben a *mobil hatás*sal (G_M), amely csak a tőkefelszereltség egy bizonyos szintjéig növekszik, azután csökkenni kezd, és a távoli jövőben aszimptotikusan tart nullához. ... Az immobil hatást az váltja ki, hogy magasabb [tőke- — L.ZS.] felszereltség esetén mind a fizikai tőke, mind pedig a humántőke, vagyis a dolgozó ember nagyobb hatékonyságot, magasabb technikai szintet képes megtestesíteni, illetve érvényesíteni. A mobil hatás esetében ellentétes irányú gazdaságfejlődési erőhatások ütköznek egymással, ez okozza a fenti értelemben vett mobilitást. A mobil hatás elsősorban a tőkefelszereltség alakulásával függ össze."[218]

Mit is jelent a mobil hatás? „A fizikai tőkével való ellátottság viszonylag alacsony szintjén többnyire a felszereltség növelése a kreatív tevékenység számára több teret biztosít, ezért a felszereltség növelésével a fajlagos hatás nő. Később viszont csökkeni kezd, mivel mind kevésbé lehet a bonyolult és egyre jobban automatizált termelőberendezéseket *felhasználásuk* helyén hatékonyabbá tenni. Ekkor a hatékonyság már elsősorban a fizikai tőke konstrukciójától és minőségétől (az *előállító vállalatban* végzett kutatói-fejlesztői és kivitelezői tevékenység színvonalától) függ, a felhasználó vállalat számára pedig főként immobil hatás formájában jelenik meg."[219] A mobil hatáshoz tartoznak még a olyan kumulatív gazdasági hatások, amelyek késéssel jelennek meg. Például a késés abból ered, hogy adaptációs időre van szükség az újonnan belépő magasabb képzettségű dolgozóknak vagy kutató-fejlesztőknek a többleteredmény produkálásához. „Vizsgálati tapsztalataink szerint ez átlagosan két év."[220] Másik példa lehet, hogy a kutató-fejlesztő tevékenység ugrásszerű hatását átlagosan három év tőkefelszereltség növekedés előzi meg.

Hasonló példa lehet még az úgynevezett *telítődési effektus*. „A képzettség és a kutatásfelszereltség változásának fajlagos hatását csökkenti az adott felszereltség színvonala. A képzettség változásának fajlagos hatását a kutatásfelszereltség szintén negatívan befolyásloja, mert elvonja a szakemberek egy részét a reproduktív tevékenységtől."[221] Összegzésképpen azt mondhatjuk, hogy az immobil és a mobil hatások rendre a termelési tényezők azonnali és késleltetett kumulatív hatásait foglalják magukban.

Simon a következő alapfüggvényeket definiálja[222]:

[218] Simon [1998] 177.o.

[219] Simon [1999] 430-431.o.

Lásd példaként Iwai [1984a, b] modelljeit, melyekben a technológiai fejlődés alakulását S alakú görbékkel jellemzi, azaz a nehézkes bevezetést egy gyors ütemű áttörés követi, majd ezt követi egy lassú telítődés.

[220] Simon [1999] 431.o.

[221] Simon [1999] 431.o.

[222] A függvények tényleges alakjára nincs magyarázat. Nekünk sem célunk a végső alakok kritikája. Simon elismeri, hogy kutatás előrehaladtával és eredményeképpen a felszereltségi mutatók és függvényeik fokozatosan változtak.

Immobil hatás:

$$G_I = 1 - \exp\left(-G_{KK}G_{KH}\right) \tag{105}$$

Mobil hatás:

$$G_M = G_H + G_R, \tag{106}$$

ahol

$$G_{KK} = g_I F_K \tag{107}$$

$$G_{KH} = 1 - \exp\left(-G_{H0}\right), \tag{108}$$

ahol G_{H0} az F_H nemlineáris függvénye[223]. Itt most nincs szükségünk sem a G_H, sem a G_R, pontos alakjára. Ezek a függvények is a felszereltségi mutatók nemlineáris függvényei.[224]

„Milyen mértékben határozzák meg a modellben figyelembe vett összefüggések a hozzáadott érték, illetve a GDP volumenét? A kérdést megvizsgáltuk éves szinten, valamint a kumulált outputok alapján, az 1950 utáni időszakot figyelembe véve. A nemzetgazdasági eredmények becslése a következő összefüggéssel történt:

$$Y_N = g_N Y_N^*$$

Itt a Y_N a GDP tényleges volumene, Y_N^* a fenti paraméterekkel aggregált adatok alapján becsült volumen. A g_N paraméter meghatározása a nemzetgazdasági adatok felhasználásával történt a legkisebbnégyzetek módszerét alkalmazva. E paraméter ideális nagysága 1, ténylegesen g_N=0,94 adódott (a t-hányados 13,91)."[225] A 5. táblázatban a korrigált determinációs együtthatókat adjuk meg, ahol a szabadságfokok a paraméterek és minden egyéb becsült modellkomponens számával csökkennek. A korreláció, illetve a determinációs együttható értéke nagyon magas, közel van 1-hez. A standard hibák nagyjából kiegyenlítettek, s a nemzetgazdasági értékek jobbak, mint az ágazatiak. A kumulált eredményekből arra lehet következtetni, hogy a becslési hibák időben nem halmozódnak jelentős mértékben. A 5. táblázat eredményei a modell jó magyarázó erejét mutatják. Ez megerősíti a vizsgált változtatások létjogosultságát.

Érdemes még megjegyezni, hogy a modellből kapott output (Y) teljes tőke szerinti rugalmassága (E_X) 1951-től 1992-ig végig csökkenő ütemű, kivéve az USA, ahol ez növekvő. Az output normalizált fizikai tőke szerinti rugalmassága (E_K) minden országban csökkenő tendenciájú a teljes vizsgált (1951-1992) időszak alatt. Ne feledjük azonban, hogy itt $E_K \neq G_X\,(=\alpha)$, hiszen E_K maga is egy függvény, egy rugalmassági függvény.[226]

---

[223] $G_{H0} = F_H + g_{H1}\left(F_H\right)^2 + g_{H2}\left(F_H\right)^3$

[224] A mobil hatás függvényei: $G_H = G_{HH}G_{HK}G_{HM}$ és $G_R = G_{RR}G_{RK}$, ahol
$G_{HH} = g_H G_{KH}$;
$G_{HK} = \exp\left(3\ln F_K - 3/4F_K\right)$;
$G_{HM} = \exp\left(-\left(F_M\right)^2/3\right)$;
$G_{RR} = g_R\left(F_R\right)^2$;
$G_{RK} = \exp\left(3\ln F_K - F_K/2\right)$.
A g_H és g_R becsült paraméterek.

[225] Simon [1998] 186.o.

[226] A Simon modellt használta ifj. Simon [2000, 2001a, b, c] a gazdaságilag fejletlenebb Kína,

5. táblázat. Determinációs együtthatók és standardhibák a Simon modellben

Mutató	Szféra	Éves	Kumulált
R^2	Ágazatok*	0,995	0,996
	Nemzetgazdaság	0,995	0,997
Standardhiba (százalék)	Ágazatok*	8,4	9,6
	Nemzetgazdaság	6,8	7,2

*Mezőgazdaság nélkül

7.6. Egy elméleti modell

Ebben a részben célunk egy elméleti elemzés keretében bemutatni, hogy miként módosíthatja az eddigi eredményeket egy endogén termelési függvény alkalmazása. Megvizsgáljuk, hogy ha az akkumulációs modellbe endogén termelési függvényt illesztünk akkor az miként hat:

- a hosszú távú egyensúlyi pályára: annak létezésére, stabilitására;
- és a hosszú távú pályához történő felzárkózás ütemére.

Az alábbi modell célja annak bemutatása, hogy a termelési szerkezetnek már egy egyszerű endogenizálása is jelentősen módosíthatja a standard neoklasszikus növekedéselméleti eredményeket. Természetesen az egyszerűsítések miatt a kapott eredmény nem tekinthető általános érvényűnek, azonban jelentősen megkérdőjelezi az eddig általánosan elfogadott eredményeket.

A most bemutatásra kerülő modell támaszkodik a Simon modell termelési függvényére. Hasonlít arra abban, hogy a továbbiakban a termelési függvényben a tőke kitevője $\alpha(.)$ egy függvény, így folytonosan változtatja a termelési függvény szerkezetét. Továbbá α bizonyos szerkezeti sajátosságait is megtartjuk. Eltérünk azonban abban, hogy modellünkben eltekintünk a fizikai- és humántőke szétválasztásától. Így a továbbiakban a K a *szélesebb értelemben vett tőkeállományt* reprezentálja.[227]

A modell a következő feltevésekből indul ki:

Feltevések.

1. Az endogén termelési függvénynek megfelelően legyen

$$\alpha(.) = \alpha(K(t), L(t), t);$$

India, Malajzia és Thaiföld és a gazdaságilag fejlett Dél-Korea gazdasági átalakulásának elemzésére. Az 1955-1998-as időtávot vizsgálva ifj. Simon megállapítja, hogy ezeknek az országoknak a fejlődése — a Simon modell alapján — nem tért el jellemzően a fejlett országok gazdasági fejlődési pályájától.

[227] Simon a fizikai és humántőke kölcsönhatásának elemzésére fókuszál. A mi célunk más, mi a hosszú távú pálya alapvető tulajdonságait elemezzük, ezért elfogadható a szélesebb értelemben vett tőkeállomány egyszerűsítő feltevése.

2. Feltesszük, hogy az α pozitív és kisebb, mint egy, azaz

$$0 < \alpha(t) < 1, \forall t. \tag{109}$$

3. Specifikáljuk a $\alpha(.)$ függvényt a következő alakban

$$\alpha(t) = 1 - \frac{1}{\frac{K(t)}{L(t)}} = 1 - \exp\left[-\ln\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)\right] = 1 - \exp\left[-\ln\left(k(t)\right)\right] \tag{110}$$

$$\ln\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right) = \ln k(t) > 0 \Leftrightarrow k > 1 \tag{111}$$

Tehát feltesszük, hogy a gazdaság viszonylag fejlett, és ebben az esetben a tőke mennyisége meghaladja a munkáét.[228] Továbbá feltesszük, hogy a tőkeintenzitás növekedése[229] során a tőkeállomány részesedése a termelésben növekvő.

Ezek alapján a *termelési függvény*re a következő alakot kapjuk:

$$Y(t) = AK^{\alpha(t)}(t)\, L^{1-\alpha(t)}(t) \tag{112}$$

Az (112) endogén termelési függvény intenzív formája a (110) feltétel esetén:

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)} = A\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^{\alpha(t)} = Ak^{\alpha(t)}(t)$$

$$= A\exp\left\{\alpha(t)\cdot\ln k(t)\right\} = A\exp\left\{\left[1 - \exp\left(-\ln k(t)\right)\right]\cdot\ln k(t)\right\}$$

$$= A\exp\left\{\left[1 - \frac{1}{k(t)}\right]\cdot\ln k(t)\right\}$$

$$y(t) = f(k(t)) = Ak^{1-\frac{1}{k(t)}}(t) = Ak(t)\cdot\frac{1}{k^{\frac{1}{k(t)}}(t)}, \tag{113}$$

ahol A nem más, mint egy szintparaméter. A további elemzéshez a (113) alatti termelési függvényt fogjuk használni.[230]

[228] Az (110) forma teljesíti az előbbi (109) kikötésünket, hiszen $\lim_{k\to+\infty}\alpha(k) = \lim_{k\to+\infty}(1-\exp(-\ln k)) = 1$, és a (111) miatt $k > 1$, így minden véges k-ra $0 < \alpha < 1$.

[229] A tőkeintenzitás növekedése jellemezheti például a gazdaság automatizáltsági fokának növekedését.

[230] Ez a termelési függvény a Simon modell termelési függényéből is levezethető, ha:

- A standard felszereltségi mutatót alkalmazzuk: K/L. Ez egyben azt is jelenti, hogy feltesszük, hogy a gazdaságunk viszonylag fejlett, azaz a $(K^* + L)^{G_X}$ kifejezésben, illetve a tőkefelszereltségi mutatóban, F_K-ban, az L komponenst el lehet hanyagolni.
- Az M^* változó helyébe az L kerül, azaz eltekintünk a munkaidő hosszának változásától. Tehát az F_M felszereltségi mutató értéke nulla: $F_M = 0$;
- Ha a Simon modell (108) egyenletéből elhagyva a humántőke hatását kapjuk a következő feltételünket: $G_{KH} = 1$;
- Ha eltekintünk a K+F hatástól is. Így a (106) egyenletéből kapjuk a képzetség (G_H)

7.6.1. Hosszú távú egyensúly

Ebben az alpontban a fentiekben bevezetett új termelési függvény és a hosszú távú egyenletes növekedési pálya kapcsolatát vizsgáljuk. Induljunk ki a neoklasszikus akkumulációs modell alapegyenletéből, ahol n a népesség növekedés exogén üteme, δ pedig az exogén amortizációs kulcs:

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (n+\delta) k(t),$$

amelyet növekedési rátára felírva kapjuk:

$$\gamma_k = \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{sf(k(t))}{k(t)} - (n+\delta). \tag{114}$$

Az alábbiakban bevezetünk két elnevezést, amelyek segítségével a tőkeakkumulációs modellben megkülönböztetjük a gazdaságok fenntartható növekedési lehetőségét a stagnáló állapottól.

40. Definíció. *A (114) egyenletnek k^* neoklasszikus hosszú távú egyensúlyi megoldása, ha $sf(k^*)/k^* - (n+\delta) = 0$, azaz ha a k^* helyen $\gamma_k = 0$.*

41. Definíció. *A (114) egyenletnek azt a $k(t)$ pályáját, amely mentén $t \to \infty$ esetén endogén növekedési ütem valósul meg, azaz $\lim_{t\to\infty} \gamma_k = c > 0$, ahol c egy konstans, endogén hosszú távú egyensúlyi pályának nevezzük.*

A 40. Definíció — ami a stacionárius megoldást jelenti — azt mondja ki, hogy a tőke és a munka hosszú távon csak azonos ütemben nőhet, és sem munkanélküliség, sem kihasználatlan kapacitás nem lehet, illetve a gazdaság hosszú távon (egy főre vetített tényezők esetén) nem növekedhet csak az exogén technikai fejlődés következtében. A 41. Definíció ezzel szemben azt jelenti, hogy egy gazdaságban hosszú távon is elképzelhető pozitív növekedési ütem, továbbá, hogy a tőkeállomány gyorsabban gyarapodhat, mint a munkaállomány, tehát *exogén* technikai haladás nélkül is létezhet tartós növekedés.

Az alábbiakban azt vizsgáljuk meg, hogy mit mondhatunk a feltételezett új termelési függvény esetén a két eltérő típusú hosszú távú egyensúly létezéséről.

Megmutatjuk, hogy a hosszú távú egyensúly létezése a modell paramétereinek függvénye, szemben a standard neoklasszikus modellel, ahol a termelési függvény símasági feltételei minden esetben garantálják az egyensúly létezését. Továbbá megmutatjuk, hogy jellemzően két neoklasszikus hosszú távú egyensúlyi megoldás létezik.

és K+F hatás (G_R) elhagyásával a következő feltevésünket $G_M = G_H + G_R = 0$, azaz a mobil hatás nulla;

- A tőke hatásmechanizmusa a (107) egyenlet alapján: $G_{KK} = g_I F_K = g_I \ln k$,
- továbbá ha $g_I = 1$.

Ekkor ugyanis a (105) szerint $G_I = 1 - \exp(-G_{KK} G_{KH}) = 1 - \exp(-\ln k)$ és így a (104) alapján $G_X = G_I + G_M = G_I = 1 - \exp(-\ln k)$. Tehát a termelési függvény: $y = Ak^{G_X} = A\exp[G_X F_K] = A\exp\{[1-\exp(-\ln k)]\ln k\}$.

42. Állítás. *A (114) alapegyenlet a (113) termelési függvény esetén nem biztosítja stacionárius hosszú távú egyensúlyi megoldás létezését. Ha azonban*

$$sA \cdot \exp\left[\frac{-1}{e}\right] < n + \delta,$$

akkor létezik két — k_1^*, k_2^* ($k_1^* < k_2^*$) — stacionárius megoldás, ahol k_1^* lokálisan aszimptotikusan stabil.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy stacionárius esetben

$$\gamma_k = \dot{k}(t)/k(t) = 0 \Leftrightarrow \dot{k}(t) = 0.$$

$$sf(k(t)) = (n+\delta)\,k(t).$$

Felhasználva a (113) alatti termelési függvényt a következőt kapjuk:

$$sAk(t)\frac{1}{[k(t)]^{\frac{1}{k(t)}}} = (n+\delta)\,k(t)$$

$$sA\frac{1}{[k(t)]^{\frac{1}{k(t)}}} = (n+\delta) \tag{115}$$

$$\frac{sA}{n+\delta} = [k(t)]^{\frac{1}{k(t)}}$$

$$\ln\left(\frac{sA}{n+\delta}\right) = \frac{1}{k(t)}\ln k(t)$$

$$Ck(t) = \ln k(t), \tag{116}$$

ahol $C = \ln\left(\frac{sA}{n+\delta}\right)$ konstans. A (116) olyan k^*-ra teljesül, amikor az $\ln k$ függvénynek és egy az origóból induló sugárnak, $C \cdot k$ -nak (lásd a 21. ábrát), metszéspontja van. Ez természetesen a C konstanstól, azaz a lineáris függvény meredekségétől függ. Tehát a (113) és (114) rendszer nem biztosítja feltétlenül neoklasszikus hosszú távú egyensúly egzisztenciáját.

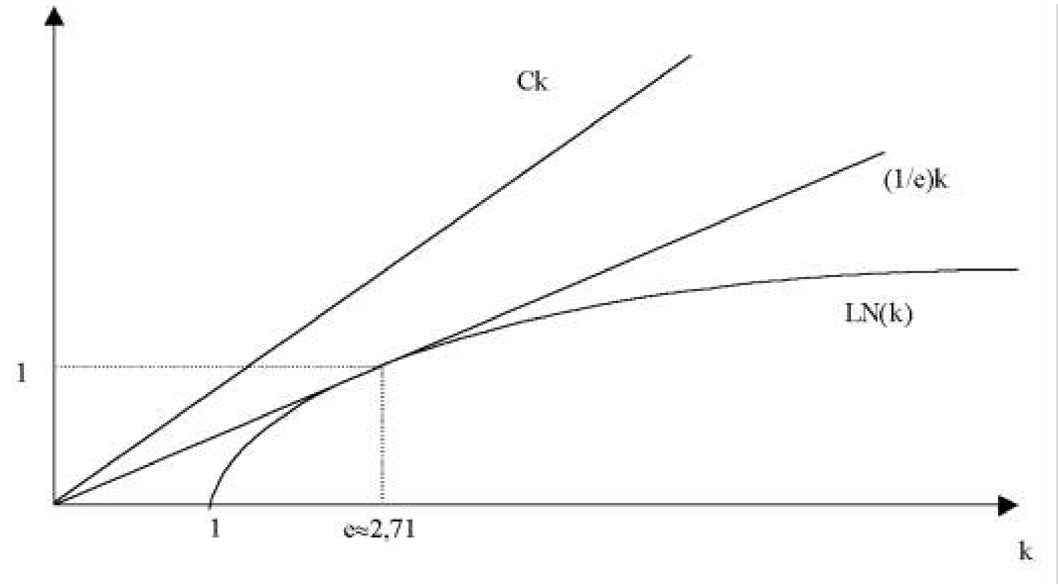
Mekkora C biztosítja stacionárius megoldás létezését? A 21. ábra alapján láthatjuk, hogy a stacionárius megoldás feltétele, hogy

$$C \leq \frac{1}{e}$$

$$\ln\left(\frac{sA}{n+\delta}\right) \leq \frac{1}{e} \Longleftrightarrow sA \cdot \exp\left[\frac{-1}{e}\right] \leq n+\delta.$$

Ha $sA \cdot \exp\left[\frac{-1}{e}\right] < n+\delta$ akkor két megoldás adódik, $k_1^* < k_2^*$, úgy hogy $1 < k_1^* < e$ és $e < k_2^*$. (Lásd a 22. ábrát.)[231]

[231] Ha $C = \frac{1}{e}$, azaz ha $sA \cdot \exp\left[\frac{-1}{e}\right] = n+\delta$, akkor egy stacionárius megoldás adódik, $k^* = e$, amely az $(1, e]$ intervallumon stabil, az $[e, +\infty)$ intervallumon instabil.



21. ábra. Neoklasszikus hosszú távú egyensúly

A k_1^* stabilitásához kell, hogy

$$\frac{d\dot{k}}{dk}\,|_{k=k_1^*}=\frac{d\left[sAk^{1-\frac{1}{k}}-(n+\delta)\,k\right]}{dk}\,|_{k=k_1^*}<0 \tag{117}$$

Mivel $f(k)=Ak^{1-\frac{1}{k}}=A\exp\left[\left(1-\frac{1}{k}\right)\ln k\right]$, így a derivált

$$f'(k)=Ak^{1-\frac{1}{k}}\left[\frac{\ln k}{k^2}+\left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{1}{k}\right]=Ak^{-\frac{1}{k}}\left[\frac{\ln k}{k}+1-\frac{1}{k}\right]. \tag{118}$$

Beírva a (118) kifejezést a (117) stabilitási feltételbe kapjuk, hogy

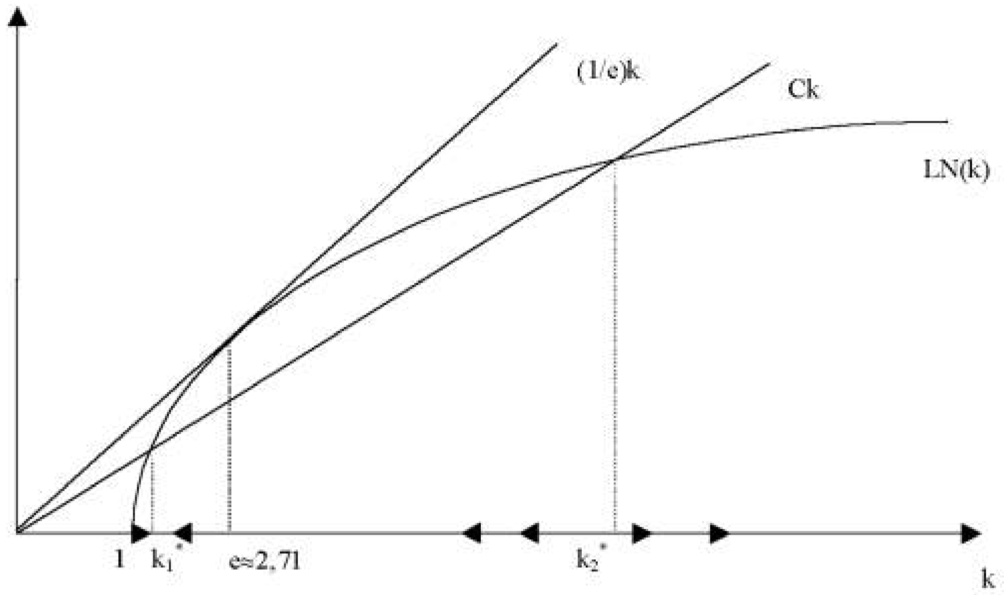
$$sA\left(k_1^*\right)^{-\frac{1}{k_1^*}}\left[1+\frac{\ln k_1^*}{k_1^*}-\frac{1}{k_1^*}\right]-(n+\delta)<0. \tag{119}$$

A (115) egyenlőség a stacionárius esetben

$$sA\left(k_1^*\right)^{-\frac{1}{k_1^*}}=(n+\delta)\Longleftrightarrow\left(k_1^*\right)^{-\frac{1}{k_1^*}}=\frac{(n+\delta)}{sA}. \tag{120}$$

A (120) kifejezést beírva a (119) egyenlőtlenség baloldalába adódik, hogy

$$sA\frac{(n+\delta)}{sA}\left[1+\frac{\ln k_1^*}{k_1^*}-\frac{1}{k_1^*}\right]-(n+\delta)<0,$$



22. ábra. Endogén hosszú távú egyensúly

ahonnan rendezés után kapjuk, hogy

$$\left[1+\left(\frac{\ln k_1^*}{k_1^*}-\frac{1}{k_1^*}\right)\right]<1 \Leftrightarrow \frac{1}{k_1^*}\left(\ln k_1^*-1\right)<0 \tag{121}$$

Mivel a (111) feltétel alapján $k_1^* > 1$, ezért a (121) baloldalának előjelét a $(\ln k_1^* - 1)$ kifejezés előjele határozza meg. Ha tehát $k_2^* > e$ akkor a derivált pozitív, és ha $0 < k_1^* < e$, akkor a derivált értéke negatív. Tehát k_1^* egyensúlyi pont lokálisan aszimptotikusan stabil, a k_2^* pedig instabil megoldás, amint azt a 22. ábra is mutatja.

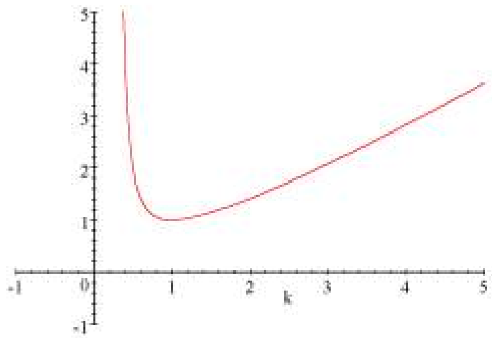
■

Az endogén termelési függvény alakja. Vizsgáljuk meg először, hogy hosszú távon a (113) termelési függvényre teljesülnek-e az *Inada feltételek*, azaz $\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$ és $\lim_{k\to 0} f'(k) = \infty$. A (118) szerint a termelési függvény deriváltja

$$f'(k) = Ak^{-\frac{1}{k}}\left[\frac{\ln k}{k}+1-\frac{1}{k}\right].$$

Ekkor tehát

$$\lim_{k\to\infty} f'(k) = \lim_{k\to\infty} Ak^{-\frac{1}{k}}\left[\frac{\ln k}{k}+1-\frac{1}{k}\right] = A, \tag{122}$$



23. ábra.
Az endogén termelési függvény intenzív formájának gráfja a k=1 környezetében

$$\lim_{k\to0^+} f'(k) = \lim_{k\to0^+} Ak^{-\frac{1}{k}}\left[\frac{\ln k}{k} + 1 - \frac{1}{k}\right] = -\infty.$$

Tehát *nem teljesülnek* az Inada feltételek.[232]
Ha azonban figyelembe vesszük a (111) feltételt, azaz $k > 1$, akkor

$$\lim_{k\to1} f'(k) = 0. \tag{123}$$

A 23. és 24. ábrák az $y = f(k) = Ak^{1-\frac{1}{k}}$ termelési függvény gráfját mutatják $A = 1$ esetén. Jól látható, hogy a meredekségek megfelelnek a kiszámított értékeknek.

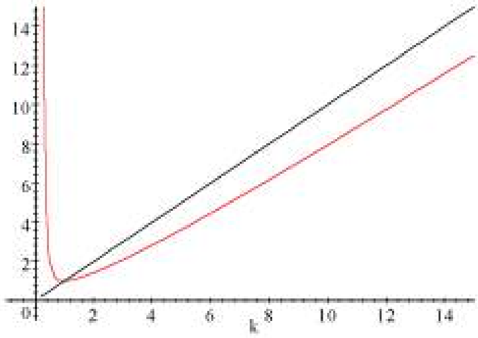
Amint arra az 5. Fejezetben rámutattunk az endogén növekedés szükséges feltétele az volt, hogy a határtermék $k \to \infty$ esetén egy nullától különböző konstanshoz tarson.[233] A (122) feltétel szerint a tőke határterméke tart egy konstanshoz, tehát itt megvalósulhat az endogén növekedés. A következő állításban azt mondjuk ki, hogy endogén termelési függvény esetén megvalósulhat a endogén hosszú távú egyensúlyi növekedési pálya.

43. Állítás. *A* (113) *alatti termelési függvény esetén, ha* $k(t) > k_2^*$ *és* $sA > n + \delta$, *akkor a* (114) *alapegyenletre*

$$\lim_{t\to\infty} \gamma_k = c > 0,$$

ahol c *konstans.*

[232] A $k \to 0^+$ jelölés azt jelenti, hogy k a pozitív értékeken keresztül tart zérushoz.
[233] Lásd például az 5.3.1. alpont (55) kifejezését vagy az 5.5. pontban a CES függvények azon oszályát, ahol $0 < \Psi < 1$.



24. ábra.
Az endogén termelési függvény intenzív formájának gráfja és az $y = k$ egyenes

Bizonyítás. A (113) alatti termelési függvény esetén, ha $sA > n + \delta$, akkor

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\gamma_k &= \lim_{k\to\infty}\left[\frac{sf(k)}{k} - (n+\delta)\right] \\ &= \lim_{k\to\infty}\left[sAk^{\frac{-1}{k}} - (n+\delta)\right] = sA - (n+\delta) = c > 0, \qquad (124)\end{aligned}$$

hiszen $\lim_{k\to\infty} k^{\frac{-1}{k}} = 1$.[234]

Mivel $k(t) > k_2^*$ esetén $\lim_{t\to\infty}\gamma_k > 0$ és $\lim_{t\to\infty} k(t) = \infty$, így (124) alapján

$$\lim_{t\to\infty}\gamma_k = \lim_{k\to\infty}\gamma_k = c > 0.$$

■

7.6.2. Endogén termelési függvény és konvergencia

Ebben az részben megmutatjuk, hogy ha $sA\exp\left[\frac{-1}{e}\right] < n + \delta$ és $1 < k_1^* < e$, akkor érvényesül a feltételes konvergencia, azaz az egyensúlyhoz közeledve a k növekedési üteme csökken. A 42. Állításból következik, hogy

$$\gamma_k = sA\frac{1}{k^*}k^{*1-\frac{1}{k^*}} - (n+\delta) = 0,$$

ahol $k^* = k_1^*$.

Tegyük fel, hogy a kiinduló pont a stabil egyensúly környezetében van. Ekkor a konvergencia sebességet meghatározhatjuk a loglinearizált rendszer egyensúly

[234] A $\lim_{k\to\infty} k^{\frac{-1}{k}} = \lim_{k\to\infty}\left[\exp - \left(\frac{\ln k}{k}\right)\right] = 1$, mivel $\lim_{k\to\infty}\frac{\ln k}{k} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0$ a L'Hôpital szabály szerint.

6. táblázat.
Endogén hosszú távú egyensúlyi pontok (k^*), a hozzájuk tartozó konvergencia sebesség (β) és a félút megtételéhez szükséges évek száma

k*	β	**50% (év)**
1,1	0,1508	4,6
1,2	0,1171	5,9
1,3	0,0927	7,5
1,4	0,0745	9,3
1,5	0,0605	11,5
1,6	0,0494	14,0
1,7	0,0404	17,2
1,8	0,0330	21,0
1,9	0,0269	25,8
2	0,0217	31,9
2,1	0,0173	40,2
2,2	0,0134	51,6
2,3	0,0101	68,5
2,4	0,0072	96,2
2,5	0,0046	149,3
2,6	0,0024	292,5
2,7	0,0003	2003,2

körüli 1-fokú Taylor közelítésével.

$$\gamma_k = \frac{d\ln k}{dt} \simeq \gamma_k(k^*) + \frac{d\gamma_k}{d\ln k}\,|_{k^*} \cdot (\ln k - \ln k^*)$$

Mivel tudjuk, hogy $Ak^{-\frac{1}{k}} = A\exp\left[-\frac{1}{k}\ln k\right] = A\exp\left[\exp\left[-\ln k\right]\cdot \ln k\right]$

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma_k}{d\ln k} &= \frac{d(sA\exp\left[\exp\left[-\ln k\right]\cdot\ln k\right] - (n+\delta))}{d\ln k} \\ &= sA\exp\left[\exp\left[-\ln k\right]\cdot\ln k\right]\left\{-\exp\left[-\ln k\right]\ln k + \exp\left[-\ln k\right]\right\} \\ &= sAk^{-\frac{1}{k}}\exp\left[-\ln k\right]\left[1-\ln k\right] = sAk^{-\frac{1}{k}-1}\left[1-\ln k\right]\end{aligned}$$

Ez a kifejezés $1 < k_1^* < e$ esetén negatív. Az egyensúly környezetében az első fokú Taylor közelítés:

$$\begin{aligned}\gamma_k = \frac{d\ln k}{dt} &\simeq \gamma_k(k^*) + \frac{d\gamma_k}{d\ln k}\,|_{k^*} \cdot (\ln k - \ln k^*) \\ &= 0 + sk^{*-\frac{1}{k^*}-1}\left[1-\ln k^*\right]\cdot(\ln k - \ln k^*).\end{aligned}$$

Azaz

$$\gamma_k = sk^{*-\frac{1}{k^*}-1}\left[1-\ln k^*\right]\cdot(\ln k - \ln k^*). \tag{125}$$

Ahol tehát a konvergencia sebességet (β–át) $sk^{*-\frac{1}{k^*}-1}\left[1-\ln k^*\right]$ kifejezés határozza meg.

Amint azt a 6. táblázat mutatja a különböző hosszú távú egyensúlyi értékhez (k^*) különböző konvergencia sebességek (β) tartoznak. Például, ha az egyensúlyi tőkeintenzitás $k^* = 2$, akkor a felzárkózás üteme közel van ahhoz a 2 százalékhoz, amit a konvergencia irodalomból ismerhetünk. A táblázat harmadik oszlopa azt mutatja, hogy a félút megtételéhez hány év szükséges. A (125) egyenlet mutatja a feltételes konvergenciát, hiszen ha $k \to k^*$, akkor γ_k csökken és tart nullához.

A kibocsátás növekedési üteme. Eddig csak a tőkeintenzitás időbeli alakulásával foglalkoztunk. Most megmutatjuk, hogy mi a kapcsolata az egy főre jutó kibocsátás növekedési ütemével (γ_y). Megmutatjuk, hogy γ_y — hasonlóan, mint a Cobb–Douglas termelési függvény esetén — kisebb egyenlő, mint γ_k, azaz az egy főre jutó tőkeállomány növekedési üteme. Tudjuk, hogy

$$\begin{aligned}\gamma_y(t) &= \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \frac{f'(k(t))\dot{k}(t)}{f(k(t))} \\ &= \frac{f'(k(t))\dot{k}(t)}{f(k(t))}\frac{k(t)}{k(t)} = \gamma_k(t)\cdot\frac{f'(k(t))}{f(k(t))}k(t) = \gamma_k(t)\cdot\varepsilon_k^y(t),\end{aligned}$$

ahol ε_k^y az intenzív termelési függvény k szerinti rugalmassága, ami a Cobb–Douglas esetben α konstans.

Itt azonban

$$f'(k) = \frac{dA\exp\left[\left(1-\frac{1}{k}\right)\ln k\right]}{dk} =$$

$$= A\exp\left[\left(1-\frac{1}{k(t)}\right)\ln k(t)\right]\cdot\left[\frac{\ln k(t)}{k^2(t)}+\frac{1}{k(t)}\left(1-\frac{1}{k(t)}\right)\right].$$

Tehát az egy főre jutó kibocsátás növekedési ütemére a következő adódik

$$\begin{aligned}
\gamma_y(t) &= \gamma_k(t)\cdot\frac{f'(k(t))}{f(k(t))}k(t)\\
&= \gamma_k(t)\frac{A\exp\left[\left(1-\frac{1}{k(t)}\right)\ln k(t)\right]\cdot\left[\frac{\ln k(t)}{k^2(t)}+\frac{1}{k(t)}\left(1-\frac{1}{k(t)}\right)\right]}{A\exp\left[\left(1-\frac{1}{k(t)}\right)\ln k(t)\right]}k(t)
\end{aligned}$$

$$= \gamma_k\frac{1}{k(t)}\left[\frac{\ln k(t)}{k(t)}+\left(1-\frac{1}{k(t)}\right)\right]k(t)$$

$$\gamma_y(t) = \left[\frac{\ln k(t)}{k(t)}+\left(1-\frac{1}{k(t)}\right)\right]\gamma_k(t).$$

A stabil egyensúly közelében tudjuk, hogy $1 < k(t) < e$. Ebből következik, hogy $0 < \left[\frac{\ln k(t)}{k(t)}+\left(1-\frac{1}{k(t)}\right)\right] < 1$.

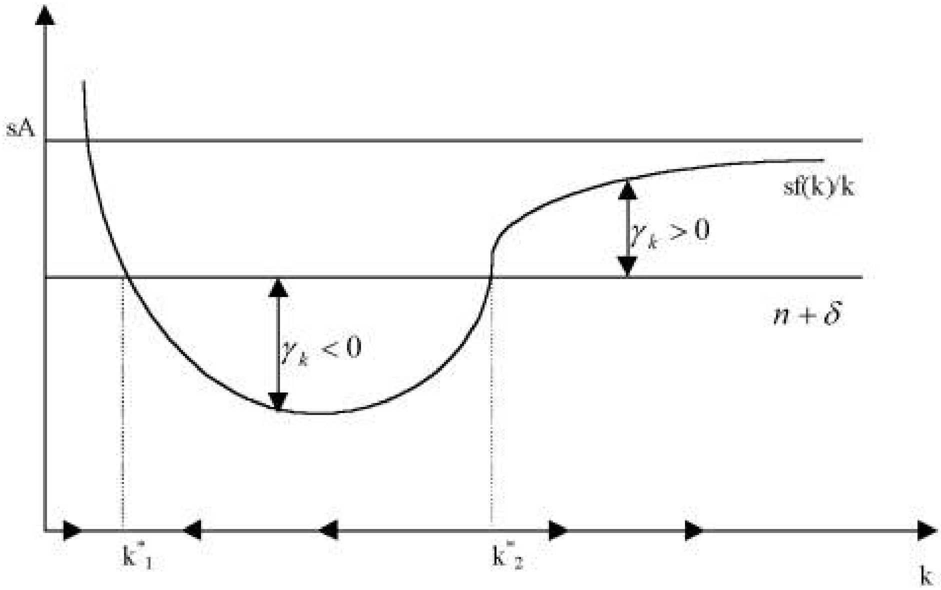
Tehát

$$0 < \varepsilon_k^y(t) < 1$$

hasonlóan a Cobb–Douglas α-jához, amely $0 < \alpha < 1$. Mivel a k_1^* stacionárius megoldás esetén az $(1, k_2^*)$ intervallumon $\lim_{k\to k_1^*}\gamma_k = 0$ és $\lim_{k\to k_1^*}\varepsilon_k^y = \varepsilon_{k^*}^y$ konstans. Tehát az $(1, k_2^*)$ intervallumon $\lim_{t\to\infty}\gamma_y(t) = 0$. Ha azonban $k(t) > k_2^*$ és $sA > n+\delta$, akkor $\lim_{t\to\infty}\varepsilon_k^y(t) = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{\ln k(t)}{k(t)}+\left(1-\frac{1}{k(t)}\right)\right] = 1$. Ekkor $\lim_{t\to\infty}\gamma_y(t) = \lim_{t\to\infty}\gamma_k(t) = sA-(n+\delta) = c > 0$. Tehát az egy főre jutó kibocsátásnak van egy hosszú távú endogén növekedési pályája. (Lásd a 25. ábrát.)

Ebben a pontban megmutattuk, hogy ha az akkumulációs modellbe endogén termelési függvényt illesztünk, akkor:

- a neoklasszikus hosszú távú egyensúlyi megoldás (pálya) egzisztenciája a modell paramétereinek függvénye;
- jellemzően két nem triviális stacionárius megoldás adódik, amelyek közül az egyik stabil, k_1^*, (ahol $k_1^* \in (1, e)$), a másik instabil, k_2^*, (ahol $k_2^* \in (e, +\infty)$);
- megvalósul a feltételes konvergencia a stabil megoldás esetén (az $(1, k_2^*)$ intervallumon);
- a konvergencia sebesség a megtakarítási ráta függvénye lesz;
- továbbá $k(t) > k_2^*$ esetén létezik endogén hosszú távú egyensúlyi pálya, tehát ez a modell képes magyarázni a fejlett gazdaságok, mint például az USA, egy főre jutó kibocsátásának hosszú távú tartós növekedését exogén technikai haladás hiányában is.



25. ábra. Neoklasszikus és endogén hosszú távú egyensúlyi pálya

8. Összefoglalás

A dolgozatban — összhangban a közgazdasági elmélet elmúlt évtizedekben történt hangsúlyváltásával — a dinamikus megközelítést, a folyamatok nyomonkövetését tekintettem feladatomnak. Kutatásom középpontjában a gazdasági dinamika állt.

A dolgozat három témakörre koncentrált, a növekedéselmélet, a konvergenciaelmélet és a technikai haladás témakörére. A három szorosan kapcsolódó terület elméleti és módszertani áttekintésén túl a dolgozatban a problémaköröket önálló eredmények egészítik ki, melyek röviden az alábbiakban foglalhatók össze.

A dolgozat a fenti témaköröket egységes gondolati és egységes jelölési rendszerrel tárgyalta, és egyben azok kritikai elemzését adta. Ez az egységes keret a témakörök átfedéseinek eddigieknél részletesebb elemzését tette lehetővé.

Kiemeltük azon fontosabb hiányosságokat, amelyek elméleti síkon is akadályozzák a gazdasági folyamatok pontosabb leírását. Rámutattunk arra, hogy a növekedéselmélet a gazdaságok hosszú távú pályáinak elemzésére számos terminológiát használ, amelyek tartalma gyakran nem egyértelmű. A dolgozat elején ezeknek a fogalmaknak a tisztázását tettük meg.

Két új fogalmat vezettünk be, mert közgazdasági tartalom szempontjából fontosnak tartjuk kiemelni, hogy egy gazdaság hosszú távon bővülő vagy stagnáló pályán halad. A két fogalom — a *stacionárius állapot* és az *egyenletes növekedés* — az úgynevezett tartós állapot (steady state) felbontását jelenti. Megmutattuk, hogy növekedéselméleti szempontból az egyenletes növekedés fogalma, azaz a bővülő gazdaság vizsgálata a releváns, mégis a legtöbb modell a stacionárius állapotot határozza meg.

Megmutattuk a Mankiw–Romer–Weil [1992] modell segítségével, hogy a gazdasági tényezők konvergencia sebessége reálisan nem egy konkrét értékkel jellemezhető. A többváltozós rendszerek esetén (bizonyos irányoktól eltekintve) a konvergencia sebesség nagyságára legfeljebb alsó és felső közelítés adható.

Bemutattuk, hogy a technikai haladás elemzésére az eddigi elemzéseken túl lehetőség nyílik a termelési szerkezet endogenizálásán keresztül. Az eddigi közgazdasági elemzések ugyanis arra az implicit feltevésre támaszkodtak, hogy a gazdasági változók tetszőleges alakulása érintetlenül hagyja a termelés szerkezetét, azaz a termelési függvényt. A dolgozatban ennek a hiányosságnak a feloldására adtunk egy megoldást.

A termelési szerkezet hosszú távú elemzéséhez három fogalmat vezettünk be:

- Az egyik az *endogén termelési függvény*, amely alatt olyan Cobb–Douglas típusú termelési függvényt értünk, amelyben a termelési tényezők részesedési paraméterei (kitevői) közvetlenül függnek a modell endogén változóitól, és így közvetve az időtől. Ez a specifikáció lehetőséget nyújt a technikai haladás legegyszerűbb megjelenítésével szemben a gazdaságok termelés szerkezetének, ezen keresztül a technikai haladásnak egy konkrétabb modellbeli leképezésére.

- A második az *endogén növekedési ütem*, amely alatt az egy főre jutó jövedelem olyan pozitív egyenletes növekedési rátáját értjük, amely exogén technikai haladás hiányában valósul meg. Ez a fogalom lehetőséget ad arra, hogy szétválasszuk a standard növekedéselméleti eredményeket az új eredményektől. A standard növekedéselméleti modellekben ugyanis az egy főre jutó gazdasági tényezők bővülésének szükséges feltétele volt az exogén technikai haladás beépítése.
- A harmadik az *endogén hosszú távú egyensúlyi pálya*, amely szerint hosszabb távon megvalósulhat olyan állapota a gazdaságnak, amelyben endogén növekedési ütemet realizál. Ez a fogalom az egyenletes, fenntartható növekedés lehetőségét emeli ki.

A termelési szerkezet endogenizálása nem jelent mást, mint a feltételezett termelési függvény korábban exogénként kezelt paramétereinek elemzése. Dolgozatomban — Simon [1998, 1999] empirikus eredményeitől inspirálva — azt az esetet vizsgáltam, amikor a tőkekitevő a termelési tényezők és az idő függvénye, azaz az endogén részesedési paraméter konvergencia- és növekedéselméleti hatását elemeztem.

Bebizonyítottuk, hogy a tőkekitevő endogenizálása (ami egy endogén termelési függvényt jelent) lehetővé teszi endogén hosszú távú egyensúlyi pálya létezését. Rámutattunk arra, hogy szemben a neoklasszikus modellel, a stacionárius állapot egzisztenciája a gazdaság paramétereinek függvénye, továbbá jellemzően két nem triviális megoldás adódik, amelyek közül az egyik lokálisan aszimptotikusan stabil, a másik instabil.

Bebizonyítottuk, hogy a stabil megoldás esetén megvalósul a feltételes konvergencia.

Összességében remélem az Olvasót sikerült meggyőzni arról, hogy a fent leírtak a gazdasági modellezés, a gazdasági növekedés folyamatainak jobb leírásához, megértéséhez vezető út mentén helyezkednek el.

9. FÜGGELÉK

9.1. A neoklasszikus modell következményei

44. Következmény. *A neoklasszikus modellnek $k(t) > 0$ esetén egy és csak egy stacionárius megoldása van.*

Bizonyítás. A stacionárius megoldás esetén

$$\gamma_k = \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = s\frac{f(k(t))}{k(t)} - (n+\delta) = 0,$$

ahol $(n+\delta) > 0$ konstans. Mivel $k(t)$ növelésével, $f(k(t))$ tart a végtelenhez, illetve $k(t)$ csökkenésével, $f(k(t))$ tart nullához, hányadosuk határértékének meghatározásához a L'Hôpital szabály alkalmazásával jutunk:

$$\lim_{k\to 0}\left(s\frac{f(k)}{k}\right) = \lim_{k\to 0}\left(sf^{'}(k)\right) = \infty$$

$$\lim_{k\to \infty}\left(s\frac{f(k)}{k}\right) = \lim_{k\to \infty}\left(sf^{'}(k)\right) = 0.$$

A γ_k a k-nak tehát folytonos és szigorúan monoton csökkenő függvénye. Így a stacionárius esetben csak egy olyan k^* létezik, amelyre $\gamma_k = 0$ esetén

$$sf(k^*)/k^* = (n+\delta).$$

Tegyük fel, hogy kétezik két (egyik sem triviális, azaz zérus) megoldás, úgy hogy $k_1^* < k_2^*$. Ekkor $s\frac{f(k_1^*)}{k_1^*} - (n+\delta) = 0$, és $s\frac{f(k_2^*)}{k_2^*} - (n+\delta) = 0$. Ez azonban ellent mond az $s\frac{f(k)}{k}$ függvény szigorú monotonitásának, hiszen két helyen venné fel a $n+\delta$ értéket. Tehát $k_1^* = k_2^*$. ∎

45. Következmény. *A neoklasszikus modell k^* stacionárius pontja lokálisan aszimptotikusan stabil.*

Bizonyítás. Mivel

$$\dot{k} = sf(k) - (n+\delta)k$$

és tudjuk, hogy a stacionárius pontban $s\frac{f(k^*)}{k^*} = n+\delta$ így

$$\frac{d\dot{k}}{dk}\,|_{k^*} = \frac{-s}{k}\left[f(k) - kf'(k)\right] < 0,$$

hiszen a szögletes zárójelen belül a munka pozitív határterméke áll. ∎

46. Következmény. *A neoklasszikus modell y^* stacionárius pontja lokálisan aszimptotikusan stabil.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy

$$\frac{d\dot{y}}{dy}\mid_{k^*}=\frac{d\dot{y}}{dk}\frac{dk}{dy}\mid_{k^*},$$

ahol $\dot{y}=f'(k)\cdot\dot{k}$ és $\frac{dk}{dy}=\frac{1}{f'(k)}$. Így

$$\frac{d\dot{y}}{dk}\frac{dk}{dy}\mid_{k^*}=\left[f''(k^*)\cdot\dot{k}^*+f'(k^*)\left(\frac{d\dot{k}}{dk}\right)_{k^*}\right]\frac{1}{f'(k^*)}<0,$$

hiszen $\dot{k}^*\equiv 0$, és a 45. Következmény miatt $\left(\frac{d\dot{k}}{dk}\right)_{k^*}<0$. ■

9.2. CES függvények

A CES függvények tulajdonságainak bemutatásához felhasználtam Zalai [1989, 2000], Barro–Sala-i-Martin [1995] és Sydsæter–Hammond [1998] megfelelő részeit.

A homogén függvények legegyszerűbb és sokat használt csoportja a CES-függvénycsalád, amely magában foglalja speciális esetként a lineáris, a Cobb–Douglas-, és a Leontief-típusú függvényeket. Az alábbiakban a CES függvények jellegzetes tulajdonságait tekintjük át.

A kibocsátást, Y-t, az egyszerűség kedvéért csak két termelési tényező — a tőke, K, és a munka, L — határozza meg. A CES függvények általános alakja a következő formában írható fel:

$$Y=A\left\{a_K(K)^{-\psi}+a_L(L)^{-\psi}\right\}^{-\frac{h}{\psi}}=$$

$$=\left\{A_K(K)^{-\psi}+A_L(L)^{-\psi}\right\}^{-\frac{h}{\psi}},$$

ahol $\sum_{i=K,L}a_i=1$. Az egyes paraméterek jelentése pedig a következő. A a szinttényező vagy más néven hatékonysági tényező. Az $a_i>0$ $(i=K,L)$ az input tényezők részesedési paramétere, h a homogenitás foka illetve a teljes volumenrugallmasság mértéke, a $\psi\,(\neq 0)$ a tényezők közötti parciális helyettesítési rugalmasságot meghatározó tényező. A helyettesítés rugalmassága: $|\sigma_{KL}|=\frac{1}{1+\psi}$ — amint az hamarosan látni fogjuk. A második forma az első egyszerű átalakítása, ahol $A_i=A^{-\frac{h}{\psi}}\cdot a_i\ (i=K,L)$. A függvényforma továbbá átírható az alábbi alakra rögzített fajlagos ráfordítási együtthatók $(0\leq b_K,b_L\leq 1)$ felhasználásával

$$Y=A\left\{a\left(b_K\cdot K\right)^{-\psi}+(1-a)\left[b_L\cdot L\right]^{-\psi}\right\}^{-\frac{h}{\psi}},$$

ahol $a=a_i\cdot b_i^{\psi}$. Ez a forma, egy súlyozott átlag függvénynek[235] és egy h-ad fokú hatványfüggvénynek a kombinációja.

[235] Legyen $h=A=b_i=1$ és $a_K=a_L=1/2$. Ekkor belátható, hogy $\psi=-1$ esetén a számtani, $\psi=0$ esetében (határértékban) a mértani, $\psi=1$ esetében pedig a harmónikus átlagot kapjuk. Vegyük figyelembe, hogy a kibocsátás mértékegységét mindig megválaszhatjuk úgy, hogy az A szintváltozó 1 legyen. Ilyen értelemben azt mondhatjuk, hogy, konstans volumenhozadék esetében a CES forma a kibocsátást a termelési tényezők súlyozott átlagaként határozza meg.

Az alapfüggvény formája és sajátosságai a ψ paraméter értékétől függnek. Mint ezt részletesen megvizsgáljuk, a ψ paraméternek három karakteriszitkus értéke $(-1, 0, \infty)$ különböztethető meg. A ψ értékétől függően más és más tulajdonságú izokvant görbéket kapunk.

Helyettesítési rugalmasság. Legyen $F(K, L) = C$ implicit függvény. Ekkor a K-nak L szerinti *helyettesítési határrátája*:

$$R_{KL} = \frac{\partial F/\partial L}{\partial F/\partial K}.$$

Továbbá K-nak L szerinti *helyettesítési rugalmassága*:

$$\sigma_{KL} = \frac{-\partial\left(\frac{K}{L}\right)}{\partial R_{KL}} \frac{R_{KL}}{\left(\frac{K}{L}\right)}.$$

Azaz σ_{KL} a $\frac{K}{L}$ aránynak a helyettesítési határráta, R_{KL}, szerinti elaszticitása. A $|\sigma_{KL}|$ tehát az a szám, amely megmutatja, hogy ha egy $F(K, L) = C$ izokvant mentén annyit mozgunk, hogy az R_{KL} 1 százalékkal növekedjen, akkor a $\frac{K}{L}$ tört (origóból inuló sugár meredeksége) hány százalékkal módosul.

Egy CES függvény esetén a helyettesítési határráta:

$$R_{KL} = \frac{(1-a)\cdot b_L}{a\cdot b_K}\left(\frac{K}{L}\right)^{1+\psi}. \tag{126}$$

Ezt átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{K}{L} = \left(\frac{(1-a)\cdot b_L}{a\cdot b_K}R_{KL}\right)^{\frac{1}{1+\psi}}. \tag{127}$$

Ebből a helyettesítési rugalmasság

$$\sigma_{KL} = -\frac{1}{1+\psi}\frac{(1-a)\,b_L}{ab_K}\left(\frac{(1-a)\,b_L}{ab_K}R_{KL}\right)^{\frac{1}{1+\psi}-1}\cdot\frac{R_{KL}}{\frac{K}{L}}.$$

A szorzat utolsó tagjának nevezőjében a $\frac{K}{L}$-t (127) felhasználásával helyettesítve kapjuk:

$$\sigma_{KL} = -\frac{1}{1+\psi}.$$

Ha $k = \frac{K}{L}$ és $\frac{Y}{L} = F(\frac{K}{L}, 1) = f(k)$, akkor

$$\sigma = -\frac{-\partial\left(\frac{K}{L}\right)}{\partial R_{KL}}\frac{R_{KL}}{\left(\frac{K}{L}\right)} = -\frac{f'\cdot(f-kf')}{f''k\cdot f}.$$

Hiszen

$$\sigma^{-1} = -\frac{\partial\left[\frac{dY/dK}{dY/dL}\right]}{\partial\left[\frac{K}{L}\right]}\frac{\left[\frac{K}{L}\right]}{\left[\frac{dY/dK}{dY/dL}\right]} = -\frac{\partial\left[\frac{f'}{(f-kf')}\right]}{\partial\left[k\right]}\frac{k}{\frac{f'}{(f-kf')}} =$$

$$= -\frac{f"\left[f - kf'\right] - f'\left\{f' - \left(f''k+\right)f'\right\}}{\left(f - kf'\right)^2}\frac{k\left(f - kf'\right)}{f'} =$$

$$= -\frac{f'' \cdot f \cdot k}{\left(f - kf'\right)f'}.$$

Ahonnan a reciprokot véve és a tagokat rendezve kapjuk:

$$\sigma = -\frac{f'}{f''k}\frac{\left(f - kf'\right)}{f}.$$

A $\psi < -1$ eset. Ekkor a függvény szintvonalai nem lesznek az origóra konvex görbék,[236] és mivel ezt a tulajdonságot a termelési függvények izokvantjairól általában feltételezzük, ezért a ψ paraméter értékét eleve csak a $[-1, \infty)$ intervallumra korlátozzuk. A $\psi < -1$ értékek mellett adódó forma két termék közötti transzformáció görbéjeként értelmezhető, s megkülönböztetés végett ebben az esetben *CET-függvény*ről beszélünk (constant elasticity of transformation).

A $\psi = -1$ eset. Ebben az esetben az izokvant görbék egyenesek lesznek, hiszen

$$Y = A\left\{a\left(b_K \cdot K\right) + (1-a)\left[b_L \cdot L\right]\right\}^h$$

$$K = \frac{1}{ab_K}\left(\frac{Y}{A}\right)^{\frac{1}{h}} - \frac{(1-a)\,b_L}{ab_K}L.$$

A helyettesítési határráta egy konstans, így a helyettesítési rugalmasság nem értelmezhető, illetve végtelen nagynak tekinthető. Lineáris izokvant esetén azt mondjuk, hogy a termelési tényezők *tökéletes helyettesítők*.

A $-1 < \psi < 0$ $(1 < \sigma_{KL} < \infty)$ eset. Ha ψ a $(-1, 0)$ intervallumba esik, akkor ugyan úgy, mint a lineáris esetben bármelyik tényezővel egyedül elő lehet állítani a terméket. Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben a két termelési tényező között még mindig a helyettesítő viszony dominál. Abszorpciós kapacitásnak nevezhetjük azt a felső korlátot, amely az egyik inputtényezőből szükséges a másik hiányában, a termék adott szintű előállításához. Rögzített Y kibocsátási szint mellett például a munka abszorpciós kapacitása

$$L = \frac{(1-a)^{\frac{1}{\psi}}}{b_L}\left(\frac{Y}{A}\right)^h.$$

Ebből az is adódik, hogy az adott Y kibocsátási szinthez tartozó izokvant görbe a fenti pontban éri el a munka koordináta tengelyét. Nyilvánvaló, hogy ebben a pontban $(K = 0)$ a helyettesítési határráta nulla, tehát az izokvant görbe ebben a pontban belesimul a koordináta tengelybe.

[236] Origóra konvexnek nevezünk egy izokvantot akkor, ha mindkét tengely felől nézve konvex.

A $\psi \to 0$ $(\sigma_{KL} = 1)$ eset. Jóllehet a CES függvény a $\psi = 0$ helyen nincs értelmezve, a függvény határértéke a Cobb–Douglas termelési függvény. A CES függvényt logaritmizálva és alkalmazva a L'Hopital szabályt kapjuk:

$$\lim_{\psi \to 0} (\ln Y) = \lim_{\psi \to 0} \left\{ \ln A - \frac{h}{\psi} \ln \left[a (b_K \cdot K)^{-\psi} + (1-a) [b_L \cdot L]^{-\psi} \right] \right\}$$

$$= \ln A - h \cdot \lim_{\psi \to 0} \frac{\ln \left[a (b_K \cdot K)^{-\psi} + (1-a) [b_L \cdot L]^{-\psi} \right]}{\psi}$$

$$= \ln A - h \cdot \lim_{\psi \to 0} - \frac{a (b_K \cdot K)^{-\psi} \ln (b_K \cdot K) + (1-a) [b_L \cdot L]^{-\psi} \ln (b_L \cdot L)}{a (b_K \cdot K)^{-\psi} + (1-a) [b_L \cdot L]}.$$

$$\lim_{\psi \to 0} (\ln Y) = \ln A + h \cdot \ln \left\{ (b_K \cdot K)^a \cdot [b_L \cdot L]^{1-a} \right\}.$$

Ahonnan kapjuk

$$Y = A (b_K \cdot K)^{ha} [b_L \cdot L]^{h(1-a)}.$$

A $\psi \to \infty$ $(\sigma_{KL} = 0)$ eset. Ha ψ minden határon túl nő, akkor a CES-függvény az úgynevezett Leontief-féle termelési függvénybe megy át. A termelési tényezők egymással való helyettesíthetősége most teljesen megszűnik és egymás ***tökéletes kiegészítő***ivé válnak. Legyen ugyanis egy adott pontban K és L pozitív, és tegyük fel, hogy $b_K \cdot K > b_L \cdot L$. A CES-függvényt — $b_L \cdot L$ kiemelésével — átrendezve kapjuk, hogy

$$Y = A [b_L \cdot L]^h \left\{ a \left[\frac{b_K \cdot K}{b_L \cdot L} \right]^{-\psi} + (1-a) \right\}^{-\frac{h}{\psi}}.$$

Mivel $b_K \cdot K > b_L \cdot L$, ezért

$$\lim_{\psi \to \infty} \left[\frac{b_L \cdot L}{b_K \cdot K} \right]^{\psi} = 0$$

$$\lim_{\psi \to \infty} \left\{ a \left[\frac{b_K \cdot K}{b_L \cdot L} \right]^{-\psi} + (1-a) \right\}^{-\frac{h}{\psi}} = 1.$$

Ebből már látható, hogy Y határértéke — ahogy ψ tart a végtelenbe — $A [b_L \cdot L]^h$ lesz. Fordított esetben, amikor $b_K \cdot K < b_L \cdot L$, a határérték $A (b_K \cdot K)^h$ lesz. Általában tehát

$$Y = A \cdot \min \left\{ (b_K \cdot K)^h, (b_L \cdot L)^h \right\}.$$

A helyettesítési ráta (126) képletéből látható, hogy annak értéke $b_K \cdot K = b_L \cdot L$ esetét kivéve nullához tart $(b_K \cdot K < b_L \cdot L)$, vagy végtelenhez $(b_K \cdot K > b_L \cdot L)$, azaz az izokvant görbék a $K = \frac{b_L}{b_K} L$ görbe mentén "betörnek". Ha $h = 1$, akkor az ilyen termelési függvényt Leontief-féle termelési függvénynek nevezzük.

9.3. Technológiai haladás

A következő állítást és bizonyítást Uzawa [1961] 119-120.o. alapján mutatjuk be.

47. Tétel. *A 3. Fejezetben tárgyalt $F(K(t), L(t), t)$ neoklasszikus termelési függvény által megjelenített technikai haladás akkor és csak akkor Harrod-semleges, ha a termelési függvény a következő alakú:*

$$F(K(t), L(t), t) = G[K(t), A(t) \cdot L(t)],$$

ahol $A(t) > 0$.

Bizonyítás. Mivel az $Y(t) = F(K(t), L(t), t)$ termelési függvény elsőfokon homogén, felírható egy főre jutó tényezőkkel

$$y(t) = f(k(t), t).$$

Tudjuk, hogy $\frac{\partial f}{\partial k} = f_k > 0$. Ebből következik, hogy a tőke-kibocsátás hányados $\kappa = \frac{k(t)}{f(k(t),t)}$ (az tőke átlagtermékének, $\frac{Y}{K}$, reciproka) k-nak monoton növekvő függvénye. Az Inverzfüggvény Tétel[237] alapján k explicit formában kifejezhető κ függvényeként

$$y = f[k(\kappa), t] = \phi(\kappa, t). \tag{128}$$

Ebből kapjuk, hogy

$$f_k = \frac{\partial y}{\partial k} = \phi_\kappa \cdot \frac{\partial \kappa}{\partial k}. \tag{129}$$

Deriváljuk az $\kappa = \frac{k}{y}$ k szerint

$$\frac{\partial \kappa}{\partial k} = \frac{y - k \cdot f_k}{y^2} = \frac{1 - \kappa \cdot f_k}{\phi}, \tag{130}$$

ahol a második egyenlőségnél kihasználtuk, a (128) és a $k = \kappa y$ összefüggéseket. Az (129) és (130) felhasználásával határozzuk meg f_k-t:

$$f_k = \frac{\phi_\kappa}{\phi + \kappa\phi_\kappa}.$$

A szükségesség bizonyítása:

A Harrod-semlegességből adódik, hogy ha κ konstans, akkor a határtermék f_k szintén csak κ függvénye, és nem függ közvetlenül az időtől, t-től. Legyen $f_k = \frac{\phi_\kappa}{\phi+\kappa\phi_\kappa} = c(\kappa)$. Ekkor $\frac{\phi_\kappa}{\phi} = \frac{c(\kappa)}{1-\kappa \cdot c(\kappa)}$ független az időtől. Integráljuk ezt most κ szerint, majd emeljük e-re mindkét oldalt!

$$y = \phi(\kappa, t) = A(t) \cdot \psi(\kappa) \tag{131}$$

[237] Legyen $G(x) = y$ folytonos és differenciálható úgy, hogy $G(x) > 0$ minden x vagy $G(x) < 0$ minden x-re. Ekkor minden y-hoz egyértelműen létezik egy x, úgy, hogy $x = H(y)$. Ezt a függvényt hívjuk inverz függvénynek.

Mivel az integrálás κ szerint tényezőnként történt, kapunk egy $A(t)$ függvényt és nem egy tetszőleges konstanst. Tudjuk, hogy κ növelésével y, a munka átlagterméke növekszik, azaz $\phi_\kappa > 0$. Így az Inverzfüggvény Tétel alapján (131) explicit megoldása felírható

$$\kappa = \frac{k}{y} = \xi\left[\frac{y}{A(t)}\right]$$

vagy

$$\frac{k}{A(t)} = \frac{y}{A(t)} \cdot \xi\left[\frac{y}{A(t)}\right].$$

Mivel a köztük lévő kapcsolat monoton, $\frac{y}{A(t)}$ felírható $\frac{k}{A(t)}$ függvényeként

$$\frac{y}{A(t)} = g\left[\frac{k}{A(t)}\right]. \tag{132}$$

Definiáljuk a következő függvényt:

$$F(K,N) \mathrel{\hat{=}} N \cdot g\left(\frac{K}{N}\right).$$

Az (132) alapján $f(k,t) = y = A(t) \cdot g\left[\frac{k}{A(t)}\right]$. Így

$$Q(K,L,t) = L \cdot f(k,t) = L \cdot A(t) \cdot g\left[\frac{k}{A(t)}\right].$$

Legyen $N = L \cdot A(t)$. Ekkor $Q(K,L,t) = N \cdot g\left(\frac{K}{N}\right) = F(K,N) = F[K, L \cdot A(t)]$. Ez bizonyítja, hogy a Harrod-semleges technikai haladás esetén a termelési függvénynek speciális alakja kell, hogy legyen.

Az elégségesség bizonyítása:

Azt kell belátnunk, hogy ha a termelési függvény $Q(K,L,t) = F[K, L \cdot A(t)]$ alakú, akkor a technikai haldás Harrod-semleges. Legyen $g(k) = F(k,1)$. Mivel $F_K > 0$, így $g_k > 0$. Mivel Q elsőfokon homogén

$$F[K, L \cdot A(t)] = L \cdot A(t) \cdot F\left[\frac{K}{L \cdot A(t)}, 1\right] = L \cdot A(t) \cdot g\left[\frac{k}{A(t)}\right]$$

vagy

$$y = A(t) \cdot g\left[\frac{k}{A(t)}\right].$$

Mivel $\kappa y = k$, ezt átírhatjuk $\frac{y}{A(t)} = g\left[\kappa \frac{y}{A(t)}\right]$. Mivel κ és y között monoton kapcsolat van, így az Inverzfüggvény Tétel alapján $\frac{y}{A(t)}$ egyértelműen felírható κ függvényeként

$$\frac{y}{A(t)} = \psi(\kappa)$$

azaz

$$y = \phi(\kappa, t) = A(t) \cdot \psi(\kappa).$$

Az (129) alapján

$$f_k = \frac{\phi_\kappa}{\phi + \kappa \cdot \phi_\kappa} = \frac{\psi'(\kappa)}{\psi(\kappa) + \kappa \cdot \psi'(\kappa)}.$$

Ez azonban azt jelenti, hogy a tőke határterméke állandó tőkeintenzitás esetén, κ, nem függ az időtől, azaz független t-től, ami a Harrod-semlegességet jelenti.
■

A következő állítás megtalálható Barro–Sala-i-Martin [1995] első fejezetének függelékében.

48. Állítás. *A 2.2. pontban ismertetett neoklasszikus termelési függvény esetén, ha létezik az egyenletes növekedési pálya, akkor a tőkekiterjesztő technológiai haladás felírható munkakiterjesztő technikai haladásként vagy Hicks-semleges technikai haladásként.*

Bizonyítás. Legyen a termelési függvény alakja

$$Y = F[B(t)K, A(t)L]. \tag{133}$$

Ha $B(t) = A(t)$, akkor a Hicks-semleges technikai haladást kapjuk vissza az $F(.)$ függvény elsőfokú homogenitása miatt.

Ha $B(t) \neq A(t)$, akkor az egységnyi tőkére jutó kibocsátás

$$\frac{Y}{K} = e^{zt} \cdot F\left[1, \frac{e^{xt}L}{e^{zt}K}\right] = e^{zt} \cdot \varphi\left[\frac{L}{K}e^{(x-z)t}\right], \tag{134}$$

ahol kihasználtuk, hogy $A(t) = e^{xt}$, és $B(t) = e^{zt}$, továbbá[238] $\varphi[.] = F\left[1, \frac{e^{xt}L}{e^{zt}K}\right]$.

Ha létezik egyenletes növekedési pálya, akkor létezik γ_K^* konstans úgy, hogy

$$\frac{Y}{K} = e^{zt} \cdot \varphi\left[e^{(n+x-z-\gamma_K^*)t}\right], \tag{135}$$

ahol n a népesség konstans növekedési rátája. A beruházás $I = \dot{K} = sY - \delta K$ egyenletéből tudjuk, hogy

$$\gamma_K = \frac{\dot{K}}{K} = s\frac{Y}{K} - \delta.$$

Az egyenletes növekedési pálya mentén $\gamma_K = \gamma_K^*$ úgy, hogy $\frac{Y}{K}$ hányados is állandó. A (135) kifejezés által meghatározott $\frac{Y}{K}$ hányados csak két esetben lehet konstans:

1. Ha $z = 0$ $(B(t) = 1)$ ez azonban azt jelenti, hogy csak munkakiterjesztő technikai haladás van. Ekkor az K egyenletes növekedési üteme $\gamma_K^* = n + x$.

[238] Továbbá feltételeztük, hogy $\dot{A} = x \geq 0$ $A(0) = 1$ és $\dot{B} = z \geq 0$, $B(0) = 1$.

2. Ha $z \neq 0$, ekkor $\varphi\left[e^{(n+x-z-\gamma_K^*)t}\right]$ ellensúlyozza a e^{zt} növekedését. Ez akkor valósul meg, ha $\frac{Y}{K}$ hányados időben változatlan, azaz idő szerinti deriváltja zérus.

$$\frac{d\frac{Y}{K}}{dt} = 0 = ze^{zt}\varphi[\chi] + (n + x - z - \gamma_K^*) \cdot \varphi'[\chi] \cdot e^{zt} \cdot \chi,$$

ahol $\chi = e^{(n+x-z-\gamma_K^*)t}$. Ezt a kifejezést átalakítva kapjuk

$$\frac{\varphi'[\chi]}{\varphi[\chi]} = \frac{-z}{(n + x - z - \gamma_K^*)} \cdot \frac{1}{\chi}.$$

Legyen a $\frac{-z}{(n+x-z-\gamma_K^*)}$ konstans $1 - \alpha$ alakú[239]. Integrálva mindkét oldalt kapjuk

$$\ln\varphi[\chi] + c_1 = (1 - \alpha)\ln\chi + c_2$$

$$\varphi[\chi] = e^c \cdot \chi^{1-\alpha} = e^c \cdot \left[e^{(n+x-z-\gamma_K^*)t}\right]^{1-\alpha}, \tag{136}$$

ahol $c = c_2 - c_1$. A (134) és a (136) kifejezésekből következik, hogy ekkor a termelési függvény az alábbi alakban keresendő:

$$Y = e^{zt}K \cdot \varphi\left[\frac{L}{K}e^{(x-z)t}\right] = e^{zt}K \cdot e^c \cdot \left[e^{(n+x-z-\gamma_K^*)t}\right]^{1-\alpha}$$

$$Y = e^c \cdot \left(e^{zt}K\right)^\alpha \left(e^{xt}L\right)^{1-\alpha} = e^c \cdot K^\alpha \left(e^{\nu t}L\right)^{1-\alpha},$$

ahol $\nu = \frac{z\alpha+x(1-\alpha)}{(1-\alpha)}$. Tehát ekkor a termelési függvény Cobb–Doulas formájú[240], ahol a technológiai haladás mindig felírható csak munkakiterjesztő változatban, ahol a technológia növekedési üteme $\nu = \frac{z\alpha+x(1-\alpha)}{(1-\alpha)}$.

■

[239] A $\frac{z}{(z+\gamma_K^*-n-x)}$ konstans kisebb egy, ha $\gamma_K^* > n+x$, az ehhez tartozó α nulla és egy közé esik. Ha azonban a $\gamma_K^* < n+x$, akkor a hányados egynél nagyobb. Az ehhez tartozó α kisebb, mint nulla.

[240] De nem minden esetben egyezik meg egy Cobb–Douglas függvénnyel, hiszen a kitevő értéke nem mindig esik a nulla-egy intervallumba, lásd a 239. lábjegyzetet.

Hivatkozások

[1] Abramovitz, M. [1956] : "Resource and Output Trends in the United States sinces 1870". *Amecican Economic Review*, May, 5-23.o.

[2] Abramovitz, M. [1989] : Thinking about Growth. Cambridge University Press, New York.

[3] Abramovitz, M. és Eliasberg, V. [1957] : The Growth of the Public Employment in Great Britain. Princeton University Press for National Bureau of Economic Research, Princeton.

[4] Aghion, P. és Howitt, P. [1998] : Endogenous Growth Theory. The MIT Press, London.

[5] Arrow, K. [1962] : "The Economic Implications of Learning by Doing". *Review of Economic Studies*, June, 155-173.o.

[6] Arrow, K. J., Chenery, H. B., Minhas, B. S., Solow, R. M. [1961] : "Capital Labor Substitution and Economic Efficiency". *The Review of Economics and Statistics*, Vol. XVIII., August, 225-250.o.

[7] Arthur, W. B. [1990] : "Positive Feedbacks in Economy." *Scientific American*, Februarry, 92-99.o.

[8] Aukrust, O. – Bjerke, J. [1959] : "A reáltőke és gazdasági növekedés Novrégiában, 1950-56-ban". in: Szakolczai [1967] 58-75.o.

[9] Ámon Zsolt, Hoós János és Ligeti István [2000] : "A felzárkózás lehetősége". *Európai tükör*, 4.sz. 1-32.o.

[10] Balogh, T. – Streeten, P. P. [1963] : "The Coefficient of Ignorance". *Bulletin of Oxford University, Institute of Economics and Statistics*, May, 99-107.o.

[11] Barro, J. R. [1991] : "Economic Growth in a Cross Section of Countries". *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 106. No.2. May, 407-443.o.

[12] Barro, J. R. – Sala-i-Martin [1991] : "Convergence Accross States and Regions". *Booking Papers on Economic Activity*, No. 1., 107-182.o.

[13] Barro, J. R. – Sala-i-Martin, X. [1992*a*] : "Convergence". *Journal of Political Economy*, Vol. 100., 223-251.o.

[14] Barro, J. R. – Sala-i-Martin [1992*b*] : "Regional Growth and Migtation: A Japan-United States Comparison". *Journal of the Japanese and International Economies,* No. 6., 312-346.o.

[15] Barro, R. J. – Sala-i-Martin, X. [1995] : Economic Growth. McGraw Hill, Inc. New York.

[16] Baumol, W. J. [1986] : "Productivity Growth, Convergence and Welfare: What the Long Run Data Show". *American Economic Review*, Vol. 76., December, 1072-85.o.

[17] Baumol, W. J. – Blackman, S. A. B. – Wolff, E. N. [1989] : Productivity and American Leadership. MIT Press, New York.

[18] Bessenyei, István [1995] : A gazdasági növekedés alapvető elméletei. Janus Pannonius Tudományegyetem, Pécs.

[19] Chiang, A. C. [1992] : Elements of Dynamic Optimization. McGraw-Hill, New York.

[20] Cobb C. W. – Douglas P. H. [1928] : A Theory of Production". *American Economic Review*. Vol. XVIII. March, 139-165.o.

[21] Colinsk, J. [1967] : "A Modified Neo-classical Growth Model with Endogenous Technical Change". *Southern Economic Journal*, October.

[22] Darvas Zsolt és Simon András [1999*a*] : "A növekedés makrogazdasági feltételei, gazdaságpolitikai alternatívák". *MNB Füzetek,* 1999/3, március.

[23] Darvas Zsolt és Simon András [1999*b*] : "Tőkeállomány, megtakarítás és gazdasági növekedés". *Közgazdasági Szemle*, szeptember, 749-771.o.

[24] Dedák István [2000] : "A gazdasági felzárkózás növekedéselméleti összefüggései". *Közgazdasági Szemle*, június, 6.sz., 411-430.o.

[25] Denison, E. F. [1967] : Why Growth Rates Differ: Postwar Experience in Nine Western Countries. The Brookings Institution, Washington, D.C.

[26] Denkinger Géza [1989] : Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó, Budapest.

[27] Domar, E. D. [1946] : "Capital Expansion, Rate of Growth, and Employment". *Econometrica,* Vol. 14., April, 137-147.o.

[28] Douglas P. H. [1957] : "Are There Laws of Production?". in.:The Theory of Wages. New York.

[29] Dowrick, S. és Quiggin, J. [1997] : "The Measure of GDP and Convergence". *American Economic Review*, Vol. 89., May,. 41-64.o.

[30] Erdős Tibor [2000] : "A fenntartható növekedés egyensúlyi feltételei I-II". *Közgazdasági Szemle*, 2. és 3.sz. 101-115.o., 215-229.o.

[31] Fuchs, V. R. [1963] : "Capital-Labor Substitution: A Note". *The Review of Economics and Statistics*, Vol. XLV., November, 436-438.o. in: Szakolczai [1967] 195-199.o.

[32] Galor, O. – Ryder, H. R. [1989] : "Existence, Uniqueness, and Stability of Equilibrium in an Overlapping-Generation Model with Productive Capital". *Journal of Economic Theory*,Vol. 49., No. 2., December, 360-375.o.

[33] Gerschenkron, A. [1952] : "Economic Backwardness in Historical Perspective". in: Hosilitz, B. F. (szerk.): The Progress of Underdeveloped Areas, Chicago University Press, Chicago.

[34] Griliches, Z. [1964] : "Research Expenditures, Education, and the Aggregate Agricultural Production Function". *The American Economic Review*, Vol. LIV., December, 961-974.o.

[35] Grossman, G. M. – Helpman, E. [1991] : Innovation and Growth in the Global Economy. MIT Press, Cambridge.

[36] Harrod, R. F. [1937] : "Review of Joan Robinson's Essay in the Theory of Employment". *Economic Journal*, Vol. 47., 326-330.o.

[37] Harrod, R. F. [1939] : "An Essay in Dynamic Theory". *The Economic Journal*, Vol. XLIX., March, 14-33.o.

[38] Horváth Ágnes – Szalai Zoltán [2001] : "A kevésbé fejlett EU-tagországok konvergenciájának tapasztalatai". *Közgazdasági Szemle*, 7-8.sz. 640-658.o.

[39] HVG [2000] : „Íreket mondunk". HVG, április 1., 11.o.

[40] Intriligator, D. M. [1971] : Mathematical Optimization and Economic Theory. Prentice-Hall Series in Mathematical Economics. Prentice-Hall, London.

[41] Iwai, K. [1984*a*] : "Schumpeterian Dynamics: An Evolutionary Model of Innovation and Limitation". *Journal of Economic Behavior and Organization*, Vol. 5., No.2., 159-190.o.

[42] Iwai, K. [1984*b*] : "Schumpeterian Dynamics: Technological Progress, Firm Growth and Economic Selection". *Journal of Economic Behavior and Organization*, Vol. 5., No.3-4., 321-351.o.

[43] Jánossy Ferenc [1966] : A gazdasági fejlődés trendvonala és a helyreállítási periódusok. KJK, Budapest.

[44] Jánossy Ferenc [1971] : "Még egyszer a trendvonalról". *Közgazdasági Szemle*, 7-8.sz., 841-867.o.

[45] Jánossy Ferenc [2001] : Mérés, trend, evolúció. Vállogatott írások. Bekker Zs. (szerk.), Aula Kiadó, Budapest.

[46] Jorgenson, D. W. [1995] : Productivity, International Comparisons of Economic Growth. Vol. 2. MIT Press, Cambridge.

[47] Kaldor, N. [1957] : "A model of Economic Growth". *Economic Journal*, December. In: Kaldor Miklós [1989] : Gazdaságelmélet - Gazdaságpolitika. KJK, Budapest. 121-155.o.

[48] Kaldor, Nicolas [1961] : "Capital Accumulation and Economic Growth." in.: Lutz, F. A. – Hague, D. C. (szerk.): The Theory of Capital. ST, Martin's Press, New York, 177-222.o.

[49] Kapp, W. [1965] : "Economic Development in a New Perspective Existential Minima and Substantive Rationality". *Kyklos,* Vol. XVIII/1, 49-79.o.

[50] Kendrick, J. G. [1961] : Productivity Trends in the United States, National Bureau of Economic Research, Princeton University Press, Princeton.

[51] Kolodko, G. W. [2001] : Globalizáció és felzárkózás. Az átalakuló gazdaságok a recessziótól a növekedésig. I-II. rész. *Külgazdaság*, 2. sz. 22-40.o., 3. sz. 17-41.o.

[52] Krelle W. [1965] : "A gazdasági növekedés befolyásolhatósága és határai". in: Szakolczai [1967] 436-460.o.

[53] Kuhilo, K. C. [1962] : "A termelési tényezők hatékonyságának kavantitatív elemzése". in: Szakolczai [1967] 76-84.o.

[54] Kuznets, S. [1930] : Secular Movements in Production and Prices. Houghton Mifflin Co., Boston, New York.

[55] Kuznets, S. [1961] : "A tőke és a termelés összefüggése". in: Szakolczai [1967] 111-121.o.

[56] Kuznets, S. [1966] : Modern Economic Growth. Yeal University Press, London.

[57] Kuznets, S. [1968] : Notes on Japan's Economic Growth. in: Economic Growth, The Japanese Experience Since the Maiji Era. Richard, D. Irwin, Homewood, Ill.

[58] Leontief, W. W. [1969] : Domestic Production and Foreign Trade: The American Capital Position Re-examined. Pinguin Books.

[59] Lewis, W. A. [1954] : "Economic Development with Unlimited Supplies of Labor". *Manchester School of Economics and Social Studies*, Vol. 22., May, 139-191.o.

[60] Ligeti István [1994] : "Van-e szükség új növekedéselméletre?". *Közgazdasági Szemle,* 4.sz. 360-71.o.

[61] Ligeti István – Ligeti Zsombor [2000] : "Konvergencia, felzárkózás". *Pénzügyi Szemle*, 5.sz. 441-457.o.

[62] Ligeti Zsombor [1998] : "Klónozott közgazdaságtan". *Társadalom és Gazdaság*, 4.sz. Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem. 90-116.o.

[63] Lu, Yao-chi – Fletcher, L. B. [1968] : "A Generalization of CES Function". *Review of Economics and Statistics*, Vol. 50., 449-452.o.

[64] Lucas, R. E., Jr. [1988] : "On the Mechanics of Economic Development". *Journal of Monetary Economics*, Vol. 22., July, 3-42.o.

[65] Lucas, R.E., Jr. [1990] : "Why Doesn't Capital Flow from Rich to Poor Countries?". *The American Economic Review,* May, 92-96.o.

[66] Maddison, A [1995] : Monitoring the World Economy, 1820-1992. OECD Development Center, Paris.

[67] Mankiw, N. G. [1999] : Makroökonómia. Osiris Kiadó, Budapest.

[68] Mankiw, N. G. – Romer, D. – Weil, D. [1992] : "A Contribution to the Empirics of Economic Growth". *Quarterly Journal of Ecomonics*, Vol.107. 407-437.o.

[69] Mátyás Antal [1993] , [1999] : A modern közgazdaságtan története. Aula, Budapest.

[70] Mellár Tamás [2001] : "Mikor éri el a magyar gazdaság fejlettsége az Európai Unió átlagát?". *Közgazdasági Szemle,* december, 995-1008.o.

[71] Mendershausen, H. [1938] : On the Significance of Professor Douglas's Production Function. *Econometrica*, Vol. 6., 147.o.

[72] Meyer Dietmar [1995] : "Az új növekedéselmélet". *Közgazdasági Szemle,* 4.sz. 387-398.o.

[73] Minhas B. S. [1963] : "A termelési tényezők költségeinek és felhasználásának nemzetközi összehasonlítása". in: Szakolczai [1967] 174-194.o.

[74] Nelson, R. R. – Winter, S. G. [1982] : An Evolutionary Theory of Economic Change. The Belknap Press of Harvard Univerity Press, Cambridge.

[75] Nelson, R. R. – Wright, G. [1992] : "Rise and Fall of American Technological Leadership". *Journal of Economic Litriture*, Vol. XXX,. December, 1931-1964.o.

[76] Paap, R. – van Dijk, H. K. [1998] : "Distribution and Mobility of Wealth of Nations". *European Economic Review*, Vol. 42., 1269-1293.o.

[77] Plosser, I. C. [1992] : "The Search of Growth". in: Policies for Long-Run Economic Growth. (Symposium Summary), The Federal Reserve Bank of Kansas City, 57-86.o.

[78] Pontrjagin, L. Sz. [1972] : Közönséges differenciálegyenletek. Akadémia Kiadó, Budapest.

[79] Quah, D. T. [1993*a*] : "Empirical Cross-section Dynamics in Economic Growth". *European Economic Review*, Vol.37. 426-434.o.

[80] Quah, D. T. [1993*b*] : "Galton's Fallacy and Test of the Convergence Hypothesis". *Scandinavian Journal of Economics*, Vol. 95., No. 4., 427-443.o.

[81] Quah, D. T. [1996*a*] : ”Regional Convergence Clusters Across Europe”. *European Economic Review*, Vol. 40., 951-958.o.

[82] Quah, D. T. [1996*b*] : ”Empirics for Economic Growth and Convergence”. *European Economic Review*, Vol. 40., 1353-1375.o.

[83] Ramanathan, R. [1982] : Introduction to the Theory of Economic Growth. Springer Verlag, Berlin.

[84] Robinson, J. [1938] : ”The Classification of Invention”. *Review of Economic Studies*, February, 139-142.o.

[85] Romer, P. M. [1986] : ”Increasing Returns and Long-Run Growth.”, *Journal of Political Economy*, Vol. 94, October, 1002-1037.o.

[86] Romer, P. M. [1987] : ”Growth Based on Increasing Returns Due to Specialization.” *American Economic Review*, Vol. 77. May, 56-62.o.

[87] Romer, P. M. [1990] : ”Endogenous Technological Change”. *Jouranal of Political Economy*, February, 41-58.o.

[88] Romer, P. M. [1994] : ”The Origins of Endogenous Growth”. *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 8., No. 1., 3-22.o.

[89] Romer, D. [1996] , [2001] : Advanced Macroeconomics. McGraw Hill, Inc. New York.

[90] Samuelson, P. A. – Nordhaus, W. D. [2000] : Közgazdaságtan. KJK, Budapest.

[91] Simon András [1999] : Útmutató a makroökonómiához. Osiris, Budapest.

[92] Ifj. Simon György [2000] : ”A dél-koreai gazdasági csodáról”. *Statisztikai Szemle,* május, 353-372.o.

[93] Ifj. Simon György [2001*a*] : ”Egy potenciális „elefánt”: India”. *Statisztikai Szemle*, február, 178-197.o.

[94] Ifj. Simon György [2001*b*] : ”„Új tigrisek”: Malajzia és Thaiföld”. *Külgazdaság*, május, 44-65.o.

[95] Ifj. Simon György [2001*c*] : ”Reform és növekedés Kínában”. *Közgazdasági Szemle*, július-augusztus, 673-692.o.

[96] Simon György [1998] : ”Növekedési tényezők, ár-, bér-, és profitmechanizmus a modern gazdaságban”. *Közgazdasági Szemle*, XLV. február, 174-192.o.

[97] Simon György [1999] : ”Technikai haladás, érték és profit”. *Közgazdasági Szemle*, XLVI. május, 428-445.o.

[98] Simon György [2001] : "Növekedési mechanizmus - növekedési modell". *Közgazdasági Szemle*, március 185-202.o.

[99] Simon György és Szamovol, V. [1982] : "On the Economic Growth Functional". Matekon Spring, 18. New York, 65-84.o.

[100] Simonovits András [1998] : Matematikai módszerek a dinamikus közgazdaságtanban. Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest.

[101] Solow, R. M. [1956] : "A Contribution to the Theory of Economic Growth.", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 70., February, 65-94.o.

[102] Solow, R. M. [1957] : "Technical Change and the Aggregate Production Function." *Review of Economics and Statistics*, Vol. 39., August, 312-320.o.

[103] Solow, R. M. [1960] : "Investment and Technical progress". In Stiglitz, J. E. – Uzawa, H. (eds.) [1969] : Readings in the Modern Theory of Growth. The M.I.T. Press, London. 156-171.o.

[104] Solow, R. M [1994] : "Perspectives on Growth Theory". *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 8. No. 1., 45-54.o.

[105] Sprout, R. – Weawer, J. [1992] : "International Distribution of Income (1960-1987)". *Kyklos*, Vol. 45., 237-258.o.

[106] Statistical Yearbook [1988],[1994] : Unitied Nations, 35th, 39th Issue, New York.

[107] Stiglitz, J. E. – Uzawa, H. (eds.) [1969] : Readings in the Modern Theory of Growth. The M.I.T. Press, London.

[108] Summers, R. – Heston, A. [1994] : "The Penn World Tables 5.6". (http://bizednet.bris.ac.uk.8080/dataserv/penn.htm)

[109] Swan, T. W. [1956] : "Economic Growth and Capital Accumulation", *Economic Record*, 32, November, 334-361.o.

[110] Sydsæter. K. – Hammond, P. [1998] : Matematika Közgazdászoknak. AULA Kiadó, Budapest.

[111] Szakolczai György (szerk.) [1967] : A gazdasági növekedés feltételei. KJK, Budapest.

[112] Szilágyi György [2001] : "Gazdag országok – szegény országok". *Statisztikai Szemle*, 7.sz. 587-595.o.

[113] Tallos Péter [1999] : Dinamikai rendszerek alapjai. Aula Kiadó, Budapest.

[114] Tarján Tamás [1993] : "Gazdasági növekedésünk alakulása Ausztriához viszonyítva a 20. században." *Közgazdasági Szemle*, szeptember, 815-822.o.

[115] Tarján Tamás [1994] : "Az OECD tagországok növekedésének Jánossy-féle trendvonala". *Közgazdasági Szemle*, 10.sz. 914-925.o.

[116] Tarján Tamás [1998] : "A humán tőke szerepe az integrációban és a gazdasági növekedésben." in: Bélyácz Iván-Berend Iván (szerk.): Nemzetgazdasági Stratégia Elemei, 2. kötet, Janus Pannonia Egyetem Kiadó, Pécs. 293-327.o.

[117] Tarján Tamás [2000] : "Jánossy elmélete az új növekedési elméletek tükrében.". *Közgazdasági Szemle*, május, 457-472.o.

[118] The Economist [1992] : "Explaining the Mystery". 1992 január. 4.

[119] Uzawa, H. [1961] : "Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium". *Review of Economic Studies,* February, 117-124.o.

[120] Valentinyi Ákos [1995] : "Endogén növekedéselmélet. Áttekintés." *Közgazdasági Szemle,* 6.sz. 582-594.o.

[121] Valentinyi Ákos [2000] : "Gazdasági növekedés, felzárkózás és költségvetési politika egy kis, nyitott gazdaságban". Közgazdasági Szemle, június 6.sz. 391-410.o.

[122] Walters, A. A. [1963] : "A Note on Economies of Scale". *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 45., November, 425-427.o., in: Szakolczai [1967] 200-206.o.

[123] Weber, A. [1998] : in: Darvas–Simon [1999*a*].

[124] Zalai Ernő [1989] : Bevezetés a matematikai közgazdaságtanba. KJK, Budapest.

[125] Zalai Ernő [2000] : Matemetikai közgazdaságtan. KJK, Budapest.