

Budapesti Corvinus Egyetem  
Közgazdasági és Gazdaságinformatikai Doktori Iskola

## TÉZISGYŰJTEMÉNY

Víg Attila András

Árhatás és profitabilitás heterogén ágens modellekben  
című Ph.D. értekezéséhez

Témavezető:  
Bihary Zsolt, Ph.D.  
egyetemi docens

Budapest, 2022



Budapesti Corvinus Egyetem  
Közgazdasági és Gazdaságinformatikai Doktori Iskola

## TÉZISGYŰJTEMÉNY

Víg Attila András

Árhatás és profitabilitás heterogén ágens modellekben  
című Ph.D. értekezéséhez

Témavezető:  
Bihary Zsolt, Ph.D.  
egyetemi docens

© Víg Attila András

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>5</b>
<b>2. Alkalmazott módszertan és modellkeret</b>	<b>7</b>
2.1. Az ágensek . . . . .	7
2.2. Fundamentális kereskedő . . . . .	7
2.2.1. Fundamentális érték . . . . .	8
2.3. Technikai kereskedő . . . . .	8
2.3.1. Trend indikátor . . . . .	9
2.4. Evolúció, vagyon dinamika és egyensúly . . . . .	10
2.4.1. A passzív vagyonfejlődés . . . . .	12
2.4.2. Az aktív vagyonátcsoportosítás . . . . .	13
2.5. A kereskedett eszközök és a piaci ármechanizmus . . . . .	14
<b>3. Az értekezés eredményei</b>	<b>16</b>
3.1. Fundamentális és technikai kereskedők egy konstans volatilitású mo- dellben . . . . .	16
3.1.1. Illusztrációk az árdinamikára . . . . .	17
3.1.2. Az invariáns eloszlások . . . . .	19
3.1.3. A profitabilitás kérdése . . . . .	22
3.2. Piaci heterogenitás és endogén volatilitás . . . . .	24
3.2.1. Az endogén volatilitású trend indikátor önálló vizsgálata . . .	25
3.2.2. A trendkövető és az indexkövető kereskedő versenye . . . . .	27
<b>4. Saját publikációk jegyzéke</b>	<b>33</b>

# 1. fejezet

## Bevezetés

A tradicionális megközelítés szerint a tőkepiacokat benépesítő befektetők teljesen racionálisak és a piacok hatékonyak (Malkiel és Fama 1970). Bár a piaci szereplők racionalitását és a piacok hatékonyságát sok kritikus nem tartja realisztikusnak, ezek nagyon mélyen gyökereznek a pénzügyi közgazdaságtanban. A pénzügyi piacok heterogén ágens irodalma szakít a hatékony piacokkal és a racionális befektetőkkel, és a piacot egy többdimenziós dinamikai rendszerként képzei el, ahol a kereskedők portfóliója, az árfolyamok, a piaci súlyok egyidőben evolválódnak. E dolgozat ehhez az irodalomhoz kíván csatlakozni. Az ilyen modellekben a piaci résztvevők korlátozottan racionálisak, azaz heurisztikus szabályok szerint viselkednek, és döntéseiket csak a rendelkezésükre álló információk alapján hozzák meg.

A dolgozatnak egy pénzügyi közgazdaságtani és egy technikai célja van. A pénzügyi közgazdaságtani cél az ágensalapú modellezés eszköztárával a befektetői heterogenitás és a heurisztikus torzítások hatásának vizsálata az árfolyamokra és a befektetői profitabilitásra. A legfontosabb motívum, hogy a piacon fennálló keresleti-kínálati egyensúlytalanság megjelenik a kereskedett eszköz árfolyamdinamikájában. Ezen keresztül olyan jelenségeket igyekszünk bemutatni, mint az árfolyam elszakadása a fundamentális értéktől, az árfolyam hirtelen felfutása majd visszaesése, a hozamokban időtávtól függően megjelenő pozitív vagy negatív autokorreláció, illetve a hozamok vastag szélű eloszlása. E jelenségeken túl vizsgálni fogjuk a kanonikus befektetési stratégiák – fundamentális, technikai és indexkereskedő – profitabilitását és árhatását.

A technikai cél egy olyan realisztikus sztochasztikus pénzügyi modell felírása, amelyben a fenti jelenségek sztochasztikus viselkedése analitikusan is vizsgálható. A téma irodalmának egy hiányossága, hogy a modellek sztochasztikus voltát nem vizsgálja kellő mélységgel. Az analitikus eredmények szinte minden esetben csak a modellek determinisztikus csontvázáról szólnak, a sztochasztikus modellt csak szimulációs eszközökkel vizsgálják. Ebben a dolgozatban igyekszünk szakítani ezzel a hagyománnyal, és (kvázi)analitikus eredményekkel szolgálunk a sztochasztikus esetekben is.

## A dolgozat felépítése

A 2. fejezet két funkciót tölt be. Egyrészt egy irodalomáttekintés az ágensalapú pénzügyi modellezésbe, főleg annak azon ágába, ahol kanonikus befektetési stratégiák versenyeznek, és a matematikai modell általában egy néhány dimenziós sztochasztikus dinamikai rendszer. Másrészt, a fejezetben bemutatjuk – egyszerű dinamikai egyenleteken keresztül – a dolgozat későbbi részeiben modellezett legfontosabb jelenségeket és hatásokat; az ágenseket, a vagyon fejlődésén keresztül megvalósuló evolúciót és a piaci ármechanizmust.

A dolgozatban két folytonos idejű modellt tárgyalunk. A 3. fejezet (itt 3.1. szekció) a szerző Közgazdasági Szemlében megjelent tanulmányát mutatja be. Ebben a tanulmányban a volatilitás még az irodalomban megszokott módon konstans, érdekes nemlineáris hatások a kereskedők pozíciófüggvényén keresztül jelennek meg. A sztochasztikus modell hosszú távú stabilitását vizsgáljuk bizonyos releváns változók invariáns eloszlásán keresztül. A nemlineáris hatásoknak köszönhetően az eloszlások esetén többmódusú viselkedés jelenik meg.

A 4. fejezetben (itt 3.2. szekció) szakítunk az irodalomban szokásos konstans volatilitással, és azt feltételezzük, hogy a piaci kereslet-kínálati egyensúlytalanság megjelenik közvetlenül a volatilitásban is. Ez az endogén volatilitás hatás megoldja az előző fejezet problémáját: egyik kereskedő sem tud a másik felett hosszú távon végérvényesen elhatalmasodni. A sztochasztikus volatilitásnak köszönhetően a hozamok eloszlása vastagszélű, amely alapvető elvárás és üdvözlendő egy sztochasztikus pénzügyi modell esetén.

## 2. fejezet

# Alkalmazott módszertan és modellkeret

### 2.1. Az ágensek

Az ágensalapú modellek legfontosabb tisztázandó elemei maguk az ágensek, azaz a kereskedők. A kereskedők alapfeladata az, hogy a rendelkezésre álló információk (tipikusan az árfolyam és osztalékadatok, de elképzelhetők egyéb makromutatók is) alapján portfóliódöntéseket hoznak. A dolgozatban azt a klasszikus utat követjük, ahol a piacot véges sok jól definiált kereskedési stratégiát követő kereskedő népesíti be. Az következőkben a leggyakrabban modellezett, kanonikus stratégiákat (ágens-típusokat) mutatjuk be.

### 2.2. Fundamentális kereskedő

A fundamentális kereskedőt tekinthetjük a klasszikus, teljesen racionális ágensnek a pénzügyi piacokon. A fundamentális kereskedő kísérletet tesz arra, hogy megállapítsa egy eszköz fundamentális (belső) értékét, majd pozícióját attól függően veszi fel, hogy a piaci árfolyam milyen irányban tér el ettől a fundamentális értéktől. A fundamentális kereskedőre gondolhatunk úgy, mint egy jelentős erőforrásokkal és infrastruktúrával rendelkező befektetési alap, amely elemzési tevékenységét hatékonyan és eredményesen végzi, és ez alapján kereskedik. A pénzügyi heterogén ágens

irodalomban gyakran explicit megjelenik a fundamentális érték, így a dolgozatban is ezt a modellezési gyakorlatot fogjuk követni. A következő szekcióban egy egyszerű modelljét mutatjuk meg a fundamentális értéknek.

### 2.2.1. Fundamentális érték

A fundamentális érték két módon jelenhet meg a modellekben. Egyrészt maga a fundamentális érték lehet egy exogén módon fejlődő sztochasztikus folyamat, például egy exponenciális véletlen bolyongás. Másrészt az eszköz pénzáramlását (osztalékát) írhatjuk le egy exogén módon fejlődő sztochasztikus folyamattal, és ekkor a fundamentális értéket a pénzáramlás várható értékének diszkontált jelenértékeként definiáljuk. A következőkben egy olyan egyszerű modellt mutatunk be, amelyben az osztalékok exogén sztochasztikus voltából indulunk ki, és végül maga a fundamentális érték – mint diszkontált jelenérték – is ugyanazzal a dinamikával fog bírni.

Legyen egy eszköz (részvény) esetén az osztalékok folyamata  $D(t)$  egy geometriai Brown-mozgás. Az osztalékfolyamatot úgy értelmezzük, hogy az eszköz a  $t$  időpontban  $D(t)dt$  osztalékot fizet. A fundamentális kereskedő az  $F(t)$  fundamentális értéket a jövőbeli osztalékok diszkontált jelenértékeként határozza meg,  $\delta$  szubjektív diszkontráta mellett, amelyről feltesszük, hogy  $\delta > \mu$ . Ekkor

$$F(t) = E \left[ \int_t^\infty e^{-\delta(s-t)} D(s) ds \middle| \mathcal{F}(t) \right] = \frac{D(t)}{\delta - \mu}, \quad (2.1)$$

azaz a pillanatnyi fundamentális érték a pillanatnyi osztalékráta konstansszorososa, és így maga is geometriai Brown-mozgás. Ennek az eredménynek a tükrében a dolgozat későbbi részében az osztalékok explicit megjelenítésétől eltekintünk, és közvetlenül a fundamentális értékről fogjuk feltételezni, hogy az egy exogén geometriai Brown-mozgás.

## 2.3. Technikai kereskedő

A technikai kereskedők úgy gondolják, hogy a kereslet és kínálat változásai kiolvashatók az árfolyamból, ezért az árfolyam mozgásának mintázatait felhasználva igyekeznek predikciókat hozni a jövő árfolyamára.



A heterogén ágens alapú modellekben a technikai kereskedőket leggyakrabban a trendkövető (és kontrariánus) stratégiákkal azonosítják. A trendkövető stratégiát követő kereskedők hisznek az árfolyammozgás tehetetlenségében, azaz ha egy trendet azonosítanak, akkor aszerint kereskednek, hogy ez a trend a jövőben folytatódni fog. A kontrariánus stratégiát követő kereskedők az „átlaghoz” való visszatérésben hisznek, ezért éppen a trenddel ellentétesen kereskednek. Legfontosabb hatásuk, hogy buborékokat, illetve nagy összeomlásokat generálnak. A következőkben a dolgozatban használt, a technikai kereskedési stratégiát követő kereskedők által követett *trend indikátor* dinamikáját mutatjuk be.

### 2.3.1. Trend indikátor

A trend indikátor egy olyan sztochasztikus folyamat, amely azt hivatott mutatni, hogy egy eszköz árfolyama éppen növekvő vagy csökkenő trendben van. A dolgozatban a trend indikátor két ekvivalens definícióját is bemutatjuk, melyek közül itt csak az egyiket tárgyaljuk. Ebben az esetben a trend indikátort közvetlenül definiáljuk a (log)hozamok exponenciális súlyozású mozgóátlagaként:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{\tau}(t-u)} ds(u), \quad (2.2)$$

ahol a  $\tau > 0$  paramétera mozgóátlagképzés időhorizontját szabályozza. A (2.2) integrál-formula mögötti intuíció az, hogy pozitív (negatív) trendként értelmezzük azt, ha a közelmúltban jellemzőbbek voltak a pozitív (negatív) hozamok. A (2.2) folyamat megváltozása adódik a Leibniz integrálási szabály alkalmazásával:

$$dx(t) = -\frac{1}{\tau}x(t) dt + ds(t), \quad (2.3)$$

amely egyenlet Chiarella és tsai. (2006) trend indikátorának folytonos általánosítása.

Mivel a dolgozatban a technikai kereskedők stratégiáját a trend indikátor fogja meghatározni, ezért végső soron az egyik legfontosabb állapotváltozónak tekinthető, melynek dinamikáját, sztochasztikus tulajdonságait sokat vizsgáljuk a dolgozatban. Továbbá a trend indikátor azon túl, hogy stratégiai állapotváltozó, tekinthető egy folytonosan számontartott  $\tau$ -idejű hozamnak is. Ez eltér a szokásos  $\tau$ -idejű hoza-

moktól, hiszen azokat diszkrét időpontok közötti növekményekből szokás számolni, de az  $x(t)$  eloszlására vonatkozó állítások értelmezhetők a modell  $\tau$ -idejű hozamok eloszlására vonatkozó állításokként is. Ha például a (2.3) egyenlet szerint definiált trend indikátor invariáns eloszlása vastag szélűnek adódik, akkor ezt értelmezhetjük a hozamok eloszlására vonatkozó állításként is.

## 2.4. Evolúció, vagyon dinamika és egyensúly

Az evolúció gyakran áll az ágens modellek középpontjában: ez az ágensek közötti dinamika fő forrása mind gyakorlati, mind filozófiai értelemben. Az egyes ágens (kereskedők vagy befektetési alapok) profitabilitása függ egyrészt a saját stratégiájuktól, másrészt a többiek stratégiájától is, hiszen az árfolyamok alakulására mindegyiküknek van hatása. Ebben az értelemben a különböző stratégiák versenye játékelméleti kontextusba helyezhető. A dolgozatban a klasszikus játékelméleti kontextus helyett azonban az evolúciós játékelmélet szemüvegén keresztül vizsgáljuk a stratégiákat, ami a szereplők sikerességét és sikertelenségét azok populációs arányával azonosítja.

A dolgozatban egy egyszerű, kétszereplős számpéldán keresztül bemutatjuk a kereskedők vagyonarányán keresztül definiált populációs dinamikát, illetve a dinamikai rendszer kapcsolatát a statikus játékelméleti egyensúllyal. A vagyonfejlődés két forrását egymástól függetlenül mutatjuk be.

1. Az első esetben a két kereskedő egymástól eltérő hozamot ér el, és ezt a hozamot számon is tartjuk a vagyonuk esetében. Amelyik kereskedő nagyobb hozamot ér el, annak idővel a piaci súlya is nagyobb lesz, amit a sikeresség mérőszámának tekintünk. LeBaron (2011) ezt *passzív tanulásnak*<sup>1</sup> nevezi, az ő szóhasználatát követve mi a *passzív vagyonfejlődés* és passzív evolúció kifejezéseket fogjuk használni.
2. A második esetben az egyes kereskedőkre befektetési alapokként gondolunk, akik mások befektetett pénzét kezelik. Ebben az esetben is eltérő hozamot érnek el a befektetési alapok, azonban a vagyonuk esetében ezt nem vesszük

---

<sup>1</sup>passive learning

figyelembe. Ellenben a mögöttes befektetők észlelik a hozamkülönbséget, és a vagyonuk egy részét a jobban teljesítő alapbaallokálják. LeBaron (2011) az evolúció ilyen formáját *aktív tanulásnak*<sup>2</sup>, az ő szóhasználatát követve mi az *aktív vagyonátcsoportosítás* és aktív evolúció kifejezéseket fogjuk használni.

Az alapmodell a klasszikus héja-galamb játéknak a tőkepiacok esetére értelmezett változata. Tegyük fel, hogy a piacon egy *profi* (P) és egy *amatőr* (A) stratégia közül lehet választani. A profi stratégiát tekintjük az informált kereskedőnek, akit azonosíthatunk a korábban tárgyalt fundamentális vagy akár a technikai kereskedővel is. Az amatőr stratégiát tekintjük a nem informált kereskedőnek, akit azonosíthatunk például egy zajkereskedővel. Ő lényegében véletlenszerű pozíciókat vesz fel, és ezzel likviditást biztosít a piacnak. A dolgozatban a játékot három aljáték összegeként írjuk fel, melyek három piaci jelenséget ragadnak meg. Itt ettől a felbontástól eltekintünk; tekintsük egyből a végső játékot:

	P	A
P	-2, -2	5, -1
A	-1, 5	3, 3

**2.1. táblázat.** A profi és az amatőr kereskedő versenye.

A mátrix egy celláját úgy kell értelmezni, hogy az első szám a sorjátékos kifizetése, ha az a megfelelő oszlopjátékos „ellen” kereskedik, míg a második szám az oszlopjátékos kifizetése, ha az a megfelelő sorjátékos ellen kereskedik.

A játék méltán híres, mert annak egyetlen stabil egyensúlya van. A klasszikus játékelméleti megközelítés szerint az egyes játékosok kevert stratégiát alkalmaznak, azaz mondanak egy valószínűségeloszlást a lehetséges akciók felett. Legyen  $p_1 \in [0, 1]$  annak a valószínűsége, hogy a sorjátékos, míg  $p_2 \in [0, 1]$  annak a valószínűsége, hogy az oszlopjátékos a profi (P) akciót választja. A Nash-féle egyensúlyi stratégiák (Nash 1951) a játék esetén:

$$E_{\text{Nash}} = \left\{ \left( \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right), (1, 0), (0, 1) \right\} \quad (2.4)$$

A három egyensúlyi megoldás közül az első valódi kevert stratégiákat, míg a másik kettő tiszta stratégiákat jelent. A továbbiakban ugyanennek a játéknak két,

---

<sup>2</sup>active learning

evolúciós játékelméleti értelmezését és megoldását fogjuk bemutatni, mely erős rokonságot mutat az imént tárgyalt klasszikus egyensúlyi megoldásokkal.

### 2.4.1. A passzív vagyonnejlődés

A passzív vagyonnejlődés állítható párhuzamba a friedmani piaci kiválasztási hipotézissel (Friedman 1953), mely szerint a jó stratégiák sikeresek lesznek, és a piac egyre nagyobb részét teszik majd ki, míg a rossz stratégiák súlya idővel egyre csökken.

Tegyük fel, hogy a piacon van egy kontinuum számosságú kereskedő tömeg, aki az egyik (P) vagy a másik (A) kereskedési stratégiát követi. Az egyes stratégiákat követő összes vagyont egy  $t$  időpontban jelölje  $W_P(t)$  és  $W_A(t)$ . Az egyes stratégiák piaci súlyát azok összes vagyonával azonosítjuk. Legyen tehát a profi stratégiát követők vagyonaránya egy  $t$  időpontban  $p(t)$ , azaz

$$p(t) = \frac{W_P(t)}{W_P(t) + W_A(t)}, \quad (2.5)$$

és így az amatőr stratégiát követők vagyonaránya  $1 - p(t)$ . Ebben az esetben tehát nem egy valószínűségeloszlást feltételezünk az egyes akciók felett, hanem az egyes stratégiát követők populációs arányát (vagyonarányát) fejlesztjük az időben. Abból indulunk ki, hogy egy adott kereskedő véletlenszerűen kereskedik egy másik kereskedő „ellen”. Annak a valószínűsége, hogy milyen típusú kereskedővel találkozik, attól függ, hogy melyik stratégiának mennyi a piaci súlya, azaz a vagyonaránya. Mivel a kereskedők kontinuum számosságúak, az egyes stratégiák által kezelt vagyon megváltozását az átlagos profittal azonosítjuk, ami függ a piaci vagyonarányoktól. A vagyonarány dinamikája ekkor:

$$dp(t) = p(t)(1 - p(t))(2 - 3p(t)) dt \quad (2.6)$$

A (2.6) dinamika az úgynevezett *replikátor egyenlet*, melynek széles irodalma van, lásd például Hofbauer és Sigmund (1998) könyvét. A replikátor egyenlet egyensúlyi pontjai megegyeznek az előző fejezetben tárgyalt Nash-egyensúlyokkal. Ezt ebben az egyszerű példában könnyű belátni, hiszen egy egyensúlyi pontot az definiál, hogy

$dp(t) = 0$ , azaz

$$E_{\text{passzív}} = \left\{ p \in [0, 1] : p(1-p)(2-3p) = 0 \right\} = \left\{ \frac{2}{3}, 0, 1 \right\},$$

mely egyensúlyi pontok éppen megegyeznek a korábbi  $E_{\text{Nash}}$  egyensúlyi pontokkal.

### 2.4.2. Az aktív vagyónátcsoporthosítás

Az aktív vagyónátcsoporthosítási folyamat jó eséllyel közelebb van ahhoz az evolúciós folyamathoz, melyre egy laikus elsőre gondol a pénzügyi piacokkal kapcsolatban. Az ágensek egy jól definiált célfüggvény szerint aktívan választanak a különböző stratégiák között, és a mögé a stratégia mögé csoportosulnak, amely jobban teljesít, mint a többi. Ez a választási folyamat tetten érhető a valós piacokon is.

Jelölje ismét  $W_p(t)$  és  $W_A(t)$  a két kereskedési stratégia által kezelt vagyont, míg  $p(t)$  a vagyónarányt. Gondoljunk rájuk ebben az esetben egy-egy befektetési alapként, akik kontinuum számosságú befektető vagyont kezelik. A vagyón dinamikájának felírásakor azt az elvet követjük, hogy a vagyónok egy része bizonyos intenzitással egy közös „kalapba” szivárog, majd abból egy választási szabálynak megfelelően részesül az egyik és a másik befektetési alap is. A dinamika ekkor:

$$dp(t) = \kappa \left( \frac{1}{1 + e^{\gamma(3p(t)-2)}} - p(t) \right) dt,$$

ahol  $\kappa \geq 0$  a vagyónátcsoporthosítás intenzitását szabályozó paraméter, míg  $\gamma \geq 0$  a választás intenzitását szabályozó paraméter. Az egyensúlyi megoldást az a  $p(t)$  érték adja, ahol  $dp(t) = 0$ , azaz

$$E_{\text{aktív}}(\gamma) = \left\{ p \in [0, 1] : \frac{1}{1 + e^{\gamma(3p-2)}} = p \right\}$$

Bár az egyensúlyi megoldást definiáló egyenletnek analitikus megoldása általában nincsen, a dolgozatban meggondoljuk, hogy  $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} E_{\text{aktív}}(\gamma) = \frac{2}{3}$ . Ez azt jelenti, hogy a tiszta aktív vagyónátcsoporthosítási dinamika egyensúlyi megoldása egybeesik mind a klasszikus játékelméleti egyensúllyal, mind a replikátor egyenlet egyensúlyával abban az esetben, ha a mögöttes befektetők nagyon érzékenyen reagálnak a

stratégiák hozamkülönbségére.

## 2.5. A kereskedett eszközök és a piaci ármechanizmus

A kereskedett eszközök a piaci modellek alapvető építőkövei. Tisztázandó kérdés, hogy milyen típusú, illetve hány különböző eszközt szerepeltetünk a modellben. Mivel a heterogén ágens alapú piaci modellekben a hangsúly az ágensen és a közöttük zajló versenyen van, ezért a kereskedett kockázatos eszközök száma gyakran csak egy. Ekkor a kockázatos eszköz egy indexet reprezentál, azaz a kereskedők egy index és a kockázatmentes betét/hitel portfólióját tartják, összhangban a klasszikus CAPM-mel (Sharpe 1964).

A piaci mechanizmus szolgál azért, hogy a piaci kereslet és kínálat eredőjeként kialakuljon az árfolyam. LeBaron (2001) a piaci mechanizmus három fajtáját különbözteti meg: mikroszintű ajánlati könyv vezérelte piac, egyensúlyi piac, illetve permanens egyensúlytalansági piac. A dolgozatban a permanens egyensúlytalansági megközelítést fogjuk alkalmazni.

A permanens egyensúlytalansági modellek ármechanizmusa egyszerűbb az egyensúlyi modellekénél, ráadásul a folytonos idejű modellekben kézenfekvőbb is a használata. Az ilyen modellekben a piac soha nincs egyensúlyban, de egy külső erő folyamatosan az egyensúly felé igyekszik terelni azt. Ezt a külső erőt szokás egy látens, közvetlenül nem modellezett szereplővel, az árjegyzővel azonosítani. Az árjegyző aggregálja a befektetők pillanatnyi pozícióját, megállapítja a pillanatnyi egyensúlytalanság mértékét, majd az aggregált pozíciókkal ellentétes pozíciót vesz fel a piacon, hogy kielégítse a keresletet. Végül úgy állapítja meg a következő periódusbeli árat, hogy a túlkereslet abszolút értéke kisebb legyen. A folytonos idejű árdinamika az alapmodellben az alábbi alakot ölti:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu(\mathcal{D}(t)) dt + \sigma(\mathcal{D}(t)) dB(t),$$

ahol  $\mathcal{D}(t)$  a pillanatnyi egyensúlytalanság mérőszáma,  $dB(t)$  egy Brown-mozgás megváltozása. A  $\mu : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  függvény esetén általában feltesszük, hogy monoton növekvő,

hiszen ha az egyensúlytalanság – azaz a túlkereslet – nagy, akkor az árjegyző felfelé igazítja az árat, míg ha az egyensúlytalanság kicsi (akár negatív), akkor lefelé igazítja az árat. A  $\sigma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  függvény gyakran a konstans függvény, mert inkább a drift szokott lenni a vizsgálat központjában, de ebben a dolgozatban vizsgálunk majd egy olyan esetet is, ahol a volatilitás is függ az pillanatnyi egyensúlytalanságtól oly módon, hogy a volatilitás akkor nagy, amikor az egyensúlytalanság abszolút értéke nagy. A pillanatnyi egyensúlytalanságot a kereskedők átlagos pozíciója és a kínálat különbségeként definiáljuk.

A permanens egyensúlytalansági modellek a  $\mu$  és  $\sigma$  függvényeken keresztül rendkívül nagy szabadságot biztosítanak a modellező számára, bár éppen ezért erősen heurisztikusak is. Érdekes és realisztikus árdinamikák általában nemlineáris feltevések esetén szoktak kialakulni. A fentihez hasonló permanens egyensúlytalansági modellek egy első példája Beja és Goldman (1980) cikke. Szintén korai példa Jarrow (1992) modellje, amely azt feltételezi, hogy az elegendően nagy szereplők a kereskedésükkel mozgatják az árakat. A legközelebbi folytonos idejű előzményeknek He és tsai. (2019) és He és tsai. (2018) cikkek tekinthetők, míg diszkrét idejű megfelelőnek tekinthetők például Chiarella és tsai. (2009), Chiarella és tsai. (2013) cikkek.

## 3. fejezet

# Az értekezés eredményei

### 3.1. Fundamentális és technikai kereskedők egy konstans volatilitású modellben

Az értekezés 3. fejezete egy némileg átszerkesztett változata a szerző (Bihary és Víg 2020) Közgazdasági Szemlében megjelent tanulmányának. Ebben a fejezetben egy olyan piacot vizsgálunk melynek aktív szereplői a fundamentális és trendkövető kereskedők, illetve passzív karakterként megjelennek az indexkövető kereskedők. A fejezetben szereplő modell erősen támaszkodik He és Li (2015) folytonos idejű modelljére.

A piaci szereplők viselkedését indikátorok vezérlik, melyek a piac állapotváltozóiként is értelmezhetőek. A modell posztulál egy, az árfolyamtól különböző fundamentális értékfolyamatot. Az egyik indikátor az árdiszlokáció, ami a piaci ár és a fundamentális érték különbsége. Ezt követik a fundamentális kereskedők. A másik a trend indikátor, ami a pillanatnyi ár és annak mozgóátlaga közti különbség. A trendkövetők erre alapozzák stratégiájukat. Az eredetileg az árfolyamra vonatkozó dinamikus egyenletekből levezethető az indikátorok dinamikája. Eltérően az idézett cikkek megszokott megközelítésétől, számolásainkban mi nem tekintünk el a dinamika sztochasztikus jellegétől. Éppen ellenkezőleg, tárgyalásunk az árfolyam, illetve az indikátorok hosszútávú statisztikai viselkedésére koncentrál. Az árfolyam bolyongás, ezért nem beszélhetünk az invariáns eloszlásáról. Az indikátorok azonban, mint a piac állapotát meghatározó mennyiségek, viselkedhetnek stacionárius módon. Szto-



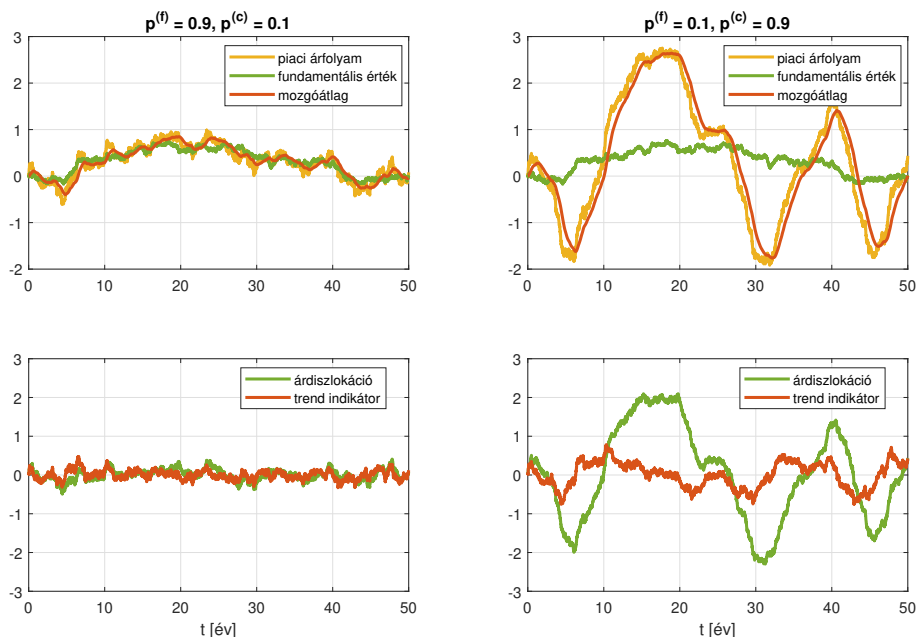
chasztikus leírásmódunkban éppen ezen keresztül definiálhatjuk a piac stabilitását; akkor beszélünk stabil piacról, ha az indikátoroknak létezik invariáns eloszlása.

Egy főmodell, majd annak két egyszerűsített változatának sztochasztikus viselkedését vizsgáljuk.

- A fő modell két központi mennyisége a fundamentális kereskedők által követett árdiszlokáció, illetve a trendkövetők által követett trend indikátor. Ebben a modellben a trendkövetők pozíciófüggvénye az irodalomban megszokotthoz hasonlóan nemlineáris, ezért a kétdimenziós sztochasztikus dinamika is nemlineáris. Ennek a sztochasztikus dinamikai rendszernek az invariáns eloszlását numerikusan, a forward Kolmogorov módszer segítségével vizsgáljuk.
- Az első egyszerűsített modellt egy linearizálás után kapjuk. A trendkövető kereskedők pozíciófüggvényét linearizáljuk a nulla körül. Ekkor a vizsgálandó árdiszlokáció és trend indikátor kétdimenziós sztochasztikus dinamikai rendszer lineáris lesz.
- A második egyszerűsítés esetén a fundamentális értéktől eltekintünk, és azt feltételezzük, hogy a fundamentális kereskedő is a trend indikátor alapján kereskedik, de ellenkező irányba, mint a trendkövető kereskedő. Ekkor a fundamentális kereskedő tulajdonképpen kontráriánus kereskedővé, a dinamikai rendszer pedig egydimenzióssá válik, azonban az érdekes nemlinearitás megmarad.

### 3.1.1. Illusztrációk az árdinamikára

A 3.1. ábra generált trajektóriák segítségével szemlélteti a fundamentális és trendkövető kereskedők piaci szerepét és árhatását a fő specifikáció (többdimenziós, nemlineáris) esetén. A (log) fundamentális érték egy drift nélküli, exogén Brown-mozgás viszonylag kis volatilitással. A (log) piaci árfolyam a fundamentális kereskedőknek köszönhetően a fundamentális érték felé húz, a körül ingadozik. A mozgóátlag lemaradva követi a piaci árfolyamot. Az alsó két ábrán mutatjuk be a piaci indikátorokat, amelyekre a befektetési döntéseiket alapozzák a kereskedők. Az árdiszlokáció a piaci árfolyam és a fundamentális érték különbsége, a trend indikátor a piaci árfolyam és



**3.1. ábra.** Minta trajektóriák a fő (nemlineáris, két dimenziós) specifikáció esetén.

a mozgóátlag különbsége. Előbbit a fundamentális, míg az utóbbit a trendkövető kereskedők követik.

A bal oldali két ábra egy érett, kiforrott piacot szemléltet, ahol a kockázatos termék fundamentális értéke jól becsülhető. Modellünkben ekkor többségben vannak azok a kereskedők, akik a fundamentális érték alapján kereskednek ( $p_f = 0.9$ ). A jobb oldali két ábra olyan piacot szemléltet, ahol a fundamentális érték nehezen megfogható, itt a trendkövető technikai kereskedők vannak többségben ( $p_c = 0.9$ ). A kereskedők piaci hatása jól látható a trajektóriák alapján. A bal oldalon a piaci árfolyam szorosan követi a fundamentális értéket, mert a nagy számú fundamentális kereskedő a fundamentum felé húzza az árat. Az árdiszlokáció kilengései ekkor kicsik. A jobb oldalon az árfolyam rendszeresen és jelentősen eltér a fundamentális értéktől. Ezek a kilengések a nagy számú trendkövető kereskedő aktivitásának köszönhetőek, akik a trendekre felülve periodikusan buborékokat fújnak. Nemlineáris specifikációnk miatt azonban a trendkövetők korlátozott nagyságú pozíciót építhetnek csak ki, ezért előbb utóbb a viszonylag kisszámú fundamentális kereskedő árhatása visszatér-

ríti az árat a fundamentum felé. A piaci ár erősen oszcillál, de fel nem robban.

### 3.1.2. Az invariáns eloszlások

A szimuláció esetén megfigyelt piaci jelenségek az egyszerűsített modellvariánsokban is tetten érhetők. Az első állításunk a lineárizált, két dimenziós modell invariáns eloszlásával kapcsolatos.

**1. Állítás.** *A linearizált specifikáció esetén az árdiszlokáció és a trend indikátor  $\mathbf{Y}(t) = (u(t), x(t))^\top$  együttes dinamikáját leíró sztochasztikus differenciálegyenlet-rendszer akkor és csak akkor rendelkezik invariáns eloszlással, ha a következő feltételek együttesen teljesülnek:*

$$\beta(p_c\alpha_c - p_f\alpha_f) < \frac{1}{\tau} \quad (\text{C1})$$

$$\beta p_f\alpha_f > 0 \quad (\text{C2})$$

Továbbá, feltéve hogy (C1) és (C2) teljesül, az invariáns eloszlás kétdimenziós normális lesz az alábbi paraméterekkel.

$$\begin{aligned} E[u_\infty] &= E[x_\infty] = 0 \\ D^2[u_\infty] &= \frac{\left(\frac{1}{\tau}\boldsymbol{\sigma}_u + q_c\boldsymbol{\sigma}_f\right)^\top \left(\frac{1}{\tau}\boldsymbol{\sigma}_u + q_c\boldsymbol{\sigma}_f\right) + q_f\frac{1}{\tau}\boldsymbol{\sigma}_u^\top\boldsymbol{\sigma}_u}{2q_f\frac{1}{\tau}\left(q_f + \frac{1}{\tau} - q_c\right)}, \\ COV[u_\infty, x_\infty] &= \frac{\left(q_c - \frac{1}{\tau}\right)\boldsymbol{\sigma}_f^\top\boldsymbol{\sigma}_f + \frac{1}{\tau}\boldsymbol{\sigma}_s^\top\boldsymbol{\sigma}_s}{2\frac{1}{\tau}\left(q_f + \frac{1}{\tau} - q_c\right)}, \\ D^2[x_\infty] &= \frac{q_f\boldsymbol{\sigma}_f^\top\boldsymbol{\sigma}_f + \frac{1}{\tau}\boldsymbol{\sigma}_s^\top\boldsymbol{\sigma}_s}{2\frac{1}{\tau}\left(q_f + \frac{1}{\tau} - q_c\right)}, \end{aligned}$$

ahol  $\boldsymbol{\sigma}_u = \boldsymbol{\sigma}_s - \boldsymbol{\sigma}_f$ ,  $q_j = \beta p_j\alpha_j$ ,  $j \in \{f, c\}$ . Az  $\mathbf{Y}_\infty = (u_\infty, x_\infty)^\top$  jelölést használjuk arra a gauss-i valószínűségi változóra, melyhez  $\mathbf{Y}(t)$  eloszlásban konvergál.

*Bizonyítás.* Bihary és Víg (2020). □

Az 1. állítás (C1) feltétele – egyfajta stabilitási kritériumként – azt mutatja meg, hogy ha a trendkövető kereskedők elég erősek (a  $p_c\alpha_c$  relatív erejük elég nagy), ak-

kor a piacot olyan mértékben destabilizálják, hogy a piaci indikátorok még invariáns (határ-) eloszlással sem rendelkeznek. Ez egy trajektória mentén azt jelenti, hogy ha a trendkövetők elég erősek, akkor egy soha nem kidurranó buborékot fújnak. Ez a jelenség a linearizált modell velejárója – a fő specifikációban a trendkövetők túlkereslete a  $\tanh(x)$  függvénnyel kerül tompításra, így ott nem alakulhat ki permanens buborék. Az állítás (C2) feltétele azt jelenti, hogy ha egyáltalán nincsenek a piacon fundamentális kereskedők, akkor nincs árhatás ami a fundamentumhoz visszahúzná az árfolyamot, így az  $u(t)$  árdiszlokáció egyszerű bolyongásként viselkedik, melynek nincs határeloszlása.

Az 1. állítás második részében a momentumok nevezőjében a (C1) feltételre emlékeztető  $\beta p_f \alpha_f + \frac{1}{\tau} - \beta p_c \alpha_c$  mennyiség szerepel. A gauss-i sűrűségfüggvény kiterjedtsége tehát annak a függvénye, hogy a piac mennyire van közel a (C1) stabilitási határhoz.

A következő állításunk az egydimenziós, nemlineáris specifikáció invariáns eloszlására vonatkozik. Ebben a specifikációban a trendkövetők túlkereslete korlátos, így mindig lesz invariáns eloszlás, amely azonban a gaussianál izgalmasabb karakterisztikájú.

**2. Állítás.** *Az egydimenziós nemlineáris specifikáció esetén, a trend indikátor dinamikáját leíró sztochasztikus differenciálegyenlet mindig rendelkezik invariáns eloszlással. Az invariáns sűrűségfüggvény:*

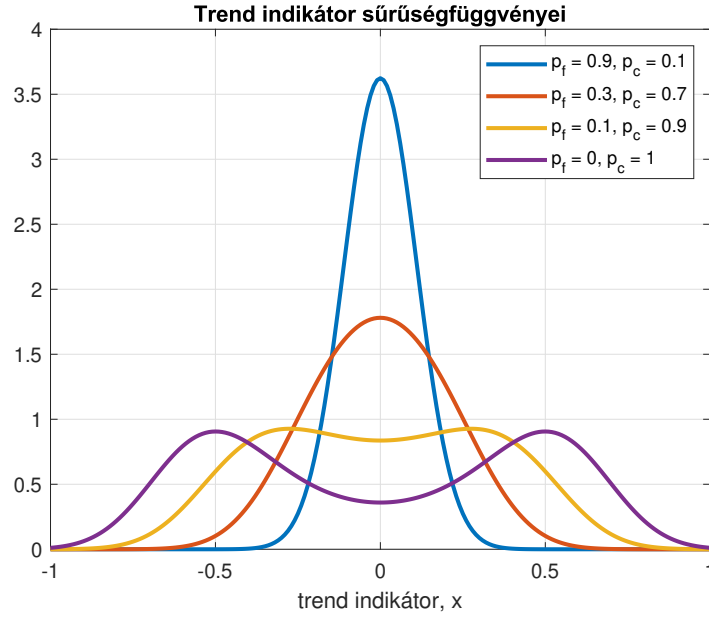
$$f_\infty(x) = C \left( \cosh \left( \frac{x}{x^*} \right) \right)^{\frac{2\beta p_c \alpha_c (x^*)^2}{\sigma_s \sigma_s^\top}} \exp \left( -\frac{\frac{1}{\tau} + \beta p_f \alpha_f}{\sigma_s^\top \sigma_s} x^2 \right), \quad (3.1)$$

ahol  $C > 0$  egy megfelelő normalizáló konstans.

*Bizonyítás.* Bihary és Víg (2020). □

*Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy ha a (3.1) egyenletben a  $\cosh$  tényező kitevője éppen egységnyi, akkor a sűrűségfüggvény egy szimmetrikus, kevert normális eloszlást ír le. Ennek belátására gondoljuk meg, hogy  $\cosh(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} \right)$ .

A 3.2. ábrán néhány jellegzetes sűrűségfüggvényt mutatunk be. A görbék úgy követik egymást, ahogy a trendkövetők populációja fokozatosan növekszik a funda-



**3.2. ábra.** Az egydimenziós, nemlineáris modell sűrűségfüggvénye ((3.1)-os egyenlet) különböző populációs arányok mellett. A – populációs arányokon kívüli – paraméterek megegyeznek az 3.1. ábrában használtakkal.

mentális kereskedők kárára. A kék sűrűségfüggvény egy érett piacra jellemző, ahol többségben vannak a fundamentális kereskedők (jellemző trajektóriát lásd az 3.1. ábra bal oldalán). A piaci indikátor ekkor kis varianciájú és egymódusú, jellegét tekintve közel gaussi. A sárga sűrűségfüggvény esetén többségben vannak a trendkövetők (erre a piacra jellemző trajektóriát lásd az 3.1. ábra jobb oldalán). Ekkor a trend indikátor jóval nagyobb varianciájú, és kétmódusú. A piros görbe egy köztes állapotot ábrázol, míg a lila egy extrém piacot ír le, ahol csak trendkövetők kereskednek. A következő állítás az egy és kétmódusú – azaz érett és extrém – piac karakterizálásáról szól.

**3. Állítás.** Az egydimenziós, nemlineáris specifikáció esetén az  $x(t)$  trend indikátor invariáns eloszlása egymódusú, ha:

$$\beta (p_c \alpha_c - p_f \alpha_f) < \frac{1}{\tau}. \quad (C3)$$

*Bizonyítás.* Bihary és Víg (2020). □

A (C3)-as feltétel azt mutatja, hogy a trend indikátor akkor mutat kétmódusú viselkedést, amikor a trendkövető (technikai) kereskedők dominálnak a piacon a fundamentális kereskedőkkel szemben. Vegyük észre továbbá, hogy ez a (C3)-as feltétel megegyezik az 1. állítás (C1) stabilitási feltételével. Ez a formális egyezés azt sugallja, hogy a nemlineáris modellben megjelenő kétmódusú invariáns eloszlás tulajdonképpen az instabilitásnak egy enyhébb formája.

Amíg a fundamentális kereskedők vannak túlsúlyban, addig a visszahúzó hatásokkal stabilizálják a piacot, erős trendek nem alakulnak ki. Amennyiben a trendkövetők piaci ereje túllép egy kritikus értéket, úgy kialakulnak a feltételei egy öngerjesztő buborékfújásnak. Lineáris specifikáció mellett nincs ami gátat szabjon a trendkövetők buborékgerjesztésének, a piac felrobban. Ilyenkor invariáns eloszlás nem alakul ki. A nemlineáris specifikáció erős kialakult trend esetén is gátat szab a trendkövető kereskedők túlkeresletének, és ezzel a buboréknak. Ilyenkor az árfolyam közepes erősségű emelkedő és csökkenő trendek zajos, kvázi-periodikus sorozata lesz.

### 3.1.3. A profitabilitás kérdése

Ez a szekció egy kiegészítés a Bihary és Víg (2020) tanulmányhoz. Ebben a kiegészítő pontban megvizsgáljuk a kereskedők hosszú távú profitabilitását, és ezen keresztül a fejezetben felvázolt modell egy gyengeségére hívjuk fel a figyelmet. Tegyük fel, hogy a kereskedők  $t = 0$ -ban egy tetszőleges  $W_j(0) > 0$  induló tőkével rendelkeznek, melyet önfinanszírozó módon befektetnek az  $S(t)$  kockázatos eszközbe és egy bankbetétbe. Annak érdekében, hogy egyszerű legyen a modellünk, a befektetők  $Z_j(t)$  túlkeresletét azok befektetési arányaként is értelmezzük, azaz minden  $t$  időpontban a portfóliójuk  $Z_j(t)$  részét a kockázatos eszközben tartják, míg  $1 - Z_j(t)$  részét bankbetétben. Felhasználva az önfinanszírozást, és feltételezve, hogy a bankbetét kamatlába  $r = 0$ , felírhatjuk a befektetők  $W_j(t)$  vagyonának a dinamikáját:

$$dW_j(t) = Z_j(t)W_j(t) \frac{dS(t)}{S(t)} + (1 - Z_j(t))W_j(t) \cdot 0 dt = Z_j(t)W_j(t) \frac{dS(t)}{S(t)}, \quad (3.2)$$

ahol  $S(t) = e^{s(t)}$ . A (3.2) dinamika mögötti intuíció az, hogy az önfinanszírozó portfólió értékfejlődése az egyes részek értékfejlődésének összegeként adódik. Az összeg első tagjának  $\frac{Z_j(t)W_j(t)}{S(t)}$  tényezője a portfólióban lévő részvények darabszámával egyenlő, majd erre szorzunk rá  $dS(t)$ -vel, azaz a részvény pénzbeli értékének megváltozásával. Az összeg második tagjának  $(1 - Z_j(t))W_j(t)$  tényezője azzal egyenlő, hogy mennyi pénz van ekkor bankbetétben, majd ez kamatozik a feltételezett  $r = 0$  rátával.

A befektetők profitabilitását azok hosszú távú várható loghozamával azonosítjuk:

$$\Pi_j = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[ \frac{\log W_j(T) - \log W_j(0)}{T} \right], \quad (3.3)$$

A linearizált specifikáció esetén analitikus eredményekkel tudunk szolgálni a profitibilitásra:

**4. Állítás.** *Tegyük fel, hogy a linearizált modell esetén (C1) és (C2) is fennáll. Tegyük fel továbbá, hogy a befektetők vagyona a (3.2) önfinanszírozó dinamikának megfelelően fejlődik. Ekkor a befektetők (3.3) profitabilitása:*

$$\begin{aligned} \Pi_f &= \beta p_f \alpha_f^2 E[u_\infty^2] - \beta p_c \alpha_c \alpha_f E[u_\infty x_\infty] - \alpha_f^2 \frac{\boldsymbol{\sigma}_s^\top \boldsymbol{\sigma}_s}{2} E[u_\infty^2] \\ \Pi_c &= \beta p_c \alpha_c^2 E[x_\infty^2] - \beta p_f \alpha_f \alpha_c E[u_\infty x_\infty] - \alpha_c^2 \frac{\boldsymbol{\sigma}_s^\top \boldsymbol{\sigma}_s}{2} E[x_\infty^2] \\ \Pi_i &= 0 \end{aligned}$$

*Bizonyítás.* Bihary és Víg (2020). □

A 4. állításban felírt profitok segítségével felírhatjuk a fundamentális és a trendkövető kereskedő hosszú távú profitjának különbségét:

$$\begin{aligned} \Pi_f - \Pi_c &= \frac{\boldsymbol{\sigma}_s^\top \boldsymbol{\sigma}_s}{2} (\alpha_c^2 E[x_\infty^2] - \alpha_f^2 E[u_\infty^2]) + (p_f - p_c) \beta \alpha_f \alpha_c E[u_\infty x_\infty] + \\ &\quad + \beta (p_f \alpha_f^2 E[u_\infty^2] - p_c \alpha_c^2 E[x_\infty^2]) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Bár nem szabad elfelejteni, hogy maguk a momentumok is függnék a  $p_f$  és  $p_c$  populációs arányoktól, az elsőrendű hatásokat (3.4) esetén megvizsgálva az látszik, hogy

$$\frac{\partial (\Pi_f - \Pi_c)}{\partial (p_f - p_c)} > 0$$

azaz annak a kereskedőnek lesz hosszú távon nagyobb profitja a kettő közül, amelyik erősebb jelenléttel bír a piacon. Ez azért sajnálatos, mert ha a kereskedők populációs arányát endogénné tennénk úgy, hogy a vagyonarányukkal azonosítjuk, akkor egy olyan modellt kapnánk, amelyekben hosszú távon az egyik kereskedő végérvényesen dominánssá válna a másikkal szemben. Azaz a modellben hosszú távon még statisztikai értelemben sem tud kialakulni egyensúly a két releváns kereskedő típus között. Az értekezés következő fejezetében egy olyan modellt vázolunk fel, amelyben a populációs arányokat endogenizáljuk, és egy – a volatilitásban megjelenő – új hatásnak köszönhetően hosszú távon kialakul az egyensúly a kereskedők között.

## 3.2. Piaci heterogenitás és endogén volatilitás

A disszertáció 4. fejezetének az a célja, hogy egy olyan modellt vázoljunk fel, amely megoldást nyújt az előző fejezet végén tárgyalt, hosszú távú profitabilitással kapcsolatos problémára. Egy olyan új, realisztikus hatást fogunk megjeleníteni az előző modellhez képest, amely „bünteti” azt a kereskedőt, amelyik dominánssá válik a piacon. Ebben a fejezetben szakítunk a heterogén ágens irodalomban szokásos konstans volatilitással, és azt feltételezzük, hogy az aktív kereskedésből fakadó piaci kereslet-kínálati egyensúlytalanság megjelenik közvetlenül a volatilitásban is; minél nagyobb a pillanatnyi egyensúlytalanság, annál nagyobb a volatilitás is. Ez az endogén volatilitás hatás megoldja az előző fejezetben megjelenő problémát: egyik kereskedő sem tud a másik felett hosszú távon végérvényesen elhatalmasodni. A sztochasztikus volatilitásnak köszönhetően továbbá a hozamok eloszlása vastag szélű lesz, amely alapvető elvárás és üdvözlendő egy sztochasztikus pénzügyi modell esetén.

Az endogén volatilitás hatáson kívül ebben a fejezetben több ponton is egy jóval általánosabb modellkeretet tárgyalunk az előző fejezethez képest. A piacon több kockázatos eszközt is megengedünk. A kereskedők piaci súlyát a vagyonarányokkal azonosítjuk, melyek így maguk is a kereskedők stratégiájától és a kockázatos eszkö-



zök áralakulásától függő sztochasztikus folyamatok lesznek. Továbbá a kereskedőket befektetési alapokként kezeljük, és így új hatásként megengedjük, hogy a mögöttes befektetők átcsoportosítsák a vagyonukat a különböző alapok között.

A fejezet végén részletesen vizsgálni az általános modell egy nagyon speciális esetét fogjuk csak. Az általános modell felírása ezért akár öncélúnak, fölöslegesen bonyolultnak is tűnhet. Véleményünk szerint azonban az általános modellnek önmagában is van értéke. Egyrészt egy sokdimenziós sztochasztikus dinamikai rendszer felírása egy nem triviális modellezési feladat. Másrészt egyértelművé válik, hogy az általános modellben egy-egy függvényválasztással vagy endogenizálással milyen további érdekes hatások válhatnak vizsgálhatóvá egy későbbi kutatás során.

### 3.2.1. Az endogén volatilitású trend indikátor önálló vizsgálata

A fejezet egyik fő eredménye a trend indikátor folyamat sztochasztikus viselkedésének jellemzése. A trend indikátor sztochasztikus differenciálegyenlete az alábbiak adódik:

$$dx(t) = -Kx(t) dt + \sigma \sqrt{1 + \Gamma^2 x^2(t)} dB(t), \quad (3.5)$$

ahol a sztochasztikus tagban megjelenő gyökös tényező a fejezet központi újítása az irodalomhoz képest. Ezt a tényezőt (illetve ezt a hatást) nevezzük endogén volatilitásnak, amely a pillanatnyi piaci egyensúlytalanságból fakad: minél nagyobb a pillanatnyi egyensúlytalanság (abszolútértéke), annál nagyobb a piacon a volatilitás.

A dolgozatban megadjuk a (3.5) folyamat invariáns eloszlását. Az invariáns eloszlás Cherny (2004) alapján a t-eloszlás egy skálázottja:

$$x_\infty \stackrel{d}{=} \frac{T}{\Gamma \sqrt{1 + \frac{2K}{\Gamma^2 \sigma^2}}} \quad \text{ahol} \quad T \sim t \left( 1 + \frac{2K}{\Gamma^2 \sigma^2} \right)$$

Ebből Johnson és tsai. (1995) alapján már adódik is az invariáns eloszlás létezésének feltétele. Mivel a t-eloszlás szabadságfokának pozitívnak kell lennie, így az invariáns eloszlás akkor létezik ha

$$1 + \frac{2K}{\Gamma^2 \sigma^2} > 0 \quad \implies \quad \frac{2K}{\Gamma^2 \sigma^2} > -1$$

Vegyük észre, hogy az invariáns eloszlás még negatív  $K$  esetén is létezhet, hiszen  $K$ -ra nézve a feltétel  $K > -\frac{\Gamma^2 \sigma^2}{2}$ . Ez egy rendkívül érdekes megfigyelés, hiszen az intuíció azt mondaná, hogy egy folyamatnak csak akkor lehet invariáns eloszlása, ha a driftben megjelenik egyfajta átlaghoz visszahúzás. Ezzel szemben az állapotfüggő volatilitású (3.5) folyamatnak még akkor is létezhet invariáns eloszlása, ha a driftben egy – olybár gyenge – taszító hatás megjelenik. Ez arra utal, hogy a változó volatilitás az eloszlását tekintve stabilizálja a folyamatot.

A (3.5) folyamat viselkedésének még mélyebb megértése érdekében végül vizsgáljuk meg annak Lamperti transzformáltját (lásd Møller és Madsen (2010)), azaz keressük azt a  $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  függvényt, amely mellett a  $\xi(t) = g(x(t))$  folyamat konstans volatilitású. Az alkalmas  $g$  függvény integrálással számolható:

$$g'(x) \sigma \sqrt{1 + \Gamma^2 x^2} = \sigma \quad \implies \quad g(x) = \int^x \frac{1}{\sqrt{1 + \Gamma^2 u^2}} du = \frac{\operatorname{arsinh}(\Gamma x)}{\Gamma},$$

azaz ha az  $x(t)$  folyamatnak vesszük a szinusz hiperbolikus függvény inverzével<sup>1</sup> vett transzformáltját, akkor egy konstans volatilitású folyamatot kapunk. A transzformált folyamat dinamikája ekkor

$$d\xi(t) = -\frac{2K + \Gamma^2 \sigma^2}{2\Gamma} \tanh(\Gamma \xi(t)) dt + \sigma dB(t) \quad (3.6)$$

Vegyük észre, hogy a driftben a folyamat értékének páratlan, szigorúan monoton növekvő, alulról és felülről is korlátos függvénye szerepel. Azaz – feltéve, hogy  $2K + \Gamma^2 \sigma^2 > 0$  és  $\Gamma > 0$  – a (3.6) folyamatban is megjelenik az átlaghoz visszahúzás, de ez a tangens hiperbolikus<sup>2</sup> függvény miatt egy korlátos, azaz globálisan tekintve gyenge hatás. Az átlaghoz visszahúzás  $2K + \Gamma^2 \sigma^2 > 0$  feltétele pedig megegyezik az eredeti folyamat invariáns eloszlás létezésének feltételével, ami ismét intuitív eredmény: az eredeti, változó volatilitású folyamatnak éppen akkor létezik invariáns eloszlása, ha annak konstans volatilitású transzformáltjában megjelenik az átlaghoz visszahúzás a driftben.

A (3.6) transzformált folyamat fényében nem meglepő továbbá az eredeti (3.5) folyamat invariáns eloszlásának vastag szélősége sem. A (3.6) folyamatban a tangens

---

<sup>1</sup> $\operatorname{arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$

<sup>2</sup> $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

hiperbolikus miatt az átlaghoz visszahúzás nagyon gyengén jelenik meg, ráadásul az eredeti  $x(t)$  folyamatot úgy kapnánk vissza, ha vennénk  $\xi(t)$ -nek szinusz hiperbolikusát<sup>3</sup>, ami egy páratlan, gyorsan növekvő függvény. Azaz ha egy gyengén visszahúzó folyamatot még szét is terítünk egy gyorsan növekvő függvénnyel, észszerűnek tűnik, hogy egy olyan folyamatot kapunk, amelynek invariáns eloszlása vastag szélű, esetünkben  $t$ -eloszlás.

Ahogy a 2.3.1 szakaszban ismertettük, az  $x(t)$  trend indikátor értelmezhető a modellben  $\tau$ -hozamként is. Ezért a trend indikátor invariáns eloszlásának vastag szélűsége üdvözlendő eredmény, hiszen ez azt jelenti, hogy maguk a hozamok is vastag szélű eloszlást követnek az endogén volatilitásnak köszönhetően. A hozamok nem normalitása a pénzügyi szakirodalom (lásd például Officer (1972)) egyik klasszikus és legalapvetőbb empirikus megfigyelése, melyet elméleti modellünk képes reprodukálni.

### 3.2.2. A trendkövető és az indexkövető kereskedő versenye

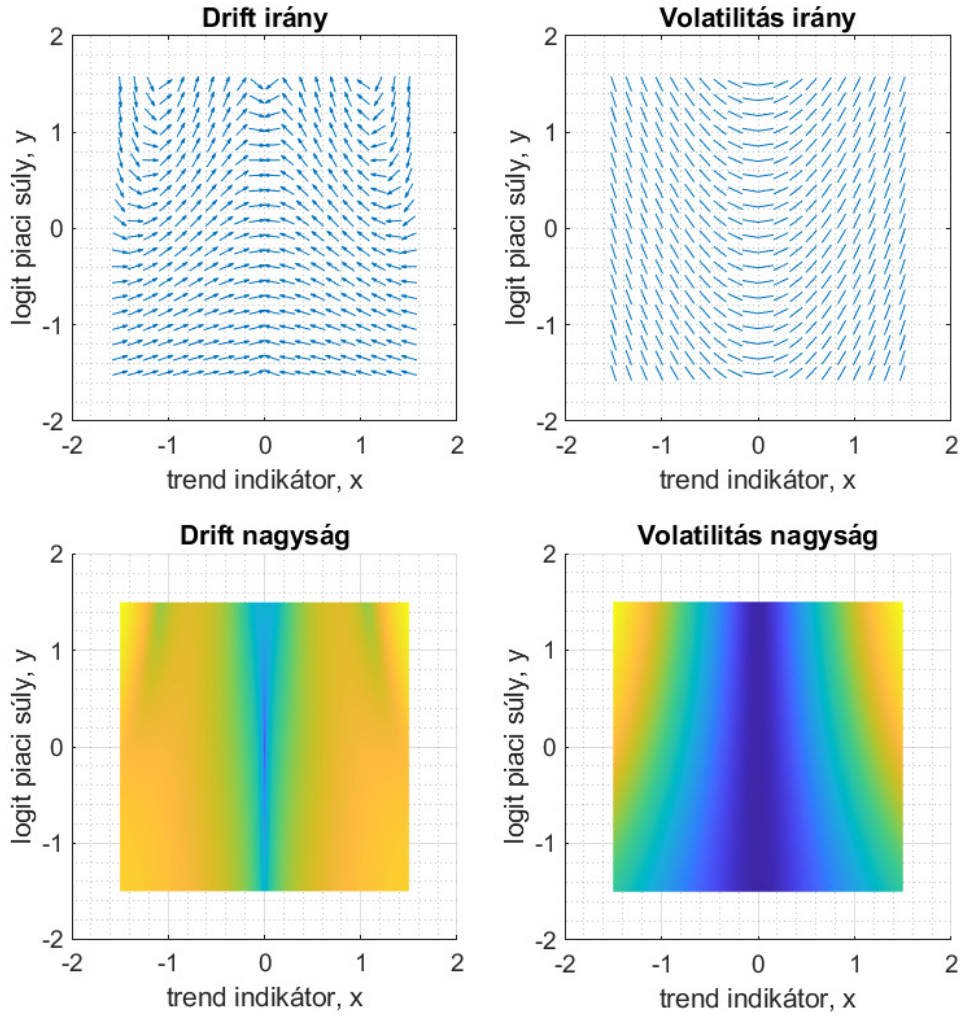
Az értekezés 4. fejezetének végén a modellnek egy olyan karakterisztikus esetét vizsgáljuk, ahol egy trendkövető és egy indexkövető kereskedő versenyez egymással. A vizsgálat célja egy olyan realiztikus modell feltárása, amelyben megjelenik egyfajta ciklikus, hosszú távú egyensúly a két kereskedő típus között.

A modell központjában egy olyan kétdimenziós sztochasztikus dinamikai rendszer áll, amelyben az egyik dimenzió a trend indikátor  $x(t)$ , a másik pedig a trendkövető piaci súlyarányának logit-transzformáltja  $y(t)$ . A volatilitásban megjelenik a piaci egyensúlytalanságból eredő endogén volatilitás. A dinamika pontos megértéséhez annak determinisztikus csontvázát vizsgáljuk, azaz ahol elhagyjuk a  $dB(t)$ -s tagokat.

A determinisztikus csontváz karakterisztikus viselkedését mutatja be a 3.3. ábra. A legérdekesebb eredmény a 3.3. ábra bal felső fázisábráján látható örvénylő viselkedés. A két bal oldali ábra a rendszer driftjét, míg a jobb oldali két ábra a volatilitását jellemzi. Mind a négy ábra az  $(x, y)$  síkon helyezkedik el, ahol  $x$  a trend indikátor,  $y$  a trendkövető kereskedő piaci súlyának logit transzformáltja. A felső két ábrán az egyenlő hosszúságúra normált nyilak a rendszer megváltozásának irányát szemléltetik. A drift esetén (bal felső ábra) a nyilak azt jelentik, hogy a rendszer

---

<sup>3</sup> $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$



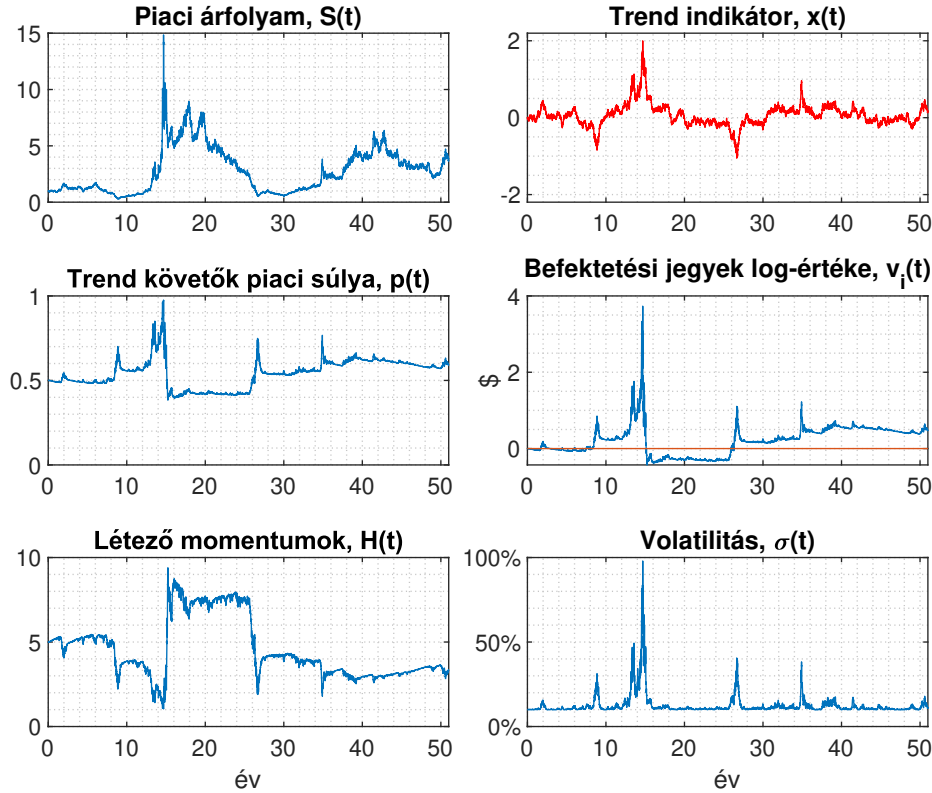
**3.3. ábra.** A trend indikátor  $x(t)$  és trend követő piaci súlya  $y(t)$  kétdimenziós rendszer fázisábrái. Bal oldali két ábra a rendszer driftjének, míg a jobb oldali két ábra a rendszer volatilitásának irányát szemlélteti. A felső két ábra a rendszer megváltozásának irányát mutatja be egyenlő hosszúságúra normált nyilakkal, míg az alsó két ábra a megváltozás sebességét mutatja be hőtépképpel. A hőtépképek esetén a kék szín a lassú megváltozást jelenti, míg a sárga a gyors megváltozást.

várhatóan mely irányba fog elmozdulni. Ezen az ábrán látszik a korábban tárgyalt örvénylő viselkedés a  $(1, 0)$  és a  $(-1, 0)$  pontok környékén. A volatilitás esetén (jobb

felső ábra) a nyilak hegye nem került ábrázolásra, hiszen a volatilitásnak nincsen várható iránya. Az alsó két ábra a rendszer megváltozásának sebességét szemlélteti hőterkép segítségével. A drift esetén (bal alsó ábra) három „völgy” vehető ki: egy az origónál, illetve egy-egy az örvények középpontjainál. Az origónál lévő völgy egy triviális stacioner állapotot jelöl, mely a differenciálegyenleket megvizsgálva könnyen ellenőrizhető. A két további völgy is jelenthet két nem triviális stacioner állapotot e mellett a paraméterezés mellett, de ennek analitikus ellenőrzése sem triviális. A volatilitás esetén (jobb alsó ábra) a sebesség az „észak-keleti” és „észak-nyugati” irányba nő, azaz akkor nagy a volatilitás, amikor a trendkövetők dominánsak, és éppen nagy trendben van a piac.

Az örvénylő viselkedés leírása pénzügyi nyelven a következő. Tegyük fel, hogy a trendkövető és az indexkövető kereskedők hasonló erővel bírnak a piacon, és a trendkövetők egy kis – mondjuk pozitív – trendet azonosítanak. A kis trendre válaszul a trendkövetők egy kis pozíciót fel is vesznek, mellyel az árat – az árhatásuknak köszönhetően – fel is hajtják. Így egyre nagyobb trend kezd kialakulni, amelyre egyre nagyobb és nagyobb pozícióval reagálnak a trendkövetők. Ráadásul mindeközben még a piaci súlyuk is növekszik: az egyre nagyobb pozíciójuknak köszönhetően egyre többet és többet nyernek az áremelkedésen. A piacnak ebben az eufórikus állapotában azonban kezd a piaci egyensúlytalanság olyan méreteket ölteni, hogy az már a volatilitást is nagyon megnöveli. A volatilitás olyan méreteket ölt, hogy várható értékben elkezdenek veszíteni a trendkövetők. Amikor még csak elkezdenek veszíteni, akkor a piaci súlyuk még mindig elég nagy (bár már csökken), ezért a buborékot egy ideig várható értékben még tovább fújják, bár már lassuló ütemben. Az endogén volatilitás miatt azonban hirtelen óriási lesz a várható veszteségük a trendkövetőknek, akik ráadásul a trend piaci súlyarányokhoz képesti késése miatt lemaradnak a trendfordulóról. A trendkövetők tehát saját sikerességük áldozatai lettek. Ha az árdinamikában mind a várható hozamok, mind a volatilitás szintjén megjelenik a piaci egyensúlytalanság (amit a kereskedők aggregált pozícióival azonosítunk), akkor a trendkövetők valóban képesek lesznek buborékot fújni, amin ráadásul egy ideig sokat nyernek is. Végül azonban a saját maguk által gerjesztett nagy volatilitásba buknak bele.

A modell viselkedését szemlélteti a 3.4. ábra szimuláció segítségével. A hat ábra egy 50 éves trajektória történetét mutatja több dimenzió mentén. Érdekes ezeket az



**3.4. ábra.** Trajektóriák. Paraméterek:  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $\tau = 1$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $\gamma = 2.5$ ,  $\kappa = 0.01$ .

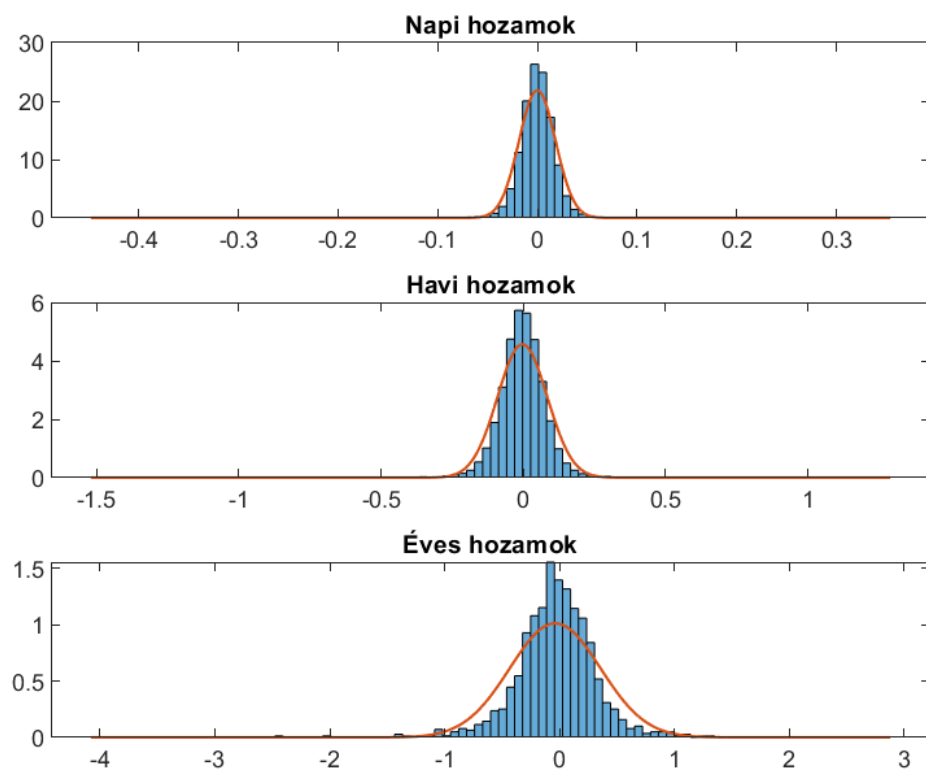
ábrákat úgy kezelni, mintha valós piaci jelenségeknek egyfajta karikatúráját mutatnák be. A bal felső ábrán az egyetlen kockázatos eszköz dollárban mért árfolyama,  $S(t)$  látható. Az ábrán több nagy trend is azonosítható, illetve a volatilitás változása is szembetűnő. A legfeltűnőbb esemény a 15. év környékén történt óriási felszúrás, majd hirtelen visszaesés. A jobb felső ábrán az  $x(t)$  trend indikátor látható, majd az 50 év nagy részében a  $(-1, 1)$  intervallumon belül marad, a 15. év környékén szúr fel egészen 2-ig. Mivel  $\tau = 1$ , ezért ezen az ábrán egy 1-es érték nagyjából egy 100%-os éves hozamnak felel meg.

A bal középső ábrán a trendkövetők  $p(t)$  piaci súlyának alakulása látható, melyet az  $y(t)$  logit változó visszatranszformálásával kapunk meg. Jól látszik, hogy ahogy nagy – pozitív vagy negatív – trendeket gerjesztenek, párhuzamosan a piaci súlyuk is megnő. Azonban a korrekció is gyorsan megtörténik: amilyen hirtelen megnő a

piaci vagyonarányuk, a hirtelen veszteségek miatt az ugyanolyan gyorsan vissza is tud esni. A hirtelen megváltozásokat nyugodt periódusok követik. A jobb középső ábra a két befektető befektetési jegy dollárértékének logaritmusát,  $v_j(t)$ -t mutatja. A befektetési jegyek értékén is tetten érhető az, hogy a trendkövetők a bubrékfújácson sokat keresnek, azonban az általuk gerjesztett volatilitás is éppen akkor lesz óriási, amikor a pozíciójuk is nagy, és így hirtelen sokat is veszítenek.

A jobb alsó ábrán a közvetlenül a modellből számolt volatilitás látható. Ez az ábra már hasonlít egy valós árfolyamat eseeén számolt volatilitás folyamatához, ahol erősen volatilis, illetve nyugodt periódusok váltogatják egymást. A 15. év környékén látható 200%-os volatilitás persze egy gyakorló kereskedő számára irreálisnak tűnhet, ezért újra hangsúlyozzuk a modell karikatursztikus jellegét. A legnagyobb felszúrásst leszámítva azonban a volatilitás nagyjából a 20% és 60% közötti tartományban marad, amely már nem tűnik irreálisnak.

Az endogén, sztochasztikus volatilitás hatását szemlélteti a 3.5. ábra is, ahol egy 2000 éves, szimulációval készített trajektórián számolt, különböző időtávhoz tartozó loghozamok eloszlása látható. A napi, havi és éves hozamok hisztogramjain túl összehasonlítás képpen a megfelelő normális eloszlás sűrűségfüggvénye is ábrázolásra került. Mivel a modell által definiált árfolyamat Itô-folyamat, ezért a rövid távú hozamok feltételes eloszlása definíció szerint normális. A sztochasztikus volatilitás miatt azonban a hozamok feltétel nélküli eloszlása különböző szórású normálisak keveréseként áll elő. Ennek hatására a hozamok mindhárom vizsgált időtávon erősen csúcsosabbak, és gyengén vastagabb szélűek a normális hozamokhoz viszonyítva.



**3.5. ábra.** A különböző időtávú loghozamok hisztogramjai, és a megfelelő normális sűrűségfüggvények.



## 4. fejezet

### Saját publikációk jegyzéke

- Bajai, M., Hortay, O. és Víg, A. A. (2022). Electricity Market Liquidity and Price Spikes. *Periodica Polytechnica Social and Management Sciences*, 30(1), pp.49–56.
- Havran, D., Kerényi, P. és Víg, A. A. (2021). Social Finance and Agricultural Funding. In *Innovations in Social Finance*. pp. 269–290.
- Bihary, Z. és Víg, A. A. (2020). Heterogén kereskedési stratégiák hatása a piaci árfolyamokra. *Közgazdasági Szemle*, 67(7–8), pp.688–707.
- Hortay, O. és Víg, A. A. (2020). Potential effects of market power in Hungarian solar boom. *Energy*, 213, p.118857.
- Bihary, Z. és Víg, A. A. (2018). Portfólióallokáció csődvészély esetén, korlátozott felelősség mellett. *Közgazdasági Szemle*, 65(7–8), pp.711–725.
- Vidovics-Dancs, Á. és Víg, A. A. (2017). Indexed bonds with mean-reverting risk factors. In *Proceedings 31st European Conference on Modelling and Simulation*. pp. 81–86.
- Havran, D., Kerényi, P. és Víg, A. A. (2017). Szállítói finanszírozás vagy bankhitelek? - A magyar vállalatok 2010 és 2015 közötti tanulságai. *Hitelintézeti Szemle*, 16(4), pp.86–121.

# Irodalom

- Beja, A. és Goldman, M. B. (1980). On the dynamic behavior of prices in disequilibrium. *The Journal of Finance* 35.2, 235–248. old. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1980.tb02151.x.
- Bihary, Z. és Víg, A. A. (2020). Heterogén kereskedési stratégiák hatása a piaci árfolyamokra. *Közgazdasági Szemle* 67.4, 688–707. old. DOI: 10.18414/KSZ.2020.7-8.688.
- Cherny, A. (2004). Invariant Distributions for Singular Stochastic Differential Equations. *Stochastics and Stochastic Reports* 76.2, 101–112. old. DOI: 10.1080/10451120410001697837.
- Chiarella, C., Dieci, R. és Gardini, L. (2006). Asset price and wealth dynamics in a financial market with heterogeneous agents. *Journal of Economic Dynamics and Control* 30.9-10, 1755–1786. old. DOI: 10.1016/j.jedc.2005.10.011.
- Chiarella, C., Dieci, R. és He, X.-Z. (2009). „Heterogeneity, Market Mechanisms, and Asset Price Dynamics”. *Handbook of Financial Markets: Dynamics and Evolution*. Elsevier, 277–344. old. DOI: 10.1016/b978-012374258-2.50009-9.
- Chiarella, C., Dieci, R., He, X.-Z. és Li, K. (2013). An evolutionary CAPM under heterogeneous beliefs. *Annals of Finance* 9.2, 185–215. old. DOI: 10.1007/s10436-012-0215-0.
- Friedman, M. (1953). *Essays in positive economics*. University of Chicago Press.
- He, X.-Z. és Li, K. (2015). Profitability of time series momentum. *Journal of Banking & Finance* 53, 140–157. old. DOI: 10.1016/j.jbankfin.2014.12.017.
- He, X.-Z., Li, K. és Li, Y. (2018). Asset allocation with time series momentum and reversal. *Journal of Economic Dynamics and Control* 91, 441–457. old. DOI: 10.1016/j.jedc.2018.02.004.

- He, X.-Z., Li, Y. és Zheng, M. (2019). Heterogeneous agent models in financial markets: A nonlinear dynamics approach. *International Review of Financial Analysis* 62, 135–149. old. DOI: 10.1016/j.irfa.2018.11.016.
- Hofbauer, J. és Sigmund, K. (1998). *Evolutionary games and population dynamics*. Cambridge university press. DOI: 10.1017/cbo9781139173179.
- Jarrow, R. A. (1992). Market manipulation, bubbles, corners, and short squeezes. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 311–336. old. DOI: 10.2307/2331322.
- Johnson, N. L., Kotz, S. és Balakrishnan, N. (1995). *Continuous univariate distributions, volume 2*. Wiley-Interscience. ISBN: 978-0471584940.
- LeBaron, B. (2001). A builder’s guide to agent-based financial markets. *Quantitative Finance* 1.2, 254–261. old. DOI: 10.1088/1469-7688/1/2/307.
- LeBaron, B. (2011). Active and passive learning in agent-based financial markets. *Eastern Economic Journal* 37.1, 35–43. old. DOI: 10.1057/eej.2010.53.
- Malkiel, B. G. és Fama, E. F. (1970). Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *The Journal of Finance* 25.2, 383–417. old. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1970.tb00518.x.
- Møller, J. K. és Madsen, H. (2010). *From state dependent diffusion to constant diffusion in stochastic differential equations by the Lamperti transform*. IMM-Technical Report-2010-16. Technical University of Denmark, DTU Informatics, Building 321. URL: <https://orbit.dtu.dk/en/publications/from-state-dependent-diffusion-to-constant-diffusion-in-stochasti>.
- Nash, J. (1951). Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, 286–295. old. DOI: 10.2307/1969529.
- Officer, R. R. (1972). The distribution of stock returns. *Journal of the American Statistical Association* 67.340, 807–812. old. DOI: 10.2307/2284641.
- Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance* 19.3, 425–442. old. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x.