

Árhatás és profitabilitás heterogén ágens modellekben

Víg Attila András

Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék

Témavezető: Bihary Zsolt, PhD

© Copyright

Budapesti Corvinus Egyetem

Közgazdasági és Gazdaságinformatikai Doktori Iskola

Árhatás és profitabilitás heterogén ágens modellekben

Doktori értekezés

Víg Attila András

Budapest, 2022

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	13
2. Ágensalapú pénzügyi modellezés	17
2.1. Az ágensek	19
2.2. Fundamentális kereskedő	20
2.2.1. Fundamentális érték	21
2.3. Technikai kereskedő	22
2.3.1. Trend indikátor	25
2.4. Zajkereskedő	28
2.5. Indexkereskedő	29
2.6. Evolúció, vagyon dinamika és egyensúly	30
2.6.1. A passzív vagyonfejlődés	34
2.6.2. Az aktív vagyonátcsoportosítás	36
2.7. A kereskedett eszközök és a piaci ármechanizmus	39
2.7.1. Permanens egyensúlytalansági piac	42
3. Fundamentális és technikai kereskedők egy konstans volatilitású modellben	47
3.1. Modell	49
3.1.1. A heterogén kereskedő típusok	49
3.1.2. A piaci ármechanizmus	52
3.1.3. A linearizált modell	54
3.1.4. Az egydimenziós modell	55
3.2. Illusztrációk az árdinamikára	55
3.3. Az invariáns eloszlások	57

3.4. Empirikus eredmények	62
3.5. A profitabilitás kérdése	64
4. Piaci heterogenitás és endogén volatilitás	67
4.1. A piaci súly dinamikája	68
4.2. A piaci ármechanizmus	75
4.3. A portfóliósúlyok	78
4.4. A piacot leíró csatolt dinamikai rendszer	82
4.4.1. A trend indikátor dinamikája	83
4.4.2. A piaci vagyonarányok dinamikája	85
4.5. Az endogén volatilitású trend indikátor önálló vizsgálata	87
4.5.1. A trend indikátor invariáns eloszlása	90
4.5.2. A trend indikátor Lamperti-transzformáltja	91
4.6. A trendkövető és az indexkövető kereskedő versenye	93
5. Összefoglalás	101
A. Appendix	107
A.1. A Kolmogorov parciális differenciálegyenlet numerikus megoldása . .	107
A.2. Bizonyítások	109
A.3. Trend indikátor invariáns eloszlása	112
A.4. Sztochasztikus Runge-Kutta 2 módszer	113

Ábrák jegyzéke

2.1. A Royal Dutch Shell és a Shell Transport részvényárfolyamainak eltérése az elméleti paritástól.	25
2.2. A passzív típusú befektetések térnyerése az aktívval szemben.	29
3.1. Minta trajektóriák a fő (nemlineáris, két dimenziós) specifikáció esetén.	56
3.2. Az invariáns sűrűségfüggvények a fő (nemlineáris, két dimenziós) specifikáció esetén.	58
3.3. A trend indikátor invariáns sűrűségfüggvénye az egydimenziós, nemlineáris specifikáció esetén.	61
3.4. SP500 és Bitcoin árfolyama és mozgóátlaga, illetve a trend indikátor empirikus a hisztogramjai.	63
4.1. A trend indikátor és logit piaci súly dinamikai rendszer fázisábrái.	95
4.2. Szimulált trajektóriák a trendkövető és az indexkereskedő versenyére az endogén volatilitású modellben.	97
4.3. A különböző időtávú loghozamok hisztogramjai.	98

Köszönetnyilvánítás

E dolgozat nem készült volna el témavezetőm és szerzőtársam, Bihary Zsolt nélkül, aki matekozásra szinte bármikor elérhető volt.

Köszönettel tartozom a bátorításért és a támogatásért tanszékvezetőmnek, Berlinger Edinának, illetve a kutatási csoportunk vezetőjének, Csóka Péternek.

Köszönöm szoba- és doktorandusztársaimnak, Kerényi Péternek és Illés Ferencnek, akiknek a véleményére bármely témával kapcsolatban mindig sokat adtam.

Köszönöm a Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszéken dolgozó minden kollégámnak, akiknek köszönhetően olyan inspiráló környezetben dolgozhattam, ami nagyban hozzájárult a fejlődésemhez.

Végül köszönöm feleségemnek, Heninek, illetve gyermekeimnek, Ákosnak és Rózinak a türelmet és a megértést.

1. fejezet

Bevezetés

A pénzügyi piacok összetettsége nagy kihívást jelent a piaci jelenségek kutatói számára. A tradicionális megközelítés szerint a tőkepiacokat benépesítő befektetők teljesen racionálisak. Preferenciáik kielégítik a Neumann–Morgenstern-féle axiómarendszert (Neumann és Morgenstern, 1944), a befektetők homogének a várakozásaikban, illetve a várakozásaik konzisztensek az adatgeneráló folyamattal. Minden szükséges információ birtokában vannak, ismerik a Bayes-tételt, és ezek alapján – mintha ismernék magát a modellt – helyesen optimalizálnak, azaz *homo ökonomikusként* viselkednek.

A tradicionális megközelítés a hatékony piacok hipotézisében (Malkiel és Fama, 1970) összponstosul. A hipotézis szerint a tőkepiaci árfolyamok minden pillanatban az összes elérhető információt tükrözik, egyensúlyban vannak. Új információ esetén (és csak akkor!) az árak azonnal módosulnak, és az új egyensúlyba kerülnek. Mivel az árak mindig megegyeznek a valós, úgynevezett fundamentális értékkel, ezért a befektetőknek többlet hozam elérésére nincs lehetőségük: a legjobb piaci modell a véletlen bolyongás. A hatékony piacok hipotézisének gyenge formája szerint az árak teljességgel tükrözik a nyilvánosan elérhető pénzügyi változóknak (historikus árfolyamok, osztalékok) rejlő információt. A félerős szint szerint az árak tükrözik a nyilvánosan bejelentett, a vállalatot érintő új információkat (vállalati fúziók, jelentések). Az erős szint szerint az árak az olyan információkat is teljességgel tükrözik, melyekkel csak bennfentesek rendelkezhetnek.

Bár a piaci szereplők racionalitását és a piacok hatékonyságát sok kritikus nem

tartja realiztikusnak, ezek nagyon mélyen gyökereznek a pénzügyi közgazdaságtanban. Friedman (1953) érvelése szerint a befektetők akadémiai értelemben nem racionálisak, de összességében úgy viselkednek, mintha racionálisak lennének. Bár nem rendelkeznek minden információval, nem oldanak meg komplex optimalizációs feladatokat, de Alchian (1950) szerint a piacok kegyetlenek az irracionálisan viselkedőkkel szemben, és az evolúciós folyamatok azt diktálják, hogy idővel eltűnnek a tőkepiacról. Ezek az evolúciós folyamatok tehát egy olyan állapot felé terelik a piacokat, ahol az „életben maradt” befektetők úgy viselkednek, mintha racionálisak lennének.

A hatékony piacok gyenge szintje szerint technikai elemzéssel, míg félerős szintje szerint fundamentális elemzéssel sem tudunk többlethozamot elérni. Ennek ellenére mégis azt látjuk a piacokon, hogy mindkét kereskedési stratégiatípus nagy népszerűségnek örvend. Piaci anomáliák (január effektus, kiscég effektus, hétvége effektus, ünnepnap effektus; lásd Singal (2004)) szintén azt sugallják, hogy a teljes racionalitás feltevése és a hatékony piacok hipotézise gyenge lábakon áll.

A pénzügyi piacok heterogén ágens irodalma szakít a hatékony piacokkal és a racionális befektetőkkel, és a piacot egy többdimenziós dinamikai rendszerként képzei el, ahol a kereskedők portfóliója, az árfolyamok, a piaci súlyok egyidőben evolválódnak. E dolgozat ehhez az irodalomhoz kíván csatlakozni. Az ilyen modellekben a piaci résztvevők korlátozottan racionálisak, azaz heurisztikus szabályok szerint viselkednek, és döntéseiket csak a rendelkezésükre álló információk alapján hozzák meg. A valóság túlságosan összetett, minden bizonnyal nincsen olyan piaci résztvevő – legyen az akár egy olyan hedge fund, ahol sem szellemi, sem pénzügyi tőkéből nincs hiány – aki minden lehetséges akció pontos hatását ismerné, ezért egy heurisztikus szabályok szerint működő piaci modell realiztikus eredményeket produkálhat.

A dolgozatnak egy pénzügyi közgazdaságtani és egy technikai célja van. A pénzügyi közgazdaságtani cél az ágensalapú modellezés eszköztárával a befektetői heterogenitás és a heurisztikus torzítások hatásának vizsgálata az árfolyamokra és a befektetői profitabilitásra. A legfontosabb motívum, hogy a piacon fennálló keresleti-kínálati egyensúlytalanság megjelenik a kereskedett eszköz árfolyamdinamikájában. Ezen keresztül olyan jelenségeket igyekszünk bemutatni, mint az árfolyam elszakadása a fundamentális értéktől, az árfolyam hirtelen felfutása majd visszaesése, a hozamokban időtávtól függően megjelenő pozitív vagy negatív autokorreláció, illet-

ve a hozamok vastag szélű eloszlása. E jelenségeken túl vizsgálni fogjuk a kanonikus befektetési stratégiák – fundamentális, technikai és indexkereskedő – profitabilitását és árhatását.

A technikai cél egy olyan realiztikus sztochasztikus pénzügyi modell felírása, amelyben a fenti jelenségek sztochasztikus viselkedése analitikusan is vizsgálható. A téma irodalmának egy hiányossága, hogy a modellek sztochasztikus voltát nem vizsgálja kellő mélységgel. Az analitikus eredmények szinte minden esetben csak a modellek determinisztikus csontvázáról szólnak, a sztochasztikus modellt csak szimulációs eszközökkel vizsgálják. Ebben a dolgozatban igyekezünk szakítani ezzel a hagyománnyal, és (kvázi)analitikus eredményekkel szolgálunk a sztochasztikus esetekben is.

A dolgozat felépítése

A 2. fejezet két funkciót tölt be. Egyrészt egy irodalomáttekintés az ágensalapú pénzügyi modellezésbe, főleg annak azon ágába, ahol kanonikus befektetési stratégiák versenyeznek, és a matematikai modell általában egy néhány dimenziós sztochasztikus dinamikai rendszer. Másrészt, a fejezetben bemutatjuk – egyszerű dinamikai egyenleteken keresztül – a dolgozat későbbi részeiben modellezett legfontosabb jelenségeket és hatásokat; az ágenseket, a vagyon fejlődésén keresztül megvalósuló evolúciót és a piaci ármechanizmust.

A dolgozatban két folytonos idejű modellt tárgyalunk. A 3. fejezet a szerző Közgazdasági Szemlében megjelent tanulmányát mutatja be. Ebben a tanulmányban a volatilitás még az irodalomban megszokott módon konstans, érdekes nemlineáris hatások a kereskedők pozíciófüggvényén keresztül jelennek meg. A sztochasztikus modell hosszú távú stabilitását vizsgáljuk bizonyos releváns változók invariáns eloszlásán keresztül. A nemlineáris hatásoknak köszönhetően az eloszlások esetén többmódusú viselkedés jelenik meg. A modell gyengesége, hogy az a kereskedő, aki kezdetben erősebb a piacon, hosszú távon is profitábilisabbnak bizonyul, akár végletesen elhatalmasodhat a másik felett. Azaz nincs olyan hatás, amely valamilyen piaci egyensúly felé mutatna.

A 4. fejezetben szakítunk az irodalomban szokásos konstans volatilitással, és azt feltételezzük, hogy a piaci kereslet-kínálati egyensúlytalanság megjelenik közvetle-

nül a volatilitásban is. Ez az endogén volatilitás hatás megoldja az előző fejezet problémáját: egyik kereskedő sem tud a másik felett hosszú távon végérvényesen elhatalmasodni. A sztochasztikus volatilitásnak köszönhetően a hozamok eloszlása vastagszélű, amely alapvető elvárás és üdvözlendő egy sztochasztikus pénzügyi modell esetén.

2. fejezet

Ágensalapú pénzügyi modellezés

A közgazdaságtan sok területén alkalmaznak sikerrel ágensalapú modelleket, de számos oka van, hogy ezek különösen népszerűek a pénzügyi piacok modellezésére. Természetes ötletnek tűnik, hogy a különböző, tipikus befektetési stratégiákat követő kereskedők legyenek a piaci modell heterogén ágensei. A tőkepiacok tekinthetők legközelebbinek a modern közgazdaságtan idealisztikus „piacához”: más piacokhoz képest a tőkepiacok termékei homogének, sztenderdizáltak, a súrlódások (tranzakciós költségek, az információk költsége, stb.) elhanyagolhatók, illetve könnyen modellezhetők (LeBaron, 2001). A pénzügyi piacokkal kapcsolatban állíthatjuk talán legnagyobb magabiztossággal, hogy a mindenkori árfolyam a természetes kereslet és a kínálat eredménye.

A piacok stabilitása és az árfolyam kialakulásának folyamata a közgazdaságtan központi kérdései. Különösen tetten érhetők ezek a pénzügyi közgazdaságtanban, ahol az ár két funkciót is betölt egyszerre: egyrészt információval szolgál a piaci szereplők várakozásairól, másrészt a kereslet és a kínálat viszonyáról: a tőkepiacokon figyelhetjük meg pusztán valójában a hayeki ármechanizmust (Hayek, 1945).

Az ágensalapú pénzügyi modellezés a modern közgazdaságtan egy „alulról felfelé” építkező tudományterülete. Az ilyen modellekben egy mesterséges pénzügyi piacot építünk fel, ahol a heterogén ágensek – azaz a befektetők, kereskedők – kölcsönös interakcióban vannak egymással. A modellezés – legyen szó magukról az ágensekről, a piaci mechanizmusról, vagy a tanulási folyamatról – mikroszinten történik, így a tradicionális pénzügy racionalitási feltevése elkerülhető. Ehelyett korlátozottan

racióális ágensek kereskednek heurisztikus szabályrendszer szerint – akár csak a valóságban. Az ágensek evolúciója két, kvalitatíve is különböző szinten megy végbe, melyeket aktív és passzív tanulási folyamatnak nevezünk (LeBaron, 2011).

Bár a modellezés mikroszinten történik, a vizsgálat tárgya gyakran a modell makroszintű viselkedése, azaz például a komplex nemlineáris dinamikai rendszerben az árfolyam empirikus statisztikai tulajdonságai, a kereskedési stratégiák piaci szelekciója és hosszú távú fennmaradása. A pénzügyi piacok ilyen modellezése segíthet abban, hogy a mikroszintű viselkedési torzítások és a piacok stilizált tényei között kapcsolatot találjunk.

A heterogén ágens alapú piaci modellezés rendkívüli szabadságot nyújt művelőjének, mely egyszerre áldás és átok. Áldás azért, mert a nagy szabadság lehetőséget ad arra, hogy bármilyen hatást modellezni és vizsgálni tudjunk. Átok azonban azért, mert a modellek erősen heurisztikusak, a pontos hatásmechanizmusok olykor nehezen követhetők, illetve általában csak a piaci jelenségek egy szűk szegmensét képesek magyarázni.

A matematikai eszköztárát tekintve megkülönböztethetjük az analitikus és a szimulációs kutatásokat. Az analitikus kutatások általában viszonylag kevés kereskedési stratégiát illetve eszközt modelleznek, és általában kikapcsolják a sztochasztikát a modellből. Az így kapott determinisztikus nemlineáris dinamikai rendszerben állandósult állapotokat keresnek, és ezek stabilitását vizsgálják, lásd például Brock és Hommes (1998), Chiarella és tsai. (2006). Nemlineáris voltuk miatt az ilyen dinamikai rendszerek gyakran kaotikus eszközárfolyamot produkálnak, mely segíthet például olyan kérdéseket megérteni, hogy a realizált árfolyam volatilitása miért haladja meg jelentősen a fundamentális érték volatilitását.

A szimulációs kutatások még nagyobb szabadságot nyújtanak a modellezés során, még kevesebb restriktív feltételre van szükség. Az evolúció gyakran egy genetikusan algoritmus segítségével megy végbe, mely csak numerikus szimulációval vizsgálható. Az ilyen modellek jó pontossággal adják vissza a pénzügyi piacok stilizált tényeit, de gyakran csak nehezen lehet tetten érni, hogy az ágensek közötti mely csatolások felelősek mely jelenségekért.

2.1. Az ágensek

Az ágensalapú modellek legfontosabb tisztázandó elemei természetesen maguk az ágensek, azaz a kereskedők. A kereskedők alapfeladata az, hogy a rendelkezésre álló információk (tipikusan az árfolyam és osztalékadatok, de elképzelhetők egyéb makromutatók is) alapján portfóliódöntéseket hoznak. A portfóliódöntés eredménye egy vektor, mely tartalmazhatja a tartani kívánt értékpapírok darabszámát, vagy a portfólió értékében betöltött arányát is. A portfóliódöntés szabályrendszere rendkívül változatos lehet, ezért nagyon sokféle kereskedőt definiálhatunk.

Klasszikus megközelítés szerint a valós piacokon tevékenykedő és megfigyelhető, véges (2-3) számú kereskedési stratégiát karakterizálunk és írunk le néhány egyenlet segítségével. Ilyen például a későbbiekben ismertetett fundamentális és trendkövető kereskedők. A kereskedési stratégiák ilyen direkt leírása analitikusan megoldható modellekhez vezethet, az ágensek közötti csatolások könnyen vizsgálhatók lesznek. A stratégiák rideg beépítésének azonban ára van: honnan tudjuk, hogy nem hagyunk-e ki egy nagyon fontos kereskedőt, vagy hogy a kereskedőnek nem áll-e érdekében magát a stratégiát is idővel kissé megváltoztatni (evolválni)? Egy olyan modellben, ahol az evolúció a vagyonokon keresztül jelenik meg (passzív tanulási folyamat), előállhat az a helyzet, hogy az egyik kereskedő akkor sem változtat a stratégiáján, ha már az összes pénzt elveszítette.

Modern, numerikusan intenzív megközelítésben a kereskedési stratégiák genetikailag kerülnek kódolásra, és egy célfüggvény mentén evolválódnak. Az ilyen gyenge definiálásnak az az előnye, hogy kevés kvalitatív jellemző ég bele a modell magjába, és valósághű lehet az, ahogy a különböző stratégiák endogén módon emergálódnak a kezdeti véletlenül generált „őslevesből”. A klasszikus modellekkel szemben a genetikusan modellekben tehát az ágensek heterogenitása nem exogén módon adott, hanem endogén módon alakul ki. Ilyen genetikusan algoritmusokra épülő mesterséges piacokra találhatunk példát Chen és Yeh (2001) és Arifovic (1996) publikációiban. A genetikusan algoritmusok gyakori kritikája azonban az, hogy a kialakult stratégiák túl összetettek lehetnek, illetve nehéz valós, a piacon is megfigyelt stratégiákkal azonosítani őket.

Nem egyértelmű azonban az, hogy a komplexebb modellek jobb eredményekhez vezetnek vagy sem. Chen és tsai. (2012) az ökonometria szemüvegén keresztül

vizsgálják azt, hogy különböző komplexitású heterogén ágens modellek milyen hatékonysággal reprodukálják a pénzügyi piacok stilizált tényeit (vastag szélű eloszlások, volatilitás klasztereződése, stb.). Egyrészt azt találják, hogy a klasszikus modellekben a kereskedési stratégiák számának növelésével nem nő számottevően a reprodukált stilizált tények száma, másrészt a genetikusan algoritmusokra építő modellek sem jobbak e tekintetben számottevően az egyszerű klasszikus modelleknél. Ezek az eredmények megerősítenek bennünket abban, hogy kutatásunk során elsősorban a klasszikus utat kövessük, ahol a piacot véges sok jól definiált kereskedési stratégiát követő kereskedő népesíti be. A következőkben a leggyakrabban modellezett stratégiákat (agens-típusokat) mutatjuk be.

2.2. Fundamentális kereskedő

A fundamentális kereskedőt tekinthetjük a klasszikus, teljesen racionális ágensnek a pénzügyi piacokon. A fundamentális kereskedő kísérletet tesz arra, hogy megállapítsa egy eszköz fundamentális (belső) értékét, majd pozícióját attól függően veszi fel, hogy a piaci árfolyam milyen irányban tér el ettől a fundamentális értéktől. A fundamentális kereskedőre gondolhatunk úgy, mint egy jelentős erőforrásokkal és infrastruktúrával rendelkező befektetési alap, amely elemzési tevékenységét hatékonyan és eredményesen végzi, és ez alapján kereskedik. Ezzel összhangban a modellekben gyakori feltevés, hogy a fundamentális stratégia követése költséggel jár, így tompítva a sikerességét.

A fundamentális érték, illetve a fundamentális érték alapú befektetési stratégia létezése önmagában is játékelméleti problémákat vet fel. Keynes (1936) egy olyan játékhoz – szépségversenyhez – hasonlította a tőzsdét, ahol a résztvevőknek 100 hölgy közül a későbbi győztest kell megtippelniük. Egy strategizáló játékos egy ilyen esetben eltekint a saját preferenciájától, és igyekszik a többiek preferenciája szerint választani. A gondolatmenetet azonban lehet folytatni a végtelenségig: vajon mit gondolnak a többiek arról, hogy mit gondolnak a többiek a legszebb versenyzőről... Keynes szerint valójában hasonló erők mozgatják a tőzsdét is. Egy kereskedő még ha arra is jut egy eszközzel kapcsolatban, hogy az felülértékelt a piacon, ha mindeközben úgy gondolja, hogy a piac többi szereplője alulértékeli ugyanezt az eszközt, akkor neki is inkább venni érdemes belőle, mint eladni.

A „tippelje meg az átlag $2/3$ -át” egy további klasszikus játék, amelyben megjelenik az egyéni és a köztudott racionalitás. A játékban a játékosok 0-tól 100-ig mondanak egy számot, és az nyer, aki végül legközelebb van az átlag $2/3$ -ához. Könnyű megmutatni, hogy a játék egyetlen Nash-egyensúlya, ha minden játékos nullát mond. Azonban még egy teljesen racionális játékosnak sem érdemes nullát tippelnie, ha nem tud meggyőződni a többiek racionalitásáról. Sőt, arról, hogy mindenki tisztában van azzal, hogy mindenki racionális, és így tovább. Ez a játék szintén lehet egy távoli analógiája annak, hogy bár a fundamentális érték nulla, és ezt a racionális játékosok tudják is, ha vannak olyan játékosok, akik nem racionálisak, vagy akár csak olyanok, akik nincsenek meggyőződve a többi játékos racionalitásáról, végül mégsem a nulla bizonyul a legjobb tippnek, és a kialakuló „ár” nem a nulla lesz. Sőt, nem csak a kialakuló ár tér el a fundamentális értéktől, hanem még a racionális játékosok tippje sem lesz nulla, ha ők élnek azzal a feltételezéssel, hogy a többiek nem racionálisak.

A pénzügyi heterogén ágens irodalomban a fenti játékelméleti problémáktól függetlenül gyakran explicit megjelenik a fundamentális érték, így a dolgozatban is ezt a modellezési gyakorlatot fogjuk követni. A következő alszekcióban egy egyszerű modelljét mutatjuk meg a fundamentális értéknek.

2.2.1. Fundamentális érték

A fundamentális érték két módon jelenhet meg a modellekben. Egyrészt maga a fundamentális érték lehet egy exogén módon fejlődő sztochasztikus folyamat, például egy exponenciális véletlen bolyongás. Másrészt az eszköz pénzáramlását (osztalékát) írhatjuk le egy exogén módon fejlődő sztochasztikus folyamattal, és ekkor a fundamentális értéket a pénzáramlás várható értékének diszkontált jelenértékeként definiáljuk. Utóbbi esetben a fundamentális kereskedőről általában feltesszük, hogy várakozásai nem csupán individuálisan racionálisak, hanem *konzisztensek a realizációkkal* – azaz például ismeri az osztalék valós várható növekedési ütemét.

A következőkben egy olyan egyszerű modellt mutatunk be, amelyben az osztalékok exogén sztochasztikus voltából indulunk ki, és végül maga a fundamentális érték – mint diszkontált jelenérték – is ugyanazzal a dinamikával fog bírni. Mivel a dolgozatban folytonos idejű felírást fogunk követni, ezért itt is így teszünk. Le-

gyen egy eszköz (részvény) esetén az osztalékok folyamata $D : \Omega \times [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ egy geometriai Brown-mozgás (GBM) $\mu \in \mathbb{R}$ drifttel és $\sigma \in \mathbb{R}$ volatilitással:

$$dD(t) = \mu D(t) dt + \sigma D(t) dB(t),$$

ahol $B : \Omega \times [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ egy sztenderd Brown-mozgás, illetve $dB(t)$ annak megváltozása. Az osztalékfolyamatot úgy értelmezzük, hogy az eszköz a t időpontban $D(t)dt$ osztalékot fizet, pontosabban a t_1 és t_2 időpont között nominálisan $\int_{t_1}^{t_2} D(t)dt$ mennyiségű osztalék kerül kifizetésre.

A fundamentális kereskedő az $F(t)$ fundamentális értéket a jövőbeli osztalékok diszkontált jelenértékeként határozza meg, $\delta \in \mathbb{R}$ szubjektív diszkontráta mellett, amelyről feltesszük, hogy $\delta > \mu$:

$$\begin{aligned} F(t) &= E \left[\int_t^\infty e^{-\delta(s-t)} D(s) ds \middle| \mathcal{F}(t) \right] = \int_t^\infty e^{-\delta(s-t)} E[D(s) | \mathcal{F}(t)] ds \\ F(t) &= \int_t^\infty e^{-\delta(s-t)} D(t) e^{\mu(s-t)} ds = \frac{D(t)}{\delta - \mu} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Azaz a pillanatnyi fundamentális érték a pillanatnyi osztalékráta konstansszorososa, és így nyilván maga is geometriai Brown-mozgás:

$$dF(t) = \mu F(t) dt + \sigma F(t) dB(t)$$

Ennek az eredménynek a tükrében a dolgozat későbbi részében az osztalékok explicit megjelenítésétől eltekintünk, és közvetlenül a fundamentális értékről fogjuk feltételezni, hogy az egy exogén geometriai Brown-mozgás.

2.3. Technikai kereskedő

A technikai kereskedők nem ismerik (illetve figyelmen kívül hagyják) a fundamentális értéket. Úgy gondolják, hogy a kereslet és kínálat változásai kiolvashatók az árfolyamból, ezért az árfolyam mozgásának mintázatait felhasználva igyekeznek predikciókat hozni a jövő árfolyamára. A technikai kereskedési stratégiák akadémiai megítélése az 1980-as évekig rendkívül elutasító volt:

„Nyilvánvaló mármost, hogy előítéleteim vannak a chartelemzőkkel szemben. Ám ebben nem csupán személyes, hanem szakmai indíttatások is közrejátszanak. A technikai elemzés botránykő a tudósvilág szemében. Boldogan taszítunk rajta, amikor csak tehetjük, s tesszük ezt két nevezetes okból: (1) mert a módszer nyilvánvalóan téves, és (2) mert olyan pompásan lehet élcelődni a rovására. És ha valaki azt gondolná, hogy nem szép dolog ilyen gyöngye ellenfelet bántani, annak csak azt mondom: pénzről van szó, ember!” (Malkiel, 1973)

Nem mehetünk el azonban szó nélkül amellett, hogy a technikai kereskedés egy létező jelenség. A befektetési vállalatok döntő többsége publikál rendszeresen technikai elemzéseket és hírleveleket az ügyfelei számára. Gyakran még alapvetően fundamentális alapokon nyugvó befektetési ötlet esetén is elhangzik az, hogy azt a technikai kép támogatja vagy sem.

Az 1970-es évek végéig tartó regnálása óta rengeteg kritika éri a hatékony piacok elméletét. Több kutatás megállapítja, hogy egyszerű kockázati mértékekkel nem magyarázhatók teljesen a hozamok, illetve a múltbéli hozamok – olybár gyenge – magyarázó erővel bírnak a későbbi hozamokra. Ezek az eredmények szöges ellentétben állnak a korábbi, véletlen bolyongáson alapuló elméletekkel. (Brock és tsai., 1992)

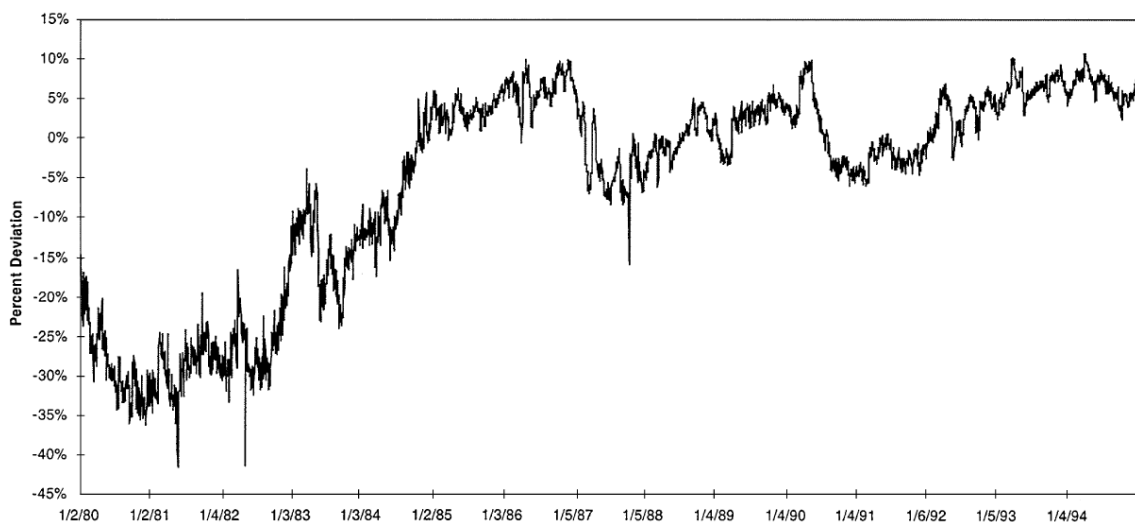
A különböző technikai kereskedési stratégiák bemutatására számosságuk miatt nem tehetünk kísérletet, de néhány gyakran alkalmazott példát az alábbiakban bemutatunk:

1. Trendkövető és kontrariánus stratégiák. Trendkövető stratégiát követő kereskedők hisznek az árfolyammozgás tehetetlenségében, azaz ha egy trendet azonosítanak, akkor aszerint kereskednek, hogy ez a trend a jövőben folytatódni fog. A kontrariánus stratégiát követő kereskedők az „átlaghoz” való visszatérésben hisznek, ezért éppen a trenddel ellentétesen kereskednek. Bár a hatás viszonylag gyenge, Poterba és Summers (1988) az Egyesült Államok és 17 további ország tőzsdéit vizsgálva a hozamokban rövid időhorizonton pozitív autokorrelációt, míg hosszú időhorizonton negatív autokorrelációt azonosítanak. Ez empirikus bizonyítékkal szolgál arra, hogy mind a trendkövető, mind a kontrariánus stratégiáknak lehet létjogosultsága.

2. Mozgóátlagokon alapuló stratégiák. A napi árfolyamokból számolt különböző időablakú mozgóátlagokat követik a kereskedők. A mozgóátlag számítása az árfolyamat kisimítására szolgál. A vételi (eladási) jelet az adja, amikor a rövidebb mozgóátlag alulról (felülről) metszi a hosszabb mozgóátlagot, azaz a stratégia követői a metszés tényét egy kibontakozó trend jeleként értelmezik. A leggyakoribb az 1-200 mozgóátlag stratégia, azaz amikor az egy napos mozgóátlagot (a napi árfolyamot) és a 200 napos mozgóátlagot követik a kereskedők. (Brock és tsai., 1992)
3. Támaszokon és ellenállásokon alapuló stratégiák. A stratégia követői szerint a befektetők hajlamosak eladni (venni), amikor az árfolyam eléri egy korábbi lokális maximumát (minimumát). Ez a kínálat (kereslet) azt eredményezi, hogy az árfolyam ellenállásba ütközik (támaszra talál). Ellenben vételi (eladási) jelként értelmezhető, ha az árfolyam az ellenállás felé emelkedik (a támasz alá esik).
4. Különbözeti stratégiák. A kereskedők két eszközt követnek, melyek különbségét (esetleg a logaritmikus árfolyamok különbségét, azaz az árfolyamok arányát) időben állandónak feltételezik. Amikor a különbség ettől a konstans szinttől eltér, akkor az egyik eszközt veszik, míg a másikat eladják abban a reményben, hogy a különbség visszatér a szokásos mértékére.

Különbözeti stratégia alkalmazható például a Royal Dutch Petroleum és a Shell Transport esetében, amely részvények rendre az amsterdami és a new yorki tőzsdére vannak bevezetve, de egy 1907-es megállapodás értelmében 60:40 arányban osztozkodnak minden bevételen és költségen (Froot és Dabora, 1999). Az 2.1. ábra mutatja a két részvény árfolyamainak eltérését az elméleti paritástól, mely az arbitrázs korlátosságára vonatkozó empirikus bizonyítéknak is tekinthető. E két részvény hányadosára alapuló stratégiák jelentős múltra tekintenek vissza. Ennek ellenére gyakran évekig is eltér hányadosuk a paritástól.

A heterogén ágens alapú modellekben a technikai kereskedőket leggyakrabban a trendkövető stratégiákkal azonosítják. Legfontosabb hatásuk, hogy buborékokat, illetve nagy összeomlásokat generálnak. A következőkben a dolgozatban használt,



2.1. ábra. A Royal Dutch Shell és a Shell Transport részvényárfolyamainak eltérése az elméleti paritástól. Forrás: Froot és Dabora (1999).

a technikai kereskedési stratégiát követő kereskedők által követett *trend indikátor* dinamikáját mutatjuk be.

2.3.1. Trend indikátor

A trend indikátor egy olyan sztochasztikus folyamat, amely azt hivatott mutatni, hogy egy eszköz árfolyama éppen növekvő vagy csökkenő trendben van. Egy kézenfekvő és nagyon egyszerű trend indikátor definíció lehetne a $\tau > 0$ időhorizonthoz tartozó (log)hozam: jelölje $s(t) = \log(S(t))$ egy kockázatos eszköz árfolyamának logaritmusát, és legyen az $x(t)$ trend indikátor

$$x(t) = s(t) - s(t - \tau) = \int_{t-\tau}^t ds(u)$$

Ennek a trend indikátor definíciónak két problémája is van. Egyik, hogy a megváltozása $dx(t) = ds(t) - ds(t - \tau)$ lesz, ami a második tag miatt egy úgynevezett késleltetett sztochasztikus differenciál egyenlet. A késleltetés miatt ez a dinamika matematikai szempontból nehezen kezelhető. A másik – praktikus – probléma megértéséhez képzeljük el, hogy $x(t)$ rövid idő alatt nagyot emelkedik. Ekkor a technikai stratégiát követő kereskedő azt hihetné, hogy éppen most alakul ki a trend az eszköz

árában – miközben könnyen lehet, hogy az árfolyam alig változott e rövid idő alatt, hanem egy korábbi, $t - \tau$ időpont környékén történt nagyobb esés tűnt el mindössze $x(t)$ -ből. Azaz egy nagyobb árváltozás kétszer is megjelenik a trend indikátorban, és pusztán a trend indikátorból nem lehet kiszűrni, hogy egy elsődleges hatást vagy egy másodlagos visszhangot észlelünk.

Ennek a két problémának a kiküszöbölésére exponenciális simítást szoktak alkalmazni. A következőkben két megközelítést is bemutatunk exponenciálisan simított trend indikátorra nézve, amelyek a sztochasztikus dinamika szintjén pontosan ugyanoda vezetnek.

A trend indikátor mint a pillanatnyi ár és annak mozgóátlagától vett eltérése

Jelölje $m(t)$ az $s(t) = \log(S(t))$ log-árfolyam exponenciális súlyozású mozgóátlagát:

$$m(t) = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{\tau}(t-u)} s(u) du, \quad (2.2)$$

ahol $\tau > 0$ paraméter szabályozza a mozgóátlag-folyamat releváns visszatekintő horizontját. Bár a mozgóátlag a szó legszorosabb értelmében a teljes múltat figyelembe veszi, az exponenciális súlyozás a közelmúltnak ad nagyobb súlyt, és a súlyfüggvény súlypontja $t - \tau$ -nál helyezkedik el. (2.2) megváltozása a Leibniz integrálási szabály alkalmazásával könnyen számolható:

$$dm(t) = -\frac{1}{\tau} m(t) dt + \frac{1}{\tau} s(t) dt = \frac{1}{\tau} (s(t) - m(t)) dt \quad (2.3)$$

Jelölje a trend indikátort $x(t)$, amit a pillanatnyi (log)árfolyam és a mozgóátlag különbségeként definiálunk:

$$x(t) = s(t) - m(t) \quad (2.4)$$

Pozitív (negatív) trendként azonosítjuk tehát azt az esetet, amikor a pillanatnyi árfolyam a mozgóátlag felett (alatt) van. Mivel ezt a különbséget az árfolyam logaritmusa és a log-árfolyam mozgóátlaga között képezzük, ezért $x(t)$ értelmezhető egy százalékos különbségként is.

A (2.4) egyenletet beírva a (2.3) egyenletbe $dm(t) = \frac{1}{\tau}x(t) dt$ adódik, míg (2.4) megváltozása egyszerűen $dx(t) = ds(t) - dm(t)$ lesz, amiből már adódik is a trend indikátor differenciálegyenlete:

$$dx(t) = -\frac{1}{\tau}x(t) dt + ds(t) \quad (2.5)$$

A (2.5) egyenlet fő jellegzetessége, hogy természetéből fakadóan megjelenik benne egy átlaghoz (0-hoz) húzás, mert az első drift tag negatív (pozitív), ha a trend éppen pozitív (negatív). A trend indikátor szempontjából a 0 értéknek azért van kitüntetett szerepe, mert ha a (log)árfolyam megegyezik a mozgóátlaggal – azaz nincs trend –, akkor a trend indikátor értéke éppen nulla.

A trend indikátor mint a hozamok mozgóátlaga

Ebben az esetben a trend indikátort közvetlenül definiáljuk a loghozamok exponenciális súlyozású mozgóátlagaként:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{\tau}(t-u)} ds(u), \quad (2.6)$$

ahol a $\tau > 0$ paraméter az előzővel azonos módon a mozgóátlagképzés időhorizontját szabályozza. A (2.6) integrál-formula mögötti intuíció az, hogy pozitív (negatív) trendként értelmezzük azt, ha a közelmúltban jellemzőbbek voltak a pozitív (negatív) hozamok.

A (2.6) folyamat megváltozása ismét adódik a Leibniz integrálási szabály alkalmazásával:

$$dx(t) = -\frac{1}{\tau}x(t) dt + ds(t) \quad (2.7)$$

Nyilvánvaló, hogy a (2.5) és (2.7) egyenletek megegyeznek, azaz a két fajta trend definíció – legalábbis a dinamika szintjén – azonosnak tekinthető. A (2.5) egyenlet felel meg He és Zheng (2010) trend indikátorának, míg a (2.7) egyenlet Chiarella és tsai. (2006) trend indikátorának folytonos általánosítása.

Bizonyos modellekben kézenfekvőbb az effektív hozamok használata a loghozamok helyett. Ilyenkor annyiban térünk el a (2.6) felírástól, hogy a trend indikátort

nem a loghozamokból, hanem az effektív hozamokból számítjuk:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{\tau}(t-u)} \frac{dS(u)}{S(u)} = \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{\tau}(t-u)} dR(u) \quad (2.8)$$

Ekkor a dinamika a (2.7) egyenlethez hasonló, mindössze a sztochasztikus tag a loghozam helyett az effektív hozam lesz:

$$dx(t) = -\frac{1}{\tau}x(t) dt + \frac{dS(t)}{S(t)} = -\frac{1}{\tau}x(t) dt + dR(t) \quad (2.9)$$

Mivel a dolgozatban a technikai kereskedők stratégiáját a trend indikátor fogja meghatározni, ezért végső soron az egyik legfontosabb állapotváltozónak tekinthető, melynek dinamikáját, sztochasztikus tulajdonságait sokat fogjuk vizsgálni. Továbbá a trend indikátor azon túl, hogy stratégiai állapotváltozó, tekinthető egy folytonosan számontartott τ -idejű hozamnak is. Ez eltér a szokásos τ -idejű hozamoktól, hiszen azokat diszkrét időpontok közötti növekményekből szokás számolni, de az $x(t)$ eloszlására vonatkozó állítások értelmezhetők a modell τ -idejű hozamok eloszlására vonatkozó állításokként is. Ha például a (2.9) egyenlet szerint definiált trend indikátor invariáns eloszlása vastag szélűnek adódik, akkor ezt értelmezhetjük a hozamok eloszlására vonatkozó állításként is.

2.4. Zajkereskedő

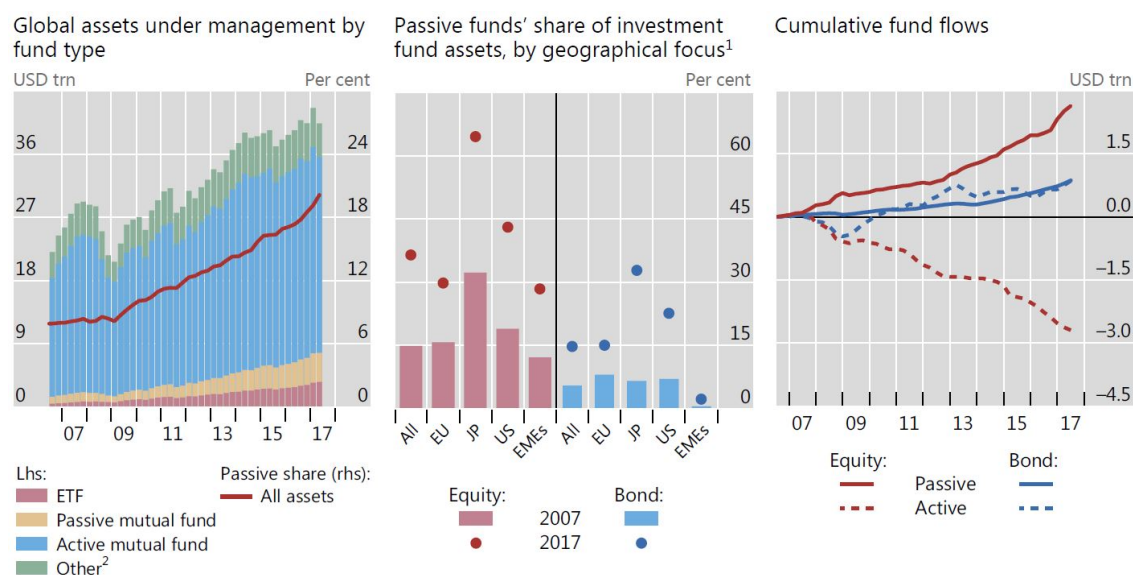
Gyakori szereplő a heterogén ágens modellekben az úgynevezett zajkereskedő. Ez az ágens véletlenszerűen kereskedik, pusztán likviditást biztosít a piacon, illetve olyan külső zajt visz be a modellbe, mely empirikus tulajdonságaiban valósághűbbé teszi azt. Eredményességét tekintve azonban nem szabad úgy gondolnunk a zajkereskedőre, mint egy „buta” szereplőre, akin a többi, szofisztikált szereplő élösködni tud. De Long és tsai. (1990) megmutatják, hogy a zajkereskedők hatására annyi plusz kockázat jelenik meg a piacon, ami elriasztja az arbitrázsőröket, hogy kihasználják az arbitrázslehetőségeket.

Az arbitrázs ilyen természetes korlátja összhangban van Shleifer és Vishny (1997) írásával, akik azt állítják, hogy a valós arbitrázslehetőségek (szemben a tankönyvi arbitrázzsal) kockázatosak, és így az árak akár szignifikánsan és tartósan eltérhetnek

a fundamentális értéktől. Sőt, mivel a zajkereskedők aránytalanul sok kockázatot vállalnak, aminek a forrásai ráadásul ők maguk, akár magasabb várható hozamot elérhetnek, mint a racionális befektetők.

2.5. Indexkereskedő

Az elmúlt 20 év egy jelentős trendje a befektetések világában a passzív befektetési stratégiák rendkívüli térnyerése. Ez a trend az indexkövető befektetési alapokba (mutual funds), illetve tőzsdén kereskedett alapokba (ETF) áramló tőke alapján azonosítható, lásd 2.2. ábra.



2.2. ábra. A passzív típusú befektetések térnyerése az aktívval szemben.
Forrás: Sushko és Turner (2018)

Az indexkereskedőt (vagy indexkövető kereskedőt) az ágensmodellekben általában úgy szokták ábrázolni, mint egy alacsony költséghányaddal működő kereskedő, aki egy időben állandó portfóliót tart, azaz nem vesz figyelembe semmilyen vélt vagy valós félrearázást a piacon. A mi modelljeinkben az indexkereskedőnek elsősorban benchmark szerepe lesz, azaz az aktív stratégiát követő kereskedő sikerességét az indexkövető sikerességéhez fogjuk mérni.

2.6. Evolúció, vagyon dinamika és egyensúly

Az evolúció gyakran áll az ágens modellek középpontjában: ez az ágensek közötti dinamika fő forrása mind gyakorlati, mind filozófiai értelemben. Az egyes ágens (kereskedők vagy befektetési alapok) profitabilitása függ egyrészt a saját stratégiájuktól, másrészt a többiek stratégiájától is, hiszen az árfolyamok alakulására mindegyiküknek van hatása. Ebben az értelemben a különböző stratégiák versenye játékelméleti kontextusba helyezhető. A dolgozatban a klasszikus játékelméleti kontextus helyett azonban az evolúciós játékelmélet szemüvegén keresztül vizsgáljuk a stratégiákat, ami a szereplők sikerességét és sikertelenségét azok populációs arányával azonosítja.

Ebben a fejezetben egy egyszerű, kétszereplős számpéldán keresztül bemutatjuk a kereskedők vagyonarányán keresztül definiált populációs dinamikát, illetve a dinamikai rendszer kapcsolatát a statikus játékelméleti egyensúllyal. A vagyonfejlődés két forrását fogjuk egymástól függetlenül bemutatni.

1. Az első esetben a két kereskedő egymástól eltérő hozamot ér el, és ezt a hozamot számon is tartjuk a vagyonuk esetében. Amelyik kereskedő nagyobb hozamot ér el, annak idővel a piaci súlya is nagyobb lesz, amit a sikeresség mérőszámának tekintünk. LeBaron (2011) ezt *passzív tanulásnak*¹ nevezi, az ő szóhasználatát követve mi a *passzív vagyonfejlődés* és passzív evolúció kifejezéseket fogjuk használni.
2. A második esetben az egyes kereskedőkre befektetési alapokként gondolunk, akik mások befektetett pénzét kezelik. Ebben az esetben is eltérő hozamot érnek el a befektetési alapok, azonban a vagyonuk esetében ezt nem vesszük figyelembe. Ellenben a mögöttes befektetők észlelik a hozamkülönbséget, és a vagyonuk egy részét a jobban teljesítő alapbaallokálják. LeBaron (2011) az evolúció ilyen formáját *aktív tanulásnak*², az ő szóhasználatát követve mi az *aktív vagyonátcsoportosítás* és aktív evolúció kifejezéseket fogjuk használni.

A passzív vagyonfejlődés esetében az összvagyon növekedése lehet pozitív vagy negatív is. Ezzel szemben az aktív vagyonfejlődés esetében a játék zéró összegű, azaz

¹passive learning

²active learning

az összvagyon időben konstans. A dolgozatban a két hatást egyszerre fogjuk megjeleníteni – bár az aktív evolúció nem lesz hangsúlyos –, a most következő bemutató példában szándékosan külön tárgyaljuk a két esetet.

Példánk a klasszikus héja-galamb játéknak a tőkepiacok esetére értelmezett változata. Tegyük fel, hogy a piacon egy *profi* (P) és egy *amatőr* (A) stratégia közül lehet választani. A profi stratégiát tekintjük az informált kereskedőnek, akit azonosíthatunk a korábban tárgyalt fundamentális vagy akár a technikai kereskedővel is. Az amatőr stratégiát tekintjük a nem informált kereskedőnek, akit azonosíthatunk például a zajkereskedővel. Ő lényegében véletlenszerű pozíciókat vesz fel, és ezzel likviditást biztosít a piacnak. A játékot három aljáték összegeként írjuk fel, melyek három piaci jelenséget ragadnak meg.

Az első a stratégiák követésének költsége. Észszerűnek tűnik az a feltételezés, hogy a profi stratégia költséges, annak követésére például csak egy befektetési alapnak van lehetősége, annak minden infrastrukturális költségével együtt. Ezt reprezentálja a 2.1. kifizetési mátrix:

	P	A
P	$-2, -2$	$-2, 0$
A	$0, -2$	$0, 0$

2.1. táblázat. A kereskedési stratégiák költségei

A mátrix egy celláját úgy kell értelmezni, hogy az első szám a sorjátékos kifizetése, ha az a megfelelő oszlopjátékos „ellen” kereskedik, míg a második szám az oszlopjátékos kifizetése, ha az a megfelelő sorjátékos ellen kereskedik. Mivel a profi stratégia követése költséges, függetlenül attól, hogy ki ellen kereskedik, ezért a felső sor mindkét értéke negatív.

A második hatás egy zéró összegű komponens, ami azt ragadja meg, hogy ha a profi és az amatőr kereskedő egymással kereskednek, akkor a profi játékos „túljár az amatőr eszén”, lekereskedti őt:

	P	A
P	$0, 0$	$4, -4$
A	$-4, 4$	$0, 0$

2.2. táblázat. A profi játékos lekereskedti az amatőr játékost.

A 2.2. kifizetési mátrix bal felső és jobb alsó cellája azt mutatja, hogy ha azonos típusú kereskedők tranzaktálnak, akkor egyik sem vesz el profitot a másiktól, míg a bal alsó és a jobb felső cellák nullára összegződnek, és a profi játékos profitot generál az amatőrrel szemben.

Az utolsó hatás a piac létezésének értéke. Úgy gondoljuk, hogy a tőzsde azért létezik, mert azon alapvetően egy pozitív várható hozamot lehet elérni. A piac azonban lényegében megszűnik akkor, ha azon csak informált profi kereskedők vesznek részt, akik azonosan vélekednek a kereskedett eszközről. Ezt a hatást reprezentálja a 2.3. kifizetési mátrix:

	P	A
P	0, 0	3, 3
A	3, 3	3, 3

2.3. táblázat. A piac létezésének értéke.

A kifizetési mátrix bal felső cellája nulla, hiszen ha csak profi kereskedők vannak, akkor nincs piac, nincs várható hozam. Minden egyéb esetben 3 egységnyi várható profitot biztosít a piacon való részvétel.

A három kifizetési mátrixot komponensenként összegezve kapjuk az egész játékot definiáló 2.4. számú kifizetési mátrixot, ami a klasszikus héja-galamb játéknak felel meg. A játék méltán híres, mert annak egyetlen stabil egyensúlya van. A klasszikus

	P	A
P	-2, -2	5, -1
A	-1, 5	3, 3

2.4. táblázat. A profi és az amatőr kereskedő versenye.

játékelméleti megközelítés szerint az egyes játékosok kevert stratégiát alkalmaznak, azaz mondanak egy valószínűségeloszlást a lehetséges akciók felett. Legyen $p_1 \in [0, 1]$ annak a valószínűsége, hogy a sorjátékos, míg $p_2 \in [0, 1]$ annak a valószínűsége, hogy az oszlopjátékos a profi (P) akciót választja. Ennek megfelelően $(1 - p_1)$ és $(1 - p_2)$ az amatőr akció választásának a valószínűsége. Jelölje továbbiakban is 1-es alsó index a sorjátékost, míg 2-es alsó index az oszlopjátékost.

Ha p_1 és p_2 rögzített, akkor az egyes játékosok várható profitja:

$$\Pi_1(p_1, p_2) = -2p_1p_2 + 5p_1(1 - p_2) - 1(1 - p_1)p_2 + 3(1 - p_1)(1 - p_2)$$

$$\Pi_2(p_1, p_2) = -2p_1p_2 + 5(1 - p_1)p_2 - 1p_1(1 - p_2) + 3(1 - p_1)(1 - p_2)$$

A Nash-féle egyensúlykonceptió (Nash, 1951) szerint egyensúlyban a játékosok olyan valószínűségek szerint játszanak, hogy attól egyiküknek sem áll érdekében egyoldalúan elállni. Az egyensúly megtalálásához írjuk fel az egyes játékosok legjobb-válasz leképezését ($B_i(p_{-i})$), amellyel azt mutatjuk meg, hogy milyen valószínűséget érdemes választani az adott játékosnak, feltéve, hogy a másik játékos stratégiáját rögzítettnek gondoljuk:

$$B_1(p_2) = \arg \max_{p_1} [\Pi_1(p_1, p_2)] = \arg \max_{p_1} [p_1(2 - 3p_2)] = \begin{cases} p_1 = 1, & \text{ha } p_2 < \frac{2}{3} \\ p_1 = 0, & \text{ha } p_2 > \frac{2}{3} \\ p_1 \in [0, 1], & \text{ha } p_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$B_2(p_1) = \arg \max_{p_2} [\Pi_2(p_1, p_2)] = \arg \max_{p_2} [p_2(2 - 3p_1)] = \begin{cases} p_2 = 1, & \text{ha } p_1 < \frac{2}{3} \\ p_2 = 0, & \text{ha } p_1 > \frac{2}{3} \\ p_2 \in [0, 1], & \text{ha } p_1 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

A Nash-egyensúlyi stratégiák a legjobb-válasz leképezések fixpontjaként határozható meg:

$$E_{\text{Nash}} = \left\{ (p_1, p_2) \in [0, 1]^2 : (p_1, p_2) \in B_1(p_2) \times B_2(p_1) \right\} = \left\{ \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right), (1, 0), (0, 1) \right\} \quad (2.10)$$

A három egyensúlyi megoldás közül az első valódi kevert stratégiákat, míg a másik kettő tiszta stratégiákat jelent. A továbbiakban ugyanennek a játéknak két, evolúciós játékelméleti értelmezését és megoldását fogjuk bemutatni, mely erős rokonságot mutat az imént tárgyalt klasszikus egyensúlyi megoldásokkal.

2.6.1. A passzív vagyontfejlődés

A passzív vagyontfejlődés állítható párhuzamba a friedmani piaci kiválasztási hipotézissel (Friedman, 1953), mely szerint a jó stratégiák sikeresek lesznek, és a piac egyre nagyobb részét teszik majd ki, míg a rossz stratégiák súlya idővel egyre csökken. A passzív vagyontfejlődés eredményeként a tőkepiac egy olyan hatékony piac felé konvergál, ahol a befektetők úgy viselkednek „mintha racionálisak”³ lennének. Innen is eredeztethető a klasszikus eszközárzási modellek azon feltevése, hogy a befektetők racionálisak. A passzív vagyontfejlődés ad táptalajt az olyan kereskedési stratégiáknak, mint például az úgynevezett Kelly-szabály (Kelly, 1956), mely szerint a portfóliónk adott – exogén paramétereiktől függő – arányát fektessük mindig a kockázatos eszközbe (a maradékot pedig a kockázatmentesbe), és folyamatos kiigazításokkal tartsuk ezt az arányt. Ez a stratégia a vagyont logaritmusának növekedése szempontjából optimális, amit szokás log-optimálisnak is nevezni.

Amíg az ágensek perzisztensen viselkednek a portfóliódöntéseiket tekintve, a passzív vagyontfejlődés hatása jelentkezni fog. A stratégiák evolúciójának ez a formája ezért könnyen modellezhető, és jó eséllyel mondhatjuk, hogy ez a pénzügyi piacok egy örökérvényű szabálya. Több hátránya is van azonban az evolúció passzív formájának. Egyrészt, a passzív evolúció nem ekvivalens a haszonmaximalizálással. Sőt, ez az evolúciós folyamat hosszú távon honorálhatja az optimálisnál kockázatosabb portfóliót tartó stratégiákat, mert ezek jó eséllyel magasabb átlagos növekedési ütemmel rendelkeznek. Másrészt, a passzív evolúció valószínűleg csak nagyon lassan fejti ki hatását a valós piacokon, a konvergencia (amennyiben a végállapotot annak feltételezzük, amikor már csak az optimális stratégiák maradnak fent a piacon) időskálája évtizedekben, ha nem évszázadokban mérhető. Ilyen időtávon azonban nem feltétlenül realiztikus a befektetési stratégiák – vagy akár a piaci rezsim – változatlanóságát feltételezni.

A passzív vagyontfejlődésen keresztül megvalósuló evolúciós folyamat könnyen bemutatható az előző, a profi (P) és az amatőr (A) kereskedő versenyén keresztül. Vegyük az előző, a 2.4. kifizetési mátrix által leírt játékot. Tegyük fel, hogy a piacon van egy kontinuum számosságú kereskedő tömeg, aki az egyik (P) vagy a másik (A) kereskedési stratégiát követi. Az egyes stratégiákat követő összes vagyont

³„as if” they were rational (Friedman, 1953)

egy t időpontban jelölje $W_P(t)$ és $W_A(t)$. Az egyes stratégiák piaci súlyát azok összes vagyonával azonosítjuk. Legyen tehát a profi stratégiát követők vagyonaránya egy t időpontban $p(t)$, azaz

$$p(t) = \frac{W_P(t)}{W_P(t) + W_A(t)}, \quad (2.11)$$

és így az amatőr stratégiát követők vagyonaránya $1 - p(t)$. Ebben az esetben tehát nem egy valószínűségeloszlást feltételezünk az egyes akciók felett, hanem az egyes stratégiát követők populációs arányát (vagyonarányát) fejlesztjük az időben. Abból indulunk ki, hogy egy adott kereskedő véletlenszerűen kereskedik egy másik kereskedő „ellen”. Annak a valószínűsége, hogy milyen típusú kereskedővel találkozunk, attól függ, hogy melyik stratégiának mennyi a piaci súlya, azaz a vagyonaránya. Mivel a kereskedők kontinuum számosságúak, az egyes stratégiák által kezelt vagyon megváltozását az átlagos profittal azonosítjuk, ami függ a piaci vagyonarányoktól:

$$\begin{aligned} dW_P(t) &= W_P(t) \cdot \Pi_P(t) dt = W_P(t) \cdot [-2p(t) + 5(1 - p(t))] dt \\ dW_A(t) &= W_P(t) \cdot \Pi_A(t) dt = W_A(t) \cdot [-1p(t) + 3(1 - p(t))] dt \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ezekben a differenciálegyenletekben követjük a pénzügyekben szokásos jelölésrendszert, ahol a megfelelő mennyiségek megváltozását definiáljuk, és a bal oldalon nem differenciálhányadost írunk, hanem dt -vel „átszorozunk”. A dolgozat későbbi fejezeteiben a dinamikák sztochasztikusak lesznek, akkor ez a fajta jelölés szükségszerű is lesz. A vagyonarány dinamikája a (2.11) formula differenciálása, majd behelyettesítés után:

$$dp(t) = p(t)(1 - p(t))(2 - 3p(t)) dt \quad (2.13)$$

A (2.13) dinamika az úgynevezett *replikátor egyenlet*, melynek széles irodalma van, lásd például Hofbauer és Sigmund (1998) könyvét. A replikátor egyenlet egyensúlyi pontjai megegyeznek az előző fejezetben tárgyalt Nash-egyensúlyokkal. Ezt ebben az egyszerű példában könnyű belátni, hiszen egy egyensúlyi pontot az definiál, hogy $dp(t) = 0$, azaz

$$E_{\text{passzív}} = \left\{ p \in [0, 1] : p(1 - p)(2 - 3p) = 0 \right\} = \left\{ \frac{2}{3}, 0, 1 \right\},$$

mely egyensúlyi pontok éppen megegyeznek a korábbi E_{Nash} egyensúlyi pontokkal.

A három egyensúlyi pont közül azonban ebben az esetben is különbséget tudunk tenni, hiszen a $p(t) = \frac{2}{3}$ egy stabil egyensúlyi pont, míg a $p(t) = 0$ és $p(t) = 1$ megoldások instabilak. Ez azt jelenti, hogy ha a vagyonarány folyamatát $(0 + \epsilon)$ -ból vagy $(1 - \epsilon)$ -ből indítjuk el, ahol ϵ egy tetszőlegesen kicsi pozitív szám, akkor a rendszer a $p(t) = \frac{2}{3}$ egyensúlyi megoldáshoz fog konvergálni, hiszen

$$\begin{aligned} dp(t) &> 0, & \text{ha } 0 < p(t) < \frac{2}{3} & \text{ és} \\ dp(t) &< 0, & \text{ha } \frac{2}{3} < p(t) < 1. \end{aligned}$$

Az evolúció passzív formája tehát ugyanazokat az egyensúlyi megoldásokat adja, mint a klasszikus játékelméleti megközelítés. A modell üzenete annyiban több a klasszikus megközelítésnél, hogy azt is bemutatja, hogy az egyensúly időben hogyan alakul ki. Ezzel szemben a klasszikus Nash-egyensúlyi megoldásra mindössze annyi igaz, hogy ha azt a szereplők készen megkapják, akkor attól egyiküknek sem áll érdekében egyoldalúan eltérni.

2.6.2. Az aktív vagyónátcsoportosítás

Az aktív vagyónátcsoportosítási folyamat jó eséllyel közelebb van ahhoz az evolúciós folyamathoz, melyre egy laikus elsőre gondol a pénzügyi piacokkal kapcsolatban. Az ágensok egy jól definiált célfüggvény szerint aktívan választanak a különböző stratégiák között, és a mögé a stratégia mögé csoportosulnak, amely jobban teljesít, mint a többi. Ez a választási folyamat tetten érhető a valós piacokon is.

Az aktív evolúciós folyamat modellezése nagyobb szabadságot nyújt a passzívhoz képest. Ez a nagyobb szabadság azonban kihívást is jelent, mert a modell szükségszerűen erősen heurisztikus elemeket is tartalmaz. A befektetők által követett célfüggvény például lehet tisztán a profit (esetleg annak valamilyen elmúlt időszak átlaga), vagy lehet valamilyen hasznossági függvény is. Fontos modellparaméter lehet például az, hogy a kereskedők mekkora hányada gondolkodik el a stratégiaváltáson, illetve mennyire erősen reagálnak a kereskedési stratégiák hozamkülönbségére.

Egy klasszikus példa a választási problémára diszkrét idejű modellben Manski és McFadden (1981). Az aktív vagyónátcsoportosítás folyamat tiszta formájára példa Brock és Hommes (1998) modellje. A passzív és az aktív evolúciós folyamat egyszer-

re jelenik meg Palczewski és tsai. (2016) cikkében. Modelljünkben három különböző stratégiát követő befektetési alap kezeli kontinuum számosságú befektető pénzét. A passzív evolúció a természetes vagyonváltozásokon keresztül, míg az aktív evolúciós folyamat az alapok közötti vagyonátcsoportosításon keresztül jelenik meg. A következőkben a diszkrét idejű modelljünk egy folytonos idejű megfelelőjén keresztül fogjuk bemutatni az aktív evolúció tiszta formáját, az előző szekciókban tárgyalt bemutató példa segítségével.

Jelölje ismét $W_p(t)$ és $W_A(t)$ a két kereskedési stratégia által kezelt vagyont, míg $p(t)$ a vagyonarányt. Gondoljunk rájuk ebben az esetben egy-egy befektetési alapként, akik kontinuum számosságú befektető vagyont kezelik. A vagyon dinamikájának felírásakor azt az elvet követjük, hogy a vagyonok egy része bizonyos intenzitással egy közös „kalapba” szivárog, majd abból egy választási szabálynak megfelelően részesül az egyik és a másik befektetési alap is:

$$\begin{aligned} dW_P(t) &= -\kappa W_P(t) dt + q(t)\kappa(W_P(t) + W_A(t)) dt \\ dW_A(t) &= -\kappa W_A(t) dt + (1 - q(t))\kappa(W_P(t) + W_A(t)) dt \end{aligned} \quad (2.14)$$

$\kappa \geq 0$ a vagyonátcsoportosítás intenzitását szabályozó paraméter. Ha $\kappa = 0$, akkor nincs egyáltalán vagyonátcsoportosítás, míg ha κ igen nagy, akkor a befektetők nagy része gondolkodik el a vagyonátcsoportosításon. $q(t) \in [0, 1]$ arányszám mutatja meg egy t időpontban, hogy az éppen átcsoportosításra váró összes pénzösszeg mekkora hányada megy a profi alaphoz. Ennek megfelelően $(1 - q(t))$ az amatőr stratégiát követő alaphoz csoportosuló pénz aránya. Érdeemes megemlíteni, hogy $dW_P(t) + dW_A(t) = 0, \forall t$, azaz ebben a rendszerben új vagyon nem jön létre és nem is vész el, hanem valóban csak átcsoportosítás történik az alapok között, a játék zéró-összegű. Adósok vagyunk még a $q(t)$ arányszám definiálásával. A befektetési alapok befektetői észlelik a két stratégia közötti hozamkülönbséget, azaz látják, hogy

$$\begin{aligned} \Pi_P(t) &= -2p(t) + 5(1 - p(t)) \\ \Pi_A(t) &= -1p(t) + 3(1 - p(t)) \end{aligned}$$

Egy olyan leképezésre van szükségünk, amely tetszőleges valós számokhoz olyan számokat rendel, amelyek 1-re összegződnek. Gyakori választás az úgynevezett *softmax*

leképezés:

$$q(t) = \frac{e^{\zeta \Pi_P(t)}}{e^{\zeta \Pi_P(t)} + e^{\zeta \Pi_A(t)}} = \frac{1}{1 + e^{\zeta \cdot (\Pi_A(t) - \Pi_P(t))}} = \frac{1}{1 + e^{\zeta \cdot (3p(t) - 2)}} \quad , \text{ és}$$

$$1 - q(t) = \frac{e^{\zeta \Pi_A(t)}}{e^{\zeta \Pi_P(t)} + e^{\zeta \Pi_A(t)}} ,$$

ahol $\zeta \geq 0$ a választás intenzitását⁴ szabályozó paraméter. Ha $\zeta = 0$, akkor a befektetők érzéketlenek a befektetési alapok hozamkülönbségére, az átcsoportosításra váró vagyon fele az egyik, másik fele a másik alaphoz kerül. Ha ζ igen nagy, akkor a befektetők nagyon érzékenyek az alapok hozamkülönbségére, már kis hozamkülönbség esetén is az egyik vagy másik alaphoz vándorol át az éppen átcsoportosításra kerülő pénz szinte egésze.

Differenciálás után a $p(t)$ vagyonarány dinamikája meglepően egyszerű alakot ölt:

$$dp(t) = \kappa (q(t) - p(t)) dt$$

Szembetűnő, hogy a dinamikában megjelenik egy természetes középre húzás. Például ha $q(t) = q$ konstans, akkor a dinamika egyensúlyi szintje éppen q lesz. Esetünkben behelyettesítés után a dinamika

$$dp(t) = \kappa \left(\frac{1}{1 + e^{\zeta(3p(t)-2)}} - p(t) \right) dt$$

Az egyensúlyi megoldást az a $p(t)$ érték adja, ahol $dp(t) = 0$, azaz

$$E_{\text{aktív}}(\zeta) = \left\{ p \in [0, 1] : \frac{1}{1 + e^{\zeta(3p-2)}} = p \right\}$$

Bár az egyensúlyi megoldást definiáló egyenletnek analitikus megoldása általában nincsen, könnyű meggondolni, hogy az egyenlet megoldása $\forall \zeta \geq 0$ mellett egyértelmű, azaz $E_{\text{aktív}}$ tekinthető egy $[0, \infty) \mapsto [0, 1]$ függvénynek. Érdekes, hogy az egyensúlyi megoldás függ a ζ paramétertől, míg κ -tól nem. $\zeta = 0$ esetben az egyensúly egyszerűen $E_{\text{aktív}}(0) = \frac{1}{2}$, azaz ha a befektetők érzéketlenek az alapok hozamkülönbségére, akkor a vagyonarány az $\frac{1}{2}$ -hez húz. Ellenkező esetben, azaz

⁴*intensity of choice*

ha ζ igen nagy, akkor az egyensúlyi megoldás $\frac{2}{3}$ közelében lesz. Ez onnan látszik, hogy az exponens $\frac{2}{3}$ -nál vált előjelet, és ha ζ nagy, akkor az egyenlet bal oldalán lévő logit-függvény értéke hirtelen esik le 1-ről 0-ra a $p = \frac{2}{3}$ közelében ahogy p befutja a $[0, 1]$ intervallumot. Azaz $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} E(\zeta) = \frac{2}{3}$. Ez azt jelenti, hogy a tiszta aktív vagyontársportosítási dinamika egyensúlyi megoldása egybeesik mind a klasszikus játékelméleti egyensúllyal, mind a replikátor egyenlet egyensúlyával abban az esetben, ha a mögöttes befektetők nagyon érzékenyen reagálnak a stratégiák hozamkülönbségére.

A fentiekben a passzív vagyontfejlődést és az aktív vagyontársportosítást mutatuk be egy egyszerű példán keresztül. A dolgozat 3. fejezetében a kereskedők közötti populációs arányt időben állandónak feltételezzük, ott érintőlegesen fogunk majd a passzív vagyontfejlődésről beszélni. A dolgozat 4. fejezetében azonban mindkét hatás egyszerre meg fog jelenni. Ráadásul a dinamikák, mivel pénzügyi modellről van szó, sztochasztikusak is lesznek. A stratégiák vagyontarányát továbbá a sikeresség egy fokmérőjének tekintjük, miszerint az a stratégia a „győztes”, amelyiknek nagyobb a vagyontaránya.

2.7. A kereskedett eszközök és a piaci ármechanizmus

A kereskedett eszközök a piaci modellek alapvető építőkövei. Tisztázandó kérdés, hogy milyen típusú, illetve hány különböző eszközt szerepeltetünk a modellben. A két leggyakoribb kereskedett eszköz típus a kockázatos és a kockázatmentes. A kockázatmentes eszközre általában bankbetétként vagy államkötvényként gondolunk, mely kifizetése determinisztikus. A kockázatos eszköz bármi lehet: részvény, kereskedhető index, vagy akár valamilyen egzotikus eszköz, akár kriptovaluta. Részvény esetén gyakori feltevés, hogy az valamilyen exogén módon adott sztochasztikus jövedelmet, azaz osztalékot biztosít tulajdonosának. Ekkor általában a fundamentális értéket is az osztalékok várható értékének jelenértékeként szokták definiálni. Osztalékot explicit nem biztosító eszköz esetén a fundamentális érték gyakran maga egy exogén módon adott sztochasztikus folyamat.

Mivel a heterogén ágens alapú piaci modellekben a hangsúly az ágenseken és a

közöttük zajló versenyen van, ezért a kereskedett kockázatos eszközök száma gyakran csak egy. Ekkor a kockázatos eszköz egy indexet reprezentál, azaz a kereskedők egy index és a kockázatmentes betét/hitel portfólióját tartják, összhangban a klasszikus CAPM-mel (Sharpe, 1964). A dolgozatban egy olyan modellt is vázolunk, amelyben explicit megjelenik több eszköz is, de a vizsgálat középpontjában az egy kockázatos eszközzel leírt piac lesz.

A piaci mechanizmus szolgál azért, hogy a piaci kereslet és kínálat eredőjeként kialakuljon az árfolyam. LeBaron (2001) a piaci mechanizmus három fajtáját különbözteti meg: mikroszintű ajánlati könyv vezérelte piac, egyensúlyi piac, illetve permanens egyensúlytalansági piac. A dolgozatban a permanens egyensúlytalansági megközelítést fogjuk alkalmazni, mivel ez a megközelítés illeszkedik legjobban a folytonos idejű felíráshoz. Ebben az alfejezetben röviden bemutatjuk az ajánlati könyv vezérelte piacot és az egyensúlyi piacot, majd egy külön szekcióban a permanens egyensúlytalansági piacot.

Az *ajánlati könyv vezérelte piaci modell* biztosítja a legnagyobb szabadságot a modellező számára. Ekkor a modellben szereplő befektetők a vélekedéseik alapján konkrét limitáras ajánlatokat tesznek be az ajánlati könyvbe, melyek a valós tőzsdék szabályai alapján kerülnek teljesítésre. Az egyik jellegzetessége az ilyen modelleknek, hogy kizárólag szimulációs eredményeket tudnak produkálni. Az ilyen mikroszimulációs modellek jól tudják replikálni a pénzügyi piacok magas frekvenciájú stilizált tényeit, de a modellfelírás általában rendkívül sok heurisztikus elemet tartalmaz, és nehéz tetten érni a különböző befektetési stratégiák közötti csatolások hatásait. Az ajánlati könyv heterogén ágensekkel való modellezésére példa Chiarella és Iori (2002) cikke. A tanulmányban nagy számú (1000) piaci résztvevő kereskedik egyetlen kereskedett eszközzel. A kereskedők mindegyike fundamentális, trendkövető és kontrariánus, valamint zajkereskedői stílusjegyeket is hordoz, azonban eltérő mértékben. Ezeket a stílusjegyeket figyelembe véve a pillanatnyi árfolyamtól – ami egyszerűen a legutolsó teljesült tranzakció árfolyama – függően egy eladási vagy vételi ajánlatot raknak be egy ajánlati könyvbe, ahol a szokásos szabályok szerint teljesülnek az ajánlatok. Szimulációs eredményeik jól illeszkednek a valós piacokhoz például a likviditás, az ajánlatok átlagos élettartama és a tick-méret szempontjából.

Az *egyensúlyi modellek* esetén minden periódusban egy ideiglenes egyensúly alakul ki: a befektetők az árfolyamra vonatkozó várakozásaik alapján keresletet támasz-

tanak az eszközök iránt, és olyan piactisztító árfolyam alakul ki, hogy a kereslet és a kínálat megegyezzen, azaz a túlkereslet éppen zérus legyen. Ez a megközelítés kevésbé paraméterérzékeny, mint a többi piaci mechanizmus, azonban feltételrendszerét tekintve restriktívebb, mert a keresleti függvényeknek olyannak kell lenniük, hogy az ideiglenes egyensúly kialakulhasson.

Az egyensúlyi piacot gyakran úgy modellezzük, hogy az egyes befektetők minden időpontban a rendelkezésükre álló információk alapján megfogalmazzák a következő időpontra vonatkozóan egy befektetési arányt, melyet úgy kell érteni, hogy a vagyonuk hány százalékát szeretnék látni a kockázatos eszközben (például részvényben). Ezek után a következő időpontban egy olyan piactisztító árfolyam alakul ki, hogy az előzőleg megfogalmazott befektetési arányok minden befektető esetén valóban teljesülnek is.

Egy tipikus, diszkrét idejű modell a következő. Jelölje $W_j(t)$ a j -edik befektető vagyonát, $S(t)$ az egyetlen kockázatos eszköz árfolyamát, míg $Z_j(t)$ a j befektető befektetési arányát a t időpontban. A befektetési arány azt jelenti, hogy a vagyonának $Z_j(t)$ arányát tartja a kockázatos eszközben, míg $(1 - Z_j(t))$ arányát a kockázatmentes eszközben. Az egyes befektetők vagyonának értékefejlődése – önfinanszírozó stratégiát feltételezve – az egyes eszközök értékének megváltozásából származik:

$$W_j(t+1) = \frac{Z_j(t)W_j(t)}{S(t)}S(t+1) + (1 - Z_j(t))W_j(t)$$

ahol $\frac{Z_j(t)W_j(t)}{S(t)}$ a befektető t időponttól $(t+1)$ -ig tartott részvényeinek darabszáma. A jobb oldalon lévő második tag a kockázatmentes eszközben lévő pénz mennyiségét jelenti, amelynek egy periódusra vonatkozó kamatát önkényesen nullának választottuk. A $(t+1)$ -beli új részvényárfolyam úgy számolható, ha feltesszük, hogy a részvények piacon lévő darabszáma konstans, és a befektetők együttesen tartják ezt a készletet. Az általánosság megsértése nélkül rögzítsük ezt a készletet egységnyin:

$$1 = \sum_j \frac{Z_j(t)W_j(t)}{S(t)} \implies S(t) = \sum_j Z_j(t)W_j(t)$$

A következő időszaki részvényárfolyam úgy számolható, ha feltesszük, hogy minden befektető a t időpontban rendelkezésére álló információk alapján megfogalmaz a ke-

reskedési stratégiájának megfelelően egy új $Z_j(t+1)$ befektetési arányt, majd ez az arány az új árfolyam mellett – egyfajta önbeteljesítő jóslatként – teljesül is. Matematikailag mondhatjuk úgy is, hogy a modellben az egyik központi mennyiségnek tekinthető $Z_j(t)$ befektetési arányokat $\mathcal{F}(t)$ -előrejelezhetőnek feltételezzük. Az új egyensúlyi árfolyam tehát:

$$S(t+1) = \sum_j Z_j(t+1) \cdot \left(\frac{Z_j(t)W_j(t)}{S(t)} S(t+1) + (1 - Z_j(t))W_j(t) \right)$$

$$\implies S(t+1) = \frac{\sum_j Z_j(t+1)(1 - Z_j(t))W_j(t)}{1 - \frac{1}{S(t)} \sum_j Z_j(t+1)Z_j(t)W_j(t)}$$

Mivel a jobb oldalon szereplő minden mennyiség $\mathcal{F}(t)$ -mérhető, ezért matematikailag ez egy értelmes árfolyam dinamikát eredményez. A dinamika egyik érdekessége, hogy mivel a $Z_j(t+1)$ befektetési arányok közvetlen (és monoton) kapcsolatban vannak az új árfolyammal, ezért akár egy minden határon túl növekvő árfolyam is kialakulhat, ha a befektetők egyre nagyobb és nagyobb befektetési arányokat fogalmaznak meg maguknak. További érdekesség, hogy sztochasztikus tag közvetlenül nem jelenik az árfolyam dinamikában. A sztochasztikát ezért általában magukon a kereskedési stratégiákon keresztül szokták behozni az ilyen modellekbe. Palczewski és tsai. (2016) cikkében például az egyik kereskedő a zajkereskedő, akinek a $Z_j(t)$ befektetési aránya egy exogén sztochasztikus, autoregresszív folyamatot követ, így végül a zajkereskedő lesz a sztochasztika egyedüli forrása a modellben.

A fentihez hasonló, egyensúlyon alapuló ármechanizmussal találkozhatunk például Amir és tsai. (2013), Evstigneev és tsai. (2008), Brock és Hommes (1998), Hens és Schenk-Hoppé (2005) cikkeiben.

2.7.1. Permanens egyensúlytalansági piac

A permanens egyensúlytalansági modellek ármechanizmusa egyszerűbb az egyensúlyi modellekénél, ráadásul a folytonos idejű modellekben kézenfekvőbb is a használata. Az ilyen modellekben a piac soha nincs egyensúlyban, de egy külső erő folyamatosan az egyensúly felé igyekszik terelni azt. Ezt a külső erőt szokás egy látens, közvetlenül nem modellezett szereplővel, az árjegyzővel azonosítani. Az árjegyző aggregálja a befektetők pillanatnyi pozícióját, megállapítja a pillanatnyi egyensúly-

talanság mértékét, majd az aggregált pozíciókkal ellentétes pozíciót vesz fel a piacon, hogy kielégítse a keresletet. Végül úgy állapítja meg a következő periódusbeli árat, hogy a túlkereslet abszolút értéke kisebb legyen. A korábbi jelöléseket felhasználva a folytonos idejű árdinamika az általános esetben az alábbi alakot ölti:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu(\mathcal{D}(t)) dt + \sigma(\mathcal{D}(t)) dB(t),$$

ahol $\mathcal{D}(t)$ a pillanatnyi egyensúlytalanság mérőszáma, $dB(t)$ egy Brown-mozgás megváltozása. A $\mu : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvény esetén általában feltesszük, hogy monoton növény, hiszen ha az egyensúlytalanság – azaz a túlkereslet – nagy, akkor az árjegyző felfelé igazítja az árat, míg ha az egyensúlytalanság kicsi (akár negatív), akkor lefelé igazítja az árat. A $\sigma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvény gyakran a konstans függvény, mert inkább a drift szokott lenni a vizsgálat központjában, de ebben a dolgozatban vizsgálunk majd egy olyan esetet is, ahol a volatilitás is függ a pillanatnyi egyensúlytalanságtól oly módon, hogy a volatilitás akkor nagy, amikor az egyensúlytalanság abszolút értéke nagy.

A pillanatnyi egyensúlytalanságot a kereskedők átlagos pozíciója és a kínálat különbségeként definiáljuk:

$$\mathcal{D}(t) = \sum_j p_j(t) Z_j(t) - \mathcal{S}(t),$$

ahol $p_j(t)$ az egyes kereskedők vagyonaránya, míg $\mathcal{S}(t)$ a pillanatnyi kínálat értéke. Konstans nulla kínálat – azaz $\mathcal{S}(t) = 0$ – esetén a legegyszerűbb specifikáció tehát a következő:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \beta \cdot \sum_j p_j(t) Z_j(t) dt + \sigma dB(t) \quad (2.15)$$

A $\sigma > 0$ paraméter a konstans volatilitás értéke, míg a $\beta \geq 0$ paraméterrel állítható az ármechanizmus árváltoztatásának sebessége. Egy piaci kalibráció esetén a β helyes paraméterezésére különös gondot kell fordítani, mert ha túl nagy, akkor a piac egy válságos és egy buborék állapot közötti ciklusba kerülhet, míg ha túl alacsony, akkor előfordulhat, hogy akár soha nem elégül ki a befektetők kereslete.

A permanens egyensúlytalansági modellek a μ és σ függvényeken keresztül rendkívül nagy szabadságot biztosítanak a modellező számára, bár éppen ezért erősen

heurisztikusak is. Érdekes és realisztikus árdinamikák általában nemlineáris feltevések esetén szoktak kialakulni.

A fentihez hasonló permanens egyensúlytalansági modellek egy első példája Beja és Goldman (1980) cikke. Szintén korai példa Jarrow (1992) modellje, amely azt feltételezi, hogy az elegendően nagy szereplők a kereskedésükkel mozgatják az árakat. A legközelebbi folytonos idejű előzményeknek He és tsai. (2019) és He és tsai. (2018) cikkek tekinthetők, míg diszkrét idejű megfelelőnek tekinthetők például Chiarella és tsai. (2009), Chiarella és tsai. (2013) cikkek.

A dolgozat 3. fejezete *Heterogén kereskedési stratégiák hatása a piaci árfolyamokra* címmel 2021-ben megjelent a *Közgazdasági Szemle* 67. évfolyamának 4. számában. (Bihary és Víg, 2020)

Bihary, Z. és Víg, A. A. (2020). Heterogén kereskedési stratégiák hatása a piaci árfolyamokra. *Közgazdasági Szemle* 67.4, 688–707. old. DOI: 10.18414/KSZ.2020.7-8.688.

3. fejezet

Fundamentális és technikai kereskedők egy konstans volatilitású modellben

Ebben a fejezetben különböző, tipikusnak mondható kereskedési stratégiák hatását vizsgáljuk a piaci árfolyamokra. Folytonos idejű modellünk aktív szereplői a fundamentális és trendkövető kereskedők, illetve passzív karakterként megjelennek az indexkövető kereskedők. A fundamentális kereskedők ismerik az egyetlen kockázatos eszköz fundamentális értékét, és a félreárazottság vezérli keresletüket. A trendkövető kereskedők az árfolyam mozgóátlaga alapján kereskednek. Ez a – gyakorlatban is sokat használt – technikai indikátor jelenik meg többek közt Moskowitz és tsai. (2012) és Goyal és Jegadeesh (2017) írásaiban is.

Modellünkhöz hasonló, heterogén ágenseken alapuló piaci modellek alkalmasnak bizonyultak arra, hogy a pénzügyi piacok bizonyos stilizált tényeit (vastagszélű hozameloszlások, momentumhatás és átlaghoz visszatérés) megmagyarázzák. Brock és Hommes (1998) az elsők között mutatták meg, hogy heterogén várakozásokkal rendelkező, korlátozottan racionális befektetők miként okozhatnak piaci instabilitást. Diszkrét idejű modelljük nagy lökést adott a heurisztikus szabályokat követő kereskedők elméleti irodalmának, lásd például Hommes és tsai. (2005), Chiarella és tsai. (2006) és Chiarella és tsai. (2013) cikkeit.

A diszkrét idejű modellekre építve, He és szerzőtársai számos folytonos idejű

modellt vezettek be a piaci szereplők heterogenitása és a piaci stabilitás vizsgálatára. A folytonos idejű modellek előnyeit ismerteti Li (2014) írása. He és tsai. (2009) a technikai elemzők által számolt mozgóátlag-időablak szélességének a piaci hatását vizsgálják. He és Zheng (2010) megmutatják, hogy az árfolyam az időablak szélességével stabilitási átalakuláson megy át: egy közepes szélességű időablak a trendkövetők révén a piaci árat destabilizálja, míg nagy szélesség esetén újra stabilá válik a piac. He és Li (2012) modelljében a szokásos stratégiák populációs aránya adaptív módon változik, a befektetők racionális viselkedése piaci instabilitáshoz és rendkívüli árfluktuációkhoz vezethet. He és Li (2015) azt találják, hogy a momentumon alapuló stratégia sikeressége függ a mozgóátlag időablakának szélességétől és a momentumkereskedők piaci dominanciájától is.

Ez a fejezet egy némileg átszerkesztett változata a szerző egy publikált tanulmányának (Bihary és Víg, 2020), amely cikk az imént tárgyalt folytonos idejű heterogén ágens irodalomhoz csatlakozik. A piaci szereplők viselkedését indikátorok vezérlik, melyek a piac állapothatározóiként is értelmezhetőek. A modell posztulál egy, az árfolyamtól különböző fundamentális értékfolyamatot. Az egyik indikátor az árdiszlokáció, ami a piaci ár és a fundamentális érték különbsége. Ezt követik a fundamentális kereskedők. A másik a trend indikátor, ami a pillanatnyi ár és annak mozgóátlaga közti különbség. A trendkövetők erre alapozzák stratégiájukat. Az eredetileg az árfolyamra vonatkozó dinamikus egyenletekből levezethető az indikátorok dinamikája. Eltérően az idézett cikkek megszokott megközelítésétől, számolásainkban mi nem tekintünk el a dinamika sztochasztikus jellegétől. Éppen ellenkezőleg, tárgyalásunk az árfolyam, illetve az indikátorok hosszútávú statisztikai viselkedésére koncentrál. Az árfolyam bolyongás, ezért nem beszélhetünk az invariáns eloszlásáról. Az indikátorok azonban, mint a piac állapotát meghatározó mennyiségek, viselkedhetnek stacionárius módon. Sztochasztikus leírásmódunkban éppen ezen keresztül definiálhatjuk a piac stabilitását; akkor beszélünk stabil piacról, ha az indikátoroknak létezik invariáns eloszlása.

A fejezet felépítése a következő. A 3.1. szakaszban a modellt és annak különböző variánsait ismertetjük. A 3.2. szakasztól kezdve részletezzük az elméleti és empirikus eredményeinket.

3.1. Modell

Ebben a szakaszban a folytonos idejű eszközárzási modellt mutatjuk be, támaszkodva He és Li (2015) heterogén ágens alapú modelljére. A piacon eltérő karakterisztikájú kereskedők kereskednek egyetlen kockázatos és egyetlen kockázatmentes eszközzel. A heterogén ágens alapú modellek szakítanak a pénzügyi közgazdaságtan racionális befektetőre épülő paradigmájával. Ehelyett olyan befektetőket modellezünk, akik korlátozott racionalitással bírnak, heterogének a várakozásaik, és így heterogének a kereskedési stratégiájukban is. A heterogén ágens alapú piaci modellek két klasszikus karaktere (fundamentális és trendkövető kereskedő) mellett egy harmadik kereskedőt (indexkövető) is modellezünk.

Modellünkben a befektetői heterogenitás a befektetők által követett piaci indikátorban, illetve az ez alapján hozott befektetési döntésben nyilvánul meg. A befektetési döntést közvetlenül modellezzük, a hasznosság-alapú optimalizációt a háttérben tartjuk. A kockázatos eszköz ára egy stilizált árjegyzői hatás eredményeként fejlődik, melynek egyik első előzménye Beja és Goldman (1980) írása.

3.1.1. A heterogén kereskedő típusok

Jelöljék $S(t)$ és $F(t)$ sztochasztikus folyamatok rendre az egyetlen kockázatos eszköz piaci árát és fundamentális értékét a $t \in [0, \infty)$ időpontban. Jelölje $s(t) = \log(S(t))$ és $f(t) = \log(F(t))$ rendre a log piaci árát és log fundamentális értéket. A továbbiakban általában elhagyjuk a „log” jelzőt, és egyszerűen piaci árként és fundamentális értéként hivatkozunk a kisbetűs mennyiségekre. A (2.1) egyenletnek megfelelően feltesszük, hogy a fundamentális érték logaritmusá egyszerű Brown-mozgást követ:

$$df(t) = \boldsymbol{\sigma}_f^\top d\mathbf{B}(t), \quad (3.1)$$

ahol $\boldsymbol{\sigma}_f \in \mathbb{R}^2$ a fundamentális érték volatilitás vektora, $\mathbf{B} : \Omega \times [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^2$ egy sztenderd két-dimenziós Wiener-folyamat, melynek komponensei függetlenek. Modellünkben két releváns forrása van a véletlennek, ezek közül az egyik jelenik meg a fundamentális értéken keresztül, a másik a piaci áron keresztül hamarosan. Megtehetnénk, hogy mindkét folyamatot egy saját Wiener-folyamat hajt meg, melyek között megjelenne egy tetszőleges korrelációs paraméter a $[-1, 1]$ intervallum-

ból. Ehelyett modellünkben két független Wiener-folyamatot feltételezünk, melyek mindketten megjelennek minden sztochasztikus differenciálegyenletben (SDE), és a volatilitások is szükségszerűen vektor mennyiségek. Az (3.1)-es egyenlet jobb oldalán így egy skalár szorzat jelenik meg. A továbbiakban is követjük azt a konvenciót, hogy a vektoriális (illetve mátrix) mennyiségek félkövérek.

A piaci ár és a fundamentális érték különbségét *árdiszlokációnak* nevezzük:

$$u(t) = s(t) - f(t) \quad (3.2)$$

Az árdiszlokáció folyamat a kockázatos eszköz félreárazottságát méri a t időpontban. A logaritmikus különbsége az eredeti – pénzben mért – mennyiségek százalékos eltéréseként is értelmezhető. A kockázatos eszköz felülértékelt, ha $u(t) > 0$, és alulértékelt, ha $u(t) < 0$. Az árdiszlokáció a fundamentális kereskedők által követett piaci indikátor, akik ez alapján hozzák meg befektetési döntésüket. Alulárazottság esetén keresletet támasztanak a kockázatos eszköz felé, felülárazottság esetén pedig az eladói oldalon jelennek meg. Túlkeresleti függvényük $Z_f(t) = Z_f(u(t))$ monoton csökkenő függvénye az árdiszlokációnak. A fundamentális kereskedők esetén egy egyszerű lineáris függvénnyel specifikáljuk a túlkeresleti függvényt:

$$Z_f(t) = -\alpha_f u(t), \quad \alpha_f \geq 0 \quad (3.3)$$

Az α_f paraméter segítségével állítható az, hogy a fundamentális kereskedők milyen erősen reagálnak egységnyi félreárazottságra. Ahogy később látni fogjuk, a fundamentális kereskedők árhatása egyfajta hosszú távú stabilitásként jelenik meg a piacon egy átlaghoz való visszahúzás formájában.

Definiáljuk továbbá a piaci árfolyam mozgóátlagát a (2.2) egyenletnek megfelelően:

$$m(t) = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{\tau}(t-v)} s(v) dv, \quad (3.4)$$

ahol $\tau > 0$ paraméter jelöli azt, hogy a mozgóátlag a múlt hány évnyi részét veszi releváns módon figyelembe. A technikai kereskedők piaci indikátora azonban nem maga a mozgóátlag lesz, hanem a pillanatnyi (log) árfolyam és a mozgóátlag különbségeként számított $x(t)$ *trend indikátor*:

$$x(t) = s(t) - m(t), \quad (3.5)$$

melynek dinamikája a (2.5) egyenletnek megfelelően

$$dx(t) = -\frac{1}{\tau}x(t) dt + ds(t). \quad (3.6)$$

A SDE drift tagja mutatja, hogy a trend indikátor inherens módon egy átlaghoz visszahúzó tulajdonsággal bír. Ez a tulajdonság szolgál reménnyel arra, hogy modellünk (legalábbis $x(t)$ -ben) stationer jellegű lesz.

A trend indikátort követik és ez alapján hozzák meg befektetési döntésüket a trendkövető kereskedők. A trendkövetők hisznek a perzisztens trendekben, ezért pozitív trend ($x(t) > 0$) esetén vásárolnak, míg negatív trend ($x(t) < 0$) esetén az eladói oldalon jelennek meg. Túlkeresleti függvényükre $Z_c(t) = Z_c(x(t))$ nézve a következő feltevésekkel élünk:

$$Z'_c(x) > 0, \quad x \cdot Z''_c(x) \leq 0. \quad (3.7)$$

A túlkeresleti függvény az első feltevés szerint monoton növekvő, a második szerint pozitív x esetén konkáv, negatív x esetén konvex. Az ilyen feltevéseknek megfelelő függvényt az irodalomban gyakran egyszerűen „S-alakúnak” nevezik. A feltevések mögötti intuíció Chiarella és tsai. (2006) alapján az, hogy bár a kereskedők pozíciója a pillanatnyi trendben monoton (hiszen ő egy trendkereskedő), azonban a nagyon nagy trendeket egyre kisebb lelkesedéssel reagálják le, azaz kétszer akkora trend nem jár együtt kétszer akkora pozícióval. Ennek oka lehet például az, hogy amikor a trendkövető kereskedő a nagy pillanatnyi trendnek köszönhetően nagy várható hozamot vár a piacon, akkor a kockázatra vonatkozó várakozásai is nagyok. A továbbiakban a következő (a (3.7)-as tulajdonságokat teljesítő) specifikációval élünk a trendkövetők túlkeresleti függvényére:

$$Z_c(t) = \alpha_c x^* \tanh\left(\frac{x(t)}{x^*}\right), \quad \alpha_c, x^* > 0, \quad (3.8)$$

ahol $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Az α_c paraméter jelöli a trendkövetők keresleti érzékenységet, amikor a pillanatnyi ár és a mozgóátlag közötti eltérés kicsi. Az x^* paraméter

kontrollálja a túlkeresleti függvény minimumát és maximumát. A \tanh függvényválasztás fő oka az analitikus kezelhetősége, illetve az irodalomban való beágyazottsága, lásd például Chiarella és Tsai. (2006) és He és Li (2012). A \tanh függvény legfontosabb jellegzetessége (azon túl, hogy teljesíti a fenti feltételeket), hogy van alsó és felső korlátja is, azaz a kereskedő pozíciója korlátos lesz. Egy nem korlátos, de analitikusan jól kezelhető választás lehetne az $\operatorname{arsinh}(x)$ függvény, amely szintén „S-alakú” a fenti értelemben.

A harmadik és egyben utolsó modellezett kereskedő típusunk az indexkövető kereskedő. Az indexkövető kereskedő nem aktív résztvevője a piacnak, nem kereskedik, hanem egyszerűen az egyetlen kockázatos eszközt tartja. Túlkeresleti függvénye ezért azonosan zérus:

$$Z_i(t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (3.9)$$

Az indexkövető kereskedő tehát nem rendelkezik piaci árhatással modellünkben, egyetlen szerepe, hogy a – hamarosan bevezetésre kerülő – populációs arányokban nagyobb szabadságunk legyen, mintha csak két kereskedő típusunk lenne.

3.1.2. A piaci ármechanizmus

Jelölje p_f , p_c és p_i rendre a fundamentális, trendkövető és indexkövető kereskedők időben állandó populációs arányát, azzal a természetes feltételezéssel, hogy $p_f + p_c + p_i = 1$ és $0 \leq p_j \leq 1 \quad \forall j \in \{f, c, i\}$. A piaci árfolyam egy árjegyzői mechanizmus eredményeként fejlődik, melynek egyik első előzménye Beja és Goldman (1980) írása. Az árhatás egy újabb megközelítésére lásd például Cont és Müller (2021) tanulmányát. Abból indulunk ki, hogy az árfolyamot a piaci résztvevők keresletének és kínálatának eredője mozgatja. A nem közvetlenül modellezett, látens árjegyző összegzi a kereskedők túlkeresletét, egy ellentétes előjelű (long vagy short) pozícióval kielégíti azt, majd a szerint igazítja az árat, hogy a túlkereslet a nullához közelítsen. Így az árigazítás előjele pozitív, ha az aggregált túlkereslet pozitív, illetve negatív, ha az aggregált túlkereslet negatív. Az aggregált túlkereslet figyelembe veszi a kereskedők populációs arányát is. Mivel ezek a gondolatok a 2.7.1 fejezet permanens egyensúlytalansági modelljének felelnek meg, ezért a (2.15) egyenlethez

hasonlóan egy egyszerű lineáris összefüggést feltételezünk az árfolyam fejlődésére:

$$ds(t) = \beta \cdot \sum_{j \in \{f, c, i\}} p_j Z_j(t) dt + \boldsymbol{\sigma}_s^\top d\mathbf{B}(t) \quad (3.10)$$

ahol $\beta \geq 0$ jelöli az árjegyző árigazításának a sebességét, míg $\boldsymbol{\sigma}_s \in \mathbb{R}^2$ az árfolyamat volatilitását jelölő vektor. Az árjegyzői mechanizmus hatása kizárólag a drift tagban jelenik meg. Csakúgy mint a fundamentális értéknél, az ár esetén is konstans volatilitást feltételezünk, mely nem függ sem a kereskedők keresletétől, sem a populációs arányoktól.

Helyettesítsük most be mindhárom kereskedő típus túlkeresleti függvényét ((3.3)-as, (3.8)-es és (3.9)-es egyenlet) az árazási (3.10) egyenletbe, és megkapjuk a modellspecifikus árazási egyenletet:

$$ds(t) = \beta \left(p_c \alpha_c x^* \tanh\left(\frac{x(t)}{x^*}\right) - p_f \alpha_f u(t) \right) dt + \boldsymbol{\sigma}_s^\top d\mathbf{B}(t) \quad (3.11)$$

Eljuthatunk a piac két meghatározó mennyiségének $(u(t), x(t))$ sztochasztikus differenciálegyenlet-rendszeréhez, ha $ds(t)$ -t behelyettesítjük a (3.2)-es és (3.6)-es egyenletekbe:

$$\begin{aligned} du(t) &= \beta \left(p_c \alpha_c x^* \tanh\left(\frac{x(t)}{x^*}\right) - p_f \alpha_f u(t) \right) dt + (\boldsymbol{\sigma}_s - \boldsymbol{\sigma}_f)^\top d\mathbf{B}(t) \\ dx(t) &= \left[\beta \left(p_c \alpha_c x^* \tanh\left(\frac{x(t)}{x^*}\right) - p_f \alpha_f u(t) \right) - \frac{1}{\tau} x(t) \right] dt + \boldsymbol{\sigma}_s^\top d\mathbf{B}(t). \end{aligned} \quad (3.12)$$

A központi vizsgált objektumunk a (3.12)-as egyenletrendszer által definiált $(u(t), x(t))$ rendszer invariáns (határ-) eloszlása, melyet a Kolmogorov parciális differenciálegyenletrendszer numerikus megoldásaként kapunk (lásd Appendix A.1).

Az ebben a szakaszban részletezett általános modell nemlineáris árdinamikát eredményez (lásd a (3.11)-es és (3.12)-as egyenletet). Ez a nemlinearitás a trendkövető kereskedők nemlineáris túlkeresleti függvényéből (3.8) fakad. Nemlineáris többdimenziós sztochasztikus differenciálegyenlet-rendszer analitikus vizsgálata rendkívül nehéz. Ezért a következő két szakaszban egy-egy olyan egyszerűsítést mutatjuk be az általános modellünknek, melyekben analitikus eredményekre jutunk. Az elsőben a trendkövetők túlkeresleti függvényét linearizáljuk, míg a másodikban megtartjuk

a nemlinearitást, de a fundamentális érték folyamatának újradefiniálásával megsza-
badulunk egy dimenziótól.

3.1.3. A linearizált modell

Ebben a specifikációban a trendkövetők túlkeresleti függvényét (3.8) linearizáljuk a nulla körül, azaz az S-alakú $\alpha_c x^* \tanh\left(\frac{x(t)}{x^*}\right)$ függvényt azzal a függvénnyel helyettesítjük, amely a nulla körül lineáris értelemben legjobban közelíti azt. Mivel a túlkeresleti függvény deriváltja a nullában α_c , ezért:

$$Z_c(t) = \alpha_c x(t)$$

Ismét lineáris árdinamikát (3.10) feltételezünk. Ezt a piacot leíró sztochasztikus differenciálegyenlet-rendszer így a következő lesz:

$$\begin{aligned} du(t) &= \beta(p_c \alpha_c x(t) - p_f \alpha_f u(t)) dt + (\boldsymbol{\sigma}_s - \boldsymbol{\sigma}_f)^\top d\mathbf{B}(t) \\ dx(t) &= \beta(p_c \alpha_c x(t) - p_f \alpha_f u(t)) dt - \frac{1}{\tau} x(t) dt + \boldsymbol{\sigma}_s^\top d\mathbf{B}(t), \end{aligned}$$

ami szintén egy lineáris rendszer. Vegyük észre, hogy az $\mathbf{Y}(t) = (u(t), x(t))^\top$ vektor-értékű folyamat egy két-dimenziós Ornstein-Uhlenbeck (O-U) folyamat, azaz felírható

$$d\mathbf{Y}(t) = -\boldsymbol{\Theta}\mathbf{Y}(t) dt + \boldsymbol{\Sigma} d\mathbf{B}(t) \quad (3.13)$$

alakban, ahol

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{pmatrix} \beta p_f \alpha_f & -\beta p_c \alpha_c \\ \beta p_f \alpha_f & \frac{1}{\tau} - \beta p_c \alpha_c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_s^\top - \boldsymbol{\sigma}_f^\top \\ \boldsymbol{\sigma}_s^\top \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Az O-U folyamatok gauss-i eloszlása jól ismert, amennyiben bizonyos feltételek teljesülnek a $\boldsymbol{\Theta}$ együttható-mátrixra nézve. A feltételeket és azok következményeit a 3.3-es szekcióban tárgyaljuk.

3.1.4. Az egydimenziós modell

Ebben a specifikációban megtartjuk a trendkövetők stratégiájából fakadó nemlinearitást, azonban egy dimenzió-redukció útján egyszerűsítjük a modellt. Míg a fő specifikációnkban a fundamentális érték egy exogén sztochasztikus folyamat volt, most ezt a folyamatot elhagyjuk, és azt feltételezzük, hogy a fundamentális kereskedők sem a fundamentális érték, hanem a mozgóátlag alapján veszik fel a pozíciójukat. Bizonyos szerzők (lásd például He és Li (2015) írását) az ilyen stratégiát követő kereskedőt *kontrariánusnak* nevezik, de mi itt maradunk a fundamentális kereskedő megnevezésnél. A fundamentális és a kontrariánus kereskedők abban hasonlítanak egymásra, hogy mindkettő piaci hatása árviasszahúzó, stabilizáló hatású, hiszen jó eséllyel egy nagy pozitív trend nagy pozitív árdiszlokációt is jelent, és mindketten éppen ekkor vesznek fel nagy negatív pozíciót.

Legyen tehát $f(t) = m(t)$ és így $u(t) = x(t)$. A fundamentális kereskedő túlkereslete továbbra is egy csökkenő lineáris függvény, de ebben az esetben a piaci indikátora $x(t)$ lesz:

$$Z_f(t) = -\alpha_f x(t), \quad \alpha_f \geq 0,$$

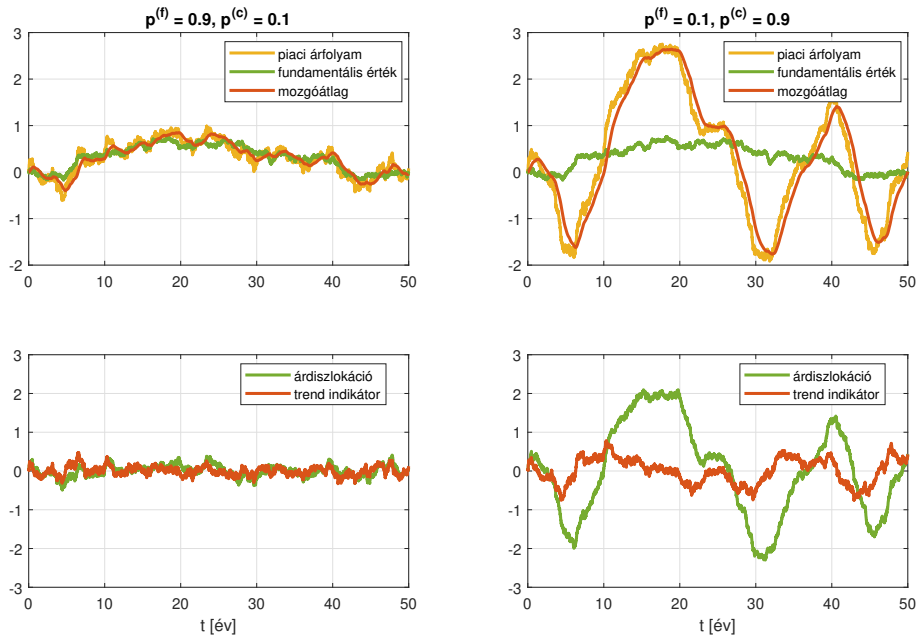
A lineáris árdinamikát (3.10) és a nemlineáris trendkövető túlkeresletét (3.8) megtartva így a piacot leíró egyetlen SDE:

$$dx(t) = - \left(\beta p_f \alpha_f + \frac{1}{\tau} \right) x(t) dt + \beta p_c \alpha_c x^* \tanh \left(\frac{x(t)}{x^*} \right) dt + \boldsymbol{\sigma}_s^\top d\mathbf{B}(t) \quad (3.14)$$

Ebben a SDE-ben az első drift tag tartalmazza a fundamentális (kontrariánus) kereskedők átlaghoz visszahúzó hatását (illetve a mozgóátlag inherens visszahúzását), míg a második, nemlineáris tag a trendkövetők extrapolatív erejét. Mivel (3.14) – szemben (3.12)-mal – egydimenziós, reménykedhetünk analitikus eredményben is az invariáns eloszlásokat tekintve.

3.2. Illusztrációk az árdinamikára

A 3.1. ábra generált trajektóriák segítségével szemlélteti a fundamentális és trendkövető kereskedők piaci szerepét és árhatását a fő specifikáció (többdimenziós, nemlineáris) esetén. A (log) fundamentális érték $f(t)$ egy drift nélküli, exogén Brown-



3.1. ábra. Minta trajektóriák a fő (nemlineáris, két dimenziós) specifikáció esetén. Paraméterek: $\beta = 1$, $\tau = 0.75$, $\alpha_f = 1$, $\alpha_c = 1.75$, $x^* = 0.5$, $\sigma_f^\top = (0.1, 0)$, $\sigma_s^\top = (0.1, 0.2)$.

mozgás viszonylag kis volatilitással. A (log) piaci árfolyam $s(t)$ a fundamentális kereskedőknek köszönhetően a fundamentális érték felé húz, a körül ingadozik. A volatilitásvektorokat illusztrációinkban úgy választjuk, hogy a piaci árfolyam volatilitása nagyobb legyen a fundamentális érték volatilitásánál (Shiller (1981) például azt találja, hogy az árfolyamok volatilitása messze felülmúlja azt, mint ami az osztalékok változásából következne), és hogy a zajkomponensek pozitívan korreláljanak. A pozitív korreláció a piaci árfolyam és a fundamentális érték kereszt-kvadratikus variációján keresztül értendő, azaz $d\langle s, f \rangle(t) = \sigma_s^\top \sigma_f dt > 0$. Az intuíció az, hogy ha a fundamentális érték pozitív irányba mozdul el, akkor – az endogén árhatásokat nem figyelembe véve – a piaci árfolyam is várhatóan követi ezt infinitezimális értelemben.

A mozgóátlag $m(t)$ lemaradva követi a piaci árfolyamot. Az alsó két ábrán mutatjuk be a piaci indikátorokat, amelyekre a befektetési döntéseiket alapozzák a kereskedők. Az árdiszlokáció $u(t) = s(t) - f(t)$ a piaci árfolyam és a fundamentális

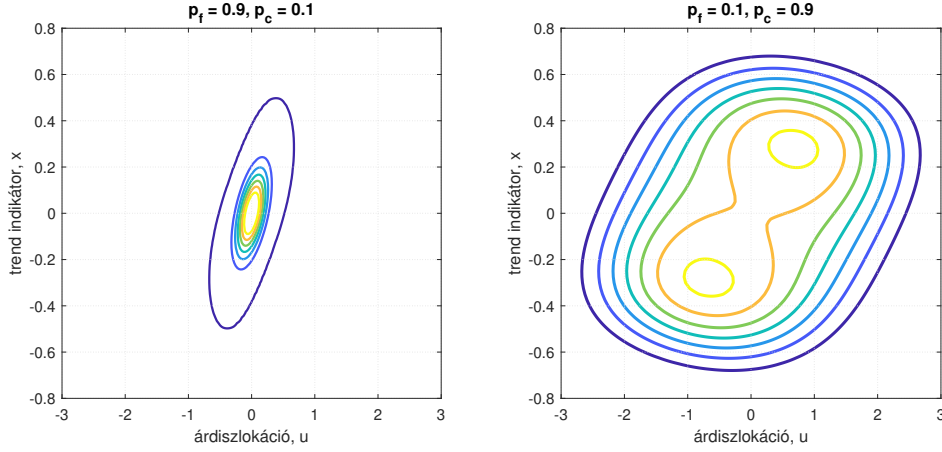
érték különbsége, a trend indikátor $x(t) = s(t) - m(t)$ a piaci árfolyam és a mozgó-
átlag különbsége. Előbbit a fundamentális, míg az utóbbit a trendkövető kereskedők
követik.

A bal oldali két ábra egy érett, kiforrott piacot szemléltet, ahol a kockázatos
termék fundamentális értéke jól becsülhető. Modellünkben ekkor többségben van-
nak azok a kereskedők, akik a fundamentális érték alapján kereskednek ($p_f = 0.9$).
A jobb oldali két ábra olyan piacot szemléltet, ahol a fundamentális érték nehezen
megfogható, itt a trendkövető technikai kereskedők vannak többségben ($p_c = 0.9$).
A kereskedők piaci hatása jól látható a trajektóriák alapján. A bal oldalon a piaci
árfolyam szorosan követi a fundamentális értéket, mert a nagy számú fundamentális
kereskedő a fundamentum felé húzza az árat. Az árdiszlokáció kilengései ekkor kicsik.
A jobb oldalon az árfolyam rendszeresen és jelentősen eltér a fundamentális értéktől.
Ezek a kilengések a nagy számú trendkövető kereskedő aktivitásának köszönhetők,
akik a trendekre felülve periodikusan buborékokat fújnak. Nemlineáris specifikáci-
ónk miatt azonban a trendkövetők korlátozott nagyságú pozíciót építhetnek csak ki,
ezért előbb utóbb a viszonylag kisszámú fundamentális kereskedő árhatása visszaté-
ríti az árat a fundamentum felé. A piaci ár erősen oszcillál, de fel nem robban.

3.3. Az invariáns eloszlások

A (3.12)-as sztochasztikus differenciálegyenlet-rendszer alapján numerikus számítás
útján jutunk el az (u, x) rendszer hosszú távú állapotát jellemző invariáns eloszlá-
sig (sűrűségfüggvényig). Az invariáns sűrűségfüggvényhez a Kolmogorov parciális
differenciálegyenlet numerikus megoldásán keresztül jutunk el (lásd Függelék A.1).
Röviden összefoglalva, ez egy Wiener-folyamat által meghajtott rendszer sűrűség-
függvényének időbeli fejlődését leíró parciális differenciálegyenlet-rendszer megoldá-
sát jelenti a véges differenciák segítségével egy rácson. Ez a módszer pontosabb,
és gyorsabban eredményre vezet, mint egy Monte Carlo szimulációból számolt ta-
pasztalati sűrűségfüggvény. A 3.2. ábrán látjuk az invariáns sűrűségfüggvényét
ugyanannak a két, karakterisztikusan eltérő piacnak, mint amiket a 3.1. ábrán is
illusztráltunk.

A bal oldali ábrán (ahol a fundamentális kereskedők dominálnak) a sűrűségfügg-
vény az $(u, x) = (0, 0)$ origó szűk környezetére koncentrálódik. Ez megfelel a 3.1.



3.2. ábra. Az invariáns sűrűségfüggvények szintvonalai a fő (nemlineáris, két dimenziós) specifikáció esetén. A paraméterek megegyeznek az 3.1. ábra paramétereivel.

ábra bal oldalának, ahol mind az árdiszlokáció, mint a trend indikátor a nulla szint környékén bolyong.

A jobb oldalon (ahol a trendkövető kereskedők dominálnak) a sűrűségfüggvény sokkal kiterjedtebb, illetve észrevehetünk egy gyenge bimodalitást is. A nagy kiterjedtség a 3.1. ábra jobb oldali trajektóriáin látható nagy kilengéseknek felel meg, míg a bimodalitás összhangban van a periodikus (bár a sztochasztika miatt zajos) felfutásokkal és zuhanásokkal.

Ezek a piaci jelenségek az egyszerűsített modellvariánsokban is tetten érhetők. Az első állításunk a linearizált, két dimenziós modell invariáns eloszlásával kapcsolatos.

1. Állítás. *A linearizált specifikáció esetén az árdiszlokáció és a trend indikátor $\mathbf{Y}(t) = (u(t), x(t))^\top$ együttes dinamikáját leíró (3.13)-es sztochasztikus differenciálegyenlet-rendszer akkor és csak akkor rendelkezik invariáns eloszlással, ha a következő feltételek együttesen teljesülnek:*

$$\beta(p_c \alpha_c - p_f \alpha_f) < \frac{1}{\tau} \quad (\text{C1})$$

$$\beta p_f \alpha_f > 0 \quad (\text{C2})$$

Továbbá, feltéve hogy (C1) és (C2) teljesül, az invariáns eloszlás kétdimenziós nor-

mális lesz az alábbi paraméterekkel.

$$\begin{aligned}
E[u_\infty] &= E[x_\infty] = 0 \\
D^2[u_\infty] &= \frac{\left(\frac{1}{\tau}\sigma_u + q_c\sigma_f\right)^\top \left(\frac{1}{\tau}\sigma_u + q_c\sigma_f\right) + q_f\frac{1}{\tau}\sigma_u^\top\sigma_u}{2q_f\frac{1}{\tau}\left(q_f + \frac{1}{\tau} - q_c\right)}, \\
COV[u_\infty, x_\infty] &= \frac{\left(q_c - \frac{1}{\tau}\right)\sigma_f^\top\sigma_f + \frac{1}{\tau}\sigma_s^\top\sigma_s}{2\frac{1}{\tau}\left(q_f + \frac{1}{\tau} - q_c\right)}, \\
D^2[x_\infty] &= \frac{q_f\sigma_f^\top\sigma_f + \frac{1}{\tau}\sigma_s^\top\sigma_s}{2\frac{1}{\tau}\left(q_f + \frac{1}{\tau} - q_c\right)},
\end{aligned}$$

ahol $\sigma_u = \sigma_s - \sigma_f$, $q_j = \beta p_j \alpha_j$, $j \in \{f, c\}$. Az $\mathbf{Y}_\infty = (u_\infty, x_\infty)^\top$ jelölést használjuk arra a gauss-i valószínűségi változóra, melyhez $\mathbf{Y}(t)$ eloszlásban konvergál.

Bizonyítás. Lásd Függelék A.2. □

Az 1. állítás (C1) feltétele – egyfajta stabilitási kritériumként – azt mutatja meg, hogy ha a trendkövető kereskedők elég erősek (a $p_c\alpha_c$ relatív erejük elég nagy), akkor a piacot olyan mértékben destabilizálják, hogy a piaci indikátorok még invariáns (határ-) eloszlással sem rendelkeznek. Ez egy trajektória mentén azt jelenti, hogy ha a trendkövetők elég erősek, akkor egy soha nem kidurranó buborékot fújnak. Ez a jelenség a linearizált modell velejárója – a fő specifikációban a trendkövetők túlkereslete a $\tanh(x)$ függvénnyel kerül tompításra, így ott nem alakulhat ki permanens buborék. Az állítás (C2) feltétele azt jelenti, hogy ha egyáltalán nincsenek a piacon fundamentális kereskedők, akkor nincs árhatás ami a fundamentumhoz visszahúzná az árfolyamot, így az $u(t)$ árdiszlokáció egyszerű bolyongásként viselkedik, melynek nincs határeloszlása.

Az 1. állítás második részében a momentumok nevezőjében a (C1) feltételre emlékeztető $\beta p_f \alpha_f + \frac{1}{\tau} - \beta p_c \alpha_c$ mennyiség szerepel. A gauss-i sűrűségfüggvény kiterjedtsége tehát annak a függvénye, hogy a piac mennyire van közel a (C1) stabilitási határhoz.

A következő állításunk az egydimenziós, nemlineáris specifikáció invariáns eloszlására vonatkozik. Ebben a specifikációban a trendkövetők túlkereslete korlátos, így

mindig lesz invariáns eloszlás, amely azonban a gaussianál izgalmasabb karakterisztikájú.

2. Állítás. *Az egydimenziós nemlineáris specifikáció esetén, a trend indikátor dinamikáját leíró (3.14)-es sztochasztikus differenciálegyenlet mindig rendelkezik invariáns eloszlással. Az invariáns sűrűségfüggvény:*

$$f_{\infty}(x) = C \left(\cosh \left(\frac{x}{x^*} \right) \right)^{\frac{2\beta p_c \alpha_c (x^*)^2}{\sigma_s \sigma_s^{\top}}} \exp \left(-\frac{\frac{1}{\tau} + \beta p_f \alpha_f}{\sigma_s^{\top} \sigma_s} x^2 \right), \quad (3.15)$$

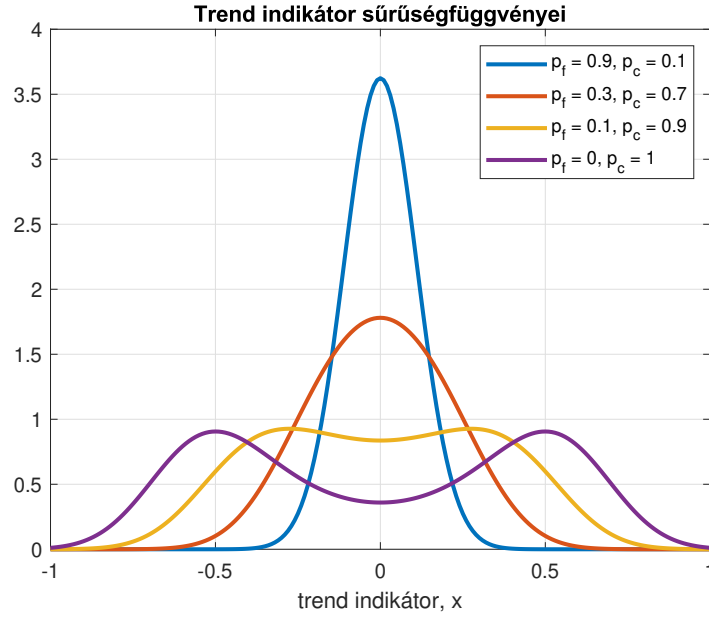
ahol $C > 0$ egy megfelelő normalizáló konstans.

Bizonyítás. Lásd Függelék A.2. □

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy ha a (3.15) egyenletben a \cosh tényező kitevője éppen egységnyi, akkor a sűrűségfüggvény egy szimmetrikus, kevert normális eloszlást ír le. Ennek belátására gondoljuk meg, hogy $\cosh(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} \right)$.

A 3.3. ábrán néhány jellegzetes sűrűségfüggvényt mutatunk be. A görbék úgy követik egymást, ahogy a trendkövetők populációja fokozatosan növekszik a fundamentális kereskedők kárára. A kék sűrűségfüggvény egy érett piacra jellemző, ahol többségben vannak a fundamentális kereskedők (jellemző trajektóriát lásd az 3.1. ábra bal oldalán). A piaci indikátor ekkor kis varianciájú és egymóduszú, jellegét tekintve közel gaussi. A sárga sűrűségfüggvény esetén többségben vannak a trendkövetők (erre a piacra jellemző trajektóriát lásd az 3.1. ábra jobb oldalán). Ekkor a trend indikátor jóval nagyobb varianciájú, és kétmóduszú. A piros görbe egy köztes állapotot ábrázol, míg a lila egy extrém piacot ír le, ahol csak trendkövetők kereskednek.

A 3.2. és 3.3. ábra üzenete hasonló. A kereskedők aránya szerint a kék görbe megfelel a 3.2. ábra bal oldalának, a sárga görbe pedig a jobb oldalának. Érdekes, hogy a modellünk a fundamentális értékfolyamat specifikációjától függetlenül eredményezhet egy- vagy többmóduszú eloszlásokat is. Az egydimenziós specifikáció esetén analitikusan is vizsgálhatjuk a kétmóduszúság megjelenését: a két módusz akkor jelenik meg, amikor a (3.15)-os sűrűségfüggvény nullabeli második deriváltja negatívból pozitívba vált. Ebből adódik a következő



3.3. ábra. A trend indikátor invariáns sűrűségfüggvénye az egydimenziós, nemlineáris specifikáció esetén ((3.15)-ös egyenlet) különböző populációs arányok mellett. A – populációs arányokon kívüli – paraméterek megegyeznek az 3.1. ábrában használtakkal.

3. Állítás. A (3.14)-os SDE által definiált egydimenziós, nemlineáris specifikáció esetén az $x(t)$ trend indikátor invariáns eloszlása egymódusú, ha:

$$\beta (p_c \alpha_c - p_f \alpha_f) < \frac{1}{\tau}. \quad (C3)$$

Bizonyítás. Lásd Függelék A.2. □

A (C3)-as feltétel azt mutatja, hogy a trend indikátor akkor mutat kétmódusú viselkedést, amikor a trendkövető (technikai) kereskedők dominálnak a piacon a fundamentális kereskedőkkel szemben. Vegyük észre továbbá, hogy ez a (C3)-as feltétel megegyezik az 1. állítás (C1) stabilitási feltételével. Ez a formális egyezés azt sugallja, hogy a nemlineáris modellben megjelenő kétmódusú invariáns eloszlás tulajdonképpen az instabilitásnak egy enyhébb formája.

Amíg a fundamentális kereskedők vannak túlsúlyban, addig a visszahúzó hatá-

sukkal stabilizálják a piacot, erős trendek nem alakulnak ki. Amennyiben a trendkövetők piaci ereje túllép egy kritikus értéket, úgy kialakulnak a feltételei egy öngerjesztő buborékfújásnak. Lineáris specifikáció mellett nincs ami gátat szabjon a trendkövetők buborékgerjesztésének, a piac felrobban. Ilyenkor invariáns eloszlás nem alakul ki. A nemlineáris specifikáció erős kialakult trend esetén is gátat szab a trendkövető kereskedők túlkeresletének, és ezzel a buboréknak. Ilyenkor az árfolyam közepes erősségű emelkedő és csökkenő trendek zajos, kvázi-periodikus sorozata lesz.

3.4. Empirikus eredmények

Az előző fejezetben láttuk, hogy az egyszerűsített (egydimenziós, nemlineáris) modellben az $x(t)$ trend indikátor eloszlása karakterisztikusan különböző lehet (lásd 3.3. ábra). Most megvizsgáljuk, hogy ennek a mennyiségnek az eloszlása hogyan alakul két valós pénzügyi termék esetén. Első példánk az SP500 részvényindex, ami az empirikus munkákban elterjedt választás. Ez egy érett piacot reprezentál, ahol a valós fundamentális érték becslésével rengetegen foglalkoznak (például Abarbanell és Bushee (1998) és Richardson és tsai. (2010)), ennek megfelelően a fundamentális kereskedési stratégia súlya jelentős a technikaihoz képest. A másik végletet a Bitcoin árfolyamán keresztül vizsgáljuk. Ezen a piacon vitatott és nehezen mérhető a termék fundamentális értéke (Cheah és Fry (2015) például amellett érvel, hogy a Bitcoin fundamentális értéke nulla, míg Hayes (2019) határkölség alapú modellje annak több ezer dolláros értékével is összhangban van), ezért úgy gondoljuk, hogy itt a technikai elemzők dominálnak.

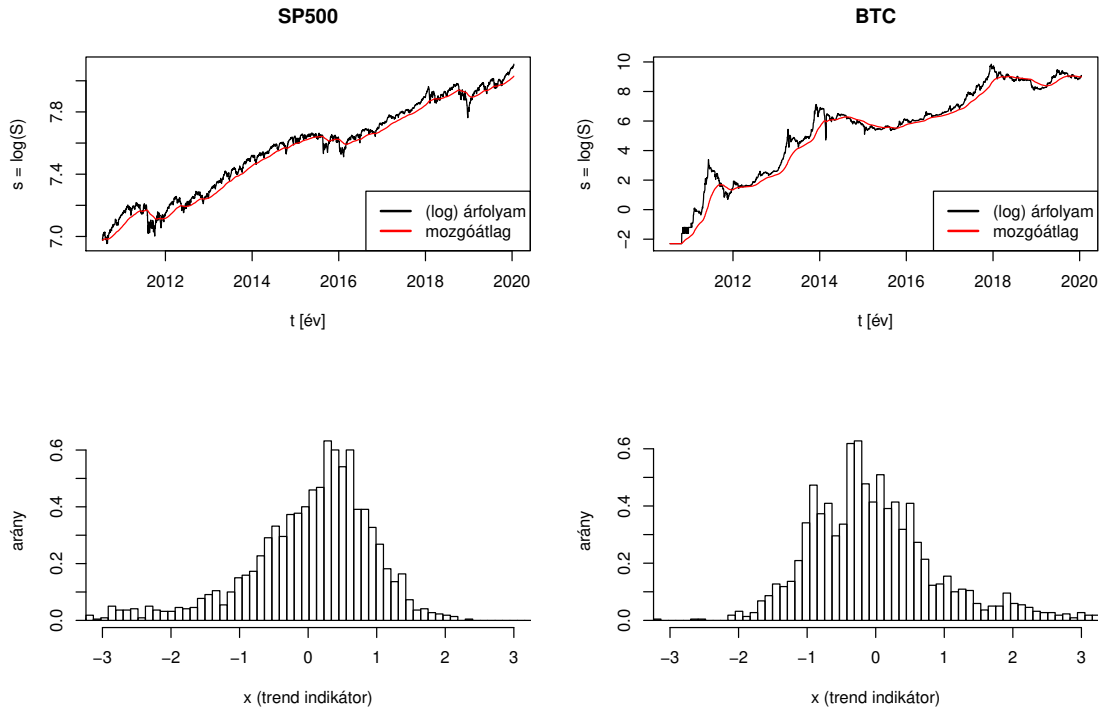
Mindkét idősor esetén napi záróárfolyamokat használtunk. Az adatsorok egységesen 2010.07.19-én indulnak és 2020.01.16-ig tartanak. Összhangban az elméleti modellünkkel, kiszámítottuk az árfolyamok $s(t) = \log(S(t))$ logaritmusát, majd ezek mozgóátlagát. A mozgóátlagképzéshez mindkét idősor esetén az (2.3) egyenlet diszkrétizált alakját használtuk:

$$m(t + \Delta t) = \left(1 - \frac{1}{\tau}\Delta t\right) m(t) + \frac{1}{\tau}s(t)\Delta t$$

ahol $\Delta t = 1$ nap, $\tau = \frac{1}{4}$ év és az $m(t)$ kezdőértékét önkényesen a kezdeti $s(t)$ -nek választottuk. Az önkényes választás hatását kiküszöböltük azzal, hogy az idősor első

egy évét nem vettük figyelembe. Végül minden napra kiszámítottuk az $x(t)$ trend indikátor értékeket (lásd (3.5)-ös egyenlet).

A 3.4. ábra mutatja empirikus eredményeinket. A bal felső blokkban az SP500 logaritmizált árfolyamát, és a számított mozgóátlagot látjuk. A jobb felső blokkban ugyanezt mutatjuk a Bitcoin esetén. Az alsó blokkokban az $x(t)$ trend indikátorok sztenderdizált empirikus sűrűségfüggvényét (hisztogramját) ábrázoljuk a két termékre.



3.4. ábra. SP500 és Bitcoin árfolyama és mozgóátlaga, illetve a trend indikátor empirikus a hisztogramjai.

Mindkét idősor erősen emelkedő volt a vizsgált időszakban, de a hosszútávú trendhez képesti kilengések a Bitcoin esetén hangsúlyosabbak, és jobban tetten érhető a kváziperiodikus mintázat. A hisztogramok is mutatják a két idősor különbségét. Az SP500 esetén egy egymódusú eloszlást látunk, ami a 3.3. ábra piros görbéjére emlékeztet. A Bitcoin hisztogramja struktúráltabb eloszlásra utal, jelleében a 3.3. ábra sárga görbéjére emlékeztet. A megfigyelt karakterisztikák a két piac esetén összhangban vannak modellünk alapján megfogalmazott várakozásaink-

kal. A javasolt statisztikai eljárás tehát alkalmas lehet arra, hogy érett, és technikai elemzők által uralt piacokat megkülönböztessünk egymástól.

3.5. A profitabilitás kérdése

Ez a szekció egy kiegészítés a Bihary és Víg (2020) tanulmányhoz. Ebben a kiegészítő pontban megvizsgáljuk a kereskedők hosszú távú profitabilitását, és ezen keresztül az ebben a fejezetben felvázolt modell egy gyengeségére hívjuk fel a figyelmet. Tegyük fel, hogy a kereskedők $t = 0$ -ban egy tetszőleges $W_j(0) > 0$ induló tőkével rendelkeznek, melyet önfinanszírozó módon befektetnek az $S(t)$ kockázatos eszközbe és egy bankbetétbe. Annak érdekében, hogy egyszerű legyen a modellünk, a befektetők $Z_j(t)$ túlkeresletét azok befektetési arányaként is értelmezzük, azaz minden t időpontban a portfóliójuk $Z_j(t)$ részét a kockázatos eszközben tartják, míg $1 - Z_j(t)$ részét bankbetétben. Felhasználva az önfinanszírozást, és feltételezve, hogy a bankbetét kamatlába $r = 0$, felírhatjuk a befektetők $W_j(t)$ vagyonának a dinamikáját:

$$dW_j(t) = Z_j(t)W_j(t) \frac{dS(t)}{S(t)} + (1 - Z_j(t))W_j(t) \cdot 0 dt = Z_j(t)W_j(t) \frac{dS(t)}{S(t)}, \quad (3.16)$$

ahol $S(t) = e^{s(t)}$. A (3.16) dinamika mögötti intuíció az, hogy az önfinanszírozó portfólió értékejlődése az egyes részek értékejlődésének összegeként adódik. Az összeg első tagjának $\frac{Z_j(t)W_j(t)}{S(t)}$ tényezője a portfólióban lévő részvények darabszámával egyenlő, majd erre szorzunk rá $dS(t)$ -vel, azaz a részvény pénzbeli értékének megváltozásával. Az összeg második tagjának $(1 - Z_j(t))W_j(t)$ tényezője azzal egyenlő, hogy mennyi pénz van ekkor bankbetétben, majd ez kamatozik a feltételezett $r = 0$ rátával.

A befektetők profitabilitását azok hosszú távú várható loghozamával azonosítjuk:

$$\Pi_j = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{\log W_j(T) - \log W_j(0)}{T} \right], \quad (3.17)$$

A linearizált specifikáció esetén (3.17) analitikus eredményekkel tudunk szolgálni a profitabilitásra:

4. Állítás. *Tegyük fel, hogy a linearizált modell – azaz amelyet a (3.13) lineáris*

két dimenziós dinamika ír le – esetén (C1) és (C2) is fennáll. Tegyük fel továbbá, hogy a befektetők vagyona a (3.16) önfinanszírozó dinamikának megfelelően fejlődik. Ekkor a befektetők (3.17) profitabilitása:

$$\begin{aligned}\Pi_f &= \beta p_f \alpha_f^2 E[u_\infty^2] - \beta p_c \alpha_c \alpha_f E[u_\infty x_\infty] - \alpha_f^2 \frac{\boldsymbol{\sigma}_s^\top \boldsymbol{\sigma}_s}{2} E[u_\infty^2] \\ \Pi_c &= \beta p_c \alpha_c^2 E[x_\infty^2] - \beta p_f \alpha_f \alpha_c E[u_\infty x_\infty] - \alpha_c^2 \frac{\boldsymbol{\sigma}_s^\top \boldsymbol{\sigma}_s}{2} E[x_\infty^2] \\ \Pi_i &= 0\end{aligned}$$

Bizonyítás. Lásd Függelék A.2. □

A 4. állításban felírt profitok segítségével felírhatjuk a fundamentális és a trendkövető kereskedő hosszú távú profitjának különbségét:

$$\begin{aligned}\Pi_f - \Pi_c &= \frac{\boldsymbol{\sigma}_s^\top \boldsymbol{\sigma}_s}{2} (\alpha_c^2 E[x_\infty^2] - \alpha_f^2 E[u_\infty^2]) + (p_f - p_c) \beta \alpha_f \alpha_c E[u_\infty x_\infty] + \\ &\quad + \beta (p_f \alpha_f^2 E[u_\infty^2] - p_c \alpha_c^2 E[x_\infty^2])\end{aligned}\quad (3.18)$$

Bár nem szabad elfelejteni, hogy maguk a momentumok is függnak a p_f és p_c populációs arányoktól, az elsőrendű hatásokat (3.18) esetén megvizsgálva az látszik, hogy

$$\frac{\partial (\Pi_f - \Pi_c)}{\partial (p_f - p_c)} > 0$$

azaz annak a kereskedőnek lesz hosszú távon nagyobb profitja a kettő közül, amelyik erősebb jelenléttel bír a piacon. Ez azért sajnálatos, mert ha a kereskedők populációs arányát endogénné tennénk úgy, hogy a vagyonarányukkal azonosítjuk, akkor egy olyan modellt kapnánk, amelyikben hosszú távon az egyik kereskedő végérvényesen dominánssá válna a másikkal szemben. Azaz a modellben hosszú távon még statisztikai értelemben sem tud kialakulni egyensúly a két releváns kereskedő típus között – egy versenyző piacon az egyik akár végérvényesen kiszoríthatja a másikat.

Kérdés, hogy milyen realiztikus piaci hatás teremtheti meg az egyensúlyt a különböző stratégiát követő szereplők között. A következő fejezet célja egyrészt egy

általánosabb piaci modell felírása, másrészt kísérletet teszünk egy olyan modell felírására, ahol realisztikus verseny alakul ki a kereskedők között. Egy olyan modellt fogunk felírni, amelyben a populációs arányokat endogenizáljuk, és egy – a volatilitásban megjelenő – új hatásnak köszönhetően hosszú távon kialakul az egyensúly a kereskedők között.

4. fejezet

Piaci heterogenitás és endogén volatilitás

Ennek a fejezetnek az a célja, hogy egy olyan modellt vázoljunk fel, amely megoldást nyújt az előző fejezet végén tárgyalt, hosszú távú profitabilitással kapcsolatos problémára. Egy olyan új, realiztikus hatást fogunk megjeleníteni az előző modellhez képest, amely „bünteti” azt a kereskedőt, amelyik dominánssá válik a piacon.

Ebben a fejezetben szakítunk a heterogén ágens irodalomban szokásos konstans volatilitással, és azt feltételezzük, hogy az aktív kereskedésből fakadó piaci kereslet-kínálati egyensúlytalanság megjelenik közvetlenül a volatilitásban is; minél nagyobb a pillanatnyi egyensúlytalanság, annál nagyobb a volatilitás is. Ez az endogén volatilitás hatás megoldja az előző fejezetben megjelenő problémát: egyik kereskedő sem tud a másik felett hosszú távon végérvényesen elhatalmasodni. A sztochasztikus volatilitásnak köszönhetően továbbá a hozamok eloszlása vastag szélű lesz, amely alapvető elvárás és üdvözlendő egy sztochasztikus pénzügyi modell esetén.

Az endogén volatilitás hatáson kívül ebben a fejezetben több ponton is egy jóval általánosabb modellkeretet tárgyalunk az előző fejezethez képest. A piacon több kockázatos eszközt is megengedünk. A kereskedők piaci súlyát a vagyonarányokkal azonosítjuk, melyek így maguk is a kereskedők stratégiájától és a kockázatos eszközök áralakulásától függő sztochasztikus folyamatok lesznek. Továbbá a kereskedőket befektetési alapokként kezeljük, és így új hatásként megengedjük, hogy a mögöttes befektetők átcsoportosítsák a vagyonukat a különböző alapok között.

A fejezet végén részletesen vizsgálni az általános modell egy nagyon speciális esetét fogjuk csak. Az általános modell felírása ezért akár öncélúnak, fölöslegesen bonyolultnak is tűnhet. Véleményünk szerint azonban az általános modellnek önmagában is van értéke. Egyrészt egy sokdimenziós sztochasztikus dinamikai rendszer felírása nem triviális modellezési feladat. Másrészt egyértelművé válik, hogy az általános modellben egy-egy függvényválasztással vagy endogenizálással milyen további érdekes hatások válhatnak vizsgálhatóvá egy későbbi kutatás során.

A fejezet szerkezete a következő. A 4.1. szakasztól kezdve ismertetjük az általános modellt. A 4.5. szakasztól kezdve az általános modell egy szűk specifikációjának, a trend követő és az indexkövető versenyének eredményeit ismertetjük.

4.1. A piaci súly dinamikája

A következőkben a piaci súly (piaci erő) dinamikáját írjuk fel a legáltalánosabb esetben. A modell alap gondolata az, hogy a piaci súlyt a befektetési alapok vagyona arányával azonosítjuk. Az alapok vagyonszerződései forrásai a következők: a portfólióban tartott eszközök értékváltozása, az alapkezelési költség, illetve az ügyfelek (mögöttes befektetők) vagyonszerződései az alapok között.

Legyen a piacon $n + 1$ darab kereskedhető eszköz, ezeket i -vel indexeljük. A 0. sorszámú termék a bankbetét, melynek t időpontbeli kamata $r(t)$. A kockázatos eszközök pénzbeli („dollár”) értékét jelölje $\mathbf{S}(t) = (S_1(t), \dots, S_n(t))^T$, illetve ezek megváltozását $d\mathbf{S}(t) = (dS_1(t), \dots, dS_n(t))^T$. A kockázatos eszközök infinitezimális idő alatti effektív hozamát jelölje $dR_i(t) = \frac{dS_i(t)}{S_i(t)}$. Mivel $dS_i(t) = S_i(t) dR_i(t)$, ezért azt mondhatjuk, hogy az i sorszámú kockázatos eszköz értékének folyamata az R_i folyamat Doléans-Dade exponenciálisa¹, továbbá

$$d\mathbf{R}(t) = [\text{diag}(\mathbf{S}(t))]^{-1} d\mathbf{S}(t) = \begin{pmatrix} S_1(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & S_n(t) \end{pmatrix}^{-1} \cdot d\mathbf{S}(t)$$

A $dR_i(t) = \frac{dS_i(t)}{S_i(t)}$ effektív hozamokat is fogjuk később explicit módon modellezni, egyelőre ezt azonban nem tesszük meg.

¹Szokásos jelöléssel: $S_i = \mathcal{E}(R_i)$.

Legyen a piacon m darab befektetési alap, akiket j -vel indexelünk. Egy befektetési alap stratégiájának nevezzük a $\mathbf{Z}_j : \Omega \times [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}(t)$ -mérhető sztochasztikus folyamatot. A $\mathbf{Z}_j(t) = (Z_{j,1}(t), \dots, Z_{j,n}(t))^\top$ oszlopvektor i -edik komponense azt jelöli, hogy a j befektetési alap a kezelt vagyonának hanyad részét fekteti az i -edik eszközbe. Első olvasatra észszerűnek tűnhet azzal a megkötéssel élni, hogy $\mathbf{Z}_j(t)$ komponensei 1-re összegződnek. Nem élünk azonban ezzel a feltevessel, hanem azt mondjuk, hogy ami vagyont az alap nem a kockázatos eszközök egyikébe fektet, azt definíció szerint a bankbetétbe helyezi el; azaz $Z_{j,0}(t) = 1 - \mathbf{1}^\top \mathbf{Z}_j(t)$, ahol $\mathbf{1}$ a megfelelő hosszúságú összegző oszlopvektort jelöli. Érdemes azt is hangsúlyozni, hogy $\mathbf{Z}_j(t)$ bármely komponense, illetve $Z_{j,0}(t)$ is bármilyen valós értéket felvehet, azaz feltesszük, hogy minden eszköz korlátlanul osztható, és megengedjük a shortolást, illetve a tőkeáttételes pozíciókat is.

Jelölje a j befektetési alap befektetési jegyének árfolyamát $V_j(t)$. A befektetési jegy értékének százalékos megváltozása az eddigiek értelmében:

$$\begin{aligned} \frac{dV_j(t)}{V_j(t)} &= \mathbf{Z}_j^\top(t) d\mathbf{R}(t) + (1 - \mathbf{Z}_j^\top(t)\mathbf{1}) r(t) dt - c_j(t) dt, \\ \frac{dV_j(t)}{V_j(t)} &= r(t) dt + \mathbf{Z}_j^\top(t) (d\mathbf{R}(t) - r(t)\mathbf{1} dt) - c_j(t) dt, \end{aligned} \quad (4.1)$$

ahol $c_j(t) \geq 0$ a j befektetési alap alapkezelési költségét jelöli, amit a kezelt vagyon adott százalékában számol fel. A (4.1) egyenlet írja le a befektetési alap kezelt vagyon értékváltozásának *passzív* forrását, hiszen az egyenlet jobb oldalán piaci hozam jellegű mennyiségek (a kockázatos eszközök hozama $d\mathbf{R}(t)$ és a bankbetét kamata $r(t)$), illetve olyan mennyiségek szerepelnek, amelyek közvetlenül a befektetési alap döntéskörébe tartoznak (a stratégia $\mathbf{Z}_j(t)$ és az alapkezelési költség $c_j(t)$). Így a (4.1) egyenlet valójában a 2.6.1 fejezet *passzív vagyonfejlődését* leíró (2.12) egyenlet analógja.

Jelölje a befektetési alapok kezelt vagyonát $\mathbf{W}(t) = (W_1(t), \dots, W_m(t))^\top$, míg a piaci súlyokat (vagyonarányokat) $\mathbf{p}(t) = (p_1(t), \dots, p_m(t))^\top$, ahol

$$p_j(t) = \frac{W_j(t)}{\mathbf{1}^\top \mathbf{W}(t)}, \quad \forall j = 1, \dots, m \quad (4.2)$$

Mivel $W_j(t) > 0$ minden j -re és t -re, ezért $p_j(t) \in (0, 1)$ minden j -re és t -re.

A kezelt vagyon exogén változását az okozza, hogy az ügyfelek (mögöttes befektetők) a különböző alapok között mozgatják a befektetésüket. Ennek egy egyszerű modelljét tárgyaltuk a 2.6.2 fejezetben *aktív vagyonátcsoportosítás* néven. A befektetések átcsoportosítására vonatkozó döntést az alapok megfigyelt teljesítménye vezérli. Feltesszük, hogy minden t időpillanatban minden j befektetési alap $W_j(t)$ kezelt vagyona $\kappa(t) \geq 0$ intenzitással elszivárog (azaz infinitezimális értelemben $\kappa(t)W_j(t) dt$ dollár), és a befektetők potenciálisan egy másik befektetési alapkezelőhöz csoportosítják azt át. Bár a $\kappa(t)$ átcsoportosítási intenzitás lehetne akár befektetésialap-függő is, itt most úgy gondolunk rá, mint a piac egészét jellemző paraméter, ami azt mutatja meg, hogy a befektetők sokasága átlagosan milyen intenzitással gondolkodik el azon, hogy a vagyonát egyik befektetési alaptól a másikbaallokálva át. Ennek megfelelően tehát $\kappa(t)\mathbf{1}^\top \mathbf{W}(t) dt$ dollárnyi kezelt vagyon oszlik szét a befektetési alapok között valamilyen $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_m(t))^\top$ – azaz befektetésialap-függő – arányszámok szerint, amelyekre minden t és j esetén teljesül, hogy $q_j(t) \geq 0$ és $\mathbf{1}^\top \mathbf{q}(t) = 1$. A $\mathbf{q}(t)$ arányszámok valamilyen teljesítménymutatótól függnnek, amit ezen a ponton nem modellezünk. Jelölje $dN_j(t)$ a j befektetési alap t időpontbeli vagyonváltozását, amely az aktív vagyonátcsoportosításból fakad. A (2.14) egyenlet analógjaként kapjuk tehát formálisan:

$$\begin{aligned} dN_j(t) &= -\kappa(t)W_j(t) dt + q_j(t)\kappa(t)\mathbf{1}^\top \mathbf{W}(t) dt = \kappa(t) [q_j(t)\mathbf{1}^\top \mathbf{W}(t) - W_j(t)] dt \\ dN_j(t) &= \kappa(t)\mathbf{1}^\top \mathbf{W}(t) [q_j(t) - p_j(t)] dt \\ dN_j(t) &= W_j(t)\kappa(t) \left(\frac{q_j(t)}{p_j(t)} - 1 \right) dt \end{aligned} \tag{4.3}$$

$dN_j(t)$ előjeles (infinitezimális) mennyiség; előjele $q_j(t) - p_j(t)$ előjelével egyezik meg. Azt is észrevehetjük, hogy ez a dinamika inherens módon középre húzó: ha a j befektetési alap $p_j(t)$ piaci súlya kicsi, akkor még egy viszonylag kicsi, de $p_j(t)$ -nél nagyobb $q_j(t)$ arányszám is pozitív egyenlegű vagyonátcsoportosítást jelent. Nem tud azonban a folyamat „elszállni”. Míg $q_j(t) = 1$ minden t -re nyilván pozitív egyenlegű vagyonátcsoportosítást jelent a j befektetési alap számára, ahogy egyre több vagyon akkumulálódik nála, úgy $p_j(t)$ is nő, és így $dN_j(t)$ egyre kisebb és végül zérus lesz, ahogy $p_j(t)$ 1-hez közeledik. Érdemes azt is meggondolni, hogy a (4.3) egyenlet korrekt abban az értelemben is, hogy pénz nem vész el és nem is termelődik

a rendszerben, azaz $\sum_{j=1}^m dN_j(t) = 0$, hiszen

$$\sum_{j=1}^m dN_j(t) = \kappa(t) \mathbf{1}^\top \mathbf{W}(t) [\mathbf{1}^\top \mathbf{q}(t) - \mathbf{1}^\top \mathbf{p}(t)] dt = 0,$$

ahol felhasználtuk, hogy $\mathbf{1}^\top \mathbf{q}(t) = \mathbf{1}^\top \mathbf{p}(t) = 1$.

A j befektetési alap $W_j(t)$ kezelt vagyonának a megváltozása a passzív vagyonfejlődés és az aktív vagyonátcsoportosítás összegeként adódik, figyelembe véve, hogy a passzív vagyonfejlődést (4.1) százalékos értelemben, míg az aktív vagyonátcsoportosítást (4.3) dollár értelemben írtuk fel:

$$\begin{aligned} dW_j(t) &= W_j(t) \frac{dV_j(t)}{V_j(t)} + dN_j(t) \\ dW_j(t) &= W_j(t) [\mathbf{Z}_j^\top(t) d\mathbf{R}(t) + (1 - \mathbf{1}^\top \mathbf{Z}_j(t)) r(t) dt - c_j(t) dt] + \\ &\quad + \kappa(t) \mathbf{1}^\top \mathbf{W}(t) [q_j(t) - p_j(t)] dt \\ \frac{dW_j(t)}{W_j(t)} &= \mathbf{Z}_j^\top(t) d\mathbf{R}(t) + (1 - \mathbf{1}^\top \mathbf{Z}_j(t)) r(t) dt - c_j(t) dt + \kappa(t) \left(\frac{q_j(t)}{p_j(t)} - 1 \right) dt \end{aligned} \quad (4.4)$$

Miután a kezünkben van a j befektetési alap $W_j(t)$ vagyonának dinamikája, a piaci súly (4.2)-beli definíciója és Itô lemmája alapján felírhatjuk a j befektetési alap piaci súlyának dinamikáját. Ehhez először vezessük be a $\mathbf{Z}(t)$ jelölést arra a mátrix értékű sztochasztikus folyamatra, amelyet úgy kapunk, hogy a $j = 1, \dots, m$ befektetési alapok $\mathbf{Z}_j^\top(t)$ befektetési arányait egymás alá írjuk, azaz

$$\mathbf{Z}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1^\top(t) \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_m^\top(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{1,1}(t) & \dots & Z_{1,n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{m,1}(t) & \dots & Z_{m,n}(t) \end{pmatrix},$$

ahol $\mathbf{Z}(t)$ minden t időpontban egy $\mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix. Jelölje továbbá $\langle \mathbf{R} \rangle(t)$ mátrix értékű folyamat az \mathbf{R} folyamat kvadratikus variációját, illetve $d\langle \mathbf{R} \rangle(t)$ ennek megváltozását. Ennek a mátrix értékű sztochasztikus folyamatnak a (i, k) eleme az \mathbf{R}

folymat i és k komponenseinek kereszt-kvadratikus variációjával egyenlő:

$$d\langle \mathbf{R} \rangle(t) = \begin{pmatrix} d\langle R_1, R_1 \rangle(t) & \dots & d\langle R_1, R_n \rangle(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d\langle R_n, R_1 \rangle(t) & \dots & d\langle R_n, R_n \rangle(t) \end{pmatrix}$$

Ezekkel a jelölésekkel fel tudjuk írni a j befektetési alap piaci súlyának dinamikáját a (4.2) egyenlet Itô-differenciálásával:

$$\begin{aligned} dp_j(t) &= d\left(\frac{W_j}{\mathbf{1}^\top \mathbf{W}}\right)(t) \\ dp_j(t) &= p_j(t) (\mathbf{Z}_j^\top(t) - \mathbf{p}^\top(t) \mathbf{Z}(t)) (d\mathbf{R}(t) - r(t) \mathbf{1} dt) - p_j(t) (c_j(t) - \mathbf{p}^\top(t) \mathbf{c}(t)) dt \\ &\quad + \kappa(t) (q_j(t) - p_j(t)) dt - p_j(t) (\mathbf{Z}_j^\top(t) - \mathbf{p}^\top(t) \mathbf{Z}(t)) d\langle \mathbf{R} \rangle(t) \mathbf{Z}^\top(t) \mathbf{p}(t) \\ dp_j(t) &= p_j(t) [\mathbf{Z}_j^\top(t) - \mathbf{p}^\top(t) \mathbf{Z}(t)] [d\mathbf{R}(t) - r(t) \mathbf{1} dt - d\langle \mathbf{R} \rangle(t) \mathbf{Z}^\top(t) \mathbf{p}(t)] \\ &\quad - p_j(t) [c_j(t) - \mathbf{p}^\top(t) \mathbf{c}(t)] dt + \kappa(t) [q_j(t) - p_j(t)] dt \end{aligned} \quad (4.5)$$

A (4.5) egyenlet első – három tényezős – tagja (Hofbauer és Sigmund, 1998) replikátor dinamikájának egy pénzügyi piacokra felírt specifikációja. Az idézett műhöz képest a sztochasztikus kiterjesztés pedig tekinthető (Cabrales, 2000) sztochasztikus replikátor dinamikája egy specifikációjának. Az első tag első tényezője $p_j(t)$: a saját populációs aránnyal vett skálázás egy tipikus jellemzője a replikátor dinamikának. Az első tag második, $[\mathbf{Z}_j(t) - \mathbf{p}^\top(t) \mathbf{Z}(t)]$ tényezője szemléletes tartalmú: ez a j befektetési alap portfólióvektorának különbsége a piaci átlagos portfólióvektorhoz képest. A harmadik tényező egyrészt a $d\mathbf{R}(t) - r(t) \mathbf{1}$ piaci hozamprémiumból áll, illetve a sztochasztikus dinamikának köszönhetően megjelenik a kvadratikus variációból eredő $d\langle \mathbf{R} \rangle(t) \mathbf{Z}^\top(t) \mathbf{p}(t)$ piaci súlyarányokkal súlyozott drift-tag.

Később sokat fogjuk vizsgálni a (4.5) dinamika egy olyan speciális esetét, ahol mindössze $m = 2$ befektetési alap van. Ekkor valójában egyetlen egyenlet leírja a vagyonarányok alakulását, hiszen $p_2(t) = 1 - p_1(t)$, illetve $q_2(t) = 1 - q_1(t)$. Így ezen változók esetén el is hagyhatjuk a j alsó indexet, azaz legyen $p_1(t) = 1 - p_2(t) = p(t)$, illetve $q_1(t) = 1 - q_2(t) = q(t)$. Ezekkel a jelölésekkel $m = 2$ esetben a vagyonarány

dinamikája a következő lesz:

$$dp(t) = p(t)(1 - p(t))(\mathbf{Z}_1(t) - \mathbf{Z}_2(t))^\top (d\mathbf{R}(t) - r(t)\mathbf{1} dt - d\langle \mathbf{R} \rangle(t)\mathbf{Z}^\top(t)\mathbf{p}(t)) \\ - p(t)(1 - p(t))(c_1(t) - c_2(t)) dt + \kappa(t)(q(t) - p(t)) dt \quad (4.6)$$

A (4.6) egyenletben több érdekes motívum is megjelenik. Egyrészt előbukkan a $p(t)(1 - p(t))$ szorzat, ami $p(t)$ -nek egy olyan kvadratikus függvénye, amelynek maximuma $p(t) = \frac{1}{2}$ -ben van, és $p(t) = 0$ vagy $p(t) = 1$ esetén is nulla az értéke. Ez egyrészt utal arra, hogy a vagyonarány akkor változik leggyorsabban, amikor a két befektetési alap egyenrangú (azaz $p(t) \approx \frac{1}{2}$), másrészt azt is mutatja, hogy a $p(t)$ folyamat nem tudja elhagyni a $(0, 1)$ intervallumot

Következő jellegzetesség, hogy megjelenik a két szereplő portfólióvektorainak a $(\mathbf{Z}_1(t) - \mathbf{Z}_2(t))$ különbsége a piaci hozam jellegű mennyiségek $(d\mathbf{R}(t) - \dots)$ szorzótényezőjeként. Ez intuitív, hiszen ha például egy eszköz hozama pozitív, akkor nyilván annak a befektetési alapnak fog nőni a vagyonaránya, amelyik nagyobb pozíciót vett fel az eszközben. Hasonlóan megjelenik az alapkezelési költségek $(c_1(t) - c_2(t))$ különbsége, amely szintén intuitív, hiszen – egyedül ezt a hatást figyelembe véve – annak a befektetési alapnak csökken a vagyonaránya, amelyik nagyobb alapkezelési költséggel dolgozik.

A $p(t)$ folyamat esetén bizonyos esetekben kényelmetlenséget okoz az, hogy természetéből fakadóan nem léphet ki a $(0, 1)$ intervallumból. Ez egyrészt az ábrázolás szempontjából problémás, hiszen a nulla és az egy közelében kis megváltozás is valószínűleg sokat jelent egyik vagy másik szereplőnek, másrészt numerikus szempontból is nehezséget okozhat az, hogy egy folyamat csak korlátozott intervallumban mozoghat. Ezeket a problémákat orvosolandó vezessük be az $m = 2$ esetben a $p(t)$ folyamatnak a logit-transzformáltját:

$$y(t) = \log \left(\frac{p(t)}{1 - p(t)} \right) \iff p(t) = \frac{1}{1 + e^{-y(t)}}$$

A logit függvény egy szigorúan monoton növekvő, páratlan függvény, amely a $(0, 1)$ intervallumból képez \mathbb{R} -be. Az $y(t)$ folyamat így $p(t)$ -hez hasonlóan értelmezhető abban az értelemben, hogy az 1-es számú befektetési alapnak akkor nagy a piaci súlya, ha $y(t)$ nagy, illetve akkor kicsi, ha $y(t)$ kicsi. Továbbra is igaz az, hogy

$m = 2$ esetén egyetlen $y(t) = y_1(t)$ folyamattal leírható a populációs dinamika, hiszen a $p_1(t) + p_2(t) = 1$ összefüggéshez hasonlóan itt az $y_1(t) + y_2(t) = 0$ áll fenn, melyből az is következik, hogy a természetes „közepe” a folyamatnak az $\frac{1}{2}$ helyett a nulla lesz. Itô lemmája alapján a logit dinamikája:

$$\begin{aligned} dy(t) &= \frac{1}{p(t)(1-p(t))} dp(t) + \frac{1}{2} \frac{2p(t) - 1}{(p(t)(1-p(t)))^2} d\langle p \rangle(t) \\ dy(t) &= (\mathbf{Z}_1^\top(t) - \mathbf{Z}_2^\top(t)) (d\mathbf{R}(t) - r(t)\mathbf{1} dt) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\mathbf{Z}_1^\top(t) d\langle \mathbf{R} \rangle(t) \mathbf{Z}_1(t) - \mathbf{Z}_2^\top(t) d\langle \mathbf{R} \rangle(t) \mathbf{Z}_2(t)) \\ &\quad - (c_1(t) - c_2(t)) dt + \kappa(t) \frac{q(t) - p(t)}{p(t)(1-p(t))} dt \end{aligned} \quad (4.7)$$

Szembetűnő, hogy a logit valóban egy természetes transzformáltja a $p(t)$ vagyonarányának, mert a (4.7) egyenletben a jobb oldalon az első három tagban közvetlenül meg sem jelenik $y(t)$ (sem $p(t)$), azaz sikerült kitranszformálni a piaci erő hatását a dinamikából. Egyedül a negyedik, a $\kappa(t) (\dots)$ aktív vagyonátcsoportosítási tagban jelenik meg továbbra is közvetlenül a piaci erő hatása a $p(t)$ -n keresztül. Egy érdekes megfigyelést tehetünk továbbá, ha felírjuk a $V_j(t)$ befektetési jegy érték logaritmusának a dinamikáját. Legyen tehát $v_j(t) = \log(V_j(t))$. Itô lemmája értelmében $dv_j(t)$ egyedül a megjelenő kvadratikus variációs tagban különbözik $\frac{dV_j(t)}{V_j(t)}$ -től:

$$\begin{aligned} dv_j(t) &= \frac{dV_j(t)}{V_j(t)} - \frac{1}{2} \frac{d\langle V_j \rangle(t)}{V_j^2(t)} \\ dv_j(t) &= r(t) dt + \mathbf{Z}_j^\top(t) (d\mathbf{R}(t) - r(t)\mathbf{1} dt) - \frac{1}{2} \mathbf{Z}_j^\top(t) d\langle \mathbf{R} \rangle(t) \mathbf{Z}_j(t) - c_j(t) dt \end{aligned} \quad (4.8)$$

A (4.7) és (4.8) dinamikákat összehasonlítva látszik, hogy $m = 2$ esetben a $p(t)$ piaci súly $y(t)$ logit transzformáltjának megváltozása egyszerűen a két befektetési alap befektetési jegy log-értékének megváltozása különbségeként adódik, plusz az aktív vagyonátcsoportosításból eredő tag:

$$dy(t) = dv_1(t) - dv_2(t) + \kappa(t) \frac{q(t) - p(t)}{p(t)(1-p(t))} dt \quad (4.9)$$

4.2. A piaci ármechanizmus

Ebben a szakaszban a kockázatos eszközök \mathbf{S} piaci árfolyamának dinamikáját fogjuk tisztázni. Legáltalánosabb modellünk az, hogy az \mathbf{S} folyamat az \mathbf{R} Itô-folyamat Doléans-Dade exponenciálisa – azaz $d\mathbf{S}(t) = \text{diag}(\mathbf{S}(t)) d\mathbf{R}(t)$ –, és így maga is Itô-folyamat. Komponensenként felírva:

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = dR_i(t) = \mu_i(t) dt + \boldsymbol{\sigma}_i^\top(t) d\mathbf{B}(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (4.10)$$

ahol $\mu_i(t)$ skalár értékű sztochasztikus folyamat az i eszköz driftje,

$$\boldsymbol{\sigma}_i(t) = (\sigma_{i,1}(t), \dots, \sigma_{i,d}(t))^\top$$

\mathbb{R}^d -dimenziós vektor értékű sztochasztikus folyamat az i eszköz volatilitásvektora, míg \mathbf{B} egy d -dimenziós sztenderd Brown-mozgást jelöl, amelynek komponensei függetlenek, $d\mathbf{B}(t)$ pedig ennek a Brown-mozgásnak a megváltozását jelöli. A teljes modell így

$$\text{diag}^{-1}(\mathbf{S}(t)) d\mathbf{S}(t) = d\mathbf{R}(t) = \boldsymbol{\mu}(t) dt + \boldsymbol{\Sigma}(t) d\mathbf{B}(t),$$

ahol $\boldsymbol{\mu}(t) = (\mu_1(t), \dots, \mu_n(t))^\top$ és $\boldsymbol{\Sigma}(t)$ úgy áll elő, hogy a $\boldsymbol{\sigma}_i^\top(t)$ sorvektorokat egymás alá írjuk, azaz

$$\boldsymbol{\Sigma}(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1^\top(t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\sigma}_n^\top(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{1,1}(t) & \dots & \sigma_{1,d}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1}(t) & \dots & \sigma_{n,d}(t) \end{pmatrix},$$

ahol $\boldsymbol{\Sigma}(t)$ minden t időpontban egy $\mathbb{R}^{n \times d}$ mátrix. Ezekkel a jelölésekkel az előző szekció szerinti \mathbf{R} folyamat kvadratikus variációjának megváltozása $d\langle \mathbf{R} \rangle(t) = \boldsymbol{\Sigma}(t) \boldsymbol{\Sigma}^\top(t) dt$ lesz.

A következőkben eszközönként írjuk fel az árdinamikát, a 2.7.1 fejezetben bemutatott *permanens egyensúlytalansági* elvnek megfelelően. Mivel a (4.10) egyenletben mind a drift, mind a volatilitás sztochasztikus, ez lehetőséget teremt arra, hogy ezekben endogén hatásokat vegyünk figyelembe. Alapfeltevésünk az, hogy a drift és a volatilitás is az adott eszköz piacán kialakult piaci egyensúlytalanság függvénye.

A piaci egyensúlytalanságot az aktív kereskedők átlagos pozíciója (kereslete) és a kínálat különbségeként definiáljuk:

$$\mathcal{D}_i(t) = \bar{Z}_i(t) - \mathcal{S}_i(t) = \sum_{j=1}^m p_j(t) Z_{j,i}(t) - \mathcal{S}_i(t) \quad (4.11)$$

ahol $\bar{Z}_i(t) = \sum_{j=1}^m p_j(t) Z_{j,i}(t)$ az i eszközben felvett átlagos pozíció nagysága, míg $\mathcal{S}_i(t)$ a pillanatnyi kínálat értéke. Hasonlóan definiált piaci egyensúlytalanságot láthatunk például Beja és Goldman (1980) vagy Chiarella és tsai. (2009) permanens egyensúlytalansági modelljeiben, amelyeknek ez a modell is közeli rokona. Az árdinamikában tehát a drift és a volatilitás is közvetlen függvénye a $\mathcal{D}_i(t)$ egyensúlytalanságnak:

$$\begin{aligned} \mu_i(t) &= \mu_i + \beta_i(\mathcal{D}_i(t)) \quad \text{és} \quad \sigma_i(t) = \gamma_i(\mathcal{D}_i(t)) \cdot \sigma_i \quad \implies \\ \implies \frac{dS_i(t)}{S_i(t)} &= dR_i(t) = \left(\mu_i + \beta_i(\mathcal{D}_i(t)) \right) dt + \gamma_i(\mathcal{D}_i(t)) \cdot \sigma_i^\top d\mathbf{B}(t), \end{aligned}$$

ahol $\beta_i : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ és $\gamma_i : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvények, $\mu_i \geq 0$ és $\sigma_i \in \mathbb{R}^d$ konstansok. A $\mu_i \geq 0$ nemnegatív drift azt a növekedési ütemet jelöli, amellyel az i kockázatos eszköz várhatóan növekszik akkor is, ha az adott eszköz piacán pillanatnyi egyensúlyi helyzet áll fenn. A σ_i volatilitásvektorok teremtik meg a korrelációstruktúrát az eszközök között. Ezt a korrelációstruktúrát időben konstansnak – és így nyilván determinisztikusnak – feltételezzük.

A driftben szereplő β_i függvényről azt tesszük fel, hogy monoton növekvő, folytonosan differenciálható és $\beta_i(0) = 0$. Az intuíció az, hogy amennyiben a piaci szereplők $\bar{Z}_i(t)$ átlagos pozíciója nagyobb (kisebb), mint az $\mathcal{S}_i(t)$ kínálat, akkor az árfolyam várhatóan pozitív (negatív) irányba mozdul el a $\mu_i \geq 0$ várható növekedési ütemhez képest.

A volatilitás állapotfüggését testesíti meg a $\gamma_i : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvény. Állapotfüggő volatilitásra a heterogén ágens alapú irodalomból nem tudunk példával szolgálni. A tágabb értelemben vett pénzügyi irodalomban a sztochasztikus volatilitás természetes, lásd például a Heston féle opcióárazási modellt (Heston, 1993). Ezzel szemben a heterogén ágens modellek kizárólag a drifttel foglalkoznak. Olyannyira igaz ez, hogy hasonló témájú cikkek (lásd például He és tsai. (2019) összefoglaló írását) analitikus

eredményekkel csak a modellek *determinisztikus csontváza* esetén tudnak szolgálni. Esetünkben a γ_i függvénnyel a cél egy olyan modell tárgyalása, amelyben a volatilitás állapotfüggősége realisztikus, és a sztochasztikus modell esetén is tudunk (kvázi)analitikus eredményekkel szolgálni.

A volatilitásban szereplő γ_i függvényről azt tesszük fel, hogy folytonosan differenciálható, $\gamma_i(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ esetén, illetve $x < 0$ esetén monoton csökkenő, míg $x > 0$ esetén monoton növekvő. A feltételek mögötti intuíció a következő. A függvény helyettesítési értékétől elvárjuk, hogy mindig pozitív legyen, azaz egyrészt ne tűnjön el soha a volatilitás, másrészt a volatilitás esetén egy előjelváltás matematikai szempontból problémás lehet, így azt szeretnénk elkerülni. A két monotonitási feltétel azt fejezi ki, hogy a volatilitás akkor nagy, amikor a piaci szereplők átlagos pozíciója (kereslete) számottevően eltér a konstans \mathcal{S}_i kínálati szinttől, azaz a piaci egyensúlytalanság abszolút értéke nagy.

A konkrét specifikációnkban a drift esetén a 3. fejezetben tárgyalt Bihary és Víg (2020) cikkhez hasonlóan egy lineáris hatást feltételezünk: $\beta_i(x) = \beta_i x$, $\beta_i \geq 0$. A β_i paraméter határozza meg az árjegyzői mechanizmus endogén árhatásának erősségét: minél nagyobb β_i , annál erősebben nyilvánul meg a piaci egyensúlytalanság hatása az árfolyam várható megváltozásában, azaz a driftben.

Az endogén volatilitás esetén egy természetes választás az abszolút érték függvény lenne: $\gamma_i(x) = \gamma_i |x|$. Ez a függvény azonban egyrészt nem szigorúan pozitív (hiszen $\gamma_i(0) = 0$), másrészt nem differenciálható az $x = 0$ pontban, amely feltételre azért van szükségünk, hogy analitikusan könnyebben kezelhető sztochasztikus folyamatot kapjunk. Ezért egy olyan függvényt választunk, ami tekinthető az abszolútérték függvény folytonosan differenciálható változatának is:

$$\gamma_i(x) = \sqrt{1 + \gamma_i^2 x^2}, \quad \gamma_i \geq 0 \quad (4.12)$$

(4.12) egy páros függvény, amelynek minimuma ($\gamma_i > 0$ esetén) a nullában $\gamma_i(0) = 1$, és $x \gg 0$ esetén $\gamma_i(x)$ lineáris rendben nő és $\gamma_i'(x) \approx \gamma_i$, míg $x \ll 0$ esetén lineáris rendben csökken és $\gamma_i'(x) \approx -\gamma_i$. A paraméterezést tekintve a $\gamma_i \geq 0$ skálaparaméter – pontosabban az $\frac{1}{\gamma_i}$ – szabályozza azt, hogy mekkora piaci egyensúlytalanság esetén kezd a volatilitás állapotfüggése releváns lenni. $\gamma_i = 0$ választással az állapotfüggés kikapcsolható.

A β_i és γ_i specifikációkat behelyettesítve az árdinamika tehát

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = dR_i(t) = (\mu_i + \beta_i \mathcal{D}_i(t)) dt + \boldsymbol{\sigma}_i^\top \cdot \sqrt{1 + \gamma_i^2 \mathcal{D}_i^2(t)} d\mathbf{B}(t), \quad (4.13)$$

Érdemes megjegyezni, hogy $\beta_i = \gamma_i = 0$ választással a modellben kikapcsolható a piaci egyensúlytalanság hatása mind a drift, mind a volatilitás esetén, és visszakapjuk a Black-Scholes féle piaci modellt (Black és Scholes, 1973), amelyben az árfolyam egy egyszerű geometriai Brown-mozgás konstans $\mu_i \geq 0$ drifttel és konstans $\boldsymbol{\sigma}_i \in \mathbb{R}^d$ volatilitással.

A (4.5) egyenletben megjelenő $d\langle \mathbf{R} \rangle(t)$ kvadratikus variáció mátrix egy eleme ekkor:

$$d\langle R_i, R_k \rangle(t) = \boldsymbol{\sigma}_i^\top \boldsymbol{\sigma}_k \cdot \sqrt{(1 + \gamma_i^2 \mathcal{D}_i^2(t))(1 + \gamma_k^2 \mathcal{D}_k^2(t))} dt$$

4.3. A portfóliósúlyok

Ebben a szekcióban a befektetési alapok stratégiáját, azaz a portfóliósúlyok általános modelljét tárgyaljuk. A 3.1.1. fejezetben a portfóliósúlyokat közvetlenül definiáltuk, a befektetési döntést nem vezettük vissza közgazdasági értelemben vett primitív mennyiségekre. Ebben a szekcióban (Chiarella és tsai., 2006) diszkrét idejű modelljének a folytonos idejű megfelelőjét mutatjuk be, akik a portfóliósúlyokat a kereskedők piaci vélekedéséből származtatják. Fontos azt tisztázni, hogy a kereskedők – ebben a fejezetben a befektetési alapok – játékelméleti értelemben nem stratégiai szereplők. Nincsenek tisztában a saját piaci árhatásukkal, a befektetési döntésüket a többi szereplőtől függetlenül hozzák meg.

Jelölje a j befektetési alapnak a piaci hozam várható értékére vonatkozó *vélekedését* $\tilde{\boldsymbol{\mu}}^{(j)}(t)$, míg a volatilitásra és a korreláció-struktúrára vonatkozó vélekedését $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(j)}(t)$. Mivel a kereskedőnek a portfólióarányokkal közvetlen hatása mindössze a befektetési jegyének értékalakulására van, ezért elegendő a (4.1) egyenlet azon analógjával dolgoznunk, amelyben a kereskedő vélekedéseit vesszük figyelembe az empirikus piaci paraméterek helyett:

$$\frac{d\tilde{V}_j(t)}{\tilde{V}_j(t)} = r(t) dt + \mathbf{Z}_j^\top(t) \left(\tilde{\boldsymbol{\mu}}^{(j)}(t) dt - r(t) \mathbf{1} dt + \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(j)}(t) d\mathbf{B}(t) \right) - c_j(t) dt,$$

Legyen a j kereskedő vagyonhasznosság-függvénye CRRA típusú:

$$u_j(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-\nu_j} - 1}{1 - \nu_j}, & \nu_j \in [0, \infty) \setminus \{1\} \\ \log(x), & \nu_j = 1, \end{cases}$$

ahol $\nu_j \geq 0$ a j kereskedőre jellemző relatív kockázatelutasítás paramétere. Jelölje $U_j(t) = u_j(\tilde{V}_j(t))$ a j kereskedő vagyonhasznosságát, mint sztohasztikus folyamatot. Itô lemmájával adódik $U_j(t)$ megváltozása:

$$\begin{aligned} dU_j(t) = & \left((1 - \nu_j) U_j(t) + 1 \right) \left(r(t) dt - c_j(t) dt + \mathbf{Z}_j^\top(t) \tilde{\Sigma}^{(j)}(t) d\mathbf{B}(t) \right. \\ & \left. \mathbf{Z}_j^\top(t) (\tilde{\boldsymbol{\mu}}^{(j)}(t) - r(t)\mathbf{1}) dt - \frac{\nu_j}{2} \mathbf{Z}_j^\top(t) \tilde{\Sigma}^{(j)}(t) \left(\tilde{\Sigma}^{(j)}(t) \right)^\top \mathbf{Z}_j(t) dt \right) \end{aligned}$$

Az optimális portfólióarányokat úgy kapjuk meg, hogy a befektetési alap minden időpillanatban rövidlátó² módon a várható vagyonhasznosság-növekményét maximalizálja:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_j^*(t) &= \arg \max_{\mathbf{Z}_j(t) \in \mathbb{R}^n} E[dU_j(t) | \mathcal{F}(t)] \\ &= \arg \max_{\mathbf{Z}_j(t) \in \mathbb{R}^n} \left(\mathbf{Z}_j^\top(t) (\tilde{\boldsymbol{\mu}}^{(j)}(t) - r(t)\mathbf{1}) - \frac{\nu_j}{2} \mathbf{Z}_j^\top(t) \tilde{\Sigma}^{(j)}(t) \left(\tilde{\Sigma}^{(j)}(t) \right)^\top \mathbf{Z}_j(t) \right) \\ &= \left\{ \mathbf{Z}_j(t) \in \mathbb{R}^n : \tilde{\boldsymbol{\mu}}^{(j)}(t) - r(t)\mathbf{1} = \nu_j \tilde{\Sigma}^{(j)}(t) \left(\tilde{\Sigma}^{(j)}(t) \right)^\top \mathbf{Z}_j(t) \right\} \\ &= \frac{1}{\nu_j} \left(\tilde{\Sigma}^{(j)}(t) \left(\tilde{\Sigma}^{(j)}(t) \right)^\top \right)^{-1} \cdot (\tilde{\boldsymbol{\mu}}^{(j)}(t) - r(t)\mathbf{1}) \end{aligned} \tag{4.14}$$

Az optimális portfólió számításakor tehát a számlálóban jelennek meg a kereskedő hozamvárakozásai, míg a „nevezőben” (precízebben: inverzmátrixként) a vélt kovariancia-struktúra – azaz $\mathbf{Z}_j(t)$ a j kereskedő kockázattal korrigált hozamvárakozásával arányos. Az is látszik, hogy minél nagyobb a ν_j relatív kockázatelutasítás paraméter, annál kisebb pozíciót vesz fel a kereskedő mindegyik eszközben. A (4.14) formula azon túl, hogy egyértelmű általánosítása Chiarella és tsai. (2006) diszk-

²*myopic*

rét idejű, egy kockázatos eszközre felírt formulájának, nyilvánvaló analógja Merton (1969) klasszikus cikkében felírt optimális portfóliónak is. A formula $\nu_j = 1$ mellett tekinthető továbbá Kelly (1956) folytonos általánosításának is, aki bináris kimenetű fogadások sorozata esetén keresi azt a fogadási arányt, amely mellett a vagyonlogaritmusának várható növekedése maximális. A Merton féle kontextusban a (4.14) formulát szokás Merton aránynak, míg a Kelly féle kontextusban Kelly kritériumnak is nevezni.

A kereskedők közötti heterogenitás tehát a $\nu_j > 0$ kockázatelutasítási paraméteren, illetve a $\tilde{\mu}^{(j)}(t)$ várható hozamokra és $\tilde{\Sigma}^{(j)}(t)$ volatilitásstruktúrára vonatkozó várakozásokon keresztül jelenik meg. A továbbiakban egyszerűsítésként homogén várakozásokat feltételezünk a volatilitásstruktúra tekintetében, illetve azt is feltesszük, hogy ez a várakozás időben is állandó:

$$\tilde{\Sigma}^{(j)}(t) = \tilde{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times d} \quad \forall j = 1, \dots, m$$

A kereskedők közötti heterogenitást így a $\tilde{\mu}^{(j)}(t)$ hozamvárakozásokban jelenítjük meg. Azt feltételezzük, hogy a befektetési alapok a hozamvárakozásaikat valamilyen piaci indikátorra alapozzák. Ebben a fejezetben egyedül a 2.3.1. szekcióban bemutatott *trend indikátort* vizsgáljuk. Legyen az i eszköz trend indikátorának dinamikája a (2.9) egyenletnek megfelelően

$$dx_i(t) = -\frac{1}{\tau_i} x_i(t) dt + \frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = -\frac{1}{\tau} x_i(t) dt + dR_i(t),$$

ahol a $\tau_i > 0$ paraméter a trend indikátor mozgóátlagképzésének időhorizontját szabályozza. Jelölje $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$. A hozamvárakozásokat a befektetési alapok komponensenként, az adott eszköz trend indikátora alapján állapítják meg:

$$\tilde{\mu}_i^{(j)}(t) = \tilde{\mu}_i^{(j)} + \tilde{\alpha}_i^{(j)}(x_i(t))$$

ahol $\tilde{\mu}_i^{(j)} \in \mathbb{R}$ az adott eszköz esetén a konstans és időben állandó hozamvárakozást fejezi ki míg az $\tilde{\alpha}_i^{(j)} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvény vezérli azt, hogy adott pillanatnyi trendet mekkora várható hozamtöbbletként értelmez a kereskedő. A továbbiakban azzal az egyszerűsítő feltételezéssel élünk, hogy a várt hozamtöbblet egyszerű lineáris függ-

vénye a trend indikátornak:

$$\tilde{\alpha}_i^{(j)}(x_i(t)) = \tilde{\alpha}_i^{(j)} \cdot x_i(t), \quad \tilde{\alpha}_i^{(j)} \in \mathbb{R}$$

Mivel az $x_i(t)$ trend indikátor ugyanúgy hozam jellegű mennyiség, mint a $\tilde{\mu}_i^{(j)}(t)$ hozamvárakozás, ezért az $\tilde{\alpha}_i^{(j)} \in \mathbb{R}$ szám tekinthető a j kereskedő extrapolációs rátájának is.

Helyettesítsük be az eddigieket a (4.14) formulába azzal a plusz feltevessel, hogy a bankbetét kamatlába időben állandó $r(t) = r \geq 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_j(t) &= \frac{1}{\nu_j} \left(\tilde{\Sigma} \tilde{\Sigma}^\top \right)^{-1} \left(\tilde{\mu}^{(j)} + \text{diag}(\tilde{\alpha}^{(j)}) \mathbf{x}(t) - r \mathbf{1} \right) \\ &= \left(\nu_j \tilde{\Sigma} \tilde{\Sigma}^\top \right)^{-1} \left(\tilde{\mu}^{(j)} - r \mathbf{1} \right) + \left(\nu_j \tilde{\Sigma} \tilde{\Sigma}^\top \right)^{-1} \text{diag}(\tilde{\alpha}^{(j)}) \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Vegyük észre, hogy a (4.15) kifejezés $\mathbf{x}(t)$ -nek egy affin függvénye: az összeg első tagja egy időben állandó vektor, a második tag pedig $\mathbf{x}(t)$ -nek egy olyan speciális függvénye, ahol az együttható-mátrix diagonális. Ezeknek a mennyiségeknek központi szerepe lesz a későbbiekben, ezért bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Z}_j^{(0)} &= (\tilde{\mu}^{(j)} - r \mathbf{1})^\top \left(\nu_j \tilde{\Sigma} \tilde{\Sigma}^\top \right)^{-1} \\ \text{diag}(\alpha^{(j)}) &= \left(\nu_j \tilde{\Sigma} \tilde{\Sigma}^\top \right)^{-1} \text{diag}(\tilde{\alpha}^{(j)}) \end{aligned} \right\} \quad \mathbf{Z}_j(t) = \mathbf{Z}_j^{(0)} + \text{diag}(\alpha^{(j)}) \mathbf{x}(t) \quad (4.16)$$

Érdemes megjegyezni, hogy $\mathbf{Z}_j^{(0)}$ a klasszikus Merton-arány formulája konstans drift és volatilitás esetén. Ezekkel a jelölésekkel komponensenként is egyszerűen felírható a stratégia, ami az $x_i(t)$ trend indikátornak az affin függvénye:

$$Z_{j,i}(t) = Z_{j,i}^{(0)} + \alpha_i^{(j)} x_i(t) \quad (4.17)$$

A j befektetési alap i eszközben felvett pozíciója tehát az adott eszköz trend indikátorától affin módon függ, ahol az $\alpha_i^{(j)} \in \mathbb{R}$ reakciótenyező szabályozza azt, hogy milyen erősen (és milyen irányba) reagál a trendre a kereskedő, míg a $Z_{i,j}^{(0)} \in \mathbb{R}$ szám adja meg a pozíciónak a nullpontját. Az $\alpha_i^{(j)}$ stratégiai paraméter előjele szempontjából a szokásos – lásd például 2.3. szekció – kanonikus stratégiák jelennek meg

a modellben. $\alpha_i^{(j)} > 0$ esetén *trendkövető* kereskedőről beszélünk, hiszen ő akkor vesz fel nagyobb pozíciót az adott eszközben, amikor az éppen egy felfelé mutató trendben van. $\alpha_i^{(j)} < 0$ esetén a *kontrariánus* kereskedő éppen ellenkezőleg gondolkodik, azaz például egy felfelé mutató trendben kis (akár negatív) pozíciót vesz fel, hiszen vélekedése szerint a trendnek hamarosan vége lesz. $\alpha_i^{(j)} = 0$ esetén a kereskedő egyszerűen az időben állandó $Z_{j,i}^{(0)} \in \mathbb{R}$ pozíciót tartja. Egy ilyen kereskedőt nevezhetünk *indexkövető* kereskedőnek.

A stratégia $\alpha_i^{(j)}$ és $Z_{j,i}^{(0)}$ számokkal való karakterizálása a továbbiakban alapvető lesz, azaz a modell felírásban többet nem fogjuk használni a (4.14) formulában szereplő – várható hozamra és volatilitásra vonatkozó – várakozásokat. Bizonyos szerzők – főleg a folytonos idejű irodalomban, mint például He és Zheng (2010) – a tárgyalásból eleve ki is hagyják a stratégia hasznosság-alapú meghatározását, és közvetlenül írják fel a pozíciót a trend indikátor függvényeként, hasonlóan a (4.17) formulához. Ezzel szemben a mélyebb megértés érdekében itt cél volt a diszkrét idejű modellekben (lásd például Chiarella és tsai. (2013)) megszokott tárgyalást átemelni a folytonos idejű modellbe is.

4.4. A piacot leíró csatolt dinamikai rendszer

Elérkeztünk arra a pontra, hogy a korábbiak alapján felírjuk azt a sztochasztikus dinamikai rendszert, amelyben szereplő dinamikai változók esetén lehetőségünk van valamilyen stabilitás vizsgálatára. Egy determinisztikus dinamikai rendszer esetén a stabilitás vizsgálata általában állandósult állapotok, illetve periodikus, kaotikus (bifurkációs) jelenségek vizsgálatát jelenti. Ezzel szemben egy sztochasztikus dinamikai rendszer esetén legjobb esetben az állapot *eloszlása* az, ami állandó lehet – ez az invariáns eloszlás, ami a dolgozat korábbi részeiben is központi jelentőségű volt. Akár sztochasztikus, akár determinisztikus a vizsgálandó dinamikai rendszer, először meg kell találni azokat a változókat, amelyek a rendszer állapotát leírják, és valamilyen állandósult viselkedést mutathatnak. Ez az oka annak, hogy a későbbi vizsgálatok szempontjából központi szerepe nem az $\mathbf{S}(t) = (S_1(t), \dots, S_n(t))^T$ árfolyamoknak lesz. Az árfolyamok (lásd (4.13) egyenlet) alapvetően bolyongásszerű, hosszú távon „elszálló” viselkedést mutatnak, így nincs remény állandó viselkedés vizsgálatára.

Központi szerepe ezzel szemben az $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ trend indikátorok-

nak és a $\mathbf{p}(t) = (p_1(t), \dots, p_m(t))^\top$ piaci súlyoknak lesz. A trend indikátor a (2.9) egyenlet szerint inherens módon középre húz, azaz van esély arra, hogy nem száll el végérvényesen. A piaci súlyok vagy arányok, így nyilvánvaló, hogy egy korlátozott halmazból veszik fel az értékeket, és nem képesek végérvényesen elszállni. A modell célja pedig az, hogy egy olyan hatást vizsgáljunk – esetünkben az endogén volatilitást – amely meggátolja, hogy egy sikeres stratégia végleg elhatalmasodjon egy másikon.

4.4.1. A trend indikátor dinamikája

Ebben a szekcióban mindössze nyilvánvaló behelyettesítéseket fogunk végrehajtani. A könnyebb követhetőség érdekében írjuk fel ismét a trend indikátor általános dinamikáját (2.9), az endogén árfolyam dinamikát (4.13), a piaci egyensúlytalanság definícióját (4.11) és a kereskedők portfóliósúlyait (4.17):

$$dx_i(t) = -\frac{1}{\tau}x_i(t)dt + dR_i(t) \quad (2.9 \text{ ismét})$$

$$dR_i(t) = (\mu_i + \beta_i \mathcal{D}_i(t))dt + \boldsymbol{\sigma}_i^\top \sqrt{1 + \gamma_i^2 \mathcal{D}_i^2(t)} d\mathbf{B}(t) \quad (4.13 \text{ ismét})$$

$$\mathcal{D}_i(t) = \sum_{j=1}^m p_j(t) Z_{j,i}(t) - \mathcal{S}_i(t) \quad (4.11 \text{ ismét})$$

$$Z_{j,i}(t) = Z_{j,i}^{(0)} + \alpha_i^{(j)} x_i(t) \quad (4.17 \text{ ismét})$$

Ha az egyenleteket egymásba helyettesítjük alulról felfelé, akkor az $x_i(t)$ trend indikátor sztochasztikus differenciálegyenletében megjelenő dinamikai változó egyedül önmaga $x_i(t)$, illetve a $\mathbf{p}(t) = (p_1(t), \dots, p_m(t))^\top$ piaci vagy arányok lesznek:

$$\begin{aligned} dx_i(t) = & \left(\mu_i - \frac{1}{\tau}x_i(t) + \beta_i \left(\sum_{j=1}^m p_j(t) \left(Z_{j,i}^{(0)} + \alpha_i^{(j)} x_i(t) \right) - \mathcal{S}_i(t) \right) \right) dt + \\ & + \boldsymbol{\sigma}_i^\top \sqrt{1 + \gamma_i^2 \left(\sum_{j=1}^m p_j(t) \left(Z_{j,i}^{(0)} + \alpha_i^{(j)} x_i(t) \right) - \mathcal{S}_i(t) \right)^2} d\mathbf{B}(t) \quad (4.18) \end{aligned}$$

Ezen a ponton tegyünk meg egy olyan egyszerűsítést, amely a tárgyalást jelentősen egyszerűbbé teszi. Vegyük észre, hogy a (4.18) egyenletben több olyan additív

konstans (μ_i drift paraméter, $Z_{j,i}^{(0)}$ átlagos pozíció nagyság, \mathcal{S}_i árjegyzői kínálat) megjelenik, amelyeket ha nullának választunk, minden olyan endogén hatás továbbra is jelen lesz a driftben és a volatilitásban is, amelyek a modell kvalitatív viselkedését meghatározzák. Ezért innen úgy haladunk tovább, hogy feltesszük, hogy

$$\mu_i = Z_{j,i}^{(0)} = \mathcal{S}_i(t) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \text{ és } j = 1, \dots, m \text{ esetén.}$$

Ilyen jellegű egyszerűsítés gyakori a hasonló irodalomban. He és Li (2012) például a pozícionagyságokat eleve úgy definiálja, hogy azok nullpontja a nulla, valamint a piaci ármechanizmus esetén is nulla kínálatot feltételez.

Konstans nulla kínálat esetén a $\mathcal{D}_i(t)$ piaci egyensúlytalansági mérőszám megegyezik egyszerűen magával a $\bar{Z}_i(t)$ átlagos pozíciómérettel:

$$\mathcal{D}_i(t) = \bar{Z}_i(t) - \mathcal{S}_i = \bar{Z}_i(t) - 0 = \sum_{j=1}^m p_j(t) Z_{j,i}(t) = \left(\sum_{j=1}^m p_j(t) \alpha_i^{(j)} \right) x_i(t) = \bar{\alpha}_i(t) x_i(t)$$

Az additív konstansok kinullázásával tehát a (4.18) egyenlet a következőképpen alakul:

$$\begin{aligned} dx_i(t) &= \left(\beta_i \sum_{j=1}^m p_j(t) \alpha_i^{(j)} - \frac{1}{\tau} \right) x_i(t) dt + \\ &\quad + \boldsymbol{\sigma}_i^\top \sqrt{1 + \gamma_i^2 \left(\sum_{j=1}^m p_j(t) \alpha_i^{(j)} \right)^2} x_i^2(t) d\mathbf{B}(t) \\ dx_i(t) &= \left(\beta_i \bar{\alpha}_i(t) - \frac{1}{\tau} \right) x_i(t) dt + \boldsymbol{\sigma}_i^\top \sqrt{1 + \gamma_i^2 \bar{\alpha}_i^2(t) x_i^2(t)} d\mathbf{B}(t) \end{aligned} \quad (4.19)$$

ahol $\bar{\alpha}_i(t) = \sum_{j=1}^m p_j(t) \alpha_i^{(j)}$ a pillanatnyi piaci vagyonarányokkal súlyozott átlagos reakciótényező. Jól látszik a (4.19) egyenletben, hogy az $x_i(t)$ trend indikátor dinamikája függ egyrészt önmagától, másrészt az átlagos reakciótényezőtől keresztül a piaci vagyonarányoktól. Így még adósok vagyunk a $p_j(t)$ vagyonarányok dinamikájának tisztázásával ahhoz, hogy a teljes modellt fel tudjuk írni.

4.4.2. A piaci vagyonarányok dinamikája

A $p_j(t)$ vagyonarányok dinamikáját abban az egyszerűsített esetben fogjuk felírni, amikor mindössze egyetlen kockázatos eszközzel kereskednek a piacon, azaz $n = 1$. A továbbiakban tehát elhagyjuk az i indexet. A $p_j(t)$ -re vonatkozó (4.5) dinamikai egyenletbe behelyettesítve a megfelelő specifikációkat, és élve az előző $\mu = r = Z_j^{(0)} = \mathcal{S} = 0$ egyszerűsítő feltételezésekkel, a vagyonarányok dinamikája a következő lesz:

$$\begin{aligned} dp_j(t) = & p_j(t) \left(\alpha^{(j)} - \bar{\alpha}(t) \right) x(t) \left(\beta \bar{\alpha}(t) x(t) dt + \sigma \sqrt{1 + \gamma^2 \bar{\alpha}^2(t) x^2(t)} dB(t) \right. \\ & \left. - \bar{\alpha}(t) x(t) \sigma^2 (1 + \gamma^2 \bar{\alpha}^2(t) x^2(t)) dt \right) \\ & - p_j(t) (c_j(t) - \mathbf{p}^\top(t) \mathbf{c}(t)) dt + \kappa(t) (q_j(t) - p_j(t)) dt \end{aligned}$$

Az egyenlet jobb oldalán az $x(t)$ trend indikátoron és a $\mathbf{p}(t)$ vagyonarányokon kívül (melyek az $\bar{\alpha}(t)$ átlagos reakciótényezőn keresztül jelennek meg) az eddig nem modellezett $\mathbf{c}(t)$ alapkezelési költségek, $\kappa(t)$ vagyonátcsoportosítási intenzitás és $q_j(t)$ vagyonátcsoportosítási arányszám jelenik meg. Bár mindegyik esetén lenne lehetőség érdekes és realisztikus endogén hatásokat megjeleníteni, ezt meghagyjuk további kutatási iránynak. Ezzel szemben mindegyik esetén egyszerű konstans hatást feltételezünk, azaz $c_j(t) = c_j \geq 0 \forall j$, $\kappa(t) = \kappa \geq 0$ és $q_j(t) = \frac{1}{m} \forall j$. A $q_j(t) = \frac{1}{m}$ konstans feltételezés annak felel meg, mintha a befektetési alapok között nem lenne teljesítménybeli különbség. Ez utóbbi egyszerűsítés feloldása és a $q_j(t)$ átcsoportosítási arányszámok endogenizálása különösen termékeny táptalaja lehet egy későbbi kutatásnak.

A teljes modellt leíró csatolt dinamikai rendszer $n = 1$ kockázatos eszköz és

$m \geq 2$ befektetési alap esetén tehát:

$$dx(t) = \left(\beta \bar{\alpha}(t) - \frac{1}{\tau} \right) x(t) dt + \sigma \sqrt{1 + \gamma^2 \bar{\alpha}^2(t) x^2(t)} dB(t) \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} dp_j(t) = p_j(t) \left(\alpha^{(j)} - \bar{\alpha}(t) \right) x(t) & \left[\beta \bar{\alpha}(t) x(t) dt + \sigma \sqrt{1 + \gamma^2 \bar{\alpha}^2(t) x^2(t)} dB(t) \right. \\ & \left. - \bar{\alpha}(t) x(t) \sigma^2 (1 + \gamma^2 \bar{\alpha}^2(t) x^2(t)) dt \right] \\ & - p_j(t) (c_j - \bar{c}(t)) dt + \kappa \left(\frac{1}{m} - p_j(t) \right) dt \end{aligned} \quad (4.21)$$

ahol $\bar{\alpha}(t) = \mathbf{p}^\top(t) \boldsymbol{\alpha}$ és $\bar{c}(t) = \mathbf{p}^\top(t) \mathbf{c}$. A piacot teljes egészében meghatározó konstansok az $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(m)}) \in \mathbb{R}^m$ stratégiai reakciótényezők, a $\mathbf{c} = (c^{(1)}, \dots, c^{(m)}) \in \mathbb{R}^m$ alapkezelési költségek, a $\beta \geq 0$ endogén árhatás erősségét szabályzó paraméter, a $\tau > 0$ trend indikátor mozgóátlagának időhorizontja, a $\sigma > 0$ volatilitás abszolút nagysága, a $\gamma \geq 0$ endogén volatilitás erősségét szabályzó paraméter, a $\kappa \geq 0$ vagyónátcsoportosítás intenzitási paramétere. A (4.20)-(4.21)-os számú $(m+1)$ dimenziós sztochasztikus dinamikai rendszerben az $x(t)$ változó az egyetlen kockázatos eszköz trend indikátora, a $\mathbf{p}(t) = (p_1(t), \dots, p_m(t))$ változók az $m \geq 2$ darab befektetési alap vagyónarányai. Mivel csak egy kockázatos eszköz van, és a véletlennek egyéb forrása (mint például a 3. fejezetben a fundamentális érték volt) nincsen, ezért a rendszert mindössze egy Brown-mozgás hajtja meg.

Egy $(m+1)$ dimenziós rendszer grafikus ábrázolása nehézkes, ezért a (4.6) egyenlet alapján írjuk fel azt a dinamikai rendszert is, amelyben mindössze $m = 2$ befektetési alap versenyez egymással. Ekkor a vagyónarányok egyetlen folyamattal leírhatók, hiszen $p_1(t) = 1 - p_2(t)$, ezért ebben az esetben el is hagyhatjuk az alsó indexet, azaz legyen $p_1(t) = p(t)$, amelynek dinamikája ekkor:

$$\begin{aligned} dp(t) = p(t) (1 - p(t)) \left(\alpha^{(1)} - \alpha^{(1)} \right) x(t) & \left(\beta \bar{\alpha}(t) x(t) dt + \sigma \sqrt{1 + \gamma^2 \bar{\alpha}^2(t) x^2(t)} dB(t) \right. \\ & \left. - \bar{\alpha}(t) x(t) \sigma^2 (1 + \gamma^2 \bar{\alpha}^2(t) x^2(t)) dt \right) \\ & - p(t) (1 - p(t)) (c^{(1)} - c^{(2)}) dt + \kappa \left(\frac{1}{2} - p(t) \right) dt \end{aligned} \quad (4.22)$$

A 4.1 pontban tárgyalt numerikus és ábrázolási okokból írjuk fel a $p(t)$ vagyonarány $y(t) = \log\left(\frac{p(t)}{1-p(t)}\right)$ logit transzformáltjának dinamikáját is a (4.7) egyenlet alapján:

$$\begin{aligned} dy(t) = & (\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}) x(t) \left(\beta \bar{\alpha}(t) x(t) dt + \sigma \sqrt{1 + \gamma^2 \bar{\alpha}^2(t) x^2(t)} dB(t) \right) \\ & - \frac{1}{2} \left((\alpha^{(1)})^2 - (\alpha^{(2)})^2 \right) x^2(t) \sigma^2 (1 + \gamma^2 \bar{\alpha}^2(t) x^2(t)) dt \\ & - (c^{(1)} - c^{(2)}) dt - \kappa \sinh(y(t)) dt \quad (4.23) \end{aligned}$$

A továbbiakban a (4.20) és (4.23) egyenletek által leírt $(x(t), y(t))$ 2-dimenziós sztochasztikus dinamikai rendszert fogjuk vizsgálni, ahol $x(t)$ a piaci trend indikátor, $y(t)$ pedig a vagyonarány logit transzformáltja. A kettő közül a trend indikátor testesíti meg a vizsgálatnak azt a dimenzióját, amely robusztusan megfigyelhető mennyiség a valós piacokon, és az ezzel kapcsolatos megállapítások akár önmagukban is empirikusan tesztelhetők lehetnek. A vagyonarány ezzel szemben egy nehezebben megfigyelhető mennyiség, ezért az ezzel kapcsolatos megállapítások elsősorban elméleti jelentőségűek lesznek azzal kapcsolatban, hogy hogyan alakulhat néhány kanonikus kereskedő (trendkövető, indexkövető és kontrariánus) versenye a piacon. Egy empirikus vizsgálat során a vagyonarányra nézve egy lehetséges proxy adatsor az aktív és a passzív alapok vagyonának alakulása lehetne, ahhoz hasonlóan, ahogy például a 2.2. ábrán mutattuk be azt.

4.5. Az endogén volatilitású trend indikátor önálló vizsgálata

Vegyük észre, hogy az $x(t)$ trend indikátor (4.20) dinamikájában a $p(t)$ vagyonarányok egyedül az $\bar{\alpha}(t) = p(t)\alpha^{(1)} + (1 - p(t))\alpha^{(2)}$ átlagos reakciótenyezőn keresztül jelennek meg. Mivel a $p(t)$ vagyonarány egy empirikusan nem megfigyelhető mennyiség, érdemes egy kis kitérő erejéig a 2-dimenziós dinamikai rendszerről lecsatolni és önállóan vizsgálni a trend indikátort, miközben a $p(t)$ vagyonarányt időben állandónak feltételezzük. Ezzel a kétdimenziós sztochasztikus rendszer egydimenzióssá válik, melynek analitikus vizsgálata számottevően egyszerűbb.

Tegyük fel tehát e kitérő erejéig, hogy $p(t) = (1 - p(t)) = p \in (0, 1)$, és vezessük be a következő jelöléseket:

$$K = - \left(\beta \bar{\alpha} - \frac{1}{\tau} \right) = \frac{1}{\tau} - \beta (p \alpha^{(1)} + (1 - p) \alpha^{(2)})$$

$$\Gamma^2 = \gamma^2 \bar{\alpha}^2 = \gamma^2 (p \alpha^{(1)} + (1 - p) \alpha^{(2)})^2$$

Vegyük észre, hogy az „igazi” 2-dimenziós rendszerben K és Γ is sztochasztikus, hiszen $p(t)$ -n keresztül $\bar{\alpha}(t)$ is az. Ebben a pontban azonban a trend indikátor sztochasztikus viselkedésének mélyebb megértése érdekében úgy kezeljük őket, mintha időben állandók lennének. Az új jelölésekkel írjuk fel a (4.20) egyenlet megfelelőjét:

$$dx(t) = -Kx(t) dt + \sigma \sqrt{1 + \Gamma^2 x^2(t)} dB(t) \quad (4.24)$$

A (4.24) sztochasztikus differenciálegyenlet tekinthető a kanonikus trend indikátor dinamikáját leíró egyenletnek egy olyan modellben, amelyben a kereskedők piaci súlya időben nem változik, de a kereskedők aktivitásán keresztül a trend indikátor maga megjelenik mind a drift, mind a volatilitás szintjén. A folyamatot definiáló három paraméter közül egyelőre csak a volatilitás tagban megjelenő kettőről élünk megkötéssel: legyen $\sigma \geq 0$ és $\Gamma \geq 0$. Vegyük észre, hogy ha $\Gamma = 0$, akkor (4.24) egy sztenderd – konstans volatilitású – Ornstein–Uhlenbeck folyamat:

$$dx(t) = -Kx(t) dt + \sigma dB(t) \quad (4.25)$$

Ha $K > 0$, akkor (4.25) invariáns eloszlása: $x_\infty \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2K}\right)$, azaz ha a folyamatot ebből a normális eloszlásból indítjuk, akkor a forward Kolmogorov egyenlet (lásd Appendix A.1) értelmében minden jövőbeli időpontban ez lesz a folyamatnak az eloszlása. Ha $K > 0$, akkor a drift tagban megjelenik az úgynevezett átlaghoz visszahúzás: $x(t)$ akár pozitív, akár negatív, a drift a nulla felé igyekszik húzni a folyamatot. Bár a (4.24) folyamat esetén nem élünk a $K > 0$ feltétellel, egyelőre érdemes annak esetében is úgy gondolni a driftre, mint ami nullához húzza a folyamatot, hosszú távú stabilitást biztosítva annak.

Ha $\sigma > 0$ és $\Gamma > 0$, akkor (4.24) valóban egy állapotfüggő volatilitású folyamat.

Ellentétben például a geometriai Brown mozgással³ és a CIR folyamattal⁴ – melyek volatilitása szintén állapotfüggő – a volatilitás pozitív marad akkor is, ha $x(t) = 0$, hiszen $\sigma\sqrt{1 + \Gamma^2 \cdot 0} = \sigma$. Ez arra enged következtetni, hogy – ellentétben a két említett folyamattal – a folyamat trajektóriája metszeni tudja az időtengelyt.

Vizsgáljuk most meg a folyamat viselkedését abban a két karakterisztikus esetben, ha a folyamat egy adott időpillanatban az időtengelyhez közel ($x(t) \approx 0$), illetve ha attól messze helyezkedik el ($|x(t)| \gg 0$). Ha $x(t) \approx 0$, akkor a dinamika közelítőleg

$$dx(t) \approx \sigma dB(t)$$

lesz, azaz a folyamat hozzávetőlegesen úgy viselkedik, mint egy sztenderd Brown mozgás. Ez analóg a sztenderd Ornstein–Uhlenbeck folyamattal, amely a nulla környezetében szintúgy alig viselkedik egy Brown mozgástól eltérően. Ha $|x(t)| \gg 0$, akkor a volatilitás közelítőleg lineárisan függ az állapottól, hiszen egy kvadratikus kifejezés gyöke lineáris. Azaz a dinamika közelítőleg

$$dx(t) \approx -Kx(t) dt + \sigma\Gamma|x(t)| dB(t) \quad (4.26)$$

mely folyamat egy geometriai Brown mozgás $-K$ drift és $\sigma\Gamma$ volatilitás paraméterekkel.

Nullából indítva egy trajektória története tehát a következő lehet. A nulla környezetében a folyamat egy Brown mozgáshoz hasonló „céltalan”, konstans volatilitású diffúzív viselkedést mutat. Ahogy a folyamat a diffúciónak köszönhetően távolodik a nulla szinttől – mondjuk – pozitív irányba, úgy a viselkedés egyre inkább hasonlít egy geometriai Brown mozgásra, azaz mind a drift, mind a volatilitás lineárisan kezd függni az állapottól. Ha $K > 0$ (bár ezt nem tettük fel), akkor remélhetjük, hogy a drift egy idő után visszahúzza a folyamatot a nulla közelébe, ahol ismét egy Brown mozgáshoz hasonlóan fog viselkedni.

³ $dx(t) = Kx(t) dt + \sigma x(t) dB(t)$

⁴ $dx(t) = K(\mu - x(t)) dt + \sigma\sqrt{x(t)} dB(t)$

4.5.1. A trend indikátor invariáns eloszlása

Az előző, kvalitatív jellegű leírás után vizsgáljuk meg a (4.24) folyamat invariáns eloszlását. Az invariáns eloszlás Cherny (2004) alapján a t-eloszlás egy skálázottja (a számításokért lásd Függelék A.3):

$$x_\infty \stackrel{d}{=} \frac{T}{\Gamma \sqrt{1 + \frac{2K}{\Gamma^2 \sigma^2}}} \quad \text{ahol} \quad T \sim t \left(1 + \frac{2K}{\Gamma^2 \sigma^2} \right)$$

Ebből Johnson és tsai. (1995) alapján már adódik is az invariáns eloszlás létezésének feltétele. Mivel a t-eloszlás szabadságfokának pozitívnak kell lennie, így az invariáns eloszlás akkor létezik ha

$$1 + \frac{2K}{\Gamma^2 \sigma^2} > 0 \quad \implies \quad \frac{2K}{\Gamma^2 \sigma^2} > -1$$

Vegyük észre, hogy az invariáns eloszlás még negatív K esetén is létezhet, hiszen K -ra nézve a feltétel $K > -\frac{\Gamma^2 \sigma^2}{2}$. Ez egy rendkívül érdekes megfigyelés, hiszen az intuíció azt mondaná, hogy egy folyamatnak csak akkor lehet invariáns eloszlása, ha a driftben megjelenik egyfajta átlaghoz visszahúzás. Ezt az intuíciót erősíti meg például a sztenderd Ornstein–Uhlenbeck folyamat, amely esetén a $K > 0$ valóban feltétele az invariáns eloszlás létezésének. Ezzel szemben az állapotfüggő volatilitású (4.24) folyamatnak még akkor is létezhet invariáns eloszlása, ha a driftben egy – olybár gyenge – taszító hatás megjelenik. Ez arra utal, hogy a változó volatilitás az eloszlását tekintve stabilizálja a folyamatot.

Az eloszlás létezésén túllépve megvizsgálhatjuk annak momentumait is. A t-eloszlás várható értéke akkor létezik, ha a szabadságfok 1-nél nagyobb, azaz esetünkben ha

$$1 + \frac{2K}{\Gamma^2 \sigma^2} > 1 \quad \implies \quad \frac{2K}{\Gamma^2 \sigma^2} > 0$$

$K = 0$ esetben azaz még éppen nem létezik az invariáns eloszlás várható értéke, míg ha van tényleges átlaghoz visszahúzás ($K > 0$), akkor már létezik a várható érték. A $K = 0$ esetben a t-eloszlás szabadságfoka 1, ekkor az eloszlás a nevezetes Cauchy-eloszlás. Ha létezik a várható érték, akkor az természetesen $E(x_\infty) = 0$, hiszen az eloszlás szimmetrikus a nullára.

A t-eloszlás varianciája akkor véges, ha a szabadságfok 2-nél nagyobb, azaz ese-

tünkben ha

$$1 + \frac{2K}{\Gamma^2 \sigma^2} > 2 \implies 2K > \Gamma^2 \sigma^2$$

Ha a variancia véges, akkor az könnyen számolható, hiszen a skálázott t-eloszlás varianciája a szabadságfok és a skála paraméter függvénye:

$$D^2(x_\infty) = \frac{D^2(T)}{\Gamma^2 \left(1 + \frac{2K}{\Gamma^2 \sigma^2}\right)} = \frac{1 + \frac{2K}{\Gamma^2 \sigma^2}}{\Gamma^2 \left(1 + \frac{2K}{\Gamma^2 \sigma^2}\right) \left(\frac{2K}{\Gamma^2 \sigma^2} - 1\right)} = \frac{\sigma^2}{2K - \Gamma^2 \sigma^2}$$

A nevezőben éppen az a mennyiség jelenik meg, amelynek pozitivitása a variancia végeességének feltétele.

Az előbbi vizsgálatot összefoglalva azt mondhatjuk, hogy az invariáns eloszlást karakterizáló konstans az $1 + \frac{2K}{\Gamma^2 \sigma^2}$. Mivel a modellben K és Γ valójában sztochasztikus, ezért a későbbi vizsgálatok szempontjából bevezetjük a

$$H(t) = 1 + \frac{2K(t)}{\Gamma^2(t) \sigma^2} \quad (4.27)$$

sztochasztikus folyamatot. $H(t)$ szemléletesen egyetlen számba tömörítve karakterizálja az állapotot, mert annak $\lfloor H(t) \rfloor$ alsó egész része éppen azzal a számmal egyenlő, amely momentumáig még létezik és véges az $x(t)$ folyamat invariáns eloszlásának, ahol a 0. momentum létezése alatt az invariáns eloszlás létezését értjük.

4.5.2. A trend indikátor Lamperti-transzformáltja

A (4.24) folyamat viselkedésének még mélyebb megértése érdekében végül vizsgáljuk meg annak Lamperti transzformáltját (lásd Møller és Madsen (2010)), azaz keressük azt a $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvényt, amely mellett a $\xi(t) = g(x(t))$ folyamat konstans volatilitású. Mivel az Itô lemma szerint

$$d\xi(t) = (\dots) dt + g'(x(t)) \sigma \sqrt{1 + \Gamma^2 x^2(t)} dB(t),$$

ezért az alkalmas g függvény integrálással számolható:

$$g'(x) \sigma \sqrt{1 + \Gamma^2 x^2} = \sigma \implies g(x) = \int^x \frac{1}{\sqrt{1 + \Gamma^2 u^2}} du = \frac{\operatorname{arsinh}(\Gamma x)}{\Gamma},$$

azaz ha az $x(t)$ folyamatnak vesszük a szinusz hiperbolikus függvény inverzével⁵ vett transzformáltját, akkor egy konstans volatilitású folyamatot kapunk:

$$\xi(t) = \frac{\operatorname{arsinh}(\Gamma x(t))}{\Gamma} \iff x(t) = \frac{\sinh(\Gamma \xi(t))}{\Gamma} \quad (4.28)$$

Az eredmény megerősíti azt az intuíciót, amelyet a (4.26) dinamikai egyenlet felírásakor szereztünk, miszerint az $x(t)$ folyamat $|x(t)| \gg 0$ esetén GBM-szerűen viselkedik. Az $\operatorname{arsinh}(x)$ függvény ugyanis egy olyan páratlan függvény, amely a nullától messze egy előjeles logaritmus függvényként viselkedik:

$$\operatorname{arsinh}(x) \approx \begin{cases} \log(2x), & \text{ha } x \gg 0 \\ -\log(-2x), & \text{ha } x \ll 0 \end{cases}$$

Mivel ismeretes, hogy GBM esetén a Lamperti-transzformációs függvény a logaritmus függvény, ezért nem meglepő, hogy a (4.24) folyamat esetén a megfelelő transzformációs függvény a logaritmus függvénynek a páratlan része.

A transzformált folyamat dinamikája ekkor

$$d\xi(t) = -\frac{2K + \Gamma^2\sigma^2}{2\Gamma} \tanh(\Gamma \xi(t)) dt + \sigma dB(t) \quad (4.29)$$

Vegyük észre, hogy a driftben a folyamat értékének páratlan, szigorúan monoton növekvő, alulról és felülről is korlátos függvénye szerepel. Azaz – feltéve, hogy $2K + \Gamma^2\sigma^2 > 0$ és $\Gamma > 0$ – a (4.29) folyamatban is megjelenik az átlaghoz visszahúzás, de ez a tangens hiperbolikus⁶ függvény miatt egy korlátos, azaz globálisan tekintve gyenge hatás. Az átlaghoz visszahúzás $2K + \Gamma^2\sigma^2 > 0$ feltétele pedig megegyezik az eredeti folyamat invariáns eloszlás létezésének feltételével, ami ismét intuitív eredmény: az eredeti, változó volatilitású folyamatnak éppen akkor létezik invariáns eloszlása, ha annak konstans volatilitású transzformáltjában megjelenik az átlaghoz visszahúzás a driftben.

A (4.29) transzformált folyamat fényében nem meglepő továbbá az eredeti (4.24) folyamat invariáns eloszlásának vastag szélűsége sem. A (4.29) folyamatban a tan-

⁵ $\operatorname{arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$

⁶ $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

gens hiperbolikus miatt az átlaghoz visszahúzás nagyon gyengén jelenik meg, ráadásul az eredeti $x(t)$ folyamatot (4.28) értelmében úgy kapnánk vissza, ha vennénk $\xi(t)$ -nek szinuszosz hiperbolikusát⁷, ami egy páratlan, gyorsan növekvő függvény. Azaz ha egy gyengén visszahúzó folyamatot még szét is terítünk egy gyorsan növekvő függvénnyel, észszerűnek tűnik, hogy egy olyan folyamatot kapunk, amelynek invariáns eloszlása vastag szélű, esetünkben t -eloszlás.

Ahogy a 2.3.1 szakaszban ismertettük, az $x(t)$ trend indikátor értelmezhető a modellben τ -hozamként is. Ezért a trend indikátor invariáns eloszlásának vastag szélűsége üdvözlendő eredmény, hiszen ez azt jelenti, hogy maguk a hozamok is vastag szélű eloszlást követnek az endogén volatilitásnak köszönhetően. A hozamok nem normalitása a pénzügyi szakirodalom (lásd például Officer (1972)) egyik klasszikus és legalapvetőbb empirikus megfigyelése, melyet elméleti modellünk képes reprodukálni.

4.6. A trendkövető és az indexkövető kereskedő versenye

A továbbiakban a modellnek egy olyan karakterisztikus esetét fogjuk vizsgálni, ahol egy trendkövető és egy indexkövető kereskedő versenyez egymással. A vizsgálat célja egy olyan realisztikus modell feltárása, amelyben megjelenik egyfajta ciklikus, hosszú távú egyensúly a két kereskedő típus között.

Legyen tehát a trendkövető kereskedő az 1-es számú játékos, aki az $\alpha^{(1)} = \alpha > 0$ paraméter szerint kereskedik és a piaci súlya $p(t)$. Legyen a 2-es számú játékos az indexkövető kereskedő, aki az $\alpha^{(2)} = 0$ paraméter szerint kereskedik, és a piaci súlya $1 - p(t)$. Ekkor az $(x(t), y(t))$ dinamikai rendszer a következő lesz:

$$dx(t) = \left(\beta \alpha p(t) - \frac{1}{\tau} \right) x(t) dt + \sigma \sqrt{1 + \gamma^2 \alpha^2 p^2(t) x^2(t)} dB(t) \quad (4.30)$$

$$dy(t) = \alpha^2 \left(\beta p(t) - \frac{\sigma^2}{2} \right) x^2(t) dt - \frac{\sigma^2}{2} \gamma^2 \alpha^4 p^2(t) x^4(t) dt - \kappa \sinh(y(t)) dt + \sigma \alpha x(t) \sqrt{1 + \gamma^2 \alpha^2 p^2(t) x^2(t)} dB(t) \quad (4.31)$$

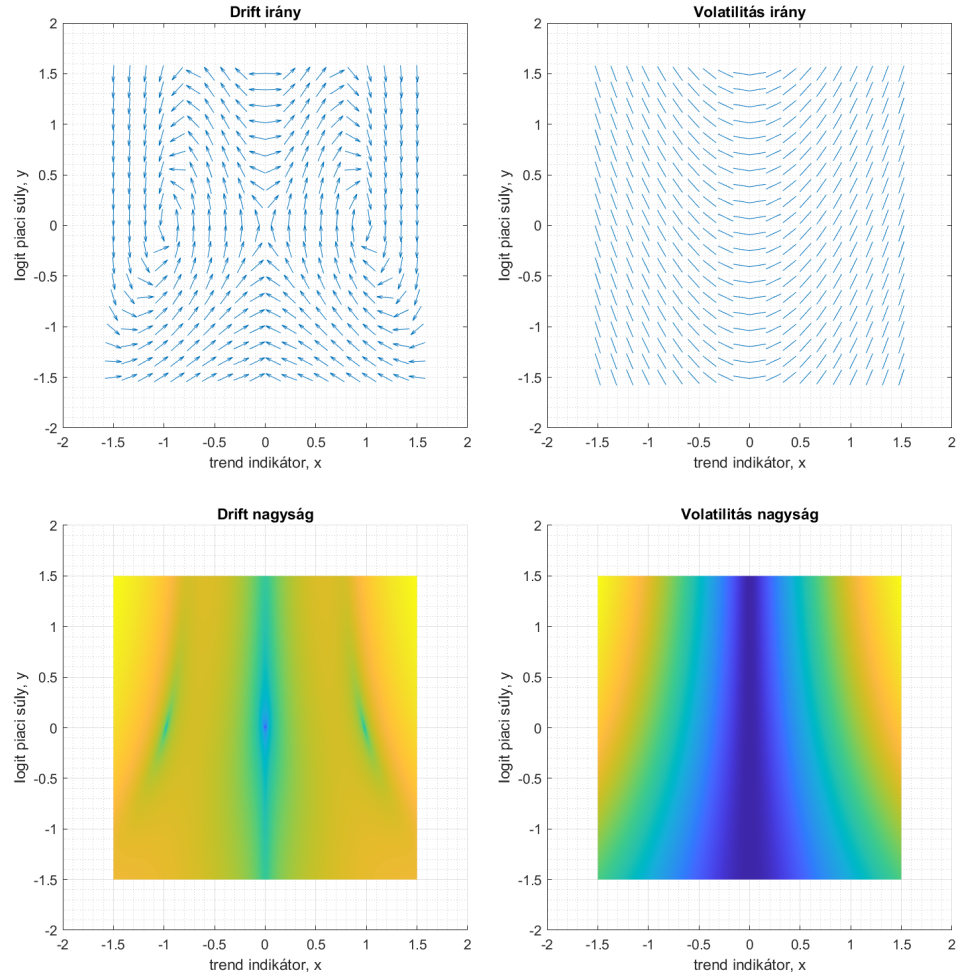
⁷ $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

A (4.23) dinamika pontosabb megértése érdekében vizsgáljuk meg annak a *determinisztikus csontvázát*, amely alatt azt értjük, mintha a sztochasztikus tagban a Brown mozgás növekménye mindig nulla lenne (azaz $dB(t) = 0$), ami várható értékben teljesül is. Egy pozitív (negatív) előjelű drift tag egy várható növekedést (csökkenést) implikál az adott változóban.

Vegyük észre, hogy a (4.31) egyenletben a drift tagokban a trendkövető kereskedő α paramétere csak páros hatványon szerepel, azaz ez esetben valójában nincs különbség egy kontrariánus és egy trendkövető kereskedő között. Ahol ténylegesen megjelenik a különbség a két fajta technikai kereskedő között, az a (4.30) egyenletben az egyetlen drift tag. Mivel a modell szerint $\beta, \tau > 0$, ezért ha α negatív lenne, akkor a $\beta\alpha p(t) - \frac{1}{\tau}$ mennyiség a $p(t)$ piaci súlytól függetlenül mindig negatív lenne, azaz a trend indikátor egy inherens visszahúzó folyamat lenne. Éppen ezért vizsgáljuk csak a trendkövető kereskedőnek megfelelő $\alpha > 0$ esetet, mert a kontrariánus kereskedő a piaci aktivitásával valójában egy stabilizáló szerepet töltene be.

Vegyük észre azt is, hogy az $y(t)$ logit változó egyenletében az első drift tagban $x^2(t)$, a másodikban pedig $x^4(t)$ szerepel. Ez egyrészt azt jelenti, hogy akár egy pozitív, akár egy negatív trendben van a rendszer, a populációs arány (várhatóan) ugyanabba az irányba fog megváltozni. Másrészt azt is jelenti, hogy kis trend esetén $x^2(t) > x^4(t)$, viszont elegendően nagy $x(t)$ esetén a negyedfokú tag dominál a másodfokúval szemben. A másodfokú tag ered az árjegyzői mechanizmusból (illetve a volatilitás konstans részéből), míg a negyedfokú tag az endogén volatilitásból. A harmadik drift tag ered az exogén vagyonátrendezésekből, amely tag a szinusz-hiperbolikus függvény miatt nagyon kicsi és nagyon nagy $y(t)$ értékek esetén az $x^4(t)$ drift tagot is ledominálja, és egy erős középre húzást eredményez $y(t)$ -ben.

Indítsuk el képzeletben az $(x(t), y(t))$ rendszert az origó közeléből, azaz legyen $y(0) = 0$, $x(0) \approx 0$ és $x(0) > 0$. Ez annak az állapotnak felel meg, hogy az erőviszonyok kiegyensúlyozottak a két kereskedő között, viszont egy kis (pozitív) trend van kialakulóban. Tegyük fel, hogy a $\beta \cdot \alpha$ szorzat elég nagy ahhoz, hogy egy elegendően nagy $p(t) < 1$ esetén az $x(t)$ trend indikátor $\beta\alpha p(t) - \frac{1}{\tau}$ drift tagja pozitív legyen. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy β, α és τ olyanok, hogy $p(t) = \frac{1}{2}$ esetben $\frac{1}{2}\beta\alpha - \frac{1}{\tau} > 0$. Ekkor mivel még $x^2(t)$ dominál $x^4(t)$ -vel szemben, ezért mind $x(t)$, mind $y(t)$ növekvő pályán van. Ráadásul mivel a két változó párhuzamosan növekszik, ezért az $x(t)$ drift együtthatója maga is nő, hiszen $p(t)$ is nő. Ez azt



4.1. ábra. A (4.30)-(4.31), trend indikátor $x(t)$ és logit piaci súly $y(t)$ dinamikai rendszer fázisábrái. Bal oldali két ábra a drifteket, míg a jobb oldali két ábra a volatilitást szemlélteti. A felső két ábra a rendszer megváltozásának irányát mutatja be egyenlő hosszúságúra normált nyilakkal, míg az alsó két ábra a megváltozás sebességét mutatja be hőtésképpel. A hőtésképek esetén a kék szín a lassú megváltozást jelenti, míg a sárga a gyors megváltozást. Paraméterek: $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\tau = 1$, $\sigma = 0.2$, $\gamma = 5$, $\kappa = 0.01$.

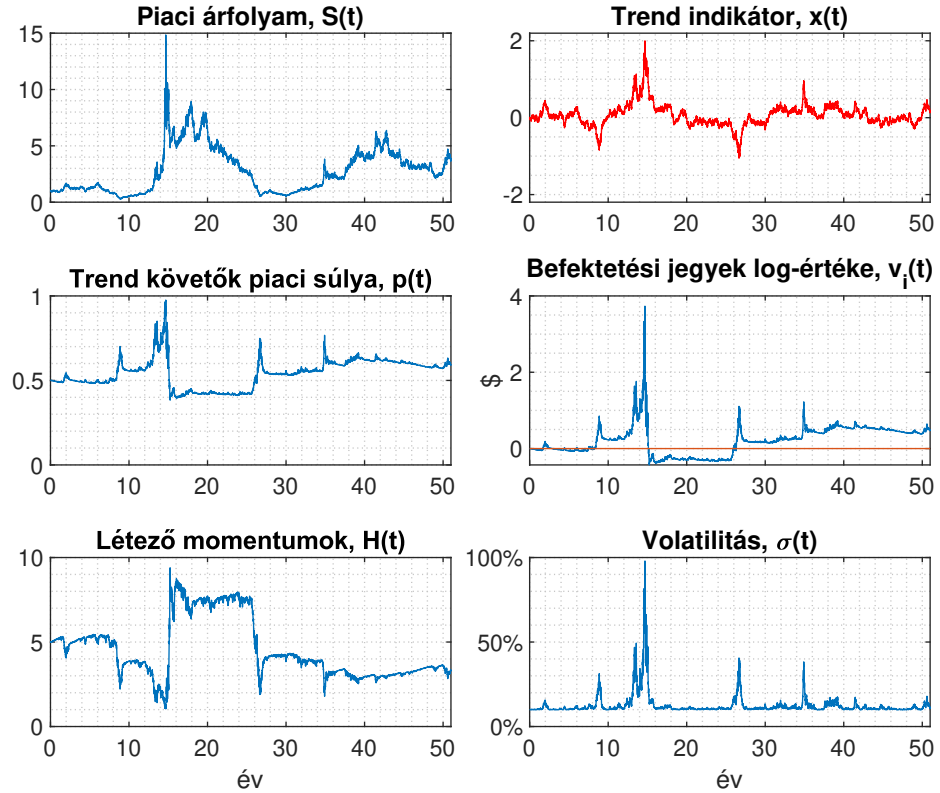
jelenti, hogy $x(t)$ gyorsuló ütemben növekszik.

Ahogy a két változó növekszik, úgy az $y(t)$ egyenletében az endogén volatilitásból

eredő $x^4(t)$ -től függő drift tag kezd dominánssá válni, amely tagnak az együtthatója ráadásul minden paraméterezés mellett negatív. Ez azt jelenti, hogy egy adott (determinisztikus) trajektória mentén ahogy $x(t)$ és $y(t)$ is növekszik, egyszer eljön a pillanat, amikor $y(t)$ már csökkenni fog. Az átfordulás pillanatában azonban $y(t)$ még nagy, azaz az $x(t)$ drift együtthatója még pozitív, így miközben $y(t)$ elkezd csökkenni, $x(t)$ még növekszik egy ideig, ami azt is jelenti, hogy $y(t)$ a negyedfokú tag miatt még gyorsabban fog csökkenni. Amikor $y(t)$ óriási sebességgel egy kritikus szint alá csökken ($y(t) \ll 0$), akkor $x(t)$ driftje is negatívvá válik, azaz elkezd csökkenni. Jól látszik tehát, hogy $x(t)$ késve kezd el csökkenni $y(t)$ -hez képest.

Ekkor tehát egy olyan állapotban vagyunk, ahol $y(t)$ igen kicsi (nagyon negatív), $x(t)$ pedig még pozitív, de csökken. Mivel $y(t)$ kicsi, ezért az $y(t)$ dinamikájában az első két, $x(t)$ -től függő drift tag is kisebb lesz, de még mindig a csökkenés irányába mutat. Az $y(t)$ -nek ezt a csökkenését könnyen ellensúlyozza a harmadik, $\kappa \sinh(y(t))$ drift tag, amely erősen negatív $y(t)$ esetén egy erős növekedést generál. Az $y(t)$ tehát növekszik, míg az $x(t)$ csökken; a rendszer az origó felé közelít, ahonnan azt elindítottuk. Természetesen a valódi dinamika sztochasztikus, de mindenesetre a dinamika determinisztikus csontváza azt mutatja, hogy bizonyos paraméterezések esetén érdekes, periodikus, „örvénylő” viselkedést képes mutatni.

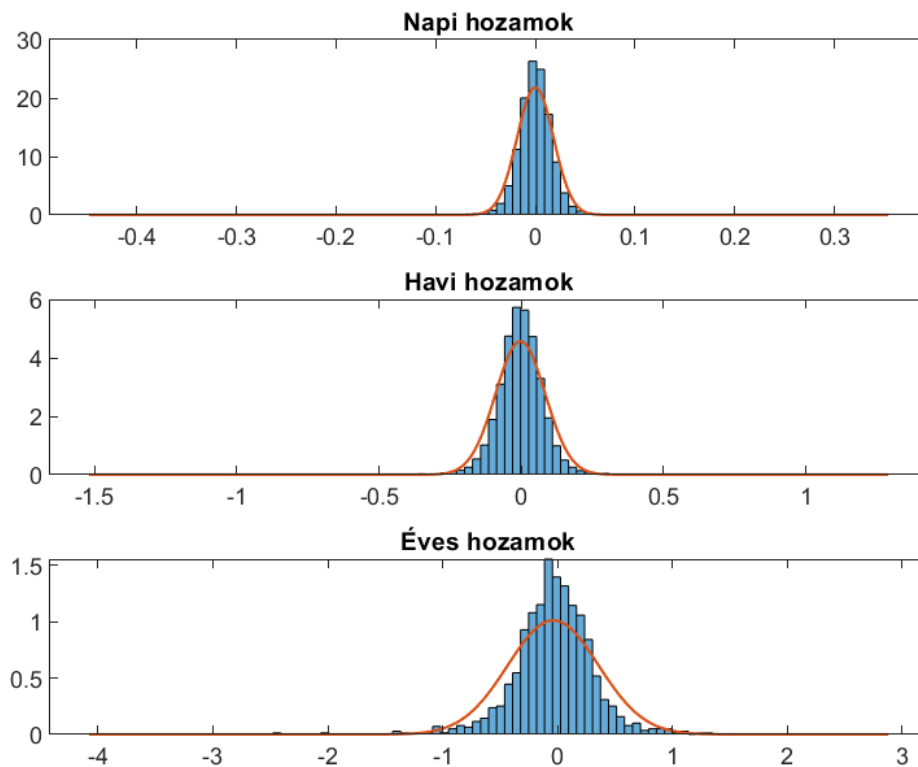
Ezt az örvénylő viselkedést pénzügyi nyelven is le lehet írni. Tegyük fel, hogy a trendkövető és az indexkövető kereskedők hasonló erővel bírnak a piacon, és a trendkövetők egy kis – mondjuk pozitív – trendet azonosítanak. A kis trendre válaszul a trendkövetők egy kis pozíciót fel is vesznek, mellyel az árat – az árhatásuknak köszönhetően – fel is hajtják. Így egyre nagyobb trend kezd kialakulni, amelyre egyre nagyobb és nagyobb pozícióval reagálnak a trendkövetők. Ráadásul mindeközben még a piaci súlyuk is növekszik: az egyre nagyobb pozíciójuknak köszönhetően egyre többet és többet nyernek az áremelkedésen. A piacnak ebben az eufórikus állapotában azonban kezd a piaci egyensúlytalanság olyan méreteket ölteni, hogy az már a volatilitást is nagyon megnöveli. A volatilitás olyan méreteket ölt, hogy várható értékben elkezdenek veszíteni a trendkövetők. Amikor még csak elkezdenek veszíteni, akkor a piaci súlyuk még mindig elég nagy (bár már csökken), ezért a buborékot egy ideig várható értékben még tovább fűjják, bár már lassuló ütemben. Az endogén volatilitás miatt azonban hirtelen óriási lesz a várható veszteségük a trendkövetőknek, akik ráadásul a trend piaci súlyarányokhoz képesti késése miatt lemaradnak



4.2. ábra. Szimulált trajektóriák a trendkövető és az indexkereskedő versenyére az endogén volatilitású modellben. Paraméterek: $\alpha = 2$, $\beta = 0.5$, $\tau = 1$, $\sigma = 0.2$, $\gamma = 2.5$, $\kappa = 0.01$.

a trendfordulóról. A trendkövetők tehát saját sikerességük áldozatai lettek. Ha az árdinamikában mind a várható hozamok, mind a volatilitás szintjén megjelenik a piaci egyensúlytalanság (amit a kereskedők aggregált pozícióival azonosítunk), akkor a trendkövetők valóban képesek lesznek buborékot fújni, amin ráadásul egy ideig sokat nyernek is. Végül azonban a saját maguk által gerjesztett nagy volatilitásba buknak bele.

Az örvénylő dinamikát szemlélteti a 4.1. ábra, ahol a driftet kívül a volatilitást is bemutatjuk. A két bal oldali ábra a rendszer driftjét, míg a jobb oldali két ábra a volatilitását jellemzi. Mind a négy ábra az (x, y) síkon helyezkedik el. A felső két ábrán az egyenlő hosszúságúra normált nyilak a rendszer megváltozásának irányát szemléltetik. A drift esetén (bal felső ábra) a nyilak azt jelentik, hogy a rendszer



4.3. ábra. A különböző időtávú loghozamok hisztogramjai, illetve a megfelelő normális sűrűségfüggvények. A paraméterek megegyeznek a 4.2. ábra paramétereivel.

várhatóan mely irányba fog elmozdulni. Ezen az ábrán látszik a korábban tárgyalt örvénylő viselkedés a $(1, 0)$ és a $(-1, 0)$ pontok környékén. A volatilitás esetén (jobb felső ábra) a nyílak hegye nem került ábrázolásra, hiszen a volatilitásnak nincsen várható iránya. Az alsó két ábra a rendszer megváltozásának sebességét szemlélteti hő térkép segítségével. A drift esetén (bal alsó ábra) három „völgy” vehető ki: egy az origónál, illetve egy-egy az örvények középpontjainál. Az origónál lévő völgy egy triviális stacioner állapotot jelöl, mely a differenciálegyenleket megvizsgálva könnyen ellenőrizhető. A két további völgy is jelenthet két nem triviális stacioner állapotot e mellett a paraméterezés mellett, de ennek analitikus ellenőrzése sem triviális. A volatilitás esetén (jobb alsó ábra) a sebesség az „észak-keleti” és „észak-nyugati” irányba nő, azaz akkor nagy a volatilitás, amikor a trendkövetők dominánsak, és

éppen nagy trendben van a piac.

A modell viselkedését szemlélteti a 4.2. ábra szimuláció segítségével. Mivel a modellben a volatilitás erősen sztochasztikus, ezért a szimulációt nem a szokásos Euler–Maruyama módszerrel, hanem a Runge-Kutta 2 módszer sztochasztikus megfelelőjével végeztük. A szimuláció lépései megtalálhatók az Appendix A.4-ben. A szokásostól való eltérés oka az, hogy míg az Euler–Maruyama módszer a momentumokat $\mathcal{O}(\Delta t)$ hibával becsüli, addig a Runge-Kutta 2 módszer másodrendű, azaz a momentumokat $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ hibával találja el. A módszer és a hozzá kapcsolódó állítások megtalálhatók Röfler (2009) tanulmányában.

A hat ábra egy 50 éves trajektória történetét mutatja több dimenzió mentén. Érdekes ezeket az ábrákat úgy kezelni, mintha valós piaci jelenségeknek egyfajta karikatúráját mutatnák be. A bal felső ábrán az egyetlen kockázatos eszköz dollárban mért árfolyama, $S(t)$ látható. Az ábrán több nagy trend is azonosítható, illetve a volatilitás változása is szembevető. A legfeltűnőbb esemény a 15. év környékén történt óriási felszúrás, majd hirtelen visszaesés. A jobb felső ábrán az $x(t)$ trend indikátor látható, ami az 50 év nagy részében a $(-1, 1)$ intervallumon belül marad, a 15. év környékén szűr fel egészen 2-ig. Mivel $\tau = 1$, ezért ezen az ábrán egy 1-es érték nagyjából egy 100%-os éves hozamnak felel meg.

A bal középső ábrán a trendkövetők $p(t)$ piaci súlyának alakulása látható, melyet az $y(t)$ logit változó visszatranszformálásával kapunk meg. Jól látszik, hogy ahogy a trendkövetők nagy – pozitív vagy negatív – trendeket gerjesztenek, párhuzamosan a piaci súlyuk is megnő. Azonban a korrekció is gyorsan megtörténik: amilyen hirtelen megnő a piaci vagyonarányuk, a hirtelen veszteségek miatt az ugyanolyan gyorsan vissza is tud esni. A hirtelen megváltozásokat nyugodt periódusok követik. A jobb középső ábra a két befektető befektetési jegy dollárértékének logaritmusát, $v_j(t)$ -t mutatja. A befektetési jegyek értékén is tetten érhető az, hogy a trendkövetők a buborékfújason sokat keresnek, azonban az általuk gerjesztett volatilitás is éppen akkor lesz óriási, amikor a pozíciójuk is nagy, és így hirtelen sokat is veszítenek. Fontos megemlíteni, hogy ezen az ábrán az indexkövető kereskedő befektetési jegyének értéke nem véletlenül konstans: ez az additív konstansok kinullázásának eredménye, hiszen az indexkövető kereskedő ekkor egyedül a – nulla kamatot fizető – kockázatmentes eszközt tartja a portfóliójában.

A bal alsó ábra a (4.27) formulát mutatja be, és technikai jelentőséggel bír. A

$H(t)$ folyamat pillanatnyi értéke – pontosabban annak alsó egész része – éppen azzal a számmal egyenlő, amelyik momentuma még létezik és véges az $x(t)$ trend indikátor invariáns eloszlásának, ha hosszú távon rögzítenénk a $p(t)$ piaci súlyarányt. Ezen az ábrán tehát a magas érték egy szelíd piacot, míg az alacsony érték egy nagyon volatilis, vastag szélű eloszlással bíró piacot jelöl. Az látszik, hogy ahogy a $p(t)$ piaci súlyarány megnő, úgy a $H(t)$ folyamat kettő vagy az alá esik be, azaz ekkor az $x(t)$ invariáns eloszlásának varianciája már „végtelen”. Ennek az óriási volatilitásnak lesznek az elszenvedői a trendkövetők. A jobb alsó ábrán a közvetlenül a modelltől számolt volatilitás látható, melynek értelmezése hasonló a $H(t)$ folyamathoz. Ez az ábra már hasonlít egy valós árfolyamat esetén számolt volatilitás folyamatához, ahol erősen volatilis, illetve nyugodt periódusok váltogatják egymást. A 15. év környékén látható 200%-os volatilitás persze egy gyakorló kereskedő számára irreálisnak tűnhet, ezért újra hangsúlyozzuk a modell karikatúrisztikus jellegét. A legnagyobb felszúrást leszámítva azonban a volatilitás nagyjából a 20% és 60% közötti tartományban marad, amely már nem tűnik irreálisnak.

Az endogén, sztochasztikus volatilitás hatását szemlélteti a 4.3. ábra is, ahol egy 2000 éves, szimulációval készített trajektórián számolt, különböző időtávhoz tartozó loghozamok eloszlása látható. A napi, havi és éves hozamok hisztogramjain túl összehasonlításuképpen a megfelelő normális eloszlás sűrűségfüggvénye is ábrázolásra került. Mivel a modell által definiált árfolyamat Itô-folyamat, ezért a hozamok feltételes eloszlása definíció szerint normális. A sztochasztikus volatilitás miatt azonban a hozamok feltétel nélküli eloszlása különböző szórású normálisak keveréseként áll elő. Ennek hatására a hozamok mindhárom vizsgált időtávon erősen csúcsosabbak, és gyengén vastagabb szélűek a normálishoz viszonyítva.

5. fejezet

Összefoglalás

A dolgozatban pénzügyi piacot modelleztünk. Modellünk a heterogén ágens irodalomba illeszthető be, mivel a piacot előre definiált, heurisztikus stratégiát követő kereskedők népesítik be. A kereskedők a piacon elérhető kockázatos és kockázatmentes eszközzel kereskednek, azokból portfóliót képeznek. A megjelenített kereskedő típusok az irodalomban szokásos, így kanonikusnak tekinthető fundamentális, technikai (trendkövető és kontrariánus) és indexkövető kereskedők.

A fundamentális kereskedő ismeri – vagy legalábbis ismertnek véli – a kockázatos eszköz fundamentális értékét. A piaci ár és a fundamentális érték eltéréséből megállapítja a félreárazottság mértékét, amely piaci indikátort a dolgozatban árdiszlokációnak nevezzük. A fundamentális kereskedő a portfóliódöntését az árdiszlokáció alapján hozza meg: ha az alulárazottságot mutat, akkor nagy pozitív pozíciót vesz fel, míg ha felülárazottságot, akkor kis, akár short pozíciót.

A technikai kereskedő csak a piaci árfolyamot követi, és az árfolyam mozgásában trendeket igyekszik azonosítani. Az általa követett indikátort trend indikátornak nevezzük: ez pozitív, ha a közelmúltban inkább emelkedett az árfolyam, és negatív, ha inkább csökkent. A technikai kereskedő két fajtáját különböztetjük meg a szerint, hogy a trend indikátor alapján milyen portfóliódöntést hoz meg. Aki egy emelkedő trendben nagy pozitív, míg csökkenő trendben kis, akár short pozíciót vesz fel, azt trendkövetőnek nevezzük. Aki a trenddel ellentétesen kereskedik, azt kontrariánusnak nevezzük.

Az indexkövető kereskedő egy időben állandó portfóliót tart, ezért elméleti és

modellezési szempontból sem izgalmas szereplő. Ahogy azonban a 2.5. szekcióban is bemutatjuk, a különböző befektetési alapok és ETF-ek kezelt vagyonán nyilvánvalóan tetten érhető a passzív stratégiák térnyerése. Az aktív és passzív befektetések arányában bekövetkezett fordulat a tőkepiacok elmúlt 20 évében végbemenő egyik legmarkánsabb változás. Ennek megfelelően a heterogén ágens irodalomban, és így a dolgozat modelljeiben is megkerülhetetlen kanonikus kereskedő az indexkövető kereskedő.

A dolgozat központi gondolata az, hogy az aktívan kereskedő szereplőknek köszönhetően pillanatnyi keresleti-kínálati egyensúlytalanság alakul ki, és ez az egyensúlytalanság közvetlenül megjelenik a kockázatos eszköz dinamikájában. Ennek az endogén dinamikának köszönhetően ha például egy adott időpontban a kereskedők kereslete meghaladja a piaci kínálatot, akkor az árfolyam várhatóan felfelé mozdul el. Ily módon a kereskedők tényleges árhatással bírnak a piacon. A dolgozat legtöbb eredménye a kereskedők árhatásának matematikai jellemzésével kapcsolatos. Mivel a valós pénzügyi piacokon számtalan olyan hatás megjelenhet, amelynek kimerítő modellezése nem lehetséges, ezért a dolgozatban tárgyalt modellcsalád – a heterogén ágens irodalomhoz hasonlóan – sztochasztikus. Folytonos idejű tárgyalást követtünk: a modellekben megjelenő folyamatok Itô-folyamatok, amelyeket sztochasztikus differenciálegyenletekkel írunk le. A dolgozat egyik célja az volt, hogy az irodalomtól eltérő módon nagy hangsúlyt fektessünk a modellek sztochasztikus jellegének vizsgálatára. Ennek megfelelően több megállapításunk is a központi szerepet betöltő folyamatok (trend indikátor, árdiszlokáció, piaci vagyonarányok) invariáns eloszlásával kapcsolatos.

A 3. fejezetben lévő első modell szorosan kapcsolódik He és Li (2015) hasonló modelljéhez. A technikai kereskedő stratégiája esetén egy nemlineáris függvényalakot feltételeztünk, illetve vizsgáltuk ennek a linearizált változatát is. Tárgyalásunk központi eleme az árfolyam hosszútávú viselkedését leíró, matematikailag jól kezelhető, és a gyakorlatban is használt piaci indikátorok vizsgálata és azok sztochasztikus jellegének vizsgálata. A témakör egyik központi problémáját, a piaci stabilitás kérdését is az indikátorok invariáns eloszlásán keresztül tárgyaljuk. Három specifikációnk volt. A modell lineáris specifikációjában analitikusan meghatároztuk a stabilitás feltételét, miszerint a trendkövetők piaci ereje nem haladhatja meg számottevően a fundamentális kereskedőkét. Szintén a linearizált modellben megadtuk

a piacot meghatározó kétdimenziós (árdiszlokáció, trend indikátor) rendszer invariáns eloszlását, mely gaussinak adódott. A nemlineáris egydimenziós specifikációban analitikusan meghatároztuk az invariáns eloszlás sűrűségfüggvényét. Ez az eloszlás hangsúlyosan nem normális; ha a trendkövetők piaci ereje nagy, még kétmódusú is lehet. A kétmódusú eloszlás feltétele éppen megegyezik a linearizált modellben megadott piaci stabilitási feltétellel. Ez arra utal, hogy amennyiben a trendkövetők piaci ereje számottevően meghaladja a fundamentális kereskedőkéét, akkor nagy mértékű és perzisztens trendek rendszeresen megjelenhetnek a piacon, hosszantartó trendek váltogatják egymást. A kétmódusúság megjelenését eszerint egyfajta lokális instabilitásként értelmezhetjük. A nemlineáris kétdimenziós specifikációban numerikusan, szimuláció nélkül határoztuk meg az invariáns eloszlást. Itt is megfigyelünk kétmódusú viselkedést, hasonló feltételekkel, mint az egydimenziós esetben. Az eloszlásközpontú problémakezelésünknek egy előnye, hogy az eredmények empirikusan is tesztelhetők. A Bitcoin és az SP500 árfolyamait megvizsgálva találtunk arra utaló jeleket, hogy az előbbi esetén erősebben megjelenik a momentum-hatás, mint az utóbbiban. Ez összhangban van a várakozásainkkal, hiszen az SP500 index egy érett piacot testesít meg, ahol lehet értelme fundamentális értékről beszélni, és ennek megfelelően sok piaci elemző vizsgál fundamentális értelemben. Ezzel szemben a Bitcoin esetében a fundamentális érték alig értelmezhető, ezen az új piacon minden bizonnyal a technikai kereskedők dominálnak.

A 3. fejezetben a kereskedők profitabilitása még nem áll a vizsgálat központjában. Ennek az az oka, hogy mint megmutatjuk, a modellben a profitok nem kíváncsan viselkednek: annak a kereskedőnek nagyobb a várható profitja, amelyik domináns a piacon. Ez azt is jelenti, hogy amennyiben a szereplők piaci súlyát endogenizálnánk, úgy az egyik kereskedő végletesen is elhatalmasodhat a másik felett, azaz semmilyen értelemben nem alakul ki egyensúly a kereskedők között. Ez nem szerencsés, hiszen a valós piacok esetén úgy tűnik, nincsenek olyan stratégiák, amelyek végérvényesen legyőznék a többit, evolúciós értelemben a kanonikus kereskedési stratégiák életképesek és stabilak. Ennek a problémának az orvoslása a 4. fejezet célja, amelyben egy, a heterogén ágens irodalomban újnak számító és realisztikus piaci effektust vezetünk be.

A 4. fejezetben lévő második modell tárgyalása jóval általánosabb az előzőnél. A kereskedőket befektetési alapokként kezeljük, és megengedjük, hogy a mögöttes

befektetők az alapok között mozgassák vagyონukat. Az alapok által kezelt vagyont számontartjuk, az alapok piaci súlyát a vagyónarányukkal azonosítjuk, mely így – szemben az előző modellel, ahol a piaci súlyok konstansok voltak – maga is sztochasztikus folyamat lesz. A vagyónarányokon keresztül vizsgáljuk a kereskedők hosszú távú sikerességét is. Míg az előző fejezetben a kereskedők portfóliódöntését közvetlenül definiáltuk, addig itt azt egy klasszikus portfólió-optimalizálási feladatra vezetjük vissza. A fejezetben megjelenő legfontosabb új hatás továbbá az, hogy a kereskedők által gerjesztett keresleti-kínálati egyensúlytalanság nem csak a várható hozamra, hanem a volatilitásra is hatással van. Ezt a hatást endogén volatilitásnak nevezzük, és a hatásmechanizmusról azt feltételezzük, hogy a piaci volatilitás akkor nagy, amikor a piaci egyensúlytalanság abszolút értéke nagy. Az endogén volatilitásra egy konkrét függvényformát is javasolunk a modellben, amely analitikusan viszonylag jól kezelhetőnek bizonyul a számítások során. A modellben a trend indikátor sztochasztikus viselkedését részletesen tárgyaljuk. A trend indikátor invariáns eloszlása t-eloszlásúnak adódik, amelynek pontos sűrűségfüggvényét kiszámoljuk. Az endogén volatilitásnak köszönhetően tehát a trend indikátor – amely a szokásos hozam rokonának is tekinthető – eloszlása vastag szélűnek adódik. A modellparaméterek és az eloszlás kapcsolata olyan, hogy a trend indikátor invariáns eloszlása éppen akkor vastag szélű – amely oly mértékű is lehet, hogy annak még a várható értéke sem létezik –, amikor a destabilizáló hatású trendkövetők dominálnak a piacon. Éppen ennek köszönhetően alakul ki egy hosszú távú egyensúly a trendkövető és az indexkövető kereskedő között. A trendkövető kereskedő sokáig nyereséges tud maradni azzal, hogy a saját maga által gerjesztett buborékot meglovagolja. A dominanciájával párhuzamosan azonban az endogén volatilitásnak köszönhetően a kockázat is olyan mértékben megnő, hogy hirtelen nagy veszteségeket szenved el, és ezzel a hirtelen, buborékszerű áremelkedésnek is vége szakad. Ez a ciklikus egyensúly a modell központi kétdimenziós dinamikai rendszerének fázisábráin megjelenő örvénylő viselkedés képében köszön vissza, illetve szimulációk segítségével is illusztráljuk.

Az összefoglalás hátralevő részében megfogalmazzunk néhány jövőbeli kutatási irányt. Numerikus vizsgálatainkban illusztratív céllal realisztikus paramétereket igyekeztünk választani. A paraméterek hatásának szisztematikus vizsgálata akár egy önálló publikáció témája lehet.

A 3. fejezet empirikus szekciójában a trend indikátor eloszlását kvalitatíve vizs-

gáltuk. Kvantitatív elemzéshez a (3.15) egyenlet sűrűségfüggvényének paramétereit kellene becsülni, például maximum-likelihood módszerrel. Bár az általános formánkra ez komoly nehézségekbe ütközne, de a (3.15) egyenlet megjegyzésében megmutattuk, hogy a sűrűségfüggvény speciális esetben kevert gaussi alakot ölt. Mivel a kevert gaussi illesztésnek komoly irodalma van (egyik alapcikk a témában Hasselblad (1966) írása, Redner és Walker (1984) pedig egy jó összefoglaló a legfontosabb módszerekről), ezért először egy ilyen kalibrációt lehetne megkísérelni.

A 4. fejezetben az általános modellben olyan hatásokról is értekeztünk, amelyek végül nem kerültek specifikálásra és így szoros vizsgálat tárgyát sem képezték. Egy ilyen hatás például a 2.6.2. szekcióban is tárgyalt aktív vagyonátcsoportosítás, amelyet a 4. fejezetben végül nem töltöttünk fel tartalommal, és csak technikai, középre visszahúzó jelentősége maradt. Ennek a hatásnak az endogenizálása bár mindenképpen egy új dimenziót hoz be a modellbe, de cserébe számottevően gazdagítja is azt. Továbbá mind a kereskedett eszközök, mind a kereskedők számossága lehetne nagyobb – bár így a dinamikai rendszer is sokdimenzióssá válna, aminek a matematikai vizsgálata számottevően nehezebb. A kereskedett eszközök számosságának növelésével több, gyakorlatilag is releváns probléma – például dinamikus portfólió allokáció – vizsgálható lenne. Továbbá olyan kereskedési stratégiák is elemezhetők lennének, amelyek egy kockázatos eszköz esetén nem értelmezhetőek, például a 2.3. szekcióban említett „pairs trading”, azaz amely során két eszközben akkor vesz fel egyidőben egy long és egy short pozíciót, amikor a két eszköz egymáshoz viszonyított ára valamilyen jól definiált paritástól eltér.

A. függelék

Appendix

A.1. A Kolmogorov parciális differenciálegyenlet numerikus megoldása

Tegyük fel, hogy az $\mathbf{Y}(t)$ N -dimenziós sztochasztikus folyamat dinamikáját az alábbi SDE írja le

$$d\mathbf{Y}_t = \mathbf{a}(\mathbf{Y}(t)) dt + \Sigma(\mathbf{Y}(t)) dB(t)$$

ahol $\mathbf{a} : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ és $\Sigma : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^{N \times M}$ függvények, míg $B(t)$ egy M -dimenziós Wiener-folyamat független komponensekkel. Legyen $\mathbf{D}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\Sigma(\mathbf{y})\Sigma^\top(\mathbf{y})$. Ekkor az $\mathbf{Y}(t)$ folyamat $f_t(\mathbf{y})$ t -beli sűrűségfüggvényének időbeli fejlődését írja le az úgynevezett (forward) Kolmogorov parciális differenciálegyenlet:

$$\frac{\partial f_t(\mathbf{y})}{\partial t} = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial a_j(\mathbf{y}) f_t(\mathbf{y})}{\partial y_j} + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 D_{j,k}(\mathbf{y}) f_t(\mathbf{y})}{\partial y_j \partial y_k} \quad (\text{A.1})$$

A rendszer *invariáns sűrűségfüggvényének* nevezzük és $f_\infty(\mathbf{y})$ -vel jelöljük azt a sűrűségfüggvényt, melynek az időbeli megváltozása zérus, azaz amelyre $\frac{\partial f_\infty(\mathbf{y})}{\partial t} = 0$ az (A.1) egyenlet értelmében. A (3.12) sztochasztikus differenciálegyenlet-rendszer $f_\infty(u, x)$ invariáns sűrűségfüggvényét úgy számítjuk, hogy a kapcsolódó (A.1)-es egyenletet oldjuk meg a $\mathbb{T} \times \mathbb{U} \times \mathbb{X} = \{0, 0 + \Delta t, \dots, T\} \times \{\underline{u}, \underline{u} + \Delta u, \dots, \bar{u}\} \times \{\underline{x}, \underline{x} + \Delta x, \dots, \bar{x}\}$ rácson. A számítások során a legfontosabb feltevésünk, hogy az

$f_t(u, x)$ sűrűségfüggvény „releváns tartója” korlátos:

$$\lim_{(u^2+x^2) \rightarrow \infty} f_t(u, x) = 0 \quad \forall t \in [0, \infty),$$

azaz $f_t(u, x) \approx 0$ ha az (u, x) pont az origótól elegendően távol helyezkedik el. A numerikus számítások szempontjából ez a feltevés azt jelenti, hogy az $\mathbb{U} \times \mathbb{X}$ rács szélén a sűrűségfüggvény értékét egységesen nullának állítjuk be:

$$\begin{aligned} f_t(u, \underline{x}) &= f_t(u, \bar{x}) = 0 \quad \forall u \in \mathbb{U} \text{ és } \forall t \in \mathbb{T}, \\ f_t(\underline{u}, x) &= f_t(\bar{u}, x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{X} \text{ és } \forall t \in \mathbb{T}. \end{aligned}$$

Legyen $f_t(\mathbb{U}, \mathbb{X}) \in \mathbb{R}^{|\mathbb{U}| \times |\mathbb{X}|}$ egy sűrűségmátrix (azaz az $f_t(u, x)$ függvény diszkrétizáltja az $\mathbb{U} \times \mathbb{X}$ rács pontjaiban) a $t \in \mathbb{T}$ időpontban. A számításaink egyetlen iterációja három lépésből áll. Az első lépésben megkapjuk $f_{t+\Delta t}^*(\mathbb{U}, \mathbb{X})$ -t a (A.1)-es egyenlet explicit megoldásaként, ahol a deriváltakat a véges differenciák módszerével közelítjük:

$$\begin{aligned} f_{t+\Delta t}^*(u, x) &= f_t(u, x) - \frac{(a_u \cdot f_t)(u + \Delta u, x) - (a_u \cdot f_t)(u - \Delta u, x)}{2\Delta u} \Delta t \\ &\quad - \frac{(a_x \cdot f_t)(u, x + \Delta x) - (a_x \cdot f_t)(u, x - \Delta x)}{2\Delta x} \Delta t \\ &\quad + D_{u,u} \frac{f_t(u + \Delta u, x) - 2f_t(u, x) + f_t(u - \Delta u, x)}{(\Delta u)^2} \Delta t \\ &\quad + D_{x,x} \frac{f_t(u, x + \Delta x) - 2f_t(u, x) + f_t(u, x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \Delta t \\ &\quad + D_{u,x} \frac{f_t(u + \Delta u, x + \Delta x) + f_t(u - \Delta u, x - \Delta x)}{2(\Delta u)(\Delta x)} \Delta t \\ &\quad - D_{u,x} \frac{f_t(u + \Delta u, x - \Delta x) + f_t(u - \Delta u, x + \Delta x)}{2(\Delta u)(\Delta x)} \Delta t \end{aligned}$$

$\forall (u, x) \in \bar{\mathbb{U}} \times \bar{\mathbb{X}} = \{\underline{u} + \Delta u, \dots, \bar{u} - \Delta u\} \times \{\underline{x} + \Delta x, \dots, \bar{x} - \Delta x\}$ -re.

$f_{t+\Delta t}^*(\mathbb{U}, \mathbb{X})$ esetén nem biztosított, hogy az valóban egy sűrűségmátrix abban az értelemben, hogy lehetnek negatív komponensei, valamint a

$$\sum_{u \in \mathbb{U}} \sum_{x \in \mathbb{X}} f_{t+\Delta t}^*(u, x) \Delta u \Delta x = 1$$

feltétel nem feltétlenül teljesül. Ezért minden iterációban a következő két, korrekciós lépést hajtjuk végre:

$$\begin{aligned} f_{t+\Delta t}^{**}(u, x) &= \max(f_{t+\Delta t}^*(u, x), 0) \quad \forall (u, x) \in \mathbb{U} \times \mathbb{X} \quad \text{és} \\ f_{t+\Delta t}(u, x) &= \frac{f_{t+\Delta t}^{**}(u, x)}{\sum_{u \in \mathbb{U}} \sum_{x \in \mathbb{X}} f_{t+\Delta t}^{**}(u, x) \Delta u \Delta x} \quad \forall (u, x) \in \mathbb{U} \times \mathbb{X}. \end{aligned}$$

Számításaink során az iterációt egyenletes eloszlásból indítjuk:

$$f_0(u, x) = \frac{1}{|\overline{\mathbb{U}}| \cdot |\overline{\mathbb{X}}| \Delta u \Delta x} \quad \forall (u, x) \in \overline{\mathbb{U}} \times \overline{\mathbb{X}}$$

A.2. Bizonyítások

Bizonyítás (1. állítás). A (3.13)-es SDE megoldása¹

$$\mathbf{Y}(t) = e^{-\Theta t} \mathbf{Y}(0) + \int_0^t e^{-\Theta(t-v)} \Sigma d\mathbf{B}(v), \quad (\text{A.2})$$

amely akkor és csak akkor aszimptotikusan stacioner eloszlású (lásd például Shreve (2004)), ha az $\dot{\mathbf{y}} = -\Theta \mathbf{y}$ általános differenciálegyenlet-rendszer erősen stabil, azaz ha Θ minden sajátértékének a valós része pozitív. Ez teljesül, ha

$$\beta(p_c \alpha_c - p_f \alpha_f) < \frac{1}{\tau} \quad \text{és} \quad \beta p_f \alpha_f > 0$$

egyenként fennáll.

Továbbá, mivel (A.2)-ban az integrandus determinisztikus, ezért $\mathbf{Y}(t)$ Gauss-eloszlású $\forall t > 0$ -ra. A Wiener-olyamat szerinti integrál várható értéke nulla, így

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[\mathbf{Y}(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\Theta t} \mathbf{Y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

ha Θ minden sajátértéke pozitív, melyet itt a korábbiak értelmében már felteszünk.

Legyen $\boldsymbol{\rho}(t) = \text{COV}[\mathbf{Y}(t)] = E[\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^\top(t)] - E[\mathbf{Y}(t)]E[\mathbf{Y}^\top(t)]$. Legyen t

¹Itt $e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}$, melyre teljesül a szokásos $(e^{\mathbf{A}t})' = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$ összefüggés.

elegendően nagy, hogy (A.3) miatt $\boldsymbol{\rho}(t) \approx E[\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^\top(t)]$. Ekkor

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\rho}(t) &= dE[\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^\top(t)] = E[d(\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^\top(t))] = \\ &= E[(d\mathbf{Y}(t))\mathbf{Y}^\top(t)] + E[\mathbf{Y}(t)(d\mathbf{Y}^\top(t))] + E[d\mathbf{Y}(t)d\mathbf{Y}^\top(t)] = \\ &= -\boldsymbol{\Theta}E[\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^\top(t)]dt - E[\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^\top(t)]\boldsymbol{\Theta}^\top dt + \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^\top dt \implies \\ \implies \dot{\boldsymbol{\rho}} &= -\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\Theta}^\top + \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^\top \end{aligned}$$

Az aszimptotikus gaussi eloszlás kovarianciamátrixát kapjuk meg, ha $\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{0}$, és megoldjuk a vonatkozó egyenletrendszert. \square

Bizonyítás (2. állítás). A (3.14)-ös SDE egy időhomogén egydimenziós Ito-folyamat az alábbi

$$dx(t) = b(x(t))dt + \boldsymbol{\sigma}^\top(x(t))d\mathbf{B}(t)$$

formában, ahol esetünkben a volatilitás konstans: $\boldsymbol{\sigma}(x_t) = \boldsymbol{\sigma}_s \neq \mathbf{0}$. Cherny (2004) fő állítása alapján az invariáns eloszlás sűrűségfüggvénye ekkor

$$f_\infty(x) = C \frac{\exp\left(\int^x \frac{2b(y)}{\boldsymbol{\sigma}^\top(y)\boldsymbol{\sigma}(y)} dy\right)}{\boldsymbol{\sigma}^\top(x)\boldsymbol{\sigma}(x)}$$

ahol \int^x az indefinit integrált jelöli, míg $C > 0$ egy megfelelő normalizáló konstans. Helyettesítsük be a megfelelő függvényeket:

$$b(y) = -\left(\beta p_f \alpha_f + \frac{1}{\tau}\right)y + \beta p_c \alpha_c x^* \tanh\left(\frac{y}{x^*}\right)$$

$$\text{és } \boldsymbol{\sigma}(x) = \boldsymbol{\sigma}_s,$$

és megkapjuk az invariáns eloszlás sűrűségfüggvényét:

$$f_\infty(x) = C \left(\cosh\left(\frac{x}{x^*}\right)\right)^{\frac{2\beta p_c \alpha_c (x^*)^2}{\boldsymbol{\sigma}_s^\top \boldsymbol{\sigma}_s}} \exp\left(-\frac{\frac{1}{\tau} + \beta p_f \alpha_f}{\boldsymbol{\sigma}_s^\top \boldsymbol{\sigma}_s} x^2\right)$$

Mivel $\cosh(x)$ függvény $\exp(x)$ nagyságrendben nő a plusz és mínusz végtelen irányába is, $f_\infty(x)$ függvény $\exp(-x^2)$ nagyságrendben cseng le, így $f_\infty(x)$ integrálható, és valóban sűrűségfüggvény. \square

Bizonyítás (3. állítás). $f_\infty(x)$ ((3.15)-os egyenlet) egymódusú, ha $f''_\infty(0) < 0$, míg kétmódusú, ha $f''_\infty(0) > 0$:

$$\begin{aligned} f''_\infty(0) &< 0 \\ \frac{\frac{2\beta p_c \alpha_c (x^*)^2}{\sigma_s^\top \sigma_s}}{(x^*)^2} - \frac{2}{\frac{\sigma_s^\top \sigma_s}{\frac{1}{\tau} + \beta p_f \alpha_f}} &< 0 \\ \beta(p_c \alpha_c - p_f \alpha_f) &< \frac{1}{\tau} \end{aligned}$$

□

Bizonyítás (4. állítás). Megmutatjuk a számításokat Π_f esetén. Π_c esetén minden hasonlóan számolható. Először (3.10) alapján felírjuk $S(t) = e^{s(t)}$ dinamikáját:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \left(\frac{\sigma_s^\top \sigma_s}{2} + \beta \sum_{j \in \{f, c, i\}} p_j Z_j(t) \right) dt + \sigma_s^\top d\mathbf{B}(t)$$

(3.16) alapján felírhatjuk a vagyon logaritmusának dinamikáját:

$$d(\log W_f)(t) = Z_f(t) \frac{dS(t)}{S(t)} - \frac{Z_f^2(t)}{2} \frac{d\langle S \rangle(t)}{S^2(t)}$$

Felhasználva, hogy a linearizált specifikáció esetén $Z_f(t) = \alpha_f u(t)$, $Z_c(t) = \alpha_c x(t)$ és $Z_i(t) = 0$, a vagyon logaritmusának dinamikája felírható $u(t)$ és $x(t)$ segítségével:

$$\begin{aligned} d(\log W_f)(t) &= \left(\alpha_f \frac{\sigma_s^\top \sigma_s}{2} u(t) + \beta p_c \alpha_c \alpha_f u(t) x(t) + \alpha_f^2 \left(\beta p_f - \frac{\sigma_s^\top \sigma_s}{2} \right) u^2(t) \right) dt + \\ &\quad + \alpha_f u(t) \sigma_s^\top d\mathbf{B}_t \\ d(\log W_f)(t) &= g(u(t), u(t)x(t), u^2(t)) dt + \alpha_f u(t) \sigma_s^\top d\mathbf{B}_t \end{aligned}$$

ahol $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ egy affin függvény. Innen a toronyszabály alkalmazásával², illetve felhasználva, hogy az 1. állítás szerint ismerjük $(u(t), x(t))^\top$ invariáns eloszlását,

²Itt az $\mathcal{F}(t)$ -re vett feltételes várható értéket E_t -vel jelöljük, azaz $E[X_T | \mathcal{F}(t)] \doteq E_t[X_T]$

megkapjuk a hosszú távú profitabilitást:

$$\begin{aligned}
\Pi_f &= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{\log W_f(T) - \log W_f(0)}{T} \right] = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[\int_0^T d(\log W_f)(t) \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[\int_0^T E_t[d(\log W_f)(t)] \right] = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[\int_0^T g(u(t), u(t)x(t), u^2(t)) dt \right] = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(E[u(t)], E[u(t)x(t)], E[u^2(t)]) dt = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(E[u_\infty], E[u_\infty x_\infty], E[u_\infty^2]) dt = \\
&= g(0, E[u_\infty x_\infty], E[u_\infty^2])
\end{aligned}$$

□

A.3. Trend indikátor invariáns eloszlása

Az invariáns sűrűségfüggvény $f(x)$ Cherny (2004) alapján az

$$x_\infty \sim f(x) = \frac{C}{\sigma^2(x)} \exp \left(\int^x \frac{2\mu(u)}{\sigma^2(u)} du \right) \quad (\text{A.4})$$

formula³ alapján adódik, ahol $\mu(x)$ a drift, $\sigma(x)$ a volatilitás, C pedig egy megfelelő normalizáló konstans. Az integrálandó mennyiséggel szerencsénk van, mert kis átalakítás után a számlálóban éppen a nevező deriváltja jelenik meg:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2\mu(x)}{\sigma^2(x)} dx &= \int \frac{-2Kx}{\sigma^2(1 + \Gamma^2 x^2)} dx = \\
&= -\frac{K}{\Gamma^2 \sigma^2} \int \frac{2\Gamma^2 x}{(1 + \Gamma^2 x^2)} dx = -\frac{K}{\Gamma^2 \sigma^2} \log(1 + \Gamma^2 x^2)
\end{aligned}$$

Az utolsó lépésnél a határozatlan integrálásból adódó konstanst elhagyjuk (pon-

³Itt visszaélünk a jelöléssel a tekintetben, hogy x egyrészt jelöli magát a folyamatot (illetve $x(t)$ annak t időpontbeli értékét), illetve a folyamat invariáns sűrűségfüggvényének független változóját is.

tosabban nullának választjuk), mert az (A.4) formulában az exponencializálás után bármilyen konstans úgyis a C normalizáló konstansba olvadna. Az iménti eredményt a (A.4) formulába helyettesítve az invariáns sűrűségfüggvény

$$f(x) = \frac{C}{\sigma^2 (1 + \Gamma^2 x^2)} (1 + \Gamma^2 x^2)^{-\frac{K}{\Gamma^2 \sigma^2}} = C (1 + \Gamma^2 x^2)^{-(1 + \frac{K}{\Gamma^2 \sigma^2})} \quad (\text{A.5})$$

Vessük össze a (A.5) sűrűségfüggvényt a sztenderd ν szabadságfokú t-eloszlásával: $g(t) = C \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{1+\nu}{2}}$. Rövid számolás után adódik, hogy az invariáns eloszlás a t-eloszlás egy skálázottja, pontosabban:

$$x_\infty \stackrel{d}{=} \frac{T}{\Gamma \sqrt{1 + \frac{2K}{\Gamma^2 \sigma^2}}} \quad \text{ahol} \quad T \sim t \left(1 + \frac{2K}{\Gamma^2 \sigma^2}\right)$$

A.4. Sztochasztikus Runge-Kutta 2 módszer

Az alábbiak Rößler (2009) alapján készültek.

Legyen

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{X}(t)) dt + \mathbf{b}(\mathbf{X}(t)) dB(t)$$

egy d -dimenziós Itô-folyamat, ahol $\mathbf{a} : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ és $\mathbf{b} : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ függvények, $B(t)$ egy (1-dimenziós) Wiener-folyamat. Válasszuk a $[0, T]$ időtengely egy ekvidisztáns partícióját: $0 = t_0 < \dots < t_N = T$, ahol $t_i - t_{i-1} = \Delta t \ \forall i = 1, \dots, N$. Jelölje ΔB_i a Wiener-folyamat növekményeit, azaz $\Delta B_i \sim \mathcal{N}(0, \Delta t) \ \forall i$ -re.

Ekkor a numerikus szimuláció egyetlen lépése a következő:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{i+1} = & \mathbf{X}_i + \frac{1}{2} \left(\mathbf{a}(\mathbf{X}_i) + \mathbf{a}(\mathbf{u}_i) \right) \Delta t + \\ & + \frac{1}{4} \left(\mathbf{b}(\mathbf{u}_i^+) + 2\mathbf{b}(\mathbf{X}_i) + \mathbf{b}(\mathbf{u}_i^-) \right) \Delta B_{i+1} + \\ & + \frac{1}{4} \left(\mathbf{b}(\mathbf{u}_i^+) - \mathbf{b}(\mathbf{u}_i^-) \right) \frac{\Delta B_{i+1}^2 - \Delta t}{\sqrt{\Delta t}} \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_i &= \boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{X}_i) \Delta t + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}_i) \Delta B_{i+1} \\ \boldsymbol{u}_i^\pm &= \boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{X}_i) \Delta t \pm \boldsymbol{b}(\boldsymbol{X}_i) \sqrt{\Delta t}\end{aligned}$$

Irodalom

- Abarbanell, J. S. és Bushee, B. J. (1998). Abnormal Returns to a Fundamental Analysis Strategy. *The Accounting Review* 73.1, 19–45. old. ISSN: 00014826.
- Alchian, A. A. (1950). Uncertainty, evolution, and economic theory. *Journal of Political Economy* 58.3, 211–221. old. DOI: 10.1086/256940.
- Amir, R., Evstigneev, I. V. és Schenk-Hoppé, K. R. (2013). Asset market games of survival: a synthesis of evolutionary and dynamic games. *Annals of Finance* 9.2, 121–144. old. DOI: 10.1007/s10436-012-0210-5.
- Arifovic, J. (1996). The behavior of the exchange rate in the genetic algorithm and experimental economies. *Journal of Political Economy* 104.3, 510–541. old. DOI: 10.1086/262032.
- Beja, A. és Goldman, M. B. (1980). On the dynamic behavior of prices in disequilibrium. *The Journal of Finance* 35.2, 235–248. old. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1980.tb02151.x.
- Bihary, Z. és Víg, A. A. (2020). Heterogén kereskedési stratégiák hatása a piaci árfolyamokra. *Közgazdasági Szemle* 67.4, 688–707. old. DOI: 10.18414/KSZ.2020.7-8.688.
- Black, F. és Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* 81.3, 637–654. old. DOI: 10.1086/260062.
- Brock, W. A. és Hommes, C. H. (1998). Heterogeneous beliefs and routes to chaos in a simple asset pricing model. *Journal of Economic Dynamics and Control* 22.8-9, 1235–1274. old. DOI: 10.1016/s0165-1889(98)00011-6.
- Brock, W. A., Lakonishok, J. és LeBaron, B. (1992). Simple technical trading rules and the stochastic properties of stock returns. *The Journal of Finance* 47.5, 1731–1764. old. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1992.tb04681.x.

- Cabrales, A. (2000). Stochastic replicator dynamics. *International Economic Review* 41.2, 451–481. old. DOI: 10.1111/1468-2354.00071.
- Cheah, E.-T. és Fry, J. (2015). Speculative bubbles in Bitcoin markets? An empirical investigation into the fundamental value of Bitcoin. *Economics Letters* 130, 32–36. old. DOI: 10.1016/j.econlet.2015.02.029.
- Chen, S.-H., Chang, C.-L. és Du, Y.-R. (2012). Agent-based economic models and econometrics. *The Knowledge Engineering Review* 27.2, 187–219. old. DOI: 10.1017/S0269888912000136.
- Chen, S.-H. és Yeh, C.-H. (2001). Evolving traders and the business school with genetic programming: A new architecture of the agent-based artificial stock market. *Journal of Economic Dynamics and Control* 25.3-4, 363–393. old. DOI: 10.1016/S0165-1889(00)00030-0.
- Cherny, A. (2004). Invariant Distributions for Singular Stochastic Differential Equations. *Stochastics and Stochastic Reports* 76.2, 101–112. old. DOI: 10.1080/10451120410001697837.
- Chiarella, C., Dieci, R. és Gardini, L. (2006). Asset price and wealth dynamics in a financial market with heterogeneous agents. *Journal of Economic Dynamics and Control* 30.9-10, 1755–1786. old. DOI: 10.1016/j.jedc.2005.10.011.
- Chiarella, C., Dieci, R. és He, X.-Z. (2009). „Heterogeneity, Market Mechanisms, and Asset Price Dynamics”. *Handbook of Financial Markets: Dynamics and Evolution*. Elsevier, 277–344. old. DOI: 10.1016/b978-012374258-2.50009-9.
- Chiarella, C., Dieci, R., He, X.-Z. és Li, K. (2013). An evolutionary CAPM under heterogeneous beliefs. *Annals of Finance* 9.2, 185–215. old. DOI: 10.1007/s10436-012-0215-0.
- Chiarella, C. és Iori, G. (2002). A simulation analysis of the microstructure of double auction markets. *Quantitative Finance* 2.5, 346–353. old. DOI: 10.1088/1469-7688/2/5/303.
- Cont, R. és Müller, M. S. (2021). A Stochastic Partial Differential Equation Model for Limit Order Book Dynamics. *SIAM Journal on Financial Mathematics* 12.2, 744–787. old. DOI: 10.1137/19M1254489.
- De Long, J. B., Shleifer, A., Summers, L. H. és Waldmann, R. J. (1990). Noise trader risk in financial markets. *Journal of Political Economy* 98.4, 703–738. old. DOI: 10.1086/261703.

- Evstigneev, I. V., Hens, T. és Schenk-Hoppé, K. R. (2008). Globally evolutionarily stable portfolio rules. *Journal of Economic Theory* 140.1, 197–228. old. DOI: 10.1016/j.jet.2007.09.005.
- Friedman, M. (1953). *Essays in positive economics*. University of Chicago Press.
- Froot, K. A. és Dabora, E. M. (1999). How are stock prices affected by the location of trade?: *Journal of Financial Economics* 53.2, 189–216. old. DOI: 10.1016/S0304-405X(99)00020-3.
- Goyal, A. és Jegadeesh, N. (2017). Cross-sectional and time-series tests of return predictability: what is the difference?: *The Review of Financial Studies* 31.5, 1784–1824. old. DOI: 10.1093/rfs/hhx131.
- Hasselblad, V. (1966). Estimation of parameters for a mixture of normal distributions. *Technometrics* 8.3, 431–444. old. DOI: 10.1080/00401706.1966.10490375.
- Hayek, F. A. (1945). The use of knowledge in society. *The American Economic Review* 35.4, 519–530. old.
- Hayes, A. S. (2019). Bitcoin price and its marginal cost of production: support for a fundamental value. *Applied Economics Letters* 26.7, 554–560. old. DOI: 10.1080/13504851.2018.1488040.
- He, X.-Z. és Li, K. (2012). Heterogeneous beliefs and adaptive behaviour in a continuous-time asset price model. *Journal of Economic Dynamics and Control* 36.7, 973–987. old. DOI: 10.1016/j.jedc.2012.02.002.
- He, X.-Z. és Li, K. (2015). Profitability of time series momentum. *Journal of Banking & Finance* 53, 140–157. old. DOI: 10.1016/j.jbankfin.2014.12.017.
- He, X.-Z., Li, K. és Li, Y. (2018). Asset allocation with time series momentum and reversal. *Journal of Economic Dynamics and Control* 91, 441–457. old. DOI: 10.1016/j.jedc.2018.02.004.
- He, X.-Z., Li, K., Wei, J. és Zheng, M. (2009). Market stability switches in a continuous-time financial market with heterogeneous beliefs. *Economic Modelling* 26.6, 1432–1442. old. DOI: 10.1016/j.econmod.2009.07.016.
- He, X.-Z., Li, Y. és Zheng, M. (2019). Heterogeneous agent models in financial markets: A nonlinear dynamics approach. *International Review of Financial Analysis* 62, 135–149. old. DOI: 10.1016/j.irfa.2018.11.016.

- He, X.-Z. és Zheng, M. (2010). Dynamics of moving average rules in a continuous-time financial market model. *Journal of Economic Behavior & Organization* 76.3, 615–634. old. DOI: 10.1016/j.jebo.2010.08.005.
- Hens, T. és Schenk-Hoppé, K. R. (2005). Evolutionary stability of portfolio rules in incomplete markets. *Journal of Mathematical Economics* 41.1-2, 43–66. old. DOI: 10.1016/j.jmateco.2003.01.001.
- Heston, S. L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies* 6.2, 327–343. old. DOI: 10.1093/rfs/6.2.327.
- Hofbauer, J. és Sigmund, K. (1998). *Evolutionary games and population dynamics*. Cambridge university press. DOI: 10.1017/cbo9781139173179.
- Hommes, C., Huang, H. és Wang, D. (2005). A robust rational route to randomness in a simple asset pricing model. *Journal of Economic Dynamics and Control* 29.6, 1043–1072. old. DOI: 10.1016/j.jedc.2004.08.003.
- Jarrow, R. A. (1992). Market manipulation, bubbles, corners, and short squeezes. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 311–336. old. DOI: 10.2307/2331322.
- Johnson, N. L., Kotz, S. és Balakrishnan, N. (1995). *Continuous univariate distributions, volume 2*. Wiley-Interscience. ISBN: 978-0471584940.
- Kelly, J. L. (1956). A new interpretation of information rate. *The Bell System Technical Journal* 35.4, 917–926. old. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1956.tb03809.x.
- Keynes, J. M. (1936). *The General Theory of Employment, Interest and Money*. Macmillan Cambridge University Press.
- LeBaron, B. (2001). A builder’s guide to agent-based financial markets. *Quantitative Finance* 1.2, 254–261. old. DOI: 10.1088/1469-7688/1/2/307.
- LeBaron, B. (2011). Active and passive learning in agent-based financial markets. *Eastern Economic Journal* 37.1, 35–43. old. DOI: 10.1057/eej.2010.53.
- Li, K. (2014). *Asset Price Dynamics with Heterogeneous Beliefs and Time Delays*. PhD Thesis 1-2014. Finance Discipline Group, UTS Business School, University of Technology, Sydney. URL: <https://ideas.repec.org/b/uts/finphd/1-2014.html>.

- Malkiel, B. G. és Fama, E. F. (1970). Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *The Journal of Finance* 25.2, 383–417. old. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1970.tb00518.x.
- Malkiel, B. G. (1973). *A random walk down Wall Street*. W. W. Norton & Company. ISBN: 0-393-06245-7.
- Manski, C. F. és McFadden, D. (1981). *Structural analysis of discrete data with econometric applications*. Cambridge: MIT Press.
- Merton, R. C. (1969). Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case. *The Review of Economics and Statistics* 51.3, 247–257. old. DOI: 10.2307/1926560.
- Møller, J. K. és Madsen, H. (2010). *From state dependent diffusion to constant diffusion in stochastic differential equations by the Lamperti transform*. IMM-Technical Report-2010-16. Technical University of Denmark, DTU Informatics, Building 321. URL: <https://orbit.dtu.dk/en/publications/from-state-dependent-diffusion-to-constant-diffusion-in-stochasti>.
- Moskowitz, T. J., Ooi, Y. H. és Pedersen, L. H. (2012). Time series momentum. *Journal of Financial Economics* 104.2, 228–250. old. DOI: 10.1016/j.jfineco.2011.11.003.
- Nash, J. (1951). Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, 286–295. old. DOI: 10.2307/1969529.
- Neumann, J. von és Morgenstern, O. (1944). *Theory of games and economic behavior*. Princeton University Press.
- Officer, R. R. (1972). The distribution of stock returns. *Journal of the American Statistical Association* 67.340, 807–812. old. DOI: 10.2307/2284641.
- Palczewski, J., Schenk-Hoppé, K. R. és Wang, T. (2016). Itchy feet vs cool heads: Flow of funds in an agent-based financial market. *Journal of Economic Dynamics and Control* 63, 53–68. old. DOI: 10.1016/j.jedc.2015.12.002.
- Poterba, J. M. és Summers, L. H. (1988). Mean reversion in stock prices: Evidence and implications. *Journal of Financial Economics* 22.1, 27–59. old. DOI: 10.1016/0304-405X(88)90021-9.
- Redner, R. A. és Walker, H. F. (1984). Mixture densities, maximum likelihood and the EM algorithm. *SIAM review* 26.2, 195–239. old. DOI: 10.1137/1026034.

- Richardson, S., Tuna, I. és Wysocki, P. (2010). Accounting anomalies and fundamental analysis: A review of recent research advances. *Journal of Accounting and Economics* 50.2-3, 410–454. old. DOI: 10.1016/j.jacceco.2010.09.008.
- Rößler, A. (2009). Second order Runge–Kutta methods for Itô stochastic differential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 47.3, 1713–1738. old. DOI: 10.1137/060673308.
- Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance* 19.3, 425–442. old. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x.
- Shiller, R. J. (1981). Do Stock Prices Move Too Much to be Justified by Subsequent Changes in Dividends?: *The American Economic Review* 71.3, 421–436. old. ISSN: 00028282.
- Shleifer, A. és Vishny, R. W. (1997). The limits of arbitrage. *The Journal of Finance* 52.1, 35–55. old. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1997.tb03807.x.
- Shreve, S. E. (2004). *Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models*. Springer Science & Business Media. ISBN: 0-387-40101-6.
- Singal, V. (2004). *Beyond the random walk*. Oxford University Press. ISBN: 978-0195304220.
- Sushko, V. és Turner, G. (2018). The implications of passive investing for securities markets. *BIS Quarterly Review, March*. URL: <https://ssrn.com/abstract=3139242>.