

Szepesváry László

Informatikai kihívások a modern aktuáriusi  
modellezésben:

Kvantitatív módszerek és gépi algoritmusok alkalmazása a  
pénzáram modellezésben és az árazásban

Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék

Témavezető: Dr. Kovács Erzsébet CSc

Copyright © Szepesváry László

Budapesti Corvinus Egyetem  
Közgazdasági és Gazdaságinformatikai Doktori Iskola

Informatikai kihívások a modern aktuáriusi  
modellezésben:

Kvantitatív módszerek és gépi algoritmusok alkalmazása a  
pénzáram modellezésben és az árazásban

Doktori értekezés

Szepesváry László



Budapest, 2022



## Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke .....	3
Táblázatok jegyzéke .....	5
1. BEVEZETÉS .....	7
2. KVANTITATÍV MÓDSZEREK ALKALMAZÁSA AZ ÉLETBIZTOSÍTÁSI CASH FLOW MODELLEZÉS KIEMELTEN FONTOS TERÜLETEIN .....	12
2.1. Klasszikus életbiztosítási technikák és azok rövid története.....	13
2.2. A modern életbiztosítási aktuáriusi technikák kialakulása, cash flow modellezés és annak legfontosabb alkalmazási területei .....	15
2.2.1 Profitteszt, a modern díjszámítás alapja .....	16
2.2.2 Szolvencia II, a kockázatok valós természetén alapuló tőkekövetelmény keretrendszere.....	17
2.2.3 IFRS 17, a biztosítási szerződések komplex számviteli szabványa.....	23
2.2.4 A cash flow modellezés egyéb alkalmazási területei.....	26
2.3. Az életbiztosítási cash flow modellezés legfontosabb változói és azok befolyásoló tényezői .....	28
2.4. Hozammodellezési megközelítések a pénzáram előrejelzésben és a hozamgarancia értékelése .....	37
2.4.1. Esettanulmány – hagyományos életbiztosítási portfólió befektetési hozamainak előrejelzése és a hozamgarancia sztochasztikus értékelése a Szolvencia 2 keretrendszerben.....	41
2.5. Az IFRS 17-beli veszteségességi vizsgálat és a költségek modellezési lehetőségei a pénzáram előrejelzésben.....	54
2.5.1. Az életbiztosítási költségek modellezési lehetőségei .....	55
2.5.2. Az IFRS 17-beli veszteségességi vizsgálat eredményei a költségmodell vonatkozásában .....	59
2.5.3. Az IFRS 17-beli veszteségességi vizsgálat további eredményei .....	67
2.6. A halandóság modellezése .....	72
2.6.1. A halandóság kezelésének problémája az életbiztosítási cash flow modellezésben .....	72
2.6.2. A Lee-Carter módszer, esettanulmány a Lee-Carter módszer felhasználásával.....	76
2.6.3. További lehetőségek a mortalitás modellezésére.....	80
2.6.4. A COVID-19 világjárvány hatása.....	83
2.7. Törlések és ügyfélviselkedési opciók modellezése, összefüggéseik vizsgálata más gazdasági és nem gazdasági változókkal.....	86
2.7.1. A törlések modellezésének lehetőségei .....	86

2.7.2. Esettanulmány – életbiztosítások törlési rátáinak elemzése külső körülményekkel összefüggésben .....	91
2.7.2.1. Technikai kamatos folyamatos díjas termékek törlése és a külső kamatkörnyezet kapcsolata.....	93
2.7.2.2. Egyszeri díjas termékkonstrukció törlése és a külső-, valamint a belső kamatkörnyezet kapcsolata.....	98
2.7.2.3. Törlési ráták vizsgálatának további eredményei .....	107
3. GÉPI ALGORITMUSOK ALKALMAZÁSA A NEM-ÉLETBIZTOSÍTÁSI ÁRAZÁSBAN.....	111
3.1 A nem-életbiztosítási termékek történeti fejlődése és a klasszikus nem-életbiztosítási díjszámítási technikák áttekintése .....	113
3.2 A klasszikus nem-életbiztosítási díjszámítási technikák problémái és a modern szemléletmód alapjai .....	115
3.3 Az általánosított lineáris modellezés és alkalmazása a nem-életbiztosítási árazásban .....	122
3.4 Döntési fák és véletlen erdők modelljei .....	126
3.5 Neurális hálók modelljei .....	130
3.6 Esettanulmány – KGFB biztosítások károkozási valószínűségének modellezése különböző gépi algoritmusok segítségével.....	134
3.6.1 Felhasznált adatok és alkalmazott adattranszformációk.....	134
3.6.2 A statisztikai modellkeret általános feltételezései és alkalmazott egyszerűsítései.....	136
3.6.3 A modellek eredményei kapcsán alkalmazott kiértékelési és összehasonlítási technikák .....	139
3.6.4 Modellillesztés az adatokra, az eredmények kiértékelése és a modellek kiterjesztése .....	142
3.6.5 A Szavazó modell alkalmazása díjszámítási célokra.....	148
4. ÖSSZEGZÉS, LEHETSÉGES IRÁNYOK KÉSŐBBI KUTATÁSOK KAPCSÁN .....	154
5. FÜGGELÉK.....	156
5.1. A klasszikus életbiztosítási technikák és legfontosabb összefüggéseik rövid ismertetése .....	156
5.2. A klasszikus nem-életbiztosítási technikák és legfontosabb összefüggéseik rövid ismertetése .....	160
Irodalomjegyzék .....	165
A témakörrel kapcsolatos saját (ill. társszerzős) publikációk jegyzéke .....	175

## Ábrák jegyzéke

1. ábra: Élet- és nem-életbiztosítások történeti fejlődésének és a modern szemléletmód kialakulási okainak sematikus ábrája. ....	9
2. ábra: példa kockáztatott érték és várható többletveszteség kockázati mértékekre. ..	20
3. ábra: Kockázati modulok és almodulok a Szolvencia II rezsimben. ....	21
4. ábra: Dinamikus ALM modell hatása az 1. mintaportfólió esetén.....	45
5. ábra: Dinamikus ALM modell hatása az 2. mintaportfólió esetén.....	45
6. ábra: Szimulált éves hozamok az 1. mintaportfólió esetén.....	46
7. ábra: Szimulált éves hozamok a 2. mintaportfólió esetén.....	47
8. ábra: EIOPA hozamgörbéből számolt kockázatmentes forward hozamok $t$ év elteltével. ....	51
9. ábra: Szimulált éves hozamok a 3. mintaportfólió esetén.....	52
10. ábra: A veszteséges szerződések díjaránya különböző költségallokációs paraméterek esetén.....	65
11. ábra: Kezdetben megjelenítendő veszteség különböző költségallokációs paraméterek esetén.....	65
12. ábra: Veszteségesek darab- és díjaránya a sztenderd formula sokkjain vizsgálva....	68
13. ábra: Veszteségességi profil a sztenderd formula sokkjain vizsgálva. ....	69
14. ábra: Halandósági előrejelzés a magyar adatokon a Lee-Carter módszer alapján. .	79
15. ábra: magyar halálozási adatok a járvány előtt és a járvány kezdete után .....	84
16. ábra: Szerződés megmaradási valószínűségek $t$ hónap elteltével az éves díj nagysága szerint. ....	89
17. ábra: Szerződés megmaradási valószínűségek belépési kor szerint.....	89
18. ábra: Folyamatos díjas megtakarítási biztosítás törlése a hozamok függvényében ..	94
19. ábra: Nyugdíjbiztosítás törlése a hozamok függvényében .....	95
20. ábra: Egyszeri díjas biztosítás törlése a hozamok függvényében .....	99
21. ábra: Törlés és díj szerinti klaszterek a díj nagysága (Ft) és a hozamcsökkenési mutató dimenziói szerint .....	102
22. ábra Egyszeri díjas biztosítás (alacsonyabb díjosztály) törlése a hozamok függvényében .....	104
23. ábra: Egyszeri díjas biztosítás (magasabb díjosztály) törlése a hozamok függvényében .....	104

24. ábra: Törlési ráták díjosztály és hozamcsökkenés szerint (2021 április) .....	106
25. ábra: Vegyes biztosítás törlése az infláció függvényében.....	108
26. ábra: Vegyes biztosítás törlése a COVID-19 szigorúsági index függvényében .....	110
27. ábra: Egyszeri díjas biztosítás törlése a COVID-19 szigorúsági index függvényében .....	110
28. ábra: A döntési fa sematikus struktúrája és a partícionált tér.....	127
29. ábra: Egy rejtett rétegű neurális hálózat sematikus ábrája. ....	131
30. ábra: Különböző eljárások ROC görbéi. ....	145
31. ábra: Megtartott portfólió és hasznosság különböző vágási értékek mellett.....	147
32. ábra: Rangkorrelációs mutató különböző k értékek esetén. ....	150
33. ábra: SSW értékek különböző k értékek esetén. ....	150
34. ábra: Döntési fa által javasolt klaszter-besorolás 4-es famélység (12-es klaszterszám) esetén. ....	151



## Táblázatok jegyzéke

1. táblázat: A nem-unit linked biztosítási szerződésekhez tartozó eszközök megoszlása a magyar piacon 2021. III. negyedévre vonatkozóan. ....	42
2. táblázat: Az elemzett mintaportfóliók legfontosabb paraméterei. ....	43
3. táblázat: Az 1. mintaportfólió különböző szerződéseinek eredményei.....	49
4. táblázat A 2. mintaportfólió különböző szerződéseinek eredményei.....	49
5. táblázat: Az 3. mintaportfólió különböző szerződéseinek eredményei (forintban). ..	52
6. táblázat: Példa darabarányos, díjarányos és vegyes költségfelosztási módszerre. ....	58
7. táblázat: Az alapszcenário eredményei az egyszeri díj nagysága szerint. ....	61
8. táblázat: Veszteségességi profil módosított költségallokációs paraméterek mellett. ....	64
9. táblázat: Egyszeri díjas visszavásárlások megoszlása a hozamcsökkenési mutató függvényében.....	100
10. táblázat Törlés és díj szerinti klaszterek keresztábrák hasonlítása .....	103
11. táblázat: A két szerződés csoport havi törlési rátái három kiválasztott időszak esetén .....	105
12. táblázat: Gyakran használt korrigált függő változók .....	118
13. táblázat: A normális, a binomiális és a Poisson eloszlások, mint az exponenciális eloszláscsalád tagjai. ....	123
14. táblázat: Az igazságmátrix sematikus példája.....	141
15. táblázat: Különböző eljárások AUC értékei.....	145
16. táblázat: A hasznossági függvény elemzése $L = -10$ paraméter mellett. ....	146
17. táblázat: A hasznossági függvény elemzése $L = -20$ paraméter mellett. ....	146
18. táblázat: A hasznossági függvény elemzése $L = -30$ paraméter mellett. ....	146
19. táblázat: A hasznossági függvény elemzése $L = -50$ paraméter mellett. ....	147
20. táblázat: AUC értékek kiegészítve a döntési fával egyszerűsített Szavazó modell eredményeivel. ....	152
21. táblázat: A hasznossági függvény elemzése $L = -20$ paraméter mellett, kiegészítve a döntési fával egyszerűsített Szavazó modell eredményeivel. ....	152

## Köszönetnyilvánítás

Köszönetemet szeretném kifejezni témavezetőmnek, Dr. Kovács Erzsébetnek, aki Ph.D. tanulmányaim alatt mind szakmailag, mind emberileg végig támogatott, és a kutatás valamint a publikációk irányításával hozzásegített, hogy elkészüljön az értekezésem.

Hálás vagyok kollégáimnak mind a Magyar Posta Biztosító Zrt-nél, mind a Budapesti Corvinus Egyetemen, a támogatásukért, tanácsaikért és a közös munkáért, ami nagyban hozzájárult szakmai életutamhoz a kutatások és az alkalmazások tekintetében. Külön kiemelném ebből a szempontból publikációs szerzőtársaimat, akiktől nagyon sokan tanultam, és hogy mindig jó emlékekkel gondolhatok vissza a közös munkára.

Nagy köszönettel tartozom a feleségemnek és családomnak, akiknek mérhetetlen türelme és támogatása nélkül nem készülhetett volna el az értekezésem.

## 1. BEVEZETÉS

Mindennapi életünkben jól ismerjük a kockázat és a biztosítás fogalmait. Azonban amilyen alapvető fogalmakról van szó, ha belegondolunk, nem is olyan egyszerű definiálni ezeket. Banyár megfogalmazásában (különböző értelmező szótárak és tankönyvek alapján) „a kockázat valamely cselekvéssel, vállalkozással járó veszély, az anyagi veszteség, kár lehetősége”, avagy „a kockázat az a tendencia, hogy egy vizsgált folyamat tényleges kimenetelei különbözhetnek az előre várt kimenetelektől” (Banyár, 2016, pp. 60).

Tekintsünk át néhány példát különböző kockázatokról, amik a biztosítás fogalmához közelebb visznek minket. A WHO adatai alapján<sup>1</sup> 2016-ban Magyarországon a születéskor várható élettartam 76 év volt, 2000-ben pedig ugyanez a szám 71,9 év volt. Azonban jól tudjuk, hogy nem minden 2016-ban született egyén fog pontosan 76 évet élni, csecsemőkortól az aggastyánkorig bármikor bekövetkezhet az elhalálozás. A halálozás időpontja tehát egy kockázat, és ha belegondolunk például egy középkorú családfenntartó egyén esetén ennek lehetőségébe, a kockázat pénzügyi (anyagi) mivolta is egyből értelmet kap. A várható élettartam említett növekedése pedig a nyugdíjrendszer szempontjából jelent pénzügyi kockázatot, azáltal hogy bizonytalan, hogy átlagosan meddig tart majd a nyugdíjfizetési kötelezettség. 2020 óta pedig a COVID-19 világjárvány és az azzal összefüggő egészségügyi krízis és halálozás borított fel minden korábbi trendet és várakozást. Ezek a példák az emberi életben léttel összefüggő kockázatok, de számos más típusú pénzügyi következménnyel járó kockázat is elképzelhető. Egy átlagos napon például jellemzően semmi rendkívüli nem történik az ember otthonában, azonban még ha ritka eseményekről van is szó, időnként előfordulhat egy csőtörés, de akár egy tüzesemény vagy egy földrengés is, ami porba dönti a lakhelyet. Egy külföldi utazás alkalmával is számos bizonytalan pénzügyi következményű kockázatnak van kitéve az utazó, például kár eshet a poggyászában vagy balesetet szenvedhet, de egy autót is rejtheti egy kisebb koccanástól az életen át tartó rokkantságig terjedő súlyos kockázatok lehetőségét.

---

<sup>1</sup> <https://apps.who.int/gho/data/view.main.SDG2016LEXv?lang=en>

A fentihez hasonló típusú kockázatoknak többféle kezelési lehetősége adódik, ilyenek például a kockázat kerülése, a kár megelőzése, a pénzügyi tartalék képzése vagy a kockázatra vonatkozó biztosítási szerződés kötése (Banyár, 2016). A kockázat természetével, valószínűségével és nagyságával is erősen összefügg, hogy melyik a leghatékonyabb kezelési technika, például egy megrongálódott poggyász költségének könnyen fedezetül szolgálhat az ember pénzügyi tartaléka, és sok esetben elégséges a megelőzés (pl. megfelelő biztonsági rendszerek használata) vagy a kockázat kerülése (például a balesetveszélyes közlekedési helyzetek elkerülése), de más a helyzet, ha például a kockázat tárgya egy tüzesemény martalékává váló lakhely, vagy egy balesetben tartós rokkantságot szenvedő személy. Ilyen kockázatok kezelésének hatékony módja a biztosítás (ami persze nem jelenti azt, hogy kisebb pénzügyi hatású eseményeket ne lehetne biztosítással kezelni). A biztosítási szerződés által a gazdasági kockázat a biztosítás szerződőjéről a biztosító társaságra ruházódik át (Ohlsson & Johansson, 2010). Ha a biztosítási szerződésben definiált bizonytalan jövőbeli esemény (az úgynevezett biztosítási esemény) a kockázatvállalás időtartamán belül bekövetkezik, a biztosító pénzügyi szolgáltatást nyújt a szerződésnek megfelelően. A kockázat átvállalásáért cserébe pedig a szerződő biztosítási díjat fizet a biztosítónak.

De miért is éri meg a biztosítónak átvállalni az egyén pénzügyi kockázatát? A biztosító veszélyközösséget épít ki, aminek tagja számos, hasonló kockázatot hordozó egyén, a biztosítottak. A nagy számok törvénye miatt a biztosító által vállalt kockázat (sok viszonylag kis kockázat összege) sokkal jobban előrejelezhető, mint az egyéni kockázat, a biztosító kockázata nagy valószínűséggel közel esik annak várható értékéhez (Ohlsson & Johansson, 2010). Ez alapján a biztosítás definiálható, mint „a kockázatkezelés kooperatív stratégiája, melyet az érintettek veszélyközösség szervezése útján valósítanak meg” (Banyár, 2016, pp. 66).

A biztosítások számos szempont szerint csoportosíthatók (lásd például (Banyár, 2016)). Az értekezés szempontjából az élet- és a nem-életbiztosításokat különítjük el egymástól. Életbiztosításról akkor beszélünk, ha az tartalmaz a biztosított életben lététől függő biztosítási eseményt (tehát a halál bekövetkezését vagy be nem következését). Az életbiztosítások sok esetben hosszú távú, sokéves szerződések. A nem-életbiztosítások nem tartalmazzak életben léttől függő biztosítási eseményt. Ide tartoznak többek közt a vagyon- és felelősségbiztosítások, de a személybiztosítások közül a baleset- és betegségbiztosítások is. A nem-életbiztosítások jellemzően rövid, általában egy éves

időtávra szólnak (ami nem jelenti azt, hogy annak leteltével automatikusan nem hosszabbodhat meg a biztosítási kockázatvállalás).

A fenti körülírás és példák, ha teljesen egzakt definíciót nem is jelentenek, de jól behatárolják a kockázat és a biztosítás fogalmát, ezen túlmenően nem részletezem az értekezésben ezen alapfogalmakat. A továbbiakban kockázat alatt csak a biztosítási kockázatokat értem.

A biztosítás egy nagyon komplex pénzügyi termék, aminek árazása és az értékesítés utáni pénzügyi kezelése (pl. a tartalékok számítása) speciális technikákat kíván. Az ezzel foglalkozó tudományág az aktuáriustudomány, más szóval biztosításmatematika. Az értekezés betekintést ad az aktuáriustudomány hagyományos technikáiba, külön az élet- és nem-életbiztosítások esetén.



**1. ábra:** Élet- és nem-életbiztosítások történeti fejlődésének és a modern szemléletmód kialakulási okainak sematikus ábrája.

Forrás: saját szerkesztés

Az utóbbi évtizedekben az átvállalt kockázathoz kapcsolt pénzügyi termékek, a biztosítási konstrukciók mind az élet-, mind a nem-életbiztosítások esetén gyökeres átalakuláson mentek keresztül. A kockázatok felmérése egyre összetettebb modellek segítségével kezdett megvalósulni, aminek révén létrejöttek a modern biztosítások. A kockázati szemléletmód átalakulásához a módszertani és informatikai háttér fejlődése is elengedhetetlen volt, ami a modern aktuáriustudományok megszületését hozta magával. A hagyományosnak tekinthető biztosításmatematikai módszerek napjainkra számos olyan újszerű feladatkörrel egészültek ki, melyeknek egyrészt fontos alappillére a sokrétű statisztikai és modellezési módszertan, másrészt a gyakorlati megvalósításhoz a

nagyméretű adathalmazok és számításigényes algoritmusok miatt hasonlóan fontos építőköve a megfelelő informatikai háttér is. Ezek az eljárások magukba foglalják az összetett kockázatok árazását, de ezen túlmenően a biztosítási fedezetvállalással összefüggő bizonytalan jövőbeli pénzmozgások (cash flow-k) modellezését is, ami a modern tartalékszámítás alapja. Több szabályozói rezsim is kialakításra került az utóbbi bő egy évtizedben, amik szorosan összekapcsolódnak a modern szemléletmóddal, ilyen például a Szolvencia II, a kockázatok valós természetén alapuló tőkekövetelmény keretrendszere, avagy az IFRS 17 a biztosítási szerződések komplex szabványa. Bizonyos esetekben sztenderd modellkeret segíti a kalkulációkat, de ilyen nem minden esetben alkalmazható. Az élet- és nem-életbiztosítások esetén a klasszikusból a modern szemléletmód kialakulását, valamint a fejlődést vezérlő fő okokat mutatja szematikusan az 1. ábra.

Az értekezés célja mindkét biztosítási ág esetén a vázolt folyamatok bemutatása, amik elvezettek az újszerű szemlélethez, továbbá a modern aktuáriustudomány néhány területén új eredményeket alkotni. A dolgozat logikai fonalát végigkíséri a módszertan ismertetése és annak gépi megvalósítása, e két terület biztosításmatematikában összeérő szimbiózisának egyes szeleteit dolgozza fel az értekezés.

Az értekezés az élet- és a nem-életbiztosítások vonatkozó kapcsolódási területei közül vonja vizsgálat alá az alábbi kutatási témákat. Az életbiztosítások esetén az elsődlegesen vizsgált téma a modern cash flow modellezés, annak alkalmazásai, továbbá bizonyos módszertani vonatkozásai (pl. a befektetési hozamok, a költségek, a halandóság, az ügyfélviselkedés modellezési technikái), mindezeknél szem előtt tartva az informatikai megvalósítást is. Monte Carlo szimulációk, időscorelemzési és többváltozós statisztikai eljárások és részletes érzékenységvizsgálati elemzések is alkalmazásra kerülnek. A nem-életbiztosítások esetén a modern díjszámítás releváns kihívásai kerülnek górcső alá, különböző statisztikai és gépi tanulási algoritmusok (általánosított lineáris modell, döntési fák és véletlen erdők, neurális hálók) biztosítási károk modellezésére kerülnek alkalmazásra.

Az értekezés esettanulmányok formájában dolgozza fel saját és társszerzős publikációk eredményeit, kapcsolódva a felállított kutatási hipotézisekhez, de emellett átfogó képet is ad részletes szakirodalmi bemutatással az egyes témák kapcsán.

Az értekezésben a legfontosabb igazolásra kerülő kutatási hipotézisek az alábbiak:

1. **Hipotézis:** sztochasztikus módszerek révén számszerűsíthetővé válik a technikai kamatláb által nyújtott garancia értéke, amely különösen az alacsony hozamkörnyezetben jelentős hatással lehet a kötelezettségek értékére.
2. **Hipotézis:** a *veszteséges szerződéseknek* jelentős kihatása van az IFRS 17-beli *kezdeti megjelenítéskor* a pénzügyi eredménnyel kapcsolatos mutatókra, ami optimalizálható a modell költségekre vonatkozó feltételezéseinek kalibrálásával vagy a díjkalkulációs és valóságbeli költségstruktúra hosszú távú konzisztenssé tételével.
3. **Hipotézis:** Hagyományos folyamatos díjas életbiztosítások esetén releváns biztosítói adatokból nem kimutatható, hogy ha a referencia hozamok meghaladják a technikai kamatláb értékét, akkor megnő a törlési ráta.
4. **Hipotézis:** Befektetési fókuszú egyszeri díjas életbiztosítási konstrukciók esetén viszont kimutatható releváns biztosítói adatokból a külső vagy belső kamatkörnyezettől való függés. Ha más befektetési formák magasabb hozamot kínálnak, vagy az adott szerződésen belül csökken az elérhető kamat szintje, akkor az adott szerződéscsoport tulajdonságaitól is függően megnőhetnek a törlési arányok.
5. **Hipotézis:** empirikus adatokon bizonyítható, hogy a gépi tanulási módszerek, illetve azok kombinálásai alkalmasak lehetnek rá, hogy felhasználásukkal az általános lineáris modellnél jobb előrejelző eszköz jöjjön létre a nem-életbiztosítási kármodellezésben, és bizonyos közelítésekkel formalizálhatók is ezek a modellek, a magyarázó erő egy részének elvesztése árán.

## 2. KVANTITATÍV MÓDSZEREK ALKALMAZÁSA AZ ÉLETBIZTOSÍTÁSI CASH FLOW MODELLEZÉS KIEMELTEN FONTOS TERÜLETEIN

2012 óta foglalkozom az életbiztosítási cash flow modellezés területével mind az elmélet, mind a gyakorlati alkalmazás oldaláról. 2015-ben két konferencia-előadást tartottam a kutatási területhez kötődően (Magyar Aktuárius Társaság Tavaszi Szimpózium, Doktoranduszok Országos Szövetsége Tavaszi szél konferencia), majd ezek témájában jelent meg összefoglaló tanulmányom (Szepesváry, 2015). Utóbbi írás a Szolvencia II keretrendszerben vizsgálta különböző dinamikus modellek alkalmazási lehetőségeit, elsősorban a hozamok, kisebb részben a halandóság és a törlések vizsgálatának témájában. Másik a témához kapcsolódó írásom az IFRS<sup>2</sup> 17 bevezetéséhez kötődik, a szabvány szerinti veszteségességi vizsgálattal és annak egyes pénzügyi következményeivel foglalkozik, nagy hangsúlyt fektetve a költség-feltételezésekre (Szepesváry, 2019). 2022-ben az életbiztosítások törlési rátáinak egyes külső tényezőkkel való összefüggéseiről készítettem tanulmányt, aminek fő motivációja a hozam- és inflációs környezet megváltozásának, és a COVID 19-cel kapcsolatos lezárások hatásának vizsgálata volt (Szepesváry, 2022). Az értekezés szövegezésének lezárásakor a cikk benyújtott, elbírálásra váró státuszban volt, sikeres befogadás esetén a Hitelintézeti szemle folyóiratban jelenik meg várhatóan 2022 júniusában.

A 2. fejezet céljai és fő témái az alábbiak:

- A klasszikus technikák rövid áttekintése (amit részben a függelék egészít ki), illetve az a folyamat, aminek révén ebből kialakultak a modern életbiztosítási technikák és a cash flow modellezés.
- A cash flow modellezés alkalmazási területeinek átfogó áttekintése, a szakirodalom (a jogszabályi környezetet is beleértve) és a matematikai háttér lényeges pontjainak ismertetése.
- A cash flow modellezés releváns változóinak átfogó áttekintése és szakirodalom bemutatása.

---

<sup>2</sup> International Financial Reporting Standards.



- A kapcsolódó kérdéskörökben kutatási hipotézisek megfogalmazása és igazolása támaszkodva saját korábbi kutatásaimra és írásaimra.

## 2.1. Klasszikus életbiztosítási technikák és azok rövid története

Az értekezésben az alábbiakban áttekintett alapelvekre épülő technikákat értjük *klasszikusnak*. Ezen aktuáriusi alapismereteket csak vázlatosan ismertetem, hogy elválasztható legyen a klasszikus és modern szemléletmód határa. Azonban mivel mind a cash flow modellezési módszertan, mind a későbbi esettanulmányok is építkeznek az alapfogalmakra, azért hogy más biztosítói vagy informatikai területen mozgó (nem aktuárius) szakember számára is érthető legyen magában is a disszertáció a Függelékben (5.1) egy némileg részletesebb (legfontosabb képleteket is bemutató) összefoglalás is olvasható.

Az életbiztosítások és az életbiztosítási díjszámítások története a 18. századig nyúlik vissza. Az első életbiztosítást kínáló vállalat az Amicable Society for a Perpetual Assurance Office volt a 18. század elején (Gilbert & Rivington, 1854). Az életbiztosítások megszületése után hamar megjelent a díjszámítás szükségessége is. A 18. században kezdetben matematikusok adtak tanácsokat az első aktuáriusi jellegű problémák kapcsán, az első díjszámítások – egy életbiztosítási egyesületben – James Dodson nevéhez kötődnek (Ogborn, 1956). Az első halandósági tábla pedig Edmond Halley-től származik 1693-ból, ami a szó szoros értelmében véve valójában egy populációs tábla (Bellhouse, 2011). A halandósági tábla nem más, mint a halálozási és túlélési valószínűségek, a kihalási rend, valamint a várható élettartam kor szerint rendezett adatai (Banyár, 2016), ami az életbiztosítási kalkulációk nélkülözhetetlen eszköze.

Az aktuáriustudományok fejlődésével később a halandósági táblákra támaszkodva megszülettek az úgynevezett kommutációs számok, melyek segítségével a díjszámítási formulák és más hagyományos kalkulációs eljárások egyszerűbb alakra hozhatók. Történeti szempontból az indokolta megszületésük fontosságát, hogy amíg nem álltak rendelkezésre számítógépes programok a biztosítóknál, segítségükkel jelentős számítási idő volt megtakarítható (Slud, 2006), (Banyár, 2016).

A klasszikus díjkalkulációban a kockázati díjrész számítása az ekvivalencia elven alapul, miszerint a bevételek jelenértékeinek várható értéke meg kell egyezzen a kiadások jelenértékeinek várható értékével (Banyár, 2016). A díjszámításnál feltételezett kamatlábat technikai kamatlábnak nevezik, aminek jelentőségéről még a későbbiekben esik szó. Az ebből számolható diszkontfaktor használatos a jelenérték számításához. Az ismert életbiztosítási alapkonstrukciók (pl. kockázati, elérési, járadékbiztosítások stb.) nettó (kockázati fedezetre várhatóan szükséges) díjrészeinek számítása az ekvivalencia elv kibontásával egyszerű díjképletekké alakíthatók, melyek a kihalási renden és a feltételezett kamatlábon alapuló kommutációs számokból építkeznek. A bruttó díjak (melyek a kockázati díjrészen túl fedezetül szolgálnak a biztosító költségeinek és nyereségének is) számítása a klasszikus díjkalkulációban  $\alpha, \beta, \gamma$  költségparaméterek bevezetésével történik.

A klasszikus technikák nemcsak a díjkalkulációt jelentenek, hanem további más fontos eljárások is nélkülözhetetlen eszközei a hagyományos módszertannak. A számviteli biztosítástechnikai tartalékok megfelelő képzése és számítása minden kétséget kizáróan a biztosítási üzletág egyik kardinális kérdése. Ennek egyik fontos típusa az életbiztosítási díjtartalék (matematikai tartalékok egy fajtája), ami nagyon egyszerűen fogalmazva az a pénzösszeg, amit a biztosítónak azért kell elkülönítenie, mert a jövőben bekövetkező életbiztosítási károk (pl. haláleset vagy elérés) fedezete részben a múltban befolyó díjaiból származik, tehát a jövőbeli szolgáltatásnak azt a részét, amit nem a jövőbeli díj fedez, tartalékként kell megképezni.

A klasszikus életbiztosítási technikák megoldást adnak sok egyéb gyakorlati problémára is, mint például a költségek időbeli optimalizálására (*zillmerezés*), az infláció kezelésére (*indexálás, többlethozam-visszajuttatás, revalorizáció*), vagy a *maradékjogok* kezelésére.

A hagyományos jelzöt az életbiztosítási termékek egy nagy csoportjára is szokás használni. A hagyományos (más szóval tradicionális) biztosítások jellegzetes vonása a rögzített technikai kamatláb ( $i$ ), melynek szerepe a már említett ekvivalencia elv szerinti kalkuláció, másrésről pedig egyfajta garantált hozamot jelent a díjtartalék befektetésére vonatkozóan (Banyár, 2016).

Az életbiztosítási termékek másik fontos csoportja a befektetési egységhez kötött, vagy más néven unit linked biztosítások, melyek esetén nincs technikai kamatláb és általa garantált hozamszint. A unit linked biztosítások esetén a kötvénytulajdonos által befizetett díjak eszközalapokba kerülnek befektetésre, a befektetési kockázat pedig az

ügyfélre hárul (Holsboer, 2000). A unit linked biztosítások nagyobb térhódítása az 1980-as 1990-es években kezdődött meg világszerte. A unit linked biztosítások esetén már nélkülözhetetlen a számítógépes nyilvántartás, és díjkalkulációs folyamatuk is sok esetben átvezet a modern díjkalkulációs technikákhoz (Banyár, 2016). Richards szerint valójában a unit-linked szerződések megjelenése volt a fő vezérlője a profitteszt módszerek megszületésének, mert ezeket a termékeket problémás a hagyományos módszerekkel árazni (Richards, 2004). Mivel a későbbi témák szempontjából ez nem jelent majd megszorítást, így a befektetési egységhez kötött biztosításokat is a klasszikus biztosítástani tárház elemeinek fogom tekinteni.

## **2.2. A modern életbiztosítási aktuáriusi technikák kialakulása, cash flow modellezés és annak legfontosabb alkalmazási területei**

A számítógépek és a speciális szoftverek térnyerésével, valamint a statisztikai módszertani tárház ezzel összefüggő bővülésével új kapuk nyíltak ki az utóbbi évtizedekben az aktuáriusi modellezésben. A teljesség igénye nélkül akár a sztochasztikus szimulációk használata (lásd például (Bølviken, 2014)), akár a gépi tanulási technikák alkalmazása (lásd például (Frees, Meyers, & Derrig, 2016)) és számos más speciális statisztikai módszer használata részévé vált a biztosításmatematikai módszereknek. Adott esetben akár külön szakterületek is kifejlődtek a statisztikán belül az aktuáriustudományok részeként. Ilyen például az életbiztosítások esetén a halandóság előrejelzése (lásd például (Vékás, 2019)). Az aktuáriustudományok fejlődését nem csak a kutatók tudásvágya motiválta, hanem jellemzően inkább a szakma új kihívásai, a változó környezet és a növekvő versenyhelyzet generálta azt. Valószínűsíthetően minden későbbi biztosítási területen tett kutatás is a későbbi jótékony hatású gyakorlati felhasználás eszköze lehet.

Az értekezésnek nem célja az összes modern életbiztosítási aktuáriusi módszer áttekintése, ez jószerivel összefoghatatlan mértékű tudásanyagot ölelne fel. Általánosságban a dolgozat releváns aktuáriusi feladatok megoldásán keresztül veti fel a kutatási hipotéziseket és azok módszertani vonatkozásait és kidolgozásait. Jelen fejezetben az életbiztosítási cash flow modellezés területe kerül a vizsgálat középpontjába, aminek számos felhasználási területe alakult ki az utóbbi évtizedekben.

Mit is jelent az életbiztosítási cash flow modellezés? Először nagyon általánosan értsünk ez alatt minden olyan alkalmazást, ami egy életbiztosítási szerződéshez vagy szerződéscsoporthoz közvetlenül vagy közvetve kapcsolódó jövőbeli pénzáramoknak az előrejelzésén alapszik.

Ebben a szakaszban először ilyen feladatköröket ismertetek, majd a további szakaszokban térünk rá a pénzáramok típusaira, és az azok modellezése kapcsán felmerülő releváns kutatási kérdésekre.

### **2.2.1 Profitteszt, a modern díjszámítás alapja**

Az előző szakaszban áttekintésre kerültek a klasszikus életbiztosítási díjszámítási módszerek. A modern díjszámítás alapja a profitteszt, ami a pénzügyekből ismert vállalat, illetve üzletértékelési módszeren, a nettó jelenérték technikán alapul (Banyár, 2016). Kicsit konkrétabban a profitteszt célja egy új szerződéshez kapcsolódó becsült jövőbeli pénzáramok alapján a megfelelő díj-, illetve profitabilitási szint kalibrálása. Amíg a klasszikus díjkalkulációk jellemzően prudens implicit feltételezéseket használnak (például a biztonságosan megválasztott technikai kamatláb, halandósági tábla és költségparaméterek révén), amik a nyereség beépített forrásai lesznek, addig a profitteszt esetén a díjszint kerül úgy kalibrálásra, hogy a legjobb becslésnek minősülő feltételezések mellett adódjon elfogadható profitabilitási szint.

A profitteszt témájában született első tudományos írás (Anderson, 1959) nevéhez kötődik, aki matematikailag formalizálja a nem-nyereségrészesedéses életbiztosítás díja és profittartalma közti összefüggéseket, sorra veszi a legfontosabb befolyásoló változókat (feltételezéseket) és további lehetséges alkalmazásként bemutatja a módszer alkalmazását a portfólió értékének meghatározására. A hagyományos nyereségrészesedéses életbiztosítások cash flow modellezést részletesen tárgyalja (Andrews, 1996). A tőkeköltség modellek lehetséges változatait mutatja be (Mehta, 1996), aki továbbá különböző biztosítástípusok esetén mutat példákat profittesztekre. Részletes környezetben tárgyalja az aktuáriusi cash flow modellezést (Guterman, 2000). Tanulmányában részletesen bemutatja a cash flow-kat befolyásoló lehetséges kockázatokat, az értékelési modelleket valamint a diszkontráta megválasztási módszereket. Részletesebb összefoglalót ad a felhasználni szükséges változókról és

feltételezésekről (Richards, 2004), aki kiemeli azt is, hogy a profitteszt lényege nem csupán a nyereségtartalom megállapítása, hanem ugyanilyen fontos a nyereséget vezérlő legfontosabb tényezők detektálása is. A magyar szakirodalomban a profittesztek megszületésének gyakorlati mozgatórugóit és a legfontosabb elveket, módszereket összefoglalja (Banyár, 2016). Az említett források többsége felhívja a figyelmet arra is, hogy a profittesztek esetén nagyon fontos a különböző változók szerint érzékenységvizsgálat elvégzése.

A profitteszt modellek (és általánosságban az életbiztosítási cash flow modellek) szükséges változói és az abból adódó kutatási kérdések a következő szakaszban kerülnek kifejtésre.

Az informatikai megvalósítás oldaláról fontos megemlíteni, hogy az aktuáriusi szakmában a profitteszt eljárásokra különböző szoftvereket fejlesztettek ki, melyek később más cash flow előrejelzést igénylő biztosítási alkalmazásokra is programozhatóvá váltak. A legismertebb ilyen szoftver a Prophet, aminek első verziója 1989-ben jelent meg<sup>3</sup>, mára pedig a kor követelményeinek megfelelő változata világszerte elterjedt programcsomag az aktuáriusi szakmában.

### **2.2.2 Szolvencia II, a kockázatok valós természetén alapuló tőkekövetelmény keretrendszere**

Áttérve a cash flow modellezés következő fontos alkalmazási területére, az utóbbi évtized egyik legnagyobb kihívása a biztosítási szakma számára a *Szolvencia II* (*Solvency II*, röviden *S2*) keretrendszer hatályba lépése és implementálása volt. Az EU-szintű szabályozás újszerű kvantitatív, kvalitatív és felügyeleti folyamatokra vonatkozó elemei átfogják a biztosító teljes működését.

Összefoglalva a jogszabályi háttérrel, 2009. november 25-én került elfogadásra az általános elveket tartalmazó Európai Parlament és Tanács 2009/138/EK irányelve (2009/138/EK, 2009), majd 2014. október 10-én az előbbi konkrét iránymutatásokkal kiegészítő a Bizottság (EU) 2015/35 felhatalmazáson alapuló rendelete (2015/35/EU, 2015), ami még 2014-ben átültetésre került a magyar jogrendbe is (2014. évi LXXXVIII.

---

<sup>3</sup> <https://www.insuranceerm.com/guides/enterprise-risk-management-technology-guide/sungard-sungard-iworks-erm-framework.html>

törvény, 2014). A szabályozás 2016. január 1-vel lépett életbe. Az eredeti jogszabályok néhány ponton módosítva lettek a megjelenésük után, ilyen módosító joganyag a Európai Parlament és Tanács 2014/51/EU irányelve (2014/51/EU, 2014), továbbá a (2015/35/EU) jogszabályt módosító Bizottság (EU) 2019/981 felhatalmazáson alapuló rendelete (2019/981/EU, 2019).

Az EU-szintű új szabályozás a kockázatok valós természetén alapuló tőkekövetelmény számítását ír elő a biztosítók számára, szemben a korábbi szabály alapú tőkekövetelménnyel: a szavatolótőke-szükségletet úgy kell meghatározni, hogy 1 éves időtávon legalább 99,5%-os valószínűséggel pénzügyi kötelezettségeit teljesíteni tudja a biztosító (2009/138/EK). A szavatolótőke-szükségletnek a szavatoló tőke figyelembe vehető részének kell fedezetül szolgálnia. A szavatoló tőke az alapvető szavatoló tőke és a kiegészítő szavatoló tőke összege (2009/138/EK, 87. cikk), a tőkeelemek figyelembe vehetőségét az irányelv definiálja (2009/138/EK, 98. cikk). Az alapvető szavatoló tőke az eszközök forrásokat meghaladó többlete, kiegészítve az alárendelt kölcsöntőkével (2009/138/EK, 88. cikk). Az eszközöket piaci értéken kell értékelni, a források közé tartozó biztosítástechnikai tartalékokat pedig az alábbiak szerint. A biztosítástechnikai tartalék az úgynevezett legjobb becslés és a kockázati ráhagyás összege. (2009/138/EK, 87. cikk) szerint a legjobb becslés a biztosítási szerződésekhez kapcsolódó jövőbeni pénzáramok valószínűséggel súlyozott átlagának felel meg, figyelembe véve a pénz időértékét. A legjobb becslést időszerű és hiteles információkra, valamint realisztikus feltevésekre támaszkodva, megfelelő, alkalmas és releváns aktuáriusi és statisztikai módszerekkel kell kiszámítani. Tehát a legjobb becslés elkészítéséhez aktuáriusi cash flow modell felírására van szükség.

Érdemes még néhány további tudnivalót kiemelni a Szolvencia II szabályozásból a szavatolótőke-szükséglet (angolul *solvency capital requirement*, röviden *SCR*) számításával kapcsolatban, amik szintén kapcsolódnak majd a későbbi vizsgálatokhoz. A szavatolótőke-szükséglettel kapcsolatos legfőbb elvárás, hogy a számolt tőkekövetelmény az alapvető szavatoló tőke egyéves időtávon mért 99,5%-os biztonsági szintű kockázatmentes értékének feleljen meg (2009/138/EK, 101. cikk). Az éves 99,5%-os biztonsági szint mögött az a feltételezés áll, hogy legfeljebb 200 évenként egyszer következzen be a csödesemény. Mindezt úgy kell érteni, hogy például  $Y$ -nal jelölve annak a valószínűségi változónak a mínusz egyszeresét, ami az eszközök forrásokat meghaladó többletét plusz az alárendelt kölcsöntőke értékét tartalmazza egy éves időtávon, a szavatolótőke-szükséglet (SCR) értékét a  $P(Y \leq 0) > 99,5\%$  egyenlőtlenség alapján

lehet meghatározni, annak a legkisebb ( $Y$  formulájában az eszközök részét képező) SCR tőkemennyiségnek a megkeresésével, amivel már teljesül az egyenlőtlenség. A biztosító tőke-megfelelőségéhez pedig az szükséges, hogy a szavatoló tőke figyelembe vehető része meghaladja előbbi kalkuláció szerinti SCR mennyiséget.

Ide kapcsolódik a kockáztatott érték fogalma. A *kockáztatott érték* (angolul *Value at Risk*, röviden *VaR*) gyakran használt kockázati mérték. A kockázati mértékek egy  $X$  valószínűségi változóhoz (kockázathoz) rendelnek hozzá egy valós számot  $X$  eloszlása alapján. Csóka tanulmánya részletesen tárgyalja a kockáztatott érték definícióját, különböző tulajdonságait, valamint további kockázati mértékeket (Csóka, 2003). A kockáztatott érték matematikai képlete:

$$VaR_{\alpha}(X) = \inf\{x: P(X \leq x) > \alpha\}. \quad (2.1)$$

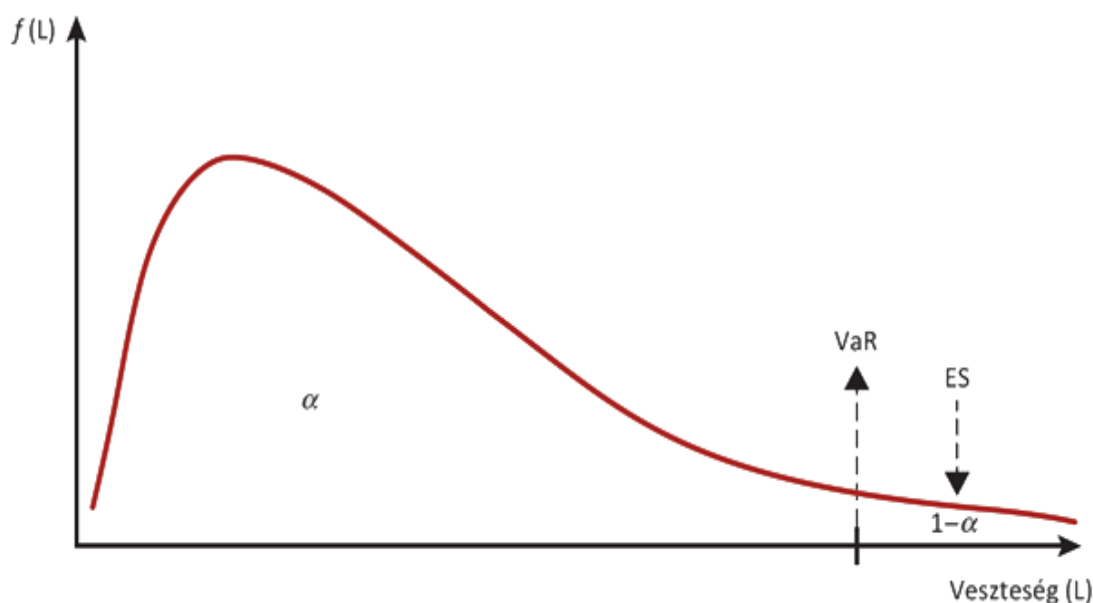
A Szolvencia II-beli szavatolótőke-szükséglet számításnál  $\alpha = 99,5\%$ . Már a definícióból is következik, hogy a VaR értéke azzal kapcsolatban nem ad semmilyen információt, hogy az eloszlás hogyan viselkedik ezen kvantilis felett, ami egy kockázat esetében kifejezetten fontos mutató (szemléletesen: a 200 évente bekövetkező csődesemény esetén mekkora lesz a veszteség).

Másik hátránya a VaR mutató használatának, hogy ellenpéldával igazolható, hogy a szubadditivitás tulajdonsága nem teljesül, így nem koherens kockázati mérték (Csóka, 2003). A szubadditivitás azt az ésszerű követelményt jelentené egy kockázati mértékkel szemben, hogy a két kockázat összegére vonatkozó kockázati mutató a diverzifikációs hatás miatt ne lehessen nagyobb, mint az egyes kockázatok kockázati mutatóinak összege. Csóka tanulmánya rávilágít, hogy a  $VaR_{\alpha}(X + Y) \leq VaR_{\alpha}(X) + VaR_{\alpha}(Y)$  egyenlőtlenség nem igaz általánosan.

A szakirodalom megkülönböztet a kockáztatott értéktől eltérő kockázati mértékeket, ilyen a *várható többletveszteség* más nevén *feltételes kockáztatott érték* (angolul: *expected shortfall*, röviden *ES*, avagy *Conditional Value at Risk*, röviden *CVaR*). A CVaR már koherens kockázati mérték, és információt tartalmaz arról, hogy a VaR értéke fölött hogyan viselkedik az eloszlás, definíció szerint éppen ennek feltételes várható értékét adja meg (Csóka, 2003):

$$ES_{\alpha}(X) = CVaR_{\alpha}(X) = E(X|X > VaR_{\alpha}(X)). \quad (2.2)$$

A 2. ábrán egy szemléletes példa látható egy veszteséget leíró  $L$  valószínűségi változó sűrűségfüggvényével a VaR és CVaR mutatók kapcsán.



**2. ábra:** példa kockázatosított érték és várható többletveszteség kockázati mértékekre.

Forrás: (Bugár & Rattig, 2016)

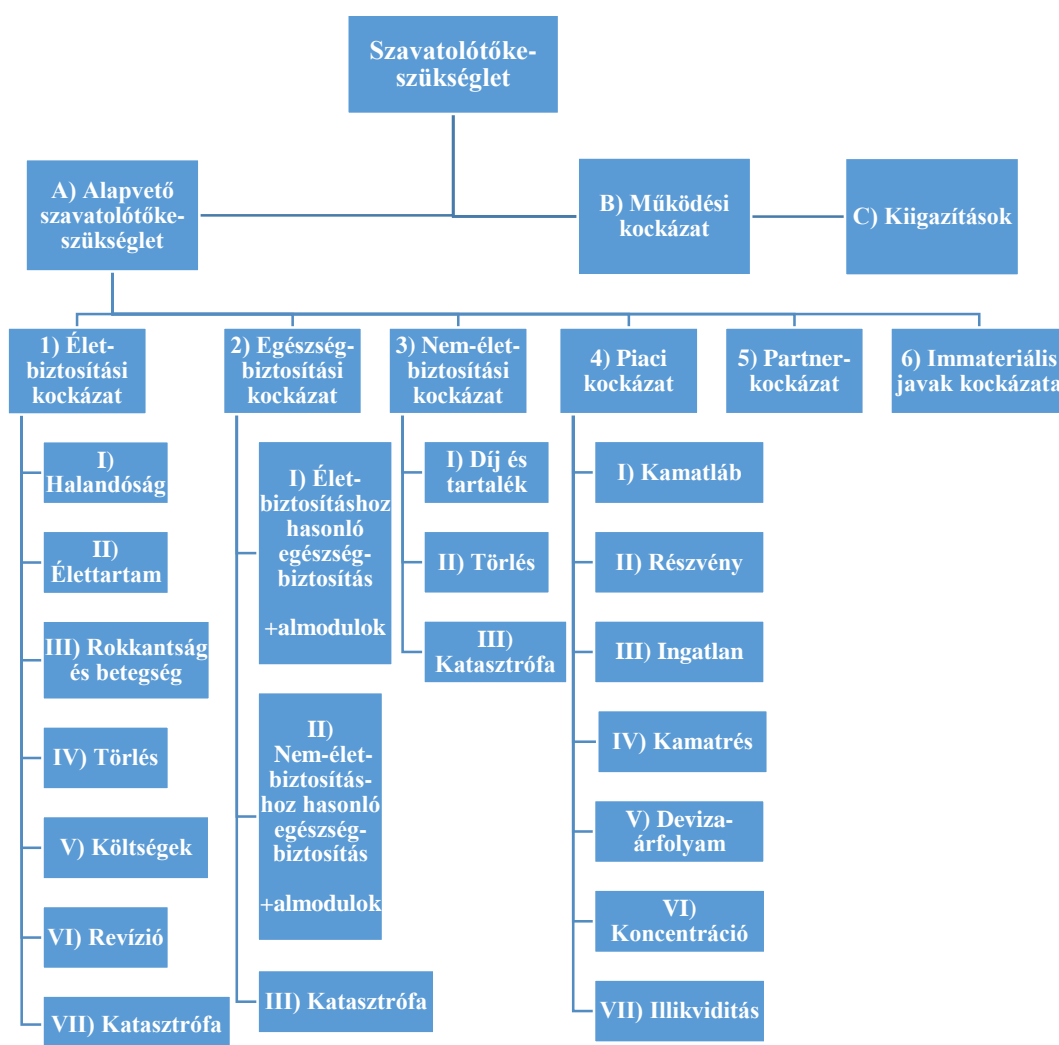
Itt érdemes említeni még a bankokra vonatkozó tőkekövetelmény szabályozásokat, amit az úgynevezett Bázeli szabályozások regularizálnak. A Bázeli Bankfelügyeleti Bizottság 2004-ben jelentette meg a Bázeli II néven ismertté vált tőkeszámítási keretrendszert, később a 2008-as gazdasági válság miatti veszteségek hatására készültek a Bázeli 2,5 néven ajánlások 2009-ben, majd a banki szabályozás átfogó felülvizsgálatát a 2010-ben megjelent Bázeli III ajánlás tartalmazta (Dömötör & Miskó, 2016). A Bázeli II-ben alkalmazott kockázati mérték a VaR, de a Bázeli III bevezetése kapcsán számos vitaanyag készült a várható többletveszteség kockázati mérték javasolt használatára vonatkozóan, arra hivatkozva, hogy az extrém veszteségekkel kapcsolatos kockázat megragadása jobban lehetséges ezzel a mutatóval (Bugár & Rattig, 2016). A biztosítókra vonatkozó Szolvencia II szerinti tőkekövetelmény kapcsán hasonló módosítási igény nem merült még fel széles körben a szabvány bevezetése óta.

A Szolvencia II szavatolótőke-szükséglet számítása kapcsán két út kínálkozik (2009/138/EK, 100. cikk):

- Sztenderd formula alapján történő számítás.
- Belső modell / részleges belső modell használata.



Belső modell esetén a biztosító maga elemzi a kockázatok eloszlását, azok összefüggéseit és ezek alapján kalibrálja a tőkekövetelményt a 99,5%-os biztonsági szinthez. A kockázatok sokrétűsége és összefüggősége miatt ennek meghatározása sokszor nagyon bonyolult feladat. Amennyiben ez nem kivitelezhető, akkor ad támaszt a sztenderd formula, amely egy olyan szabályrendszer, ami a különböző kockázati modulok szavatolótőke igényére és azok összegzési módjára ad számítási szabályt. A részleges belső modell átmenetet képez a sztenderd formula és a belső modell közt. Fontos még megemlíteni, hogy a sztenderd formula használata esetén is alá kell tudni támasztani a biztosítónak, hogy a számított szavatolótőke-szükséglet megfelel a 99,5%-os VaR kritériumnak.



**3. ábra:** Kockázati modulok és almodulok a Szolvencia II rezsimben.  
 Forrás: saját szerkesztés (2015/35/EU, 2015) alapján.

A 3. ábrán láthatók a sztenderd formula szerinti kockázati modulok és almodulok. Az egyes egységek szavatoló-tőke-szükségletének számítása sok esetben egy érzékenység vizsgálat (más szavakkal stressz teszt vagy sokkolás) segítségével történik: az alapvető szavatoló tőke értékét kell különböző érzékenységvizsgálatoknak alávetni, és amennyiben a sokk esetén az csökken, akkor a csökkenés mértéke lesz az adott almodul tőkeszükséglete (egyéb esetben 0 az értéke). Például a halandósági kockázat esetén a tőkeszükséglet számításához a halandósági arányokat kell 15%-kal megemelni, az életbiztosítási költségkockázatoknál pedig a költségeket kell 10%-kal, az inflációs rátát pedig 1 százalékponttal megemelni, és ezen sokkok hatását végigvezetni a cash flow modellen<sup>4</sup>, majd végezetül az alapvető szavatoló tőke számításán (2015/35/EU, 137. és 140. cikkek). Az alkalmazandó sokk paraméterek részletesen megtalálhatók a (2015/35/EU) és (2019/981/EU) jogszabályokban. Habár az EIOPA tanulmánya bemutatja az ehhez hasonló feltevéseknek a hátterét – forrását (EIOPA, 2014), problémás lehet, hogy ilyen általános paraméterek biztosan nem adhatják tetszőleges kockázati profilú biztosítók esetén a 99,5%-os biztonsági szintű tőkekövetelményt. Példa gyanánt Börger sztochasztikus mortalitási modell alkalmazásával a hosszú élet kockázatra vizsgálja a sztenderd formula szerinti sokk (20%-os csökkenés az alkalmazott halandósági feltételezésben) és a 99,5%-os VaR követelmény összhangját és megállapítja azok eltérőségét (Börger, 2010).

A kockázatok tőkeszükségleteinek összegzése a sztenderd formula szerint a legtöbb esetben korrelációs technika segítségével történik, a következő képlet alapján:

$$SCR = \sqrt{\sum_{i,j} r_{i,j} SCR_i SCR_j}, \text{ ahol } r \text{ a korreláció, } SCR \text{ a tőkeszükséglet, } i \text{ és } j \text{ pedig az egyes}$$

modulok / almodulok az összegzés szintjétől függően. Például a halandósági- és költségkockázatok között a szabályozás által definiált korrelációs együttható 0,25, a paraméterek összessége megtalálható a (2015/35/EU) jogszabályban.

A képlet mögött szemléletesen a diverzifikációs hatás áll. A Value at Risk tulajdonságai alapján levezethető, hogy normális eloszlású kockázatok esetén a fenti képlet szerint végezhető az aggregálás (EIOPA, 2014). A valóságban azonban mind a normális eloszlás, mind a szabályozásban definiált korrelációs együtthatók, mind a sokkolt paraméterek szerint számolt SCR értékek megfelelésége könnyen sérülhet.

<sup>4</sup> Az ehhez hasonló számítások kapcsán a cash flow modellnek nagyon fontos alkalmazása az SCR kalkuláció is.

Szüle a biztosítási és befektetési kockázat szavatolótőke-szükségletét vizsgálja a Szolvencia II rezsimben, külön – külön kiszámítva, korrelációs technikával összegezve, valamint az együttes eloszlás alapján is, és példák segítségével megmutatja, hogy a kétféle számítás nem mindig vezet azonos eredményre (Szüle, 2010).

Amennyiben a normális eloszlás és a sztenderd formula szerinti korrelációs technika feltételezése nem igazolható, a változók kapcsolatrendszerének vizsgálatára további lehetőség a kopulák használata. Sklar tétele alapján tetszőleges együttes eloszlásfüggvény felírható a peremeloszlások és egy kopula (egy speciális többváltozós függvény) kompozíciójaként (Denuit, Dhaene, Goovaerts, & Kaas, 2005). Viszonylag egyszerűen paraméterezhető és becsülhető kopulákat is szolgáltat a szakirodalom (pl. Clayton, Frank, Student, Fréchet, Pareto), melyek alapján az összefüggő kockázatok jól modellezhetővé válnak. Amennyiben sikerült az egyes kockázatok peremeloszlásait leírni és egy jól illeszkedő kopulát találni, akkor az együttes eloszlás modellezhetővé válik. Egyes tanulmányok a kopulából történő szimulációra is módszereket adnak (lásd például (Valdez, 2011) és (Denuit, Dhaene, Goovaerts, & Kaas, 2005)). Ezzel vizsgálhatóvá válik az aggregált kockázat eloszlása. Ez megfelelő eszköz lehet a Szolvencia 2-beli szavatoló tőke szükséglet számításához is (belső modell vagy részleges belső modell használata esetén): a szimulált minta alapján kiszámíthatók az aggregált kockázat 99,5%-os kvantilise.

### **2.2.3 IFRS 17, a biztosítási szerződések komplex számviteli szabványa**

A biztosítási cash flow modellezés további jelentős alkalmazási területe az IFRS 17 számviteli sztenderd által megkövetelt egyes kalkulációk. Az alábbiakban történő rövid ismertetés (Szepesváry, 2019) cikkem alapján történik.

„2017 májusában került publikálásra az IFRS 17 sztenderd (IASB, 2017). 2022. január 1-től válik hatályossá az IFRS 17, a biztosítási szerződések új számviteli szabványa<sup>5</sup>. Az újszerű számviteli alapok erős aktuáriusi bázisra építkéznek, melynek egyik központi pillére a jövőbeli cash flow-k modellezése.

---

<sup>5</sup> A tanulmány megjelenése óta az IASB döntött a 2023. január 1-re való elhalasztásról: <https://www.ifrs.org/news-and-events/2020/03/ifrs-17-effective-date/>

A szabvány definiálja a *szerződés-teljesítési pénzáram* (angolul: *fulfilment cash flow*) fogalmát, ami nem más, mint egyrészt az előrejelzett jövőbeli cash flow-k, másrészt azok kiigazítása a diszkont rátán keresztül a pénz időértéke és a pénzáramokban rejlő pénzügyi kockázatok miatt, továbbá a *nem pénzügyi kockázatokhoz kapcsolódó kockázati kiigazítás* (angolul: *Risk adjustment for non-financial risk*, röviden *Risk adjustment* vagy *RA*), valamint a *szerződéses szolgáltatási marzs* (angolul: *contractual service margin*, röviden *CSM*). A CSM marzs a jövőbeli biztosítási szolgáltatás nyújtásából adódó, még nem realizált, várható profitot reprezentálja (IFRS 17, 38. cikk). A CSM marzs értéke szorosan összefügg a cash flow modellel. A CSM marzs eredménnyé történő realizálásában központi fogalom a *fedezeti egység* (angolul: *coverage unit*, röviden *CU*). Egy biztosítási szerződéscsoportra vonatkozó fedezeti egység a szerződések által nyújtott fedezet valamilyen kvantitatív mutatója, amely figyelembe veszi a szolgáltatások nagyságát és a fedezet várható átlagidejét (IFRS 17, B119/a cikk). A CSM marzs felszabadulásából adódó profit realizálása egy adott időszakra vonatkozóan és az időszak végi CSM marzs meghatározása az időszakra jutó és a jövőbeli várható fedezeti egységek alapján, arányosan kell, hogy megtörténjen (IFRS 17, B119/b,c cikk).” (Szepesváry, 2019)

A fentiek alapján az IFRS 17 hatálya alatt a cash flow modell szoros kapcsolatban lesz a vállalat pénzügyi eredményével.

Az IFRS 17 kalkulációk magukban foglalnak egy implicit profittesztet, az úgynevezett *veszteségességi vizsgálatot* (angolul *onerous test*), ami a szerződések csoportosításához, az úgynevezett GIC besoroláshoz szükséges.

„Fontos fogalom a szerződések IFRS 17 szerinti csoportosításában a *biztosítási szerződések portfóliója* (angolul: *portfolio of insurance contracts*, a későbbiekben röviden *PIC*). A szabvány szerint a hasonló kockázatot tartalmazó szerződések kezelhetők egy portfólióban, például egy adott termékcsaládba tartozó szerződések (IFRS 17, 14. cikk). A portfólió utáni következő besorolási szint a *biztosítási szerződések csoportja* (angolul: *group of insurance contracts*, a későbbiekben röviden *GIC*). A GIC nem lesz más, mint a portfólióba tartozó szerződések tovább-bontása a profitabilitási szempont és az időhorizont szerint. Kicsit részletesebben az (IFRS 17, 16. cikk) alapján egy biztosítási portfóliót legalább a következő szerződéstípusok szerint kell szétválasztani:

- a, A kezdeti megjelenítéskor (angolul: *initial recognition*) veszteséges szerződések<sup>6</sup>;
- b, Azok a szerződések, melyek esetén a kezdeti megjelenítéskor nincs szignifikáns valószínűség, hogy veszteségessé válnak a későbbiekben;
- c, A portfólió egyéb szerződése.

A szerződéseket a kezdeti felismeréskor kell besorolni a fenti kategóriákba, a szerződés-teljesítési pénzáramok alapján<sup>7</sup>, figyelembe véve a korábban felmerült szerzési költségeket és a szerződés kezdetekor adódó egyéb cash flow-kat (IFRS 17, 47. cikk). Előbbi szegmentáláson túl az idősíkon is csoportosítani kell a szerződéseket: egy szerződéscsoportba nem kerülhetnek olyan szerződések, amelyeknek a kezdete közt több, mint 1 év telik el (IFRS 17, 22). Összefoglalva, a GIC-ek olyan szerződéscsoportok, amik egy adott portfólió legfeljebb éves hosszúságú kohorszaira, és legalább a fenti három nyereségességi kategóriára kerülnek felosztásra.

A biztosítási szerződések csoportja egyrészt fontos nyilvántartási egység az IFRS 17 kalkulációkban, de a szerződéses szolgáltatási marzs és a veszteségkomponens fogalmak alapján levezethető, hogy a GIC szerződéscsoport besorolásnak nem csak technikai jelentősége van, annak fontos kihatása lehet az IFRS 17 szerinti eredménykimutatásra.

Fontos különbség rajzolódik ki a veszteséges és nem veszteséges szerződések vonatkozásában. Az (IFRS 17, 47. cikk) alapján, amennyiben a kezdeti megjelenítéskor a szerződés-teljesítési pénzáramok alapján számolt mennyiség összességében ráfordítást jelent a biztosítónak, azaz a veszteséges szerződések csoportjai esetén, a várható veszteség egyből megjelenítendő az eredménykimutatásban, a CSM marzs pedig 0 lesz. Előbbi veszteséget *veszteségkomponensnek* (angolul: *loss component*, röviden *LC*) nevezi a szabvány (IFRS 17, 49. cikk).

Aszimmetrikus helyzetet okoz, hogy a kezdeti megjelenítéskor a veszteséges szerződéscsoportok esetén a várható veszteség egyből megjelenik az

---

<sup>6</sup> A szabvány az *onerous* jelzővel hivatkozik az ilyen szerződésekre, csoportokra.

<sup>7</sup> A veszteségesség kezdeti felismeréskori megállapítása kapcsán a szabvány alapján alapvetően szerződésenként kell vizsgálni a profitabilitást. Ez alól kivételt jelenthet, ha ésszerű és alátámasztott információk alapján lehet arra következtetni, hogy szerződések egy halmaza azonos nyereségességi csoportba tartozik, ez esetben a szerződés-halmazra egyben is elvégezhető a veszteségességi teszt (IFRS 17, 17. cikk).

eredménykimutatásban, míg a nyereséges szerződéscsoportok esetén a profit csak hosszabb távon, a fedezet lefutásával arányosan realizálódik.

Hasonló mondható el a *későbbi mérések* (angolul: *subsequent measurement*) során esetlegesen veszteségessé váló szerződéscsoportokra<sup>8</sup> is (lásd (IFRS17:48)). Amennyiben a bekövetkező esetleges változások miatt keletkező veszteség meghaladja a CSM marzs mértékét, akkor a veszteség CSM marzsot meghaladó többlete azonnal elszámolandó veszteségként az eredménykimutatásban, a CSM marzs pedig 0 lesz.

Az aszimmetrikus kezelés miatt az IFRS 17 hatálya alatt a kezdetben veszteséges szerződések, illetve a későbbiekben esetlegesen veszteségessé váló szerződéscsoportok szignifikánsan befolyásolhatják az egyes évek eredményét. Minél nagyobb az ilyen csoportokba eső szerződések aránya, annál nagyobb azonnal elszámolandó veszteség keletkezhet, mialatt a veszteségessé nem váló szerződéscsoportokból adódó nyereség csak a fedezet lefutásával arányosan képződik majd meg.” (Szepesváry, 2019)

Összefoglalóan elmondható, hogy az IFRS 17 szabvány kapcsán központi jelentőségű a cash flow modell és a veszteségességi vizsgálat (profitteszt) is, az IFRS 17 sztenderd hatálya alatt a pénzügyi beszámolót erőteljesen befolyásolják az alkalmazott technikák.

A magyar szakirodalomban általános összefoglalót ad a szabvány legfontosabb elemeiről (Hanák, 2017). (Árendás, Orbán, & Urbán, 2018) pénzügyi hatáselemzést is bemutat az IFRS 4 – IFRS 17-et összehasonlítva, és felhívja a figyelmet a szabvány informatikai és egyéb területeken átívelő komplexitására. Megemlítendő még az (EIOPA, 2018) kiadványa is, melyben egy összehasonlítás is található a Szolvencia II és az IFRS 17 keretrendszeréről.

#### **2.2.4 A cash flow modellezés egyéb alkalmazási területei**

Az értekezés alapvetően az eddig bemutatott cash flow modellezési alkalmazásokra koncentrál, a későbbiekben bemutatott esettanulmányok és vizsgált hipotézisek a profitteszt, a Szolvencia II és az IFRS 17-ben használatos cash flow előrejelzések módszertanára épít.

---

<sup>8</sup> Ilyen nagyobb eséllyel a „portfólió egyéb szerződései” elnevezésű szerződéscsoportokban keletkezhet.

A teljesség és a részletek igénye nélkül néhány további példa kerül megemlítésre az aktuáriusi cash flow modellezés lehetséges alkalmazásai közül.

Gyakori alkalmazási területe a cash flow modellezésnek a különböző *beágyazott érték* (angolul: *embedded value*) típusú számítások, melynek legfontosabb típusai: *Embedded value*, *Market consistent embedded value*, *European embedded value* számítás (lásd például (Janecek, 2012)). Ezek számításai arra keresik a választ, hogy mennyit ér a biztosító. Ennek az értéknek fontos része a szerződésekben rejlő jövőbeli profit, ezáltal fontos szerepet kap a cash flow modellezése. A Market consistent embedded value és az European embedded value számítások esetén a szerződéses opciókat és garanciákat sztochasztikus módszerrel kell értékelni, előbbi esetén továbbá az alkalmazott diszkontráta a megfigyelhető piaci görbe alapján adódik (Janecek, 2012).

A cash flow modellezés alkalmazásai közé tartozik még a *kötelezettség megfeleléségi teszt* (röviden: *KMT*, angolul: *liability adequacy test*, vagy röviden *LAT*). Azt vizsgálja a teszt, hogy az elhatárolt szerzési költségekkel csökkentett számviteli biztosítástechnikai tartalékok elégségesek-e jövőbeli várható pénzáramok fedezetéül. Ehhez a vizsgálathoz is a cash flow modell az alapvető számítási eszköz. Amennyiben a jövőbeli pénzáramok kockázatmentes hozamgörbével diszkontált várható jelenértéke meghaladja az elhatárolt szerzési költségekkel csökkentett számviteli biztosítástechnikai tartalékok értékét (azaz nem elégséges a kötelezettségek fedezetére a képzett tartalék), akkor a különbséget úgynevezett LAT tartalékként kell megképezni az IFRS 4 rezsimben. Részletesebb módszertani tudnivalók megtalálhatók például a MAT útmutatásában (Magyar Aktuárius Társaság, 2007). A LAT tartalék megfelelőjének a várható veszteségek tartaléka tekinthető a magyar számvitel szabályok szerint (lásd például (192/2000. (XI. 24.) kormányrendelet, 2000)).

Előbbiekén túl a biztosító üzleti tervezési folyamataiban is fontos szerepet kaphatnak a cash flow modellek, ugyanis például annak előrejelzése kapcsán, hogy milyen díjbevétel vagy pénzügyi eredmény várható egy adott üzleti év vonatkozásában, szintén szükséges a biztosítási szerződésekhez kapcsolódó jövőbeli pénzáramok becslése. Itt fontos kiemelni, hogy míg például a Szolvencia II-beli legjobb becslés, vagy az IFRS 17-beli kalkulációk esetén csak az értékelés időpontjában ismert állomány alapján végzendők a kalkulációk, addig az üzleti tervezés esetén a várhatóan jövőben megkötött szerződések hatását is figyelembe kell venni. Az üzleti tervezési modellek összekapcsolódhatnak a Szolvencia II rezsim által elvárt *saját kockázat- és szavatolótőke megfelelés-értékeléssel*

(angolul *Own risk and solvency assessment*, röviden *ORSA*), lásd (2009/138/EU, 45. cikk) is, ahol a szavatolótőke értékelésekor elvárt az elfogadott üzleti stratégia figyelembe vétele. Minden történhet például úgy, hogy a biztosító számszerűsíti, hogy az üzleti terv feltételezései alapján milyen hatások várhatók a jövőben a szavatolótőke megfelelősége kapcsán.

### **2.3. Az életbiztosítási cash flow modellezés legfontosabb változói és azok befolyásoló tényezői**

Jelen alfejezetben bemutatam a cash flow modellezés kapcsán releváns pénzáram típusokat, azok specifikumait a kiemelt alkalmazási területek kapcsán, valamint a pénzáramok legfontosabb befolyásoló tényezőit. A szakasz célja a későbbi kutatásokhoz, hipotézisek megalapozásához szükséges változók bemutatása.

Elsőként a Szolvencia II szabályozás szerinti legjobb becsléshez szükséges változókat tekintem át, utána pedig további az értekezés szempontjából kiemelt alkalmazások (profitteszt és IFRS 17-beli cash flow modell) szerinti különbségeket.

A Szolvencia II szabályozás a következő pénzáramok előrejelzését írja elő a legjobb becslés kiszámítása kapcsán a meglévő biztosítási szerződések vonatkozásában (2015/35/EU, 28. cikk):

- Ügyfelek által befizetett díjak és ezekből származó egyéb pénzáramlások,
- Szolgáltatási kifizetések,
- A biztosítási kötelezettségek teljesítésével összefüggő összes költség,
- A biztosító és a közvetítők közötti a biztosítási kötelezettségek kapcsán végrehajtott kifizetések,
- A biztosító és a befektetési vállalkozás közt indexhez vagy befektetési egységhez kötött szolgáltatások kapcsán végrehajtott kifizetések,
- Adó befizetések, melyeket várhatóan a szerződőre terhelnek, illetve melyek a biztosítási kötelezettségek rendezéséhez szükségesek,
- Egyéb tételek (pl. természetben megfizetett szerződéses szolgáltatások, mentéshez és engedményezéshez<sup>9</sup> kapcsolódó kifizetések).

---

<sup>9</sup> *Salvage and subrogation*.



A pénzáramlásokat kizárólag a már meglévő szerződések<sup>10</sup> vonatkozásában és az alkalmazandó *szerződés határon* (angolul: *contract boundary*) belül veszi figyelembe a biztosító a legjobb becslés esetén (2015/35/EU, 17. cikk), így a jövőbeli új szerződések sem részei annak. A szerződés határok vonatkozásában pedig (2015/35/EU, 18. cikk) alapján levezethető, hogy egyrészt azon időponton túl, amikor a biztosítónak joga van a szerződés egyoldalú felmondására vagy a díj egyoldalú módosítására, nem vehetők figyelembe a jövőbeli pénzáramok, másrészt pedig, ha a szerződésben nincs pénzügyi garancia vagy az nem biztosít térítést a biztosítottat kedvezőtlenül érintő biztosítási esemény kapcsán, akkor szintén nem vehetők figyelembe a jövőbeli pénzáramok. A konkrét szerződés határok vizsgálata adott biztosítási szerződés vonatkozásában történhet meg, de általánosságban elmondható, hogy a magyar jogrend alapján sem a tipikus nem-életbiztosítási szerződések esetén, sem pedig egy kockázati fedezet nélküli unit-linked biztosítás esetén nem a szerződés teljes tartamára kell a cash flow-kat megjeleníteni.

Fontos még kiemelni az alábbiakat (2009/138/EK, 77-79. cikkek) a Szolvencia II legjobb becslése kapcsán:

- A pénzáram előrejelzésnek a biztosítási kötelezettségek rendezéséhez szükséges valamennyi készpénz beáramlást és kiáramlást kell figyelembe vennie,
- A legjobb becslés számítása során figyelembe kell venni a jövőbeli diszkreionális többlethozamot, valamint az inflációt is,
- A legjobb becslés számítása során figyelembe kell venni a szerződésbe foglalt pénzügyi garanciák és szerződéses opciók értékét,
- A legjobb becslést időszerű és hiteles információkra, realisztikus feltevésekre alapozva kell kiszámolni, megfelelő aktuáriusi és statisztikai módszerekkel,
- A legjobb becslést bruttó értéken kell számítani (a viszontbiztosítási szerződésekből megtérülő összegek levonása nélkül)
- A pénz időértékét a vonatkozó kockázatmentes hozamgörbe felhasználásával kell számítani.

Érdemes néhány fontos következtetést levonni a Szolvencia II értékelési elvei kapcsán. Észrevehetjük, hogy a biztosítási portfólió mögött fedezetként álló befektetési eszközök hozama nem része a legjobb becslésbeli előrejelzésnek, valamint hogy az olyan jellegű tételek, amik nem generálnak valós pénzmozgást (mint például a számviteli

---

<sup>10</sup> Azaz ha a biztosítási szerződés létrejött vagy megkezdődött a biztosítási fedezet.

biztosítástechnikai tartalékok változásai) szintén nem szerepelnek abban. Továbbá nem részei a legjobb becslésnek az esetleges viszontbiztosításokkal kapcsolatos pénzáramok, sem pedig a tőke költsége. Utóbbi fedezetül a korábban említett kockázati ráhagyás szolgál. A szerződések határaitra vonatkozó speciális szabályokat felhasználó modell is nyilvánvaló, hogy könnyen eltérhet a valóságbeli pénzáramlásoktól.

A fentiek alapján következik, hogy más cash flow alkalmazások esetén szükség lehet a modell módosítására.

Az IFRS 17-ben használatos cash flow modell nem tartalmaz lényeges eltéréseket a Szolvencia II legjobb becsléséhez képest. Egyes változókhoz kapcsolódó feltételezések kapcsán adódnak csak szabályozási különbségek (pl. költségek, hozamgörbe), ezek közül az értekezés szempontjából relevánsak a későbbi alfejezetekben kerülnek majd említésre.

Rátérve az árazáshoz használatos profitteszt modell specifikumaira, érdemes a hatályos magyar számviteli rendszer szerinti adózott eredmény tételeit áttekinteni. Természetesen minden valós pénzmozgást generáló tétel, ami szerepel a Szolvencia II legjobb becslés cash flow-i közt, hatással lesz a biztosító pénzügyi eredményére is. A 192/2000. (XI. 24.) kormányrendeletet a biztosítók éves beszámoló készítési és könyvvizelési kötelezettségének sajátosságairól (192/2000. (XI. 24.) kormányrendelet, 2000) alapján, a legfontosabb tételek (logikai csoportokra szedve), amik a biztosító eredménykimutatásában szerepelnek, de a Szolvencia II legjobb becslés pénzáramok közt nem:

- számviteli biztosítástechnikai tartalékok és elhatárolt szerzési költségek változásai,
- befektetésekből adódó bevételek és ráfordítások,
- viszontbiztosítással kapcsolatos pénzmozgások,
- adófizetési kötelezettség (társasági adó),
- nem biztosítástechnikai és egyéb tételek.

Amennyiben a biztosító profittesztelésre szeretné használni a cash flow modellt, a pontos eredmény érdekében lehetőség szerint törekedni kell a fenti tételek figyelembe vételére is, amit (Andrews, 1996) is kiemel. A számviteli biztosítástechnikai tartalékok és a viszontbiztosítási tételek becslése a kérdéses termék tarifája és az egyéb feltételezések segítségével számolható. A Szolvencia II legjobb becslés pénzáramok kapcsán említésre került a jövőbeli befektetési nyereségrészesedés, aminek számítása feltételezi, hogy a

modell tartalmaz az eszközök jövőbeli hozamaira vonatkozó projekciót (hiszen jellemzően ez a nyereségrészesedés alapja).

A társasági adó becslése kapcsán az alábbiakat állíthatjuk, A hatályos magyar szabályozás (1996. évi LXXXI. Törvény, 1996) szerint egyszerű százalékos adókulcs szerint számítható a társasági adó (az adókedvezmények nélkül). Azonban érdemes megemlíteni, hogy az effektív társasági adó jelentősen eltérhet a 9 százalékos törvényi mértéktől, így a vállalat saját elemzése alapján cégspecifikus adatokat építhet be a modellbe. Bár még más adójogszabályok és társasági adó kulcs volt az irányadó, de (Elek & Lőrincz, 2015) tanulmánya is bemutatja az effektív társasági adókulcs magyarországi rugalmasságát. (Varga, 2014) kiemeli, hogy a társasági adót a közvetlen adók közé szokás sorolni, tehát legfeljebb csak közvetetten van lehetőség az adó áthárítására (például a fogyasztókra). Jó példa erre egy olyan profitteszt modell, ami a modellezett pénzáramok közt figyelembe veszi a nyereséget terhelő társasági adót. Amennyiben a díjszintet egy ilyen modellel kalibrálják az végső soron az adó közvetett áthárítását jelenti.

Végül pedig a cash flow modellben a nem biztosítástechnikai és egyéb tételeket (amennyiben feltételezés szerint mértékük függ a profitteszt hatályát képező új szerzéstől) célszerű valamilyen egyszerűsített allokációs módszerrel figyelembe venni.

Profitteszt alkalmazás esetén tekintettel kell még lenni az alábbi eltérésekre a cash flow modellben. Amíg a Szolvencia II legjobb becslés csakis a meglévő állományra készül, addig a profitteszt modell ezzel ellenkezőleg, a jövőbeli új szerzés profittartalmát becsüli. A szerződések határai kapcsán pedig célszerűbb realisztikus, valós törlési adatokon alapuló feltételezéseket használni, a Szolvencia II rezsím által elvárt számítás helyett. Habár a számviteli eredmény tételeiben közvetlenül nem mutatkozik, de a profitteszt kapcsán fontos még a szavatolótőke-szükségletre vonatkozó feltételezés szükségessége. Ugyanis a profitteszt tárgyat képező vizsgált új szerződésalmaz szavatolótőke-szükségletet generál, amit a vállalatnak tőkével kell fedeznie. Amennyiben ez a tőke nem áll rendelkezésre, és azt valamilyen külső forrásból kell fedezni, vagy ha pont a későbbi új szerződések szavatolótőke-fedezete miatt tartja azt a biztosító, akkor fontos a tőke költségét és annak megtérülését is figyelembe venni a profitteszt modellben (lásd például (Richards, 2004)).

A kutatási hipotézisek szempontjából kulcsfontosságú annak áttekintése, hogy mik a legfontosabb paraméterek, amik befolyásolják az említett pénzáramokat és egyéb változókat. A fentiekben az általános, jogszabályok alapján tett hivatkozások egységesen

élet- és nem-életbiztosításra is vonatkoznak. Mivel azonban a fejezet és a szereplő kutatások témája az életbiztosítási cash-flow modellezés, ezért a további részletesebb vizsgálatok, a hipotézisek felállítása már csak az életbiztosítások vonatkozásában történik.

Az ismertetett alkalmazások rávilágítottak, hogy a cash flow modell szempontjából az egyik elsődleges fontosságú mutató a pénzáramok várható jelenértéke, de általánosabban a pénzáramok segítségével definiálható változók eloszlása (lásd például 99,5%-os VaR érték a Szolvencia II SCR számításakor) is a vizsgálat tárgya lehet. A probléma kapcsán fontos azoknak a tényezőknek a feltérképezése, amik a pénzáramok időbeliségét, azok nagyságát, valamint azok valószínűségét befolyásolják.

Az életbiztosítások esetén a biztosítási esemény a biztosított életben lététől vagy elhalálozásától függ, emiatt a **halandóság**, az elhalálozás ténye befolyásoló tényezője a pénzáram modellnek. Gyakran előfordul, hogy a halálozással összefüggő biztosítási eseményen túl más biztosítási eseményeket is magában foglal az életbiztosítási szerződés, például különböző nem-életbiztosítási kockázatokat (baleset- és betegségbiztosítási fedezeteket), de akár a házasság, gyermekszületés is lehet biztosítási esemény (Banyár, 2016), illetve a nyugdíjazás. A halandóságon kívüli biztosítási eseményeket nem vizsgálja részletesebben az értekezés az életbiztosítási cash flow modell felírásakor.

A pénzáramokat nem csak a biztosítási esemény bekövetkezése vagy be nem következése befolyásolhatja, hanem egyéb hatások is. A szerződőnek a biztosítási szerződésben vagy a jogszabályokban meghatározottak szerint joga van kilépni a biztosításból, a **szerződés megszüntetése, valamint más opciós jogok lehívása** is befolyásolhatja a pénzáramokat. A szerződés megszüntetése minden esetben a díjfizetéssel kapcsolatos pénzáram lezáródásával jár együtt, de az életbiztosítások esetén sok esetben a megszüntetéskor egyfajta maradékjogként a szerződő jogosult a visszavásárlási összeg felvételére. A törlési vagy visszavásárlási valószínűség így fontos paramétere a pénzáram modellnek. Ezzel együtt szokás említeni további opciós jogokat, amik magukban foglalják a szerződéses jogokat a szolgáltatások, a díjak vagy a hátralévő tartam módosítására vonatkozóan a szerződés megszüntetése nélkül (Ballotta & Haberman, 2008). Ilyenek például a díjmentes leszállítás, indexálás (vagy annak visszautasítása), részleges visszavásárlás (Banyár, 2016).

Az áttekintett tényezők alapján már jól leírható sok pénzáram-típus időbeli megjelenése és lefutása, de azt egyéb tényezők is befolyásolhatják. Logikus például, hogy az ügyfél

elhalálózása esetén jelentős idő telhet el, mire minden szükséges dokumentum beérkezik a biztosítóhoz és megtörténik a haláleseti kifizetés, valamint az is, hogy egy biztosítási díj előírásához képest is lehetségesek időbeli eltolódások mire az ügyfél befizeti a díjat. Hasonlón a károk kifizetésének időbeli kifutása több modellel megadható, ezek megtalálhatóak például (Wüthrich & Merz, 2013) módszertani könyvében. Az ehhez hasonló tényezőket nem vizsgálja részletesen az értekezés, az alkalmazások szempontjából gyakori feltételezés (megfelelő alátámasztással), hogy a pénzáramok időbelisége a projektált szerződés státuszok alapján történik, a kapcsolódó esedékességek időpontjában.

A pénzáramok nagysága kapcsán célszerű pénzáram típusonként vizsgálni a befolyásoló tényezőket.

A szerződő vagy kedvezményezett részére történő szolgáltatási kifizetések egyrésztől függenek a biztosítási esemény bekövetkeztétől, illetve a szerződő viselkedésétől. A szolgáltatás típusától függő kifizetés nagysága pedig a biztosítási szerződésben előre lerögzített nagyságú pénzösszegeből, illetve esetleges további diszkrecionális kiegészítésből adódhat. A diszkrecionális nyereségrészesedés alapja az lehet, hogy a díjkalkulációnál jellemzően óvatos, konzervatív paraméterek használatosak, majd az egyes pénzügyi évek végén a tapasztalt befektetési-, mortalitási- és költségeredmény alapján részesedést adnak ebből a biztosítók az ügyfeleknek (Maurer, Rogalla, & Siegelin, 2013). A német jogrendben mindhárom említett profitforrásból részesednie kell az ügyfélnek, ellenben a magyar biztosítási törvény szerint csak az elért befektetési hozam az alapja a részesedésnek. A Biztosítási törvény alapján például a 2016.01.01 előtt kötött klasszikus, többlethozam-visszatérítésre jogosult életbiztosítási állomány esetén a többlethozam 80%-a kötelezően visszajuttatandó, illetve más speciális szabályok vonatkoznak a 2000.12.31-ig megkötött szerződésekre is (2014. évi LXXXVIII. törvény, 2014). További nyereségrészesedést definiálhatnak a biztosítási feltételek, valamint a unit-linked típusú termékeknél is igaz, hogy a szolgáltatások függenek a jövőbeli befektetési teljesítménytől. Az említett terméktípusok esetén tehát a **jövőbeli befektetési hozam** fontos befolyásoló változója a cash-flow modellnek is (és adott esetben, ha más paramétertől is függ a szolgáltatási összeg, akkor az is).

A cash flow modell további jelentős befolyásoló tényezője a **költség feltételezés**. A Szolvencia II szabályozás az alábbi ésszerű elveket fogalmazza meg a költségek modellezése kapcsán (2015/35/EU, 29. és 31. cikkek):

- A költségek előrejelzése kapcsán figyelembe kell venni az összes olyan költséget, amely a biztosítási kötelezettségekhez kapcsolódik, magukba foglalva az igazgatási, befektetési, kárrendezési és szerzési költségeket, beleértve az általános költségeket is.
- A költségek tervezésekor figyelembe kell venni a jövőben szerzett új biztosítási állományt,
- A költségeket reálisan, objektíven és következetesen kell hozzárendelni az egyes állományrészekhez,
- Általánosságban figyelembe kell venni a várható gazdasági fejleményeket és az inflációt.

Előbbiek előrevetítik, hogy a költségek előrejelzése – több más tényezővel összefüggő – rendszert kell alkotson, valamint azt is, hogy a költségek allokációja is fontos kérdéskör. A kapcsolódó modellezési lehetőségeket az értekezés 2.5. szakasza mutatja be részletesen.

Az infláció kapcsán (Richards, 2004) megjegyzi, hogy egy életbiztosító esetén jellemzően a költségeknek több mint fele bér jellegű költség, és az alkalmazott inflációs feltételezést ennek megfelelően kell megválasztani. Az infláció továbbá amiatt is fontos paraméter, mivel az életbiztosítás jellemzően hosszú távú üzlet, tehát az infláció fokozottan kihat a hosszabb tartamok költség-szükségletére.

Az áttekintett befolyásoló tényezők sok esetben nem függetlenek egymástól, így vizsgálni kell azok kapcsolatrendszerét is. A hozamok modellezése kapcsán rávilágít majd az értekezés, hogy a jövőbeli befektetési hozamok összefügghetnek az állomány volumenével (így a törlési paraméterekkel is), aminek kezelésére dinamikus modell kerül bemutatásra.

A pénzáramok bekövetkezési valószínűségeinek matematikai modellezését gyakran Markov folyamatok segítségével végzik a szakirodalomban. A folyamathoz tartozó véges elemszámú állapottér a szerződéses státuszokat jelenti, a  $t$  időpontbeli pénzáramok attól függenek, hogy ebben az időpontban melyik  $i$  állapotban van a szerződés ( $b_i(t)$ ), és melyik  $j$  állapotba lép onnan tovább ( $b_{ij}(t)$ ) (Buchardt & Møller, 2015). Hasonló elvet követ (Koller, 2012) is, aki matematikailag formalizálja a cash flow-k alapján a tartalék értékét, rekurzív formulát ad a tartalékra és díjszámításhoz is felhasználja a kapott egyenleteket.

A valós adatokon történő modellezés során determinisztikus és sztochasztikus modelleket különböztetnek meg. Felmerül a kérdés, hogy több, adott esetben összefüggő véletlen esemény komplex rendszeréből hogy készíthető determinisztikus modell? A determinisztikus cash flow megközelítés nem más, mint a sztochasztikus modell leegyszerűsítése egy darab determinisztikus scenárióvá, ahol a feltételezésekre vonatkozóan azok legjobb becslése szerinti értéke kerül alkalmazásra (Janecek, 2012). Mindez praktikus azt jelenti, hogy az egyes feltételezések esetén kiszámításra kerül azok legjobb becslése (pl. várható halálozási és törlési ráták, várható költségek és jövőbeni hozamok), és ezek alapján készül egy darab determinisztikus scenárió a feltételezéseknek megfelelő várható pénzáramokkal. Előbbi scenárió esetén a becslés jellemzően ténylegesen a várható értéket jelenti, de bizonyos esetekben előfordulhat, hogy valamilyen bizonytalansági faktorról korrigált értékek kerülnek alkalmazásra, lásd például (Janecek, 2012). Az értekezésben a továbbiakban a legjobb becslések mindig a várható értéket jelentik.

Előbbivel szemben a sztochasztikus modell esetén az egyes feltételezésekre, mint valószínűségi változókra tekintünk, figyelembe véve a köztük lévő esetleges összefüggőséget, és az általuk generált véletlen cash flow-kat vizsgáljuk. Egy sokváltozós összefüggő rendszerből adódó pénzáramok jelenértékének eloszlásának, vagy akár a várható értékének a meghatározása explicit matematikai formulákkal nagyon nehéz feladat lehet. Ilyen esetekben szokás Monte Carlo szimulációk segítségével közelíteni a kívánt eloszlást vagy annak valamilyen kapcsolódó mutatóját. A statisztikából ismert Glivenko tétel alapján, ha a minta elemszáma tart a végtelenbe, akkor a tapasztalati eloszlásfüggvény 1-valószínűséggel egyenletesen konvergál a valódi eloszlásfüggvényhez (Tucker, 1959). A Monte Carlo szimulációk lényege éppen az előbbi, véletlen szám generálás alkalmazásával kellően nagy számú realizációt állítanak elő a vizsgált eloszlásból, majd a szimulált minta alapján lesz becsülhető akár az eloszlás, akár azzal kapcsolatos bizonyos mutatók, mint például a várható érték (lásd például (Bølviken, 2014)).

A determinisztikus cash flow modell előnye, hogy egyszerűbben képezhetők a feltételezései és könnyebb az informatikai megvalósítása is. Hátránya viszont, hogy mivel a valószínűségszámításban nem igaz az  $E(f(x)) = f(E(X))$  egyenlőség, ezért az egy darab determinisztikus scenárió hibásan is becsülheti a várható értéket. Továbbá az egy darab scenárió miatt a kérdéses mennyiség eloszlásáról nem nyerünk információt.

Előbbi problémák orvosolhatók a sztochasztikus cash flow modell használatával, ahol viszont az elméleti és az informatikai megvalósítás nehézsége jelenthet hátrányt. Sok esetben előfordulhat viszont az életbiztosítási cash flow modellezésnél, hogy a determinisztikus modell torzítatlan becslését adja a várható értéknek, vagy nominális értelemben olyan minimális torzítást ad, hogy egyszerűsége miatt praktikusabb eszköz az alkalmazás szempontjából, mint a sztochasztikus modell.

A bevezető ismeretek áttekintése után a következő szakasztól rátérek a cash flow modell részletesebben vizsgált változóira, amik az kutatási hipotézisek alapját képezik.



## 2.4. Hozammodellezési megközelítések a pénzáram előrejelzésben és a hozamgarancia értékelése

Jelen szakasz témája az életbiztosítási cash flow előrejelzéshez kapcsolódó jövőbeli hozamok egyes modellezési lehetőségeinek vizsgálata, valamint a hagyományos életbiztosítási termékekben alkalmazott hozamgarancia értékének elemzése. Az előző szakaszban a cash flow modellezés kapcsán detektálásra került, hogy alapvető fontosságú kérdés egy biztosítási portfólió jövőbeli befektetési hozamainak előrejelzése (ami alapján meghatározhatók például egy nyereségrészesedéses életbiztosítás jövőbeli szolgáltatási összegei).

Először a témához kapcsolódó lehetséges módszertani tárházat ismertetem, majd a szakasz további részében egy esettanulmányt mutatok be, ami saját kutatásomon alapszik. Az esettanulmány a hagyományos életbiztosítási termékekhez kapcsolódó speciális dinamikus modellezési technikát mutat be a hozamok előrejelzésére, valamint a technikai kamatláb által nyújtott garancia értékelésének egyes lehetőségeit. Az esettanulmány célja az alábbi hipotézis igazolása:

- 1. Hipotézis:** sztochasztikus módszerek révén számszerűsíthetővé válik a technikai kamatláb által nyújtott garancia értéke, amely különösen az alacsony hozamkörnyezetben jelentős hatással lehet a kötelezettségek értékére.

Fontos kiemelni először a cash flow modell szempontjából releváns nyereségrészesedés és befektetési hozam kapcsán, hogy a magyar számviteli szabályok szerint a unit-linked életbiztosítások szerződői javára végrehajtott befektetéseket piaci értéken kell értékelni a kapcsolódó biztosítástechnikai tartalékokkal azonos összegben, ezzel szemben a hagyományos életbiztosítások díjtartaléka mögötti eszközök esetén könyv szerinti értékelést kell alkalmazni (192/2000. (XI. 24.) kormányrendelet, 2000).

Ez alapján egy unit linked biztosítás pénzáram-projekciójához a mögöttes eszközportfólió piaci érték változásaiból adódó jövőbeli piaci hozamait, míg egy hagyományos életbiztosítás esetén a mögöttes eszközhalmaz könyv szerinti hozamait szükséges előrejelezni. Utóbbi technikai kezelése bonyolultabb egy előrejelző modell esetén, hiszen értékpapíronként lehetséges a könyv szerinti értékek és hozamok nyilvántartása, és ezt kell a jövőbeli piaci várakozásokat is figyelembe véve projektálni. Továbbá mivel

szükséges a kötelezettségek (tartalékok) eszközökkel való megfelelő fedezése a jövőre nézve is, ez az eszközök és források összevetésének előrejelzését is megköveteli. Az eszközök és források megfelelő illeszkedésével az úgynevezett eszköz-forrás menedzsment foglalkozik (angolul: *asset-liability management*, röviden *ALM*), lásd például (Fabozzi & Konishi, 1996). A 2.4.1 szakaszban szereplő esettanulmány egy saját készítésű, az előbbi szempontoknak megfelelő *dinamikus ALM modellként* nevezett eljárást használ a probléma kapcsán a hagyományos életbiztosításokra. Ennek lényege, hogy a díjtartalék fedezetéül szolgáló befektetési eszközportfóliót modellezi dinamikusan, figyelembe véve a kiinduláskori eszközportfóliót, a biztosítási állomány (díjtartalékok) várt változásait, a jövőbeli feltételezett kamatlábakat és befektetési stratégiát, és ezek alapján határozza meg a projektált számviteli hozamokat (Szepesváry, 2015).

A jövőbeli kamatlábakra vonatkozó feltételezések kapcsán a következő megfontolások tehetők. Tegyük fel, hogy a számításokhoz rendelkezésre áll egy spot-hozamgörbe<sup>11,12</sup>, a klasszikus képlet szerint ebből kiszámíthatók a forward hozamok (lásd például (Bodie, Kane, & Marcus, 2005)). Bevett gyakorlat azt feltételezni, hogy a jövőben elérhető kamatlábak (azaz például a jövőben vásárolt kötvények kamatai) ezen forward hozamok szerint adódnak (lásd például (Janecek, 2012)). Ismeretes azonban, hogy ez csak a „bizonytalanságot nem tartalmazó” világban lenne érvényes, a valóságban általában (a kockázati prémium miatt) a jövőbeni kamatlábak nem egyeznek meg a jelenben számolható forward hozamokkal (Bodie, Kane, & Marcus, 2005). Ennek a problémának a szofisztikáltabb vizsgálatára születtek az úgynevezett kamatlábmodellek, melyekről részletes ismertetést adnak Hull, valamint Medvegyev és Száz könyvei (Hull, 1999), (Medvegyev & Száz, 2010). A modellek közös jellemzője általában, hogy Wiener-folyamaton alapuló sztochasztikus folyamatokként állnak elő. Hull megfogalmazásában megkülönböztetünk úgynevezett egyensúlyi és arbitrázsmodelleket. Előbbiek (pl. Vasicek és Cox – Ingersoll – Ross (CIR) modell) különböző közgazdasági

---

<sup>11</sup> Az értekezés a hozamgörbe előállítási módszerekkel nem foglalkozik. Hozamgörbére vonatkozó példa gyanánt megemlítem, hogy a Szolvencia II-es számításokhoz az EIOPA (European Insurance and Occupational Pensions Authority: <https://eiopa.europa.eu/>) rendelkezésre bocsátja az értékelési időpontra vonatkozó kockázatmentes spot hozamgörbéket az egyes pénznemekre, amit a (2015/35/EU, 24. cikk) alapján az eszközök megtérülésének számításakor konzisztensen figyelembe kell venni. A 2.7 fejezet esettanulmánya pedig az ÁKK (Államadósság Kezelő Központ) referenciahozamait használja majd fel: <https://www.akk.hu/statisztika/hozamok-indexek-forgalmi-adatok/referenciahozamok>

<sup>12</sup> Az életbiztosítási alkalmazások esetén az effektív kamatlábak használata a jellemző, azzal is összhangban, hogy a vizsgált biztosítástípusok esetén a többlethozamok visszaosztása rendszeres időközönként történik (jellemzően évente vagy havonta), így a kalkuláció az effektív kamatlábak logikájához igazodik jobban. Más típusú (pl. logkamatláb) használatát emiatt nem tárgyalja az értekezés.

feltételezésekből kiindulva modellezik a  $t$  időpontbeli  $r$  pillanatnyi kamatlábat, amely alapján minden jövőbeli időpontra meghatározható a hozamgörbe. Hátrányuk, hogy nem illeszkednek automatikusan a jelenlegi hozamgörbére, de a paraméterek megfelelő kalibrálásával viszonylag jó közelítés érhető el (Hull, 1999). Az arbitrázsmodellek ezzel szemben pontosan illeszkednek a kiinduláskori hozamgörbére. A legismertebb ide sorolható modellek a Heath – Jarrow – Morton (HJM) modell, a Ho – Lee (HL) és a Hull – White (HW) modell (Hull, 1999). A HJM modell tetszőleges időpontra vonatkozó jövőbeli forward kamatlábakra készít alapegyenletet, a HL és HW modell pedig a jövőbeli pillanatnyi rövid kamatlábakra. A HW modell előnye, hogy a kamatláb hosszútávú egyensúlyi szintje időben változó lehet. Ebben a modellben a kamatláb változása egy előre nem látható és egy előre látható komponensből (utóbbi a hosszútávú egyensúlyi érték) tevődik össze (Medvegyev & Száz, 2010). Az említett modellek paraméterbecsléséhez sok esetben szükség lehet többváltozós statisztikai módszerekre, például főkomponens elemzésre (lásd például (Kovács, 2011)). A becslések elvégzése után rendelkezésre áll egy sztochasztikus kamatlábmodell, ami felhasználható a hozammodellezés eszközeként az életbiztosítási cash flow előrejelzés kapcsán.

Az említett kamatlábmodelleket az aktuáriusi szakirodalomban is sok helyen használják. D’Amato és szerzőtársai a HJM, CIR és HL modellek eredményeit hasonlítják össze aktuáriusi környezetben (D’Amato, Di Lorenzo, Russolillo, & Sibillo, 2012). Wüthrich és Merz módszertani könyve is többféle kamatlábmodell biztosításmatematikai alkalmazását tárgyalja (Wüthrich & Merz, 2013). Érdekes még a Bølviken sztochasztikus eszköz modellre vonatkozó leírása, ahol többek közt idősoros technikákkal (például GARCH folyamattal) történik a modellezés (Bølviken, 2014). Az értekezésben a fenti kamatlábmodellek nem kerülnek további részletes vizsgálatra, elemzésre, az általam készített esettanulmányban egy speciális hibatag változó segítségével kerül majd beépítésre a hozamok sztochasztikus jellege az alkalmazott környezet sajátosságaihoz jól igazodó módon (Szepesváry, 2015).

Az életbiztosítási termékek hozam-előrejelzése kapcsán fontos kapcsolódó kérdések még a hozamgarancia értékének vizsgálata, valamint a jövőre garantált kamatlábak kalibrálása. A technikai kamatláb garancia értékelése a bemutatott esettanulmánynak is tárgyat képezi majd.

A hozamgarancia értékét általában sztochasztikus hozam-szimulációk segítségével értékelik (Janecek, 2012), amihez a Monte Carlo szimulációk adhatnak praktikus eszközt

(Ross, 2006). Ha rendelkezésre áll egy determinisztikus és egy sztochasztikus hozammodell, akkor kiszámítható a kötelezettségek várható jelenértéke mindkét modell szerint, és a két várható érték különbsége lehet egyfajta értelmezése a hozamgarancia értékének. Ez valójában csak egy közelítés, mert ez a különbség egy kamatos kamat hatást is tartalmaz, ezért adható más megközelítésű becslés is a garancia értékére (Szepesváry, 2015). A nemzetközi szakirodalomban Rüfenacht foglalkozik részletesen a hozamgarancia témájával (Rüfenacht, 2012). A hazai irodalomban pedig Doró tanulmányát fontos kiemelni, aki mint pénzügyi terméket árazza a minimum kamat garanciát sztochasztikus hozamszcenáriók segítségével (Doró, 2015). Szüle a garantált hozamok optimalitását a szolvencia szempontok alapján vizsgálja, illusztrálja a garantált hozamszint hatását, és megmutatja hogy létezhet az optimum (Szüle, 2017).

Fontos kiemelni, hogy 2021. január 1-vel Magyarországon módosult a technikai kamatláb maximális mértékére vonatkozó rendelet (54/2015. (XII. 21.) MNB rendelet, 2015). Forintban fennálló kötelezettségek esetén a korábbi maximális 2,3%-ról 1,8%-ra, míg eurós kötelezettségek esetén 1,1%-ról 0,6%-ra módosult az életbiztosítási termékek díj- és díjtartalék számításához használható maximum kamatláb. 1996 óta 5,5%-ról csökkent folyamatosan a mostani mértékre a technikai kamatláb maximális szintje. Változást hozhat a jövőben, hogy az utóbbi években jellemző tartósan alacsony hozamgörbe 2021 második felében növekedésnek indult, azonban ennek hatása még nem mutatkozik sem az MNB rendelete, sem a magyar piacra jellemző technikai kamatok kapcsán.

A nemzetközi irodalomban (Eling & Holder, 2013) tekinti át különböző országokban a technikai kamatlábak változásának múltbeli és várt jövőbeli tendenciáit. Elmondható, hogy a garantált kamatszintre vonatkozó változások jellemzően csak felmenő rendszerben kerülnek bevetésre, így a korábban kötött állományra a későbbiekben is biztosítani kell a biztosítónak az eredetileg kiígért garanciát, ami nagy terheket jelenthet hosszútávon. A 2021-ig jellemző alacsony kamatkörnyezet például súlyos veszteséget okozhatott a korábban magas technikai kamatot ígérő biztosítók számára. Mindezek alapján a hozamgarancia monitorozása és a kiígért kamatlábak megfelelő szintre kalibrálása kiemelkedő fontosságúak a biztosítási szektor szempontjából.

#### **2.4.1. Esettanulmány – hagyományos életbiztosítási portfólió befektetési hozamainak előrejelzése és a hozamgarancia sztochasztikus értékelése a Szolvencia 2 keretrendszerben**

A szakasz elején megfogalmazott hipotézist saját kutatásomon alapuló tanulmány segítségével igazolom (Szepesváry, 2015). A következőkben ezen tanulmány fontosabb kapcsolódó részei kerülnek ismertetésre. A tanulmány a Szolvencia II keretrendszer sajátosságainak megfelelően készült.

A tanulmány egy a hagyományos életbiztosítási termékek családjába tartozó vegyes biztosítási terméket (lásd például a Függelék 5.1 pontjában, vagy (Banyár, 2016)) vizsgál, az ehhez kapcsolódó díjkalkulációs és cash flow előrejelző konstrukció került kialakításra. A konstrukció tartalmaz a biztosítási gyakorlat és vizsgált hipotézis szempontjából minden lényeges elemet, a technikai kamat feletti többlethozamok megfelelő része egy kamatozó nyereségszámlán kerül visszajuttatásra, visszavásárlási opciót tartalmaz a termék, valamint valóságghű jutalék és költségstruktúra került hozzá kialakításra és a kalkuláció megfelelésége profitteszt segítségével ellenőrzése került. A modellezett cash flow-k és annak befolyásoló tényezői összhangban vannak az értekezés korábbi szakaszaiban bemutatottakkal.

A tanulmány azt tételezi fel, hogy a díjtartalék mögötti eszközök (amin az elért számviteli hozamok szolgálnak a többlethozam visszatérítés alapjául) kötvényekbe kerültek befektetésre. Ennek az egyszerűsítésnek kapcsán érdemes megnézni, hogy ezzel szemben az empirikus adatok esetén milyen befektetési instrumentumok, milyen arányban jellemzők hasonló portfóliókhoz kapcsoltan. Az 1. táblázat alapján az MNB adataiból kiindulva a nem-unit linked típusú termékek szerződéseinek tartalékát legnagyobb részben (nagyságrendileg 80% körüli arányban) kötvényekbe fektetik be a magyar biztosítók. A részvények, befektetési alapok és a készpénz/betét állomány jelent még nem elhanyagolható arányt, azonban külön-külön ezen részek súlya is kicsi. Mindez magyarázatul szolgálhat az egyszerűsítés praktikus okaira. Azonban ezzel a nem modellezett befektetési instrumentumok sajátosságai nem tükröződnek az eredményekben, ami az eredmények korlátosságát is jelenti egyben.

2021. III. negyedév		
Megnevezés	Nem unit-linked biztosítási szerződésekhez kapcsolódó eszközök (Mrd Ft)	Nem unit-linked biztosítási szerződésekhez kapcsolódó eszközök (%)
CIC 1 Államkötvények	1 286,54	76,87%
CIC 2 Vállalati kötvények	67,65	4,04%
CIC 3 Részvények	81,09	4,85%
CIC 4 Kollektív befektetési vállalkozások	107,52	6,42%
CIC 5 Strukturált értékpapírok	3,75	0,22%
CIC 6 Biztosítékkal fedezett értékpapírok	0,00	0,00%
CIC 7 Készpénz és betétek	76,45	4,57%
CIC 8 Jelzáloghitelek és hitelek	3,26	0,20%
CIC 9 Ingatlan	47,47	2,84%
CIC 0 Egyéb befektetések	0,00	0,00%
<b>Összesen</b>	<b>1 673,73</b>	<b>100,00%</b>

**1. táblázat:** A nem-unit linked biztosítási szerződésekhez tartozó eszközök megoszlása a magyar piacon 2021. III. negyedévre vonatkozóan.

Forrás: <https://www.mnb.hu/letoltes/idosor-biztosito-2021iine.xlsx> alapján.

A tanulmány kiemeli, hogy a technikai kamatláb (a továbbiakban röviden: *i*) által nyújtott garancia aszimmetrikus helyzetet hoz létre a biztosító és az ügyfél közt: ha a díjtartalékon elért hozam nem éri el a technikai kamatot, akkor a biztosítót terheli a veszteség, ellenben ha meghaladja azt, akkor a két fél megosztja a többleten (Szepesváry, 2015). Az ezzel kapcsolatos vizsgálatokhoz kétféle hozammodell adódik:

1. „Determinisztikus hozammodell. Azt feltételezi, hogy a jövőbeli időszakokra vonatkozó hozamok determinisztikusak, és ezek alapján kell a többlethozam visszajuttatást számolni. Azaz egy darab úgynevezett hozamszenárió adott a jövőbeli időszakok várható hozamaival.
2. Sztochasztikus hozammodell. Azt feltételezi, hogy egy adott jövőbeli időszakra vonatkozó hozam egy valószínűségi változó realizációja (melynek várható értéke a determinisztikus modellbeli hozam). A legjobb becslés kiszámításához Monte Carlo szimulációs technika segítségével hozamszenáriókat kell generálni a feltételezett valószínűségi változók alapján. Nagyszámú (legalább 1000 darab) replikációt szükséges előállítani, majd az egyes hozamszenáriókon külön-külön kell kiértékelni a cash flow modellt (kiszámítani a többi befolyásoló paraméter

mentén a várható jelenértéket). Az így kapott (legalább 1000 darab) érték számtani átlagával lesz közelíthető a pénzáramok várható jelenértéke. Az így adódó legjobb becslés pontosabb, mint a determinisztikus modellből számolt, hiszen figyelembe veszi például a hozamgarancia esetleges véletlenszerű aktívává válását.” (Szepesváry, 2015, pp. 586)

A tanulmányban három eltérő feltételezéseken alapuló szerződés- és díjtartalékukhoz tartozó eszközportfólió került vizsgálatra, és ezeken történt a modellezés (Szepesváry, 2015). A minták közti fő különbségek az eszközök és kötelezettségek lejárat szerkezetei, a technikai kamatláb mértéke és a pénznem. A két forint pénznemű portfólió adatai szimulációval adódtak, az eurós minta esetén csak példasz szerződések kerültek vizsgálatra. A mintaportfóliók legfontosabb paraméterei a 2. táblázatban láthatók.

Minta	Pénznem	i	Szerződések	ALM (indulás- kor)	Kötelezettség duration (kezdetben)	Eszköz duration (kezdetben)
1	HUF	2,5%	10.000 db	Közepes	10,29	6,45
2	HUF	3,5%	10.000 db	Rossz	15,6	3,99
3	EUR	1,2%	Csak példák	-	-	-

**2. táblázat:** Az elemzett mintaportfóliók legfontosabb paraméterei.

Forrás: (Szepesváry, 2015)

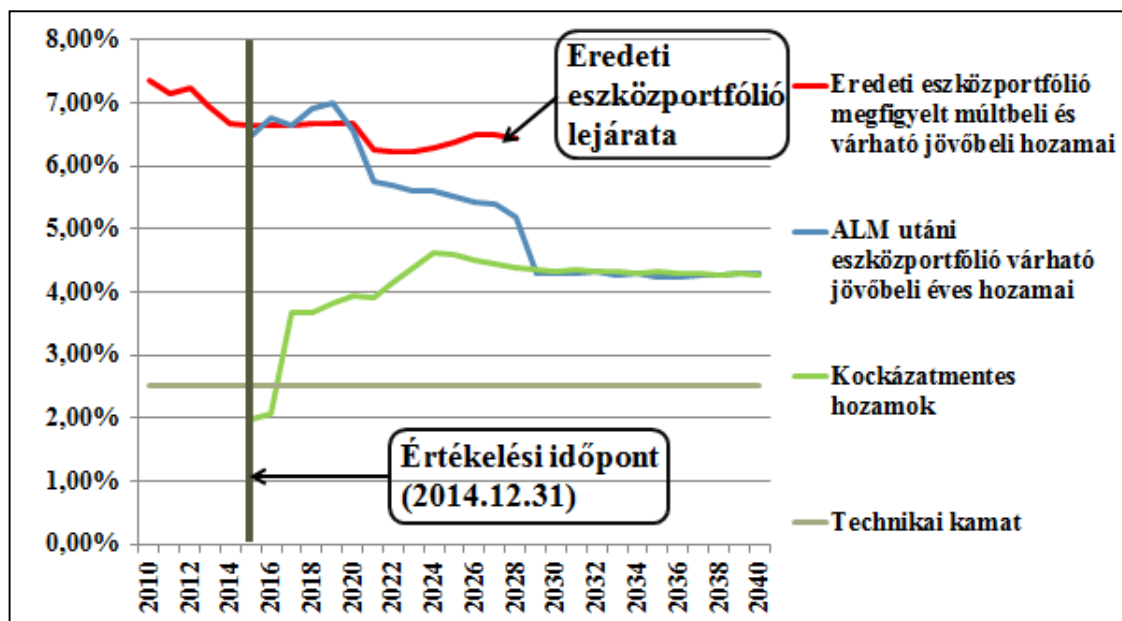
A modellezési folyamat az alábbi 1 – 4. pontok szerinti részekből áll (Szepesváry, 2015). A hozammodellezési folyamat összhangban van a Szolvencia II szerinti szabályozás alábbi elvárásaival. A vizsgált környezetben a jövőbeli hozamokból adott nyereségrészesedés úgynevezett jövőbeni diszkrecionális nyereségrészesedésnek (2015/35/EU, 1. cikk, 35. pont) minősül. Az ilyen típusú konstrukciónál a legjobb becslés kiszámítása a következők szerint kell, hogy történjen (2015/35/EU, 24. cikk):

- az értékelés időpontjában a biztosító által tartott (adott termékhez kapcsolható) eszközportfólióból kell kiindulni,
- az eszközportfólió változásait az objektív módon értékelt jövőbeli vezetői döntésekre kell alapozni,
- az eszközök jövőbeli megtérülésére vonatkozó feltevéseknek összhangban kell lennie a releváns kockázatmentes hozamgörbével (a megfelelő esetekben figyelembe véve az illeszkedési kiigazítást, a volatilitási kiigazítást és kockázatmentes kamatlábra vonatkozó átmeneti intézkedést), és adott esetben az eszköz piaci értékével.

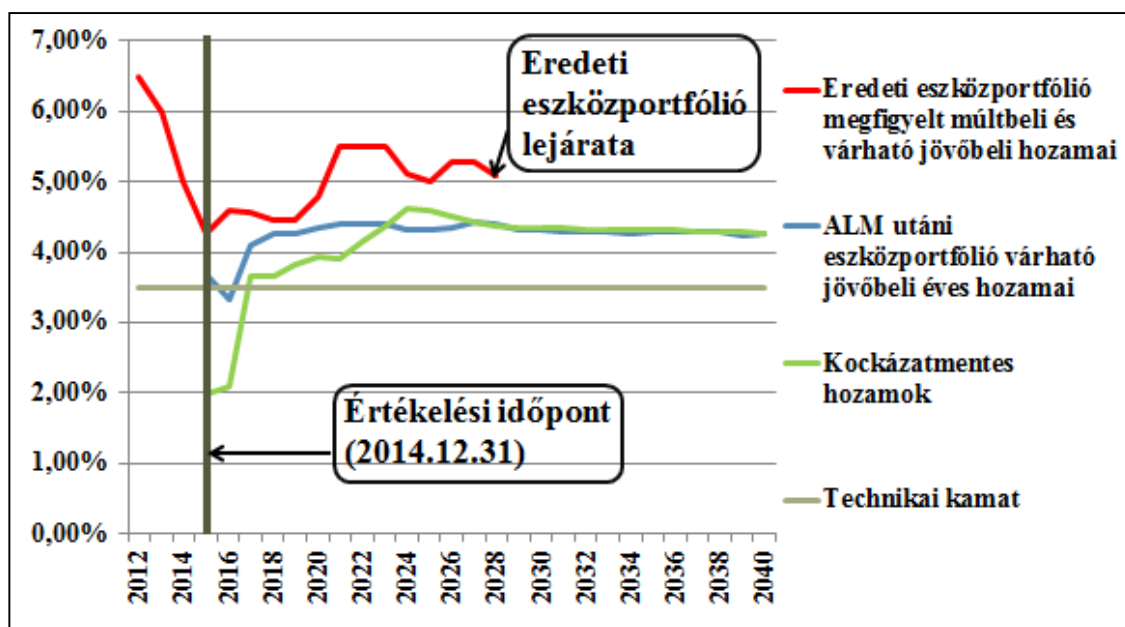
**1. Dinamikus ALM modell (determinisztikus hozammodell).** Az eljárás célja a jövőbeli várható számviteli hozamok meghatározása. A módszer először az értékeléskori eszközállomány és a kapcsolódó szerződésekhez tartozó díjtartalékok várható kifutását veti össze, figyelembe véve az eszköz és kötelezettség oldali várható pénzáramokat is. Ezek alapján a jövőre vonatkozóan dinamikus kiigazítást végez: kötvényt ad el vagy vesz az állomány tartalékváltozásai és pénzáramai alapján úgy hogy egyfelől az eszközök teljes mértékben fedezzék a jövőbeli időpontokban is a várható tartalékokat, másfelől a likviditás is legyen biztosított a várt jövőbeli eszköz és kötelezettség oldali pénzáramoknak megfelelően. A módszer azt feltételezi, hogy a jövőben vásárolt hipotetikus kötvények befektetési hozamai az értékeléskori kockázatmentes hozamgörbe alapján a kötvény tartamára vonatkozó forward hozamokkal egyeznek majd meg, konzisztensen a Szolvencia II szabályokkal. Amennyiben pedig a modellben a likviditás miatt kötvényt kell eladni a jövőben, az a számított piaci értéken kerül értékesítésre, az adott eszköz későbbi pénzáramainak diszkontált jelenértékeként. A modell végső outputját az előbbiek szerint képzett dinamikus eszközportfólió várható jövőbeli számviteli hozamai adják.

A 4. ábrán láthatók az 1. mintaportfólió eredményei. Itt a kezdetben kevésbé rossz eszköz-forrás megfelelés miatt csak 5 év eltelte után kell nagyobb arányban új kötvényeket vásárolni, majd pedig fokozatosan az eredeti eszközportfólióban lévő papírok lejáratával párhuzamosan a projektált számviteli hozam hozzásimul a kockázatmentes hozamgörbéhez. Az 5. ábrán a 2. mintaportfólió eredményei szerepelnek. Itt a kezdetben rossz eszköz-forrás illeszkedés miatt, a sok feltételezett rövid lejáratú kötvénnyel összefüggően, azok lejárata után a hozamok gyorsan konvergálnak a kockázatmentes görbéhez. Ebben a mintában a hozamok már sokkal jobban megközelítik a technikai kamatlábat, mint az előző esetben.





4. ábra: Dinamikus ALM modell hatása az 1. mintaportfólió esetén.  
 Forrás: (Szepesváry, 2015)



5. ábra: Dinamikus ALM modell hatása az 2. mintaportfólió esetén.  
 Forrás: (Szepesváry, 2015)

A dinamikus ALM modellből így kapott előrejelzett hozamok még csak egy darab determinisztikus hozamszcenáriót testesítenek meg.

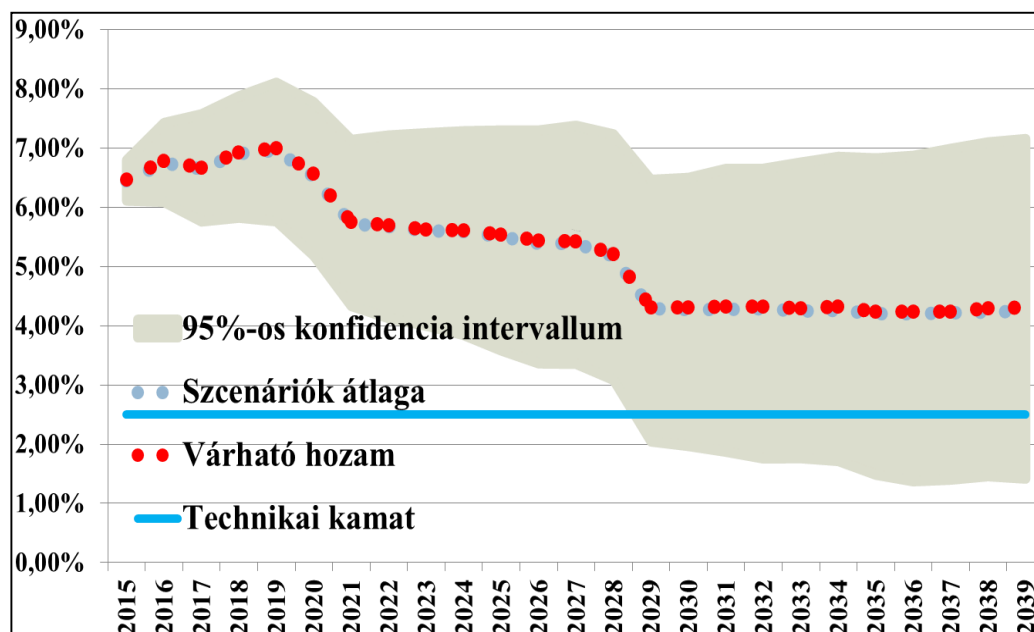
2. **Eltérésváltozó az empirikus adatok alapján, Monte Carlo szimuláció a jövőbeli hozamokra (sztochasztikus hozammodell).** Itt válik szét a determinisztikus és sztochasztikus modell és jelenik meg a jövőbeli hozamok véletlenszerű változékonyságának jellege. Empirikus biztosítói eszköz- és

hozam adatok alapján az került elemzésre, hogy egy hónap alatt az eszközportfólió hó eleji adatai alapján előrejelezhető számviteli hozamhoz képest a véletlenszerű változások miatt, a hónap végén kimutatott tényleges hozam milyen eloszlás szerint módosult. Előbbi értékeket egy eltérésváltozónak véve az empirikus mintán elfogadható volt a normális eloszlás hipotézise. Az így becsült eloszlásból, mint egyfajta  $i$ . hónapra vonatkozó havi véletlenszerű eltérésből Monte Carlo módszerrel független havi hibatagok kerültek szimulálásra ( $e_i$ ), ami alapján pedig definiálható az értékelés időpontjától az  $i$ . hónap végéig tartó időszakra vonatkozó kumulált eltérés:

$$E_i = \sum_{j=1}^i e_j. \quad (2.3)$$

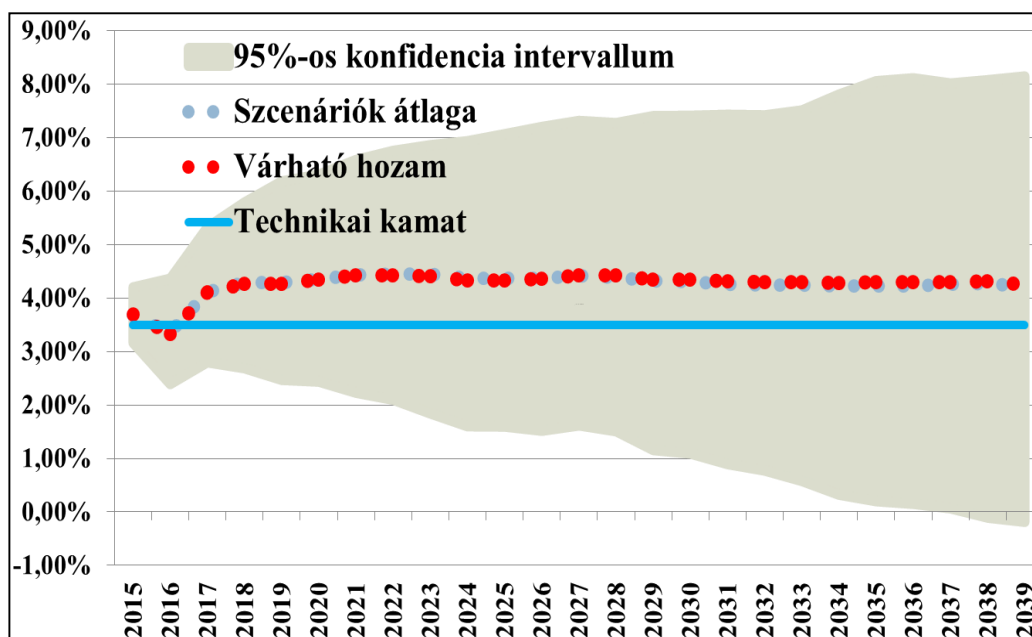
$E_i$  értékei már nem függetlenek, ezek az eltérések ragadják meg a várható determinisztikus hozamszenáriótól való eltérést az  $i$ . hónapban. Így  $E_i$ -re vonatkozóan minta szimulálható, és ezen értékeket a dinamikus ALM modellből adódó determinisztikus várható hozamokhoz adva előállnak a sztochasztikus hozamszenáriók (1 000 darab). A módszer az algoritmuson keresztül közvetve modellezi a hozamgörbe lehetséges elmozdulását.

Az egyes mintaportfóliókon kiszámított eredmények a 6. és 7. ábrán láthatók. Látható, hogy az idő múlásával egyre szélesebb konfidencia intervallumok adódnak a portfóliók hozamaira.



**6. ábra:** Szimulált éves hozamok az 1. mintaportfólió esetén.

Forrás: (Szepesváry, 2015)



7. ábra: Szimulált éves hozamok a 2. mintaportfólió esetén.  
Forrás: (Szepesváry, 2015)

3. **A cash flow modell kiértékelése (determinisztikus és sztochasztikus hozammodellel).** A cash flow modell szerződésenkénti kiértékelése a Szolvencia II rezsím alapelveinek megfelelően készült külön a determinisztikus- és az 1.000 darab sztochasztikus hozamszenárióra. A többi feltételezés változót egymástól függetlennek tételezi fel a tanulmány, és felhívja a figyelmet, hogy a konkrét esetben egy adott hozam-forgatókönyv esetén pénzáramok várható jelenértéke kiszámítható a determinisztikus technikával (itt értsd: az egyéb feltételezések várható értékei alapján adódó egy darab determinisztikus szenáriót). Végül a determinisztikus hozammodellből adódó legjobb becslés nem lesz más, mint az egy darab determinisztikus szenárión adódó várható jelenérték, a sztochasztikus hozammodell esetén pedig az 1.000 darab szenárión külön-külön kiszámolt várható jelenértékek átlaga.
4. **A hozamgarancia vizsgálata.** Az alábbi két mutató került bevezetésre a tanulmányban a hozamgarancia értékének számszerűsítésére:
  - a. „Szimulációs hatás (S). A sztochasztikus és determinisztikus hozammodell szerinti legjobb becslés különbsége. Azt számszerűsíti, hogy a hozamok véletlen ingadozását is modellezve mennyivel változik meg a kötelezettségek várható jelenértéke. A megváltozás részben annak tudható be, hogy az ingadozás következtében aktívvá válhat a

hozamgarancia, részben pedig annak, hogy a kamatos kamatszámítás tulajdonságai miatt az átlagos hozammal becsült „várható érték” eltér a valódi várható értéktől. A mutató a hozamgaranciára vonatkozóan a várt hatást nem számszerűsíti, csak a véletlent. Várt hatás alatt azt értenénk, mikor egy adott időszak várható hozama is kisebb, mint a technikai kamatláb, tehát amikor a determinisztikus modellben is aktív a hozamgarancia.

- b. Hozamgarancia miatti veszteség (H). A díjtartalékon a technikai kamatot el nem érő hozamoknak a kiígért szintre történő kipótlásának várható jelenértéke a sztochasztikus hozamszenáriók alapján. Várhatóan ennyi olyan hozamot kell majd jóváírni a szerződésen a garancia aktívvá válása miatt, amit nem termelt ki a befektetés. A mutató a várt és a véletlen hatást együtt számszerűsíti, így jól kiegészíti az S mutatót.” (Szepesváry, 2015, pp. 593)

Tehát a  $H$  mutató matematikai formulákkal az alábbi. Egy adott  $s$  hozamszenárió esetén minden  $t$  időszakhoz tartozó  $r_t^s$  elért hozamhoz megadható a  $\max(i - r_t^s, 0)$  technikai kamat eléréséhez számított hozamhiány, amit az időszak eleji díjtartalékon ( $V_{t-1}$ ) és az időszakban befektetendő nettó díjon ( $N_t$ ) szenved el a biztosító. Az adott időszakban a kamatláb garancia miatti veszteség tehát  $(V_{t-1} + N_t) \cdot \max(i - r_t^s, 0)$ . Egy adott  $s$  hozamszenárióra  $d_t$  kockázatmentes diszkontgörbével jelenértékre hozott veszteség az  $n$  éves tartamra:

$$H_s = \sum_{t=1}^n (V_{t-1} + N_t) \cdot \max(i - r_t^s, 0) \cdot d_t. \quad (2.4)$$

A nyereségszámlát is a díjtartalékhoz hasonlóan kell kezelni a képletben, ha eltérő garancia vonatkozik rá, akkor megfelelő módosítás mellett. Végül pedig  $H$  az összes  $N$  szenárióra vett átlag.

$$H = \frac{\sum_{s=1}^N H_s}{N}. \quad (2.5)$$

$S$  pedig nem más, mint a determinisztikus hozamszenárióval számolt legjobb becslés ( $BE_D$ ) és a sztochasztikus hozamszenáriókkal számolt legjobb becslés ( $BE_S$ ) különbsége:

$$S = BE_S - BE_D = \frac{\sum_{s=1}^N \sum_{t=1}^n CF_t^s \cdot d_t}{N} - \sum_{t=1}^n CF_t \cdot d_t, \quad (2.6)$$

ahol  $CF_t^s$  az  $s$  sztochasztikus hozamszenárióra számolt  $t$  időszaki várható cash flow,  $CF_t$  pedig a determinisztikus hozamszenárióra számolt  $t$  időszaki várható cash flow.

A tanulmányban  $S$  és  $H$  értékei különböző paraméterű szerződésekre kerülnek kiszámolásra az 1. és 2. minta portfólióra, melyek a 3. és 4. táblázatban láthatók.

Szerződés	Tartam (év)	Hátralévő év	Kezdeti biztosítási összeg	Díjtartalék (V)	Best estimate (BE)	H	H /  BE	S /  BE
1	10	3	1 000 000	840 512	889 844	0	0,00%	0,00%
2	10	5	1 000 000	503 327	533 030	0	0,00%	0,01%
3	15	10	1 500 000	457 020	438 935	0	0,00%	0,13%
4	25	20	2 500 000	404 088	239 699	1 821	0,76%	2,43%
5	30	25	3 000 000	391 658	193 557	4 223	2,18%	5,73%

**3. táblázat:** Az 1. mintaportfólió különböző szerződéseinek eredményei.

Forrás: (Szepesváry, 2015)

Szerződés	Tartam (év)	Hátralévő év	Kezdeti biztosítási összeg	Díjtartalék (V)	Best estimate (BE)	H	H /  BE	S /  BE
1	12	3	1 200 000	1 108 311	1 100 630	4 731	0,43%	0,22%
2	15	5	1 500 000	1 223 734	1 192 637	7 650	0,64%	0,40%
3	20	10	2 000 000	1 099 144	997 080	17 490	1,75%	1,41%
4	30	20	3 000 000	951 092	732 893	49 507	6,76%	6,32%
5	35	25	3 500 000	888 492	673 042	68 849	10,23%	10,00%

**4. táblázat** A 2. mintaportfólió különböző szerződéseinek eredményei.

Forrás: (Szepesváry, 2015)

Összevetve a 3. és 4. táblázat hozamgaranciára vonatkozó mutatóinak értékét a korábbi 6. és 7. ábrával, megállapítható, hogy ahogy az azokon szereplő konfidencia intervallumok egyre nagyobb mértékben átlépik a technikai kamat határát, úgy válnak az  $S$  és  $H$  mutatók értékei is egyre nagyobbá a legjobb becslés százalékában. 20 év feletti időtávon a teljes legjobb becslés akár 5-10%-át is adhatja a hozamgarancia hatása, ami nagyon jelentős mértékű hatás. A kevésbé jó eszközfedezettel és magasabb technikai kamattal rendelkező portfóliónál már 10 éves időtávon is 1% feletti többletet jelent a technikai kamat hatása.

Fontos kérdés még, hogy a kötelezettség értékének mekkora része (százalékosan vagy forintban) számít jelentősnek (materiálisnak) a technikai kamatláb által nyújtott garancia vonatkozásában. Erre általános határérték vagy definíció nem adható, vállalat-specifikus (vagy szabályozói - nemzetgazdasági szintről nézve akár biztosítási piac szintű) limit

meghatározása szükséges, ami az adott kiértékelési helyzetet is figyelembe veszi. Más megítélés alá eshet például egy stabilan nyereséges és tőkeerős biztosító, illetve egy olyan, aki esetében a  $H$  mutatóból várható veszteség a biztosító jövőbeli fizetőképességét veszélyezteti.

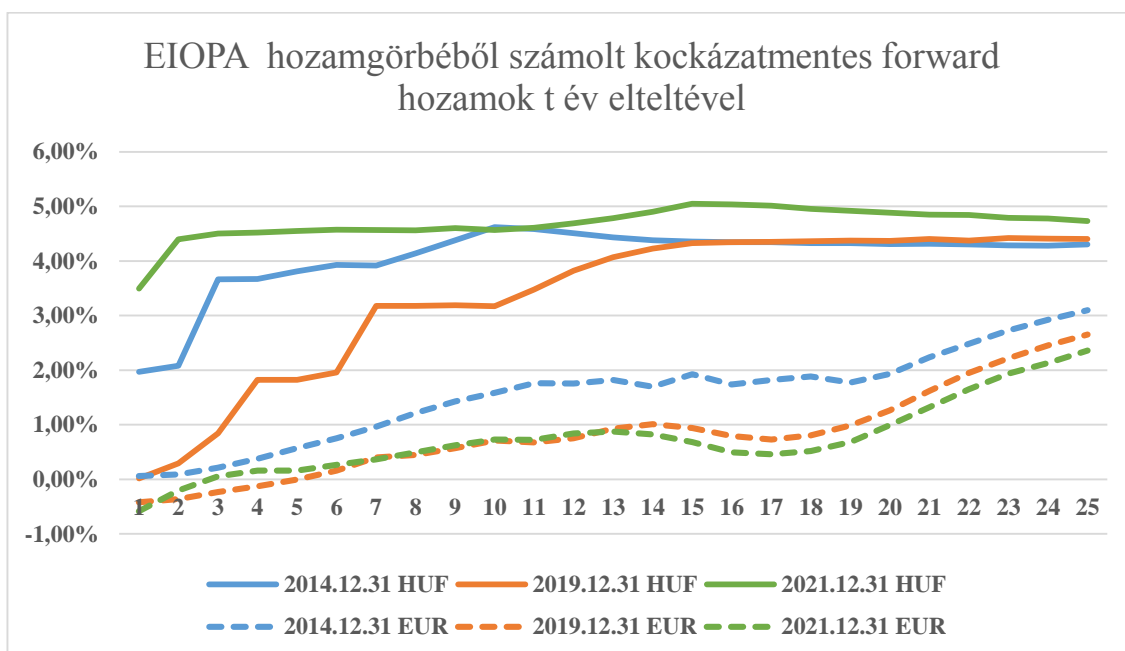
Biztosítói szinten a biztosító saját szabályzatai vagy számviteli politikája is definiálhatja a materialitási limitet (és amennyiben egy kockázat mértéke eléri annak szintjét akkor a szükséges teendőket). A Szolvencia II rezsimben pedig az úgynevezett *arányosság elve* kezeli a materialitás kérdését (2015/35/EU, 56. cikk). Ez alapján a biztosító olyan módszerrel kell számítsa a biztosítástechnikai tartalékokat, amelyek arányosak a biztosítási kötelezettség alapját képező kockázatok jellegével, nagyságrendjével és összetettségével, ami azt jelenti a jogszabály alapján, hogy a számítás nem tartalmaz olyan fokú egyszerűsítést (hibát), ami befolyásolhatja az információ felhasználója által hozott döntéshozatalt, vagy ha ilyet tartalmaz a módszer valószínűsíthetően nem becsli alul a tartalékokat. Lefordítva a konkrét vizsgált témára, ha például egy biztosító egyszerűsítést alkalmaz és determinisztikus hozammodell szerint számolja a jövőbeli pénzáramokat, és ezzel a hozamgarancia pontos modellezéséhez képest olyan mértékű hibát követ el, ami az információ felhasználója által hozott döntéshozatalt (pl. a cég értékelése, jövőbeli nyeresége kapcsán hozott döntés) befolyásolja, akkor az egyszerűsítés hatása jelentős lenne. Ezen definíció esetén is nyilvánvaló, hogy vállalat-specifikus a limit. A fenti mutatók (mekkora forintálisan vagy a tartalék arányában a várható jövőbeli veszteség a garanciából adódóan) nagy segítséget adhatnak a vállalat számára (hogy saját materialitási limitjeik szerint) dönthessenek róla, hogy jelentős-e garancia értéke vagy sem. Tekintettel a bemutatott példákban látható nagyságrendekre (volt olyan szerződés, ahol a tartalék 5-10%-át is elérhette a veszteség, illetve az 5. táblázatban még ennél nagyobb értékek is előfordulnak) bizonyosan előfordulhat olyan eset, amikor a garancia értéke jelentős lehet.

Az előbb bemutatott elemzések 2014.12.31-i referencia dátumra készültek. Érdekes meggondolni a hozamgörbe kapcsán azóta végbement változások hatását az eredményekre.

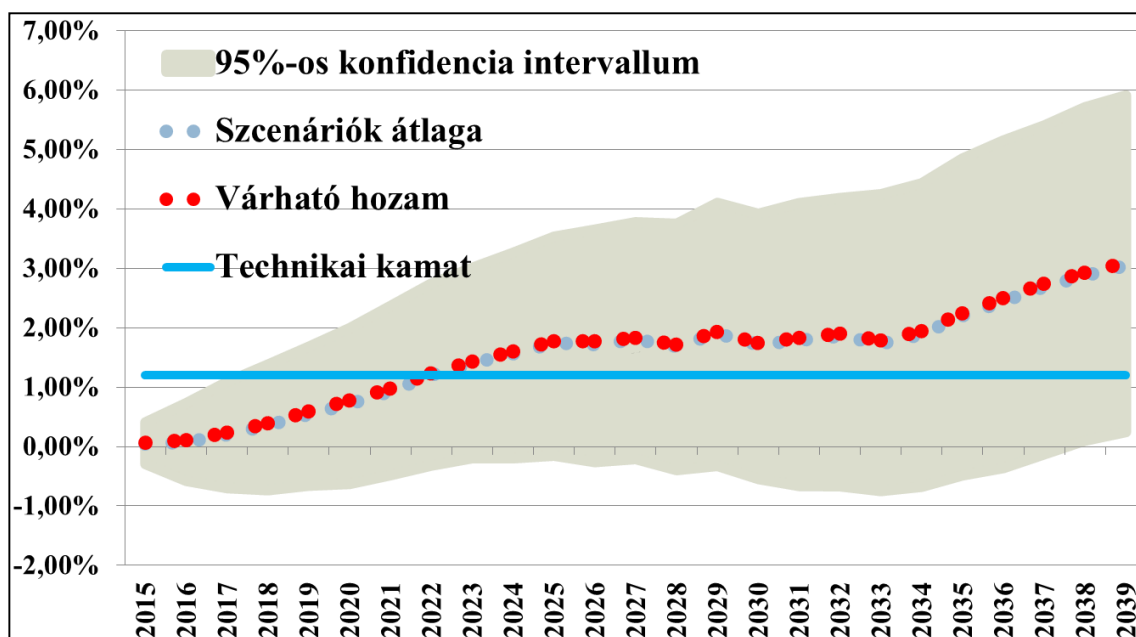
A 8. ábra a 2014.12.31, 2019.12.31 és 2021.12.31-re vonatkozó HUF és EUR pénznemekre vonatkozó kockázatmentes forward görbéket mutatja. Az értekezésben nem kerülnek megismétlésre a 2019.12.31-es vagy 2021.12.31-es forint hozamgörbe alapján az elemzések, de az alacsony hozamkörnyezet példaként viszonyítási alapként

bemutatásra kerülnek a 2014.12.31-es eurós hozamgörbe alapján számolt bizonyos eredmények a korábban említett 3. mintaportfólióra, (Szepesváry, 2015) alapján. A 9. ábrán és az 5. táblázatban láthatók a tanulmány kapcsolódó eredményei, melyek jól szemléltetik a technikai kamatláb garancia jelentősnek minősíthető hatását.

A forintra vonatkozó kockázatmentes hozamgörbe 2014.12.31-et követően tovább csökkent, majd hozzávetőleg 2021 második félévétől indult meredek növekedésnek (három referencia időpontra a 8. ábrán is láthatók a viszonyok). Ha a magas hozamkörnyezet marad a meghatározó a későbbiekben is, az eliminálhatja a technikai kamatláb garanciával összefüggő veszteségeket (feltéve ha a biztosítók a mögöttes eszközállományukat fel tudják tölteni magasabb hozamú kötvényekkel). Az euró görbe esetén viszont ilyen hatás nem következett be, ott továbbra is nagyon alacsony hozamgörbe a jellemző.



**8. ábra:** EIOPA hozamgörbéből számolt kockázatmentes forward hozamok t év elteltével.  
 Forrás: Saját számolás EIOPA adatok alapján [https://www.eiopa.europa.eu/tools-and-data/risk-free-interest-rate-term-structures-0\\_en](https://www.eiopa.europa.eu/tools-and-data/risk-free-interest-rate-term-structures-0_en)



9. ábra: Szimulált éves hozamok a 3. mintaportfólió esetén.

Forrás: (Szepesváry, 2015)

Szerződés	Tartam (év)	Hátralévő év	Kezdeti biztosítási összeg	Díjtartalék (V)	Best estimate (BE)	H	H /  BE	S /  BE
1	6	3	600 000	250 431	235 072	14 179	6,03%	0,01%
2	8	5	800 000	235 895	189 484	21 814	11,51%	0,14%
3	13	10	1 300 000	217 593	87 497	32 224	36,83%	7,10%
4	23	20	2 300 000	202 535	-68 299	48 807	71,46%	33,07%
5	28	25	2 800 000	200 459	-119 486	53 722	44,96%	24,27%

5. táblázat: Az 3. mintaportfólió különböző szerződéseinek eredményei (forintban).

Forrás: (Szepesváry, 2015)

A fenti számítások és érvelések igazolják az 1. kutatási hipotézist a technikai kamatláb által nyújtott garanciára vonatkozóan: sztochasztikus módszerek révén számszerűsíthetővé válik a technikai kamatláb által nyújtott garancia értéke, amely különösen az alacsony hozamkörnyezetben jelentős hatással lehet a kötelezettségek értékére.

A bemutatott modellek alkalmasak lehetnek a technikai kamatláb jövőbeli kalibrálására vonatkozóan. Meghatározható, hogy különböző technikai kamatlábak mellett hogy alakul a pénzáramok várható jelenértéke és mekkora a kamatláb garancia hatása, illetve hogy adott biztonsági szint mellett mekkora lehet a legnagyobb várható veszteség, amik jó mérőszámokat adnak a hozamgarancia értékére vonatkozóan, így segíthetik a kalibrációt.



A bemutatott modellel kapcsolatban a következő kritikai észrevételek fogalmazhatók meg, melyek segítségével pontosíthatók az eredmények, illetve melyek további vizsgálatok kiinduló pontjai lehetnek:

1. Az alkalmazott technika nem a befektetési hozamgörbe elmozdulásán és az egyéb tényezők különválasztott hatásán keresztül modellezi az elért hozam jövőbeli változékonyságát, hanem egy összesített hatást tartalmazó hibatag változó segítségével. További modellezési lehetőséget a problémára a korábban említett kamatlábmodellek jelenthetnek. Előnyösebb tulajdonságaik miatt az arbitrázsmodellek adhatnak jobb megoldást. Célszerű lehet a rendelkezésre álló adatok és az értékeléskori hozamgörbe alapján több módszerre vonatkozóan (pl. HJM, HW, HL) is megbecsülni a paramétereket, majd kiszámítani és összehasonlítani a modellek eredményeit.
2. A bemutatott modell csak a legjobb becslésbeli várható érték kiszámítására vonatkozott és az egyéb feltételezések szempontjából csak a determinisztikus modellkeret került alkalmazásra. A módszerek azonban használhatók (például a sztenderd formula szerinti) sokkolt paraméterek esetén is és a többi változó vonatkozásában vett sztochasztikus modellkeret mellett is. További alkalmazási lehetőség lehet valamely említett kamatlábmodell és a portfólió hozammodellje alapján a sztenderd formula helyett szimuláció segítségével belső modell szerinti tőkeszükségletet számítani a kamatlábkockázati almodulra.

## 2.5. Az IFRS 17-beli veszteségességi vizsgálat és a költségek modellezési lehetőségei a pénzáram előrejelzésben

Az értekezés ezen szakaszában egyrészt az IFRS 17-beli veszteségességi vizsgálatot mutatom be, és ennek kapcsán a biztosító költségeinek fontos befolyásoló szerepét. Általános környezetben is szó esik a költségek modellezéséről, mint a cash flow modell fontos egyik fontos tényezőjéről.

Jelen szakasz célja továbbá a következő hipotézis igazolása.

2. **Hipotézis:** a *veszteséges szerződéseknek* jelentős kihatása van az IFRS 17-beli *kezdeti megjelenítéskor* a pénzügyi eredménnyel kapcsolatos mutatókra, ami optimalizálható a modell költségekre vonatkozó feltételezéseinek kalibrálásával vagy a díjkalkulációs és valóságbeli költségstruktúra hosszú távú konzisztenssége tételével.

A hipotézis igazolása saját kutatásomon alapszik, amit a kapcsolódó tanulmány alapján mutatok be az értekezésben is (Szepesváry, 2019).

Az IFRS 17 egyes alapfogalmai és a veszteségességi vizsgálat szükségessége már bemutatásra kerültek az értekezés 2.2.3. szakaszában. A továbbiakban a veszteségességi teszt kapcsán elvégzett vizsgálatok szerepelnek.

Az idézett tanulmány egy hagyományos életbiztosítási terméket vizsgál az IFRS 17 keretei közt (Szepesváry, 2019). A termék egy egyszeri díjas megtakarítási konstrukció, többlethozam visszajuttatással, ahol a biztosító költségeinek és profitjának fedezetét a befektetési hozamból elvont marzs szolgáltatja. Balesetbiztosítási elemek társulnak a megtakarítási komponens mellé, amik a konkrét példában nem leválaszthatók a befektetési résztől, így az (IFRS17, B31 cikk) alapján a teljes termék az IFRS 17 hatálya alatt egyben kezelendő. Az elemzéshez használt cash flow modell és annak feltételezései nagy részben azonosak a Szolvencia II rendszerben használatos pénzáram előrejelzéssel, az esetleges eltéréseket összegzi a tanulmány. Két feltételezéssel kapcsolatos egyszerűsítést alkalmaz a cikk: egyrészt a hozamgörbével kapcsolatosan az (IFRS17, 36. cikk) szerint alkalmazandó hozamgörbe helyett az EIOPA kockázatmentes hozamgörbéje kerül alkalmazásra, másrészt pedig a korábban említett *nem pénzügyi kockázatokhoz kapcsolódó kockázati kiigazítás* a Szolvencia II-beli hasonló vonatkozású párjával a *kockázati ráhagyás (Risk margin)* alapján képzett mennyiséggel kerül

helyettesítésre. A hozamgörbe kapcsán azonban érzékenységvizsgálatot végez a tanulmány, ami viszonyítási alapot teremt a szabványtól való eltérésből következő bizonytalanságra. A kockázati kiigazítás kapcsán pedig a szabvány széles teret enged a számítási módszer vonatkozásában, így a választott módszer, illetve paraméterek egyértelműen fontos befolyásoló tényezői lehetnek az IFRS 17 szerinti veszteségességnek. Az egyéb feltételezések kapcsán ismerteti a tanulmány, hogy a Szolvencia II-ben használatos elvek megfelelőek az IFRS 17-beli alkalmazásra is.

### **2.5.1. Az életbiztosítási költségek modellezési lehetőségei**

A szóban forgó modellek vonatkozásában a költségeknek és a költségallokációs eljárásnak kiemelkedő jelentősége lesz az eredmények szempontjából, ezért először az ezzel kapcsolatos modellezési lehetőségeket mutatom be.

A klasszikus életbiztosítási technikák kapcsán ismeretes, hogy a bruttó díj kalkulációja hagyományosan a nettó (kockázati) díj alapján számolódik, annak különböző költségpótlékokkal való kiegészítésével. Az  $\alpha$ -típusú költségek a biztosítás megkötésével kapcsolatos költségek (pl. szerzési jutalék, kockázatelbírálás), melyek jellemzően a biztosítási összeggel arányosak, a  $\beta$ -típusú költségek a díj behajtásával kapcsolatos költségek, melyek jellemzően a bruttó díjjal arányosak, míg a  $\gamma$ -típusú költségek az egyéb költségek (pl. fizetések, fenntartási költségek), melyek jellemzően a biztosítási összeg és az időleges járadék egyszeri nettó díjának szorzatával arányosak a díjkalkulációban (Banyár, 2016).

Az előbbi  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  költségek azonban nem, vagy legfeljebb csak részben használhatók a cash flow modellezési alkalmazásoknál, hiszen ahogy a klasszikus technikák esetén általánosan jellemző, ezen paraméterek sem aktuális tapasztalati adatokból megállapított prudencia nélküli legjobb becsléseket takarnak, hanem sokkal inkább a díjkalkuláció során kellő biztonsági pótlékkal ellátott, részben akár szakértői becsléseken alapuló értékeket. A pénzáram előrejelzésnél és akármelyik témába vágó rezsim szerinti legjobb becslés készítésénél más típusú költségmodellezési megközelítésre van szükség. Példa gyanánt a biztosító költségeinek előrejelzése és azok biztosítási szerződésekhez rendelése kapcsán a Szolvencia II szabályozás az alábbi részletes útmutatást adja (2015/35/EU, 29. és 31. cikkek):

- A költségek előrejelzése kapcsán figyelembe kell venni az összes olyan költséget, amely a biztosítási kötelezettségekhez kapcsolódik, magukba foglalva az igazgatási, befektetési, kárrendezési és szerzési költségeket, beleértve az általános költségeket is.
- A költségek tervezésekor figyelembe kell venni a jövőben szerzett új biztosítási állományt,
- A költségeket reálisan, objektíven és következetesen kell hozzárendelni az egyes állományrészekhez,
- Általánosságban figyelembe kell venni a várható gazdasági fejleményeket és az inflációt.

(Richards, 2004) sorra veszi azokat a költségtípusokat, amikre az életbiztosítási cash flow modellezés során tekintettel kell lenni:

- Értékesítési költségek: minden nemű értékesítéssel kapcsolatos költség, a jutalékok nélkül.
- Kibocsátási költségek: az értékesítés utáni költségek az új szerzéshez kötődően, magába foglalva például a kockázatelbírálás és az orvosi vizsgálat költségeit.
- Szolgáltatási költségek: adminisztrációs költségek az új szerzéshez kapcsolódó szakasz után.
- Megszűnési költségek: a szerződés megszüntetésével (pl. visszavásárlás, halálozás stb.) kapcsolatos költségek.
- Jutalékok (külön kategóriaként): a szerzési jutalékok és azok szerződés-megszűnés esetén történő visszaírása, valamint a fenntartási jutalékok modellezése is fontos elemei a pénzáram előrejelzésnek.

(Anderson, 1959) felhívja a figyelmet, hogy az életbiztosítási vállalatok költségei nagy részben indirekt természetűek, emiatt a költségek szerződésekhez rendelése nehéz feladat. Alapvetően a következő irányokat veti fel a szerző:

- Amennyiben a profit mutató a befektetett tőkén értelmezett hozamszázalékként kerül kimutatásra, akkor az indirekt költségek figyelembe vétele nélküli mutató tekinthető egyfajta bruttó-, míg a költséget is számításba vevő párja pedig egyfajta nettó megtérülésnek.
- Előző módszer több gyakorlati nehézséget vethet fel, ezért érdekesebb a költségeket a következő lehetőségek szerint allokálni:

- darabköltségek meghatározása elő szerződésekre biztosítási évenként, valamint károkra és egyéb megszűnésekre vonatkozó egységköltségekként;
- díjarányos költségek meghatározása (pl. jutalékok és más díjjal arányos ráfordítások esetén);
- az indirekt első éves költségek (és a későbbi indirekt megújítási költségek) esetén a jutalék százalékában való figyelembe vétel.

(Janecek, 2012) kiemeli, hogy a jövőbeli projektált költségeket legalább kezdeti (szerzési) és megújítási költségekre kell bontani, valamint hogy fontos a különböző szerződéstípusok (pl. egyszeri- és rendszeres díjas biztosítások) vonatkozásában elemezni a költségeket. Többféle allokációs módszert is javasol különböző költségtípusok esetén: biztosítási összegtől függő (pl. kockázatelbírálás), díjtól függő (pl. általános megújítási költségek), tartaléktól függő (pl. vagyongazdálkodási költségek) és darabszámtól függő költségfelosztási technikákat. Az infláció vonatkozásában pedig (Richards, 2004)-hoz hasonlóan kiemeli, hogy a bérinflációnak nagyon fontos a szerepe az előrejelzésben, és egy olyan módszert javasol, amiben a bérinfláció és a fogyasztói árindex van súlyozva előbbi típusú költségek biztosítónál jellemző arányában. A jutalékok kapcsán a szerződésenkénti hozzárendelést veti fel a legjobb lehetőségnek a jutalék ráták alapján, amennyiben ez megvalósítható.

Érdekes még a témában (Segal, 2002) tanulmánya, aki számos cégre vonatkozó piackutatási adatok alapján vizsgálja a költségeket, és a szerzési és fenntartási költségeket a biztosítási összeg és a szerződés-darabszám függvényében becsli.

Ez a gondolat könnyen elvezet a méretgazdaságosság fogalmához (akár az élet- akár a nem-életbiztosítások esetén). Logikus lehet, hogy nagyobb állománnyal vagy díjvolumennel rendelkező biztosító gazdaságosabban tud működni, az egy szerződésre vagy egységnyi díjra eső költsége kisebb lehet. (Segal, 2002) kiemeli hogy a konstans méretgazdaságosság túlságosan korlátozó feltétel lehet egy életbiztosító esetén, ennek megfelelő költségmodellt javasol, és levezeti a határköltség-függvény képletet egy életbiztosító esetén.

A fenti források alapján nyilvánvaló, hogy a költségek csoportosítására és modellezésére vonatkozóan számos eltérő megközelítés létezik. A továbbiakban a következő feltételezésekkel fogok élni az értekezésben (a bemutatott tanulmánnyal összhangban):

- A biztosító megkülönböztet szerzési- és fenntartási jellegű költségeket, de a jutalékok nem részei ennek a besorolásnak (a jutalékok a legtöbb esetben egyszerűen hozzárendelhetők a szerződésekhez a kapcsolódó jutalék-megállapodások szerint),
- A biztosító olyan konzisztens üzleti tervezési rendszert üzemeltet, amely figyelembe veszi a várható új szerzéseket, a teljes portfólióhoz kapcsolódó várható megszűnéseket és állományban maradásokat, releváns költségelemzéseket és egyéb üzleti és gazdasági tényezőket (pl. infláció), és ezek alapján projektálja a jövőre nézve a várható vállalat-, avagy termékszintű összköltségeket.

Ezen feltételezésekkel élve a költségek allokációs módszertana marad csak kérdéses. A tanulmányban a következő költségallokációs módszerek kerülnek definiálásra, melyekre a 6. Táblázat mutat be példákat (Szepesváry, 2019).

- **Darabarányos költségfelosztás:** a termékre eső összes előrejelzett fenntartási költség szétosztásra kerül a jövőbeli projektált szerződésalmazra darabarányos módszerrel (azaz minden szerződés egyforma nagyságú költséget kap).
- **Díjarányos költségfelosztás:** az előbbi költségek az állománydíjjal arányosan kerülnek allokálásra az egyes szerződésekre.
- **Vegyes költségfelosztás:** a darabarányos- és díjarányos módszer egyvelege, aminél a darabarányos költségek arányának nevezett mutató adja meg, hogy az összes költségből mekkora részt tekintünk darabarányosnak, illetve ennek a komplementerét pedig díjarányosnak.

	<b>Példa 1 (darabarányos)</b>	<b>Példa 2 (díjarányos)</b>	<b>Példa 3 (vegyes)</b>
<b>Szerződés darab</b>	10	10	10
<b>Állománydíj</b>	2 000	2 000	2 000
<b>Költségvolumen</b>	200	200	200
<b>Darabarányos költségek aránya</b>	100%	0%	80%
<b>Díjarányos költségek aránya</b>	0%	100%	20%
<b>Darabarányos költség szerződésenként</b>	20	0	16
<b>Díjarányos költség szerződésenként</b>	0,0%	10,0%	2,0%

6. táblázat: Példa darabarányos, díjarányos és vegyes költségfelosztási módszerre.

Forrás: (Szepesváry, 2019)

„Darabszámmal arányos költségei szinte biztosan vannak egy biztosítónak, például az ügyféllevelek kiküldésének költsége, vagy az ügyfélszolgálatra beérkező hívások

kezelésének költsége bizonyosan a szerződések darabszámával arányosak, nem pedig azok díjával. Érdeemes pár gondolatot szólni annak megfontolására, hogy vannak-e olyan költségei a biztosítónak, amik az állománydíjjal tekinthetők arányosnak, tehát van-e a valóságban létjogosultsága a vegyes és díjarányos módszernek, vagy csak elméleti lehetőségként vehetők számba. A vizsgált példában az állománydíj és a tartalékfedezet közel állnak egymáshoz, és mivel például a vagyongazdálkodási költségeket a kezelt vagyonnal (tartalékkal) szokás arányosnak tekinteni, ezt a költséget kis egyszerűsítéssel felfoghatjuk díjarányosnak is<sup>13</sup>. Továbbá például olyan költségek tekinthetők még esetleg díjarányosnak, amik a vállalat teljes költségvolumenével vagy költséghányadával függnek össze, azok alapján kerülnek meghatározásra. A vegyes módszer alkalmazható lehet tehát a gyakorlatban, de vállalat-specifikus alátámasztás lehet szükséges a valószerűségének igazolásához.” (Szepesváry, 2019, pp. 27)

Az IFRS 17 szabvány költségekre vonatkozó megfontolásai kapcsán fontos még említést tenni az úgynevezett *közvetlenül hozzákapcsolható* (angolul: *directly attributable*) és *nem-közvetlenül hozzákapcsolható* (angolul *non-directly attributable*<sup>14</sup>) típusú költségekről. Az (IFRS17, B65 és B66 cikkek) alapján utóbbi kategóriába sorolható költségek nem részei a szerződés-teljesítési pénzáramoknak, így a veszteségességi vizsgálat kapcsán sem kell azokat figyelembe venni<sup>15</sup>. A közvetlenül hozzákapcsolható költségek egy százalékos mutató segítségével vannak meghatározva a teljes költségvolumen arányában az idézett tanulmányban (Szepesváry, 2019).

### **2.5.2. Az IFRS 17-beli veszteségességi vizsgálat eredményei a költségmodell vonatkozásában**

A költségmodellezés lehetőségeinek áttekintése után rátérnek az IFRS 17-beli veszteségességi vizsgálatra. A következőkben a hivatkozott tanulmányban szereplő eredményeket és módszereket ismertetem (Szepesváry, 2019).

---

<sup>13</sup> Lehetne természetesen tovább finomítani a modellt, és bevezetni tartalékarányos költséget is, de mivel a bemutatott tanulmányban ennek nincs lényegi hatása, ezért ettől eltekintünk.

<sup>14</sup> A szabvány termékfejlesztési jellegű- és tréningköltségeket hoz példának erre a kategóriára.

<sup>15</sup> A költségek ezen típusú megbontásán és eltérő kezelésén túl az IFRS 17 és a Szolvencia II szabványokhoz kapcsolódó pénzáram előrejelzések költségekre vonatkozó megfontolásai nem mondanak ellent egymásnak, így a Szolvencia II elvek szerinti költségmodell IFRS 17 célokra is alkalmazható.

Korábban említésre került, hogy a szabvány alapvetően szerződésenkénti veszteségességi vizsgálatot követel meg. Ez alól kivételt az jelenthet, ha ésszerű és alátámasztott információk alapján lehet arra következtetni, hogy szerződések egy halmaza azonos nyereségességi csoportba tartozik, ez esetben a szerződésalmazra egyben is elvégezhető a veszteségességi teszt (IFRS 17, 17. cikk). Ilyen jellegű csoportosítás elkészítése azonban úgyszintén nehezen kivitelezhető feladat, ezért a tanulmányában a veszteségesség szerződésszinten kerül megállapításra.

Egy adott biztosítási termék, adott új szerzés mintájára mutatja be a tanulmány a szerződésenkénti veszteségességi vizsgálat eredményét, és annak bizonyos következményeit az IFRS 17-beli kezdeti megjelenítéskor számolható mutatókra vonatkozóan. Csak a *kezdeti megjelenítéskori* (angolul: *initial recognition*) profitteszt és a kezdeti szerződéses szolgáltatási marzs (CSM) számolás kerül részletes vizsgálatra, a későbbi mérések kapcsán nem készülnek hasonló modellszámítások. A tanulmány csak a kezdetben veszteséges és a kezdetben nem veszteséges halmazok szétválasztására fókuszál, nem vizsgálja a későbbiekben szignifikáns valószínűséggel veszteségesé válás esetét (tehát a kezdetben nem veszteséges szerződésalmaz tovább-bontását).

Az ismertetett elveknek és feltételezéseknek megfelelő cash flow modellben meghatározásra kerültek szerződésenként a várt jövőbeli pénzáramok, amik diszkontálás és a kockázati kiigazítással való kiegészítés után válnak a kezdeti veszteségesség mérőszámává. Előbbi mennyiség előjele alapján végezhető el a veszteségességi csoportba sorolás (feltételezve, hogy csak ez az említett két csoport kerül elkülönítésre).

A kezdeti megjelenítés állapotára vonatkozóan a veszteségességi profil kapcsán a következő mutatók használtak a tanulmányban:

**„CSM / LC<sup>16</sup> a díj arányában.** Egyszerűen fogalmazva a várható jövőbeli díjarányos profit / veszteség, tehát a profitabilitás mérőszáma egy adott szegmensre.

**Veszteségesek darabaránya.** Az adott szegmensnek darabarányosan mekkora része kerül veszteséges szerződés csoportba?

**Veszteségesek díjaránya.** Az adott szegmensnek díjarányosan mekkora része kerül veszteséges szerződés csoportba?

---

<sup>16</sup> Loss component, magyarul veszteségkomponens.



**Kezdetben megjelenítendő veszteség a díj arányában.** A veszteséges szerződések miatt mekkora veszteséget kell az eredménykimutatásban megjeleníteni kezdetben, a díj arányában?

**Kezdetben megjelenítendő veszteség a teljes CSM / LC arányában.** A veszteséges szerződések miatt mekkora veszteséget kell az eredménykimutatásban megjeleníteni kezdetben a teljes jövőbeli várható profit / veszteség arányában?<sup>17</sup> (Szepesváry, 2019, pp. 24)

Ezen mutatók jó mérőszámai az IFRS 17-beli veszteségességnek, a tanulmánybeli eredmények szemléltetésében és a kutatási hipotézis igazolásában is fontos szerepük lesz.

Egyszeri díj (Ft)		CSM / LC a díj arányában	Veszteségesek darabaránya	Veszteségesek díjaránya	Kezdetben megjelenítendő veszteség a díj arányában	Kezdetben megjelenítendő veszteség a teljes CSM / LC arányában
0	250 000	12,30%	100,00%	100,00%	-12,30%	100,00%
250 000	500 000	-4,13%	100,00%	100,00%	-4,13%	100,00%
500 000	750 000	-1,82%	100,00%	100,00%	-1,82%	100,00%
750 000	1 000 000	-0,41%	80,60%	78,79%	-0,46%	112,31%
1 000 000	1 250 000	0,30%	14,83%	14,71%	-0,03%	-11,38%
1 250 000	1 500 000	0,99%	3,57%	3,45%	-0,01%	-1,14%
1 500 000	2 000 000	1,53%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
2 000 000	5 000 000	2,41%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
5 000 000	10 000 000	3,10%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
10 000 000		3,54%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
<b>TOTAL</b>		<b>1,93%</b>	<b>43,83%</b>	<b>10,65%</b>	<b>-0,37%</b>	<b>-19,07%</b>

**7. táblázat:** Az alapszcenárió eredményei az egyszeri díj nagysága szerint.

Forrás: (Szepesváry, 2019)

A tanulmány egy azonos szerződés kezdettel rendelkező szimulált új szerzés mintán mutatja be a veszteségességre vonatkozó eredményeket. A minta állomány az egyszeri

<sup>17</sup> A teljes CSM / LC szorosan összefügg a teljes várható profittal, és ehhez viszonyítva kerül bemutatásra a veszteséges szerződések miatt kezdetben kimutatandó veszteség. Utóbbi mennyiség negatív vagy 0 értéket vehet fel, míg előbbi pozitív vagy negatív attól függően, hogy nyereséges vagy veszteséges-e az adott szegmens. Jól értelmezhető és szemléletes a mutató, ha például az adott szegmens összességében nyereséges, de tartalmaz veszteséges szerződéseket is (akkor negatív lesz a mutató), vagy ha csak nyereségeket tartalmaz (akkor pedig 0%). Ha minden szerződés veszteséges, akkor 100 % lesz a mutató értéke, az „átmeneti” osztálynál pedig 100% feletti érték is adódhat, ebben az esetben kevésbé szemléletes a hányados értéke.

díj nagysága alapján kerül csoportokra osztásra, az így kapott klaszterekre vonatkozó eredmények a 7. táblázatban láthatók. Először a feltételezések és paraméterek legjobb becslésének megfelelő beállítása szerinti eredmények láthatók, amit alapszcenáriónak nevez a tanulmány. A költségekre vonatkozó feltételezés ebben az esetben 100%-os közvetlenül hozzákapcsolható költségarányt és 100%-os darabarányos költségek arányát használ a korábban ismertetett mutatókra vonatkozóan.

A 7. táblázat alapján a következő értelmezés adható a veszteségességi profil kapcsán:

- „az új szerzés minta összességében profitábilis, a várható (CSM marzs logika szerinti) profit az egyszeri díj közel 2%-a;
- a minta állomány tartalmaz veszteséges szerződéseket, a teljes díj körülbelül 10%-a, a portfólió darabszám valamivel több, mint 40%-a veszteséges szerződésekhez tartozik;
- a szerződések veszteségességének fontos indikátora az egyszeri díj nagysága: alacsony díjszegmensekben akár minden szerződés veszteséges lehet, a magasabb díjosztályokban pedig egyáltalán nem fordulnak elő ilyen esetek;
- a veszteséges csoportok miatt keletkező veszteségkomponens egyből kimutatandó az eredménykimutatásban, ez az egyszeri díj közel 0,4%-a, míg a teljes profitnak közel 20%-a (értelemszerűen negatív előjellel).

Azaz nagyon leegyszerűsítve, például ha az állományból származó várható összes profit hosszú távon 100 millió Ft, akkor közel 20 millió Ft veszteséget kell kimutatni kezdetben, majd az állomány (a fedezeti egységek) lefutásával párhuzamosan realizálódik a hiányzó 120 millió Ft (pozitív) eredmény<sup>18</sup>.

Előbbihez hasonló hatás sem a magyar számviteli szabályok szerinti, sem az IFRS 4 standard<sup>19</sup> szerinti eredménykimutatásban nem jellemző, a veszteséges szerződésekre történő megkülönböztetés az IFRS 17 szabvány specifikuma.

A jelenlegi piaci gyakorlatban előfordulhat, hogy üzleti szempontok miatt egyes értékesített termékek bizonyos szerződesei veszteségesek lehetnek, amik erőteljesen

---

<sup>18</sup> Valójában a szerződéses szolgáltatási marzsban lévő diszkonthatás miatti keletkező kamatok és a kockázati kiigazítás felszabadulása is a jövőbeli eredmény része lesz, és a teljes eredmény sem egyezik meg az úgynevezett *biztosítási szolgáltatási eredménnyel* (*insurance service result*) (IFRS 17, 83 – 86 cikkek), de ezek a számítások nem témái a tanulmánynak és az értekezésnek.

<sup>19</sup> Valójában a veszteség azonnali elszámolása az IFRS 4 alkalmazása során is megjelenik. A különbség azonban, hogy ott jóval magasabb aggregációs szinten van mód ezt kezelni, amely így lehetőséget nyújt a várható veszteség és nyereség összevonására.

befolyásolhatják az új számvetési standard pénzügyi mutatóit. Ennek felismerése és a szükséges vezetőségi lépések meghozatala központi jelentőségű lehet az IFRS 17 felkészülés kapcsán.” (Szepesváry, 2019).

A bemutatott eredmény jól illusztrálja a felvetett hipotézis első részét, miszerint a veszteséges szerződéseknek jelentős kihatása lehet az IFRS 17-beli kezdeti megjelenítéskor a pénzügyi eredménnyel kapcsolatos mutatókra.

A tanulmány megmutatja, hogy mi okozhatja a fenti összefüggést a díj nagysága és a veszteségesség közt. A magyarázat a költségek hozzárendelésében rejlik. Speciálisan a vizsgált termékkonstrukció esetén a költségek fedezetét és a nyereség forrását az elért befektetési hozamból elvont marzs adja, ami arányos lesz a matematikai tartalék nagyságával, ami pedig az egyszeri díj nagyságával korrelál. Az alkalmazott költségallokációs módszerből fakadóan a cash flow modellben az egyes szerződésekre figyelembe vett költség nem függ a díj nagyságától, így a fentiekből következően az alacsonyabb díjú szerződések nagyobb eséllyel lesznek veszteségesek. Ezen a speciális példán túlmenően, általánosan problémát jelenthet a darabarányos költségallokációs módszer a szerződésenkénti veszteségességi vizsgálat kapcsán, azoknál a biztosítási termékeknél, ahol a díjkalkulációbeli költségfedezet a díjjal arányos, ami gyakori eset az életbiztosítások körében (Szepesváry, 2019). Mindezekből az is következik, hogy az ilyen típusú termékeknél a *darabarányos költségek aránya* minél alacsonyabb (ezáltal a díjarányos költségek aránya minél magasabb), annál kevésbé lesznek veszteségesek az alacsonyabb díjú szerződések. Az pedig definíció szerint nyilvánvaló, hogy a közvetlenül hozzákapcsolható költségarány csökkenése minden esetben javítja a veszteségességi profilt, hiszen ez minden típusú költség cash flow csökkenését eredményezi.

A tanulmány részletes érzékenységvizsgálatot készít a költségallokációs módszer paraméterei és a veszteségességi profil közti kapcsolat feltérképezésére. A 8. táblázatban a veszteségességi profil díjnagyság szerinti eredményei láthatók a közvetlenül hozzákapcsolható költségek arányának 90%-ra, a darabarányos költségek arányának 80%-ra állítása után. A várható CSM marzs logika szerinti díjarányos profit kis mértékben emelkedett, ennek oka a hozzárendelt költségek csökkenése. Azonban értelemszerűen ez csak a költségek egy részének máshol való kimutatását jelenti, a többi költség közvetlenül kerül be az eredménykimutatásba, az (IFRS 17, B66 d cikk) alapján. A költségparaméterek elmozdulásával összefüggően a veszteségesek darab- és díjaránya is csökkent, a kezdetben megjelenítendő veszteség pedig nagyon jelentősen, közel a felére

csökkent. Eltolódik továbbá az a díjhatár is, ami alatt biztosan veszteségek a szerződések.

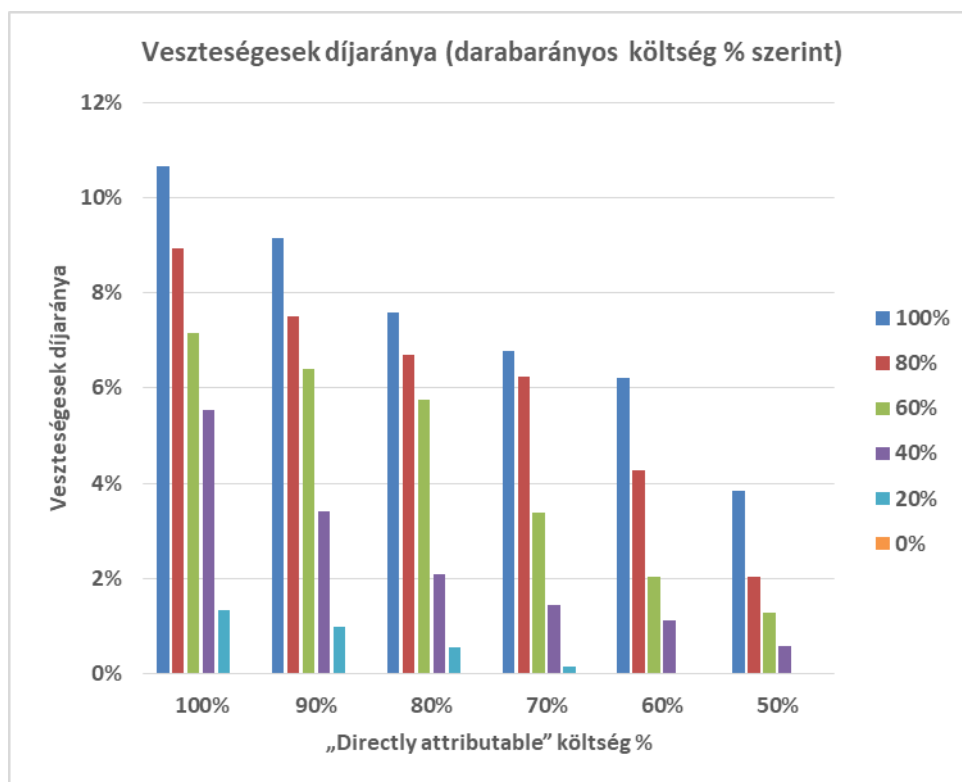
Egyszeri díj (Ft)		CSM / LC a díj arányában	Veszteségesek darabaránya	Veszteségesek díjaránya	Kezdetben megjelenítő dó veszteség a díj arányában	Kezdetben megjelenítő dó veszteség a teljes CSM / LC arányában
0	250 000	-8,12%	100,00%	100,00%	-8,12%	100,00%
250 000	500 000	-2,26%	100,00%	100,00%	-2,26%	100,00%
500 000	750 000	-0,61%	85,06%	83,43%	-0,64%	105,59%
750 000	1 000 000	0,43%	14,93%	14,48%	-0,02%	-4,97%
1 000 000	1 250 000	0,91%	1,16%	1,15%	0,00%	-0,07%
1 250 000	1 500 000	1,42%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
1 500 000	2 000 000	1,81%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
2 000 000	5 000 000	2,44%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
5 000 000	10 000 000	2,94%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
10 000 000		3,28%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
<b>TOTAL</b>		<b>2,10%</b>	<b>36,87%</b>	<b>7,51%</b>	<b>-0,20%</b>	<b>-9,74%</b>

8. táblázat: Veszteségességi profil módosított költségallokációs paraméterek mellett.

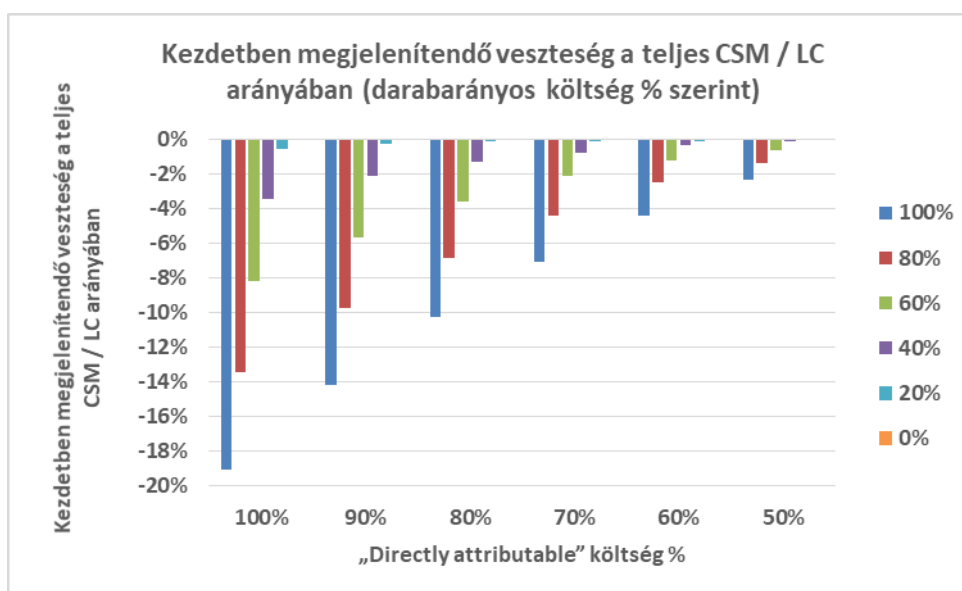
Forrás: (Szepesváry, 2019)

Az előbbi példa kapcsán látott tendenciák részletesebb számszerűsítését illusztrálják a további elemzések. A két költségallokációs paraméter különböző kombinációi esetén kiszámításra kerültek a cash flow modell eredményei, majd ezekből számolódtak a fentiekben bemutatott táblázatok megfelelői, végül pedig ezek alapján készültek szemléltető grafikonok a leginkább illusztratív mutatók vonatkozásában a tanulmányban (Szepesváry, 2019). A 10. ábrán a veszteségesek díjaránya mutató értéke látható a közvetlenül hozzákapcsolható költségek arányának 100%, 90%, 80%, 70%, 60%, 50%-os értékei, illetve a darabarányos költségek arányának 100%, 80%, 60%, 40%, 20% és 0%-os értékei esetén, minden lehetséges kombinációra vonatkozóan. A 11. ábrán pedig a kezdetben megjelenítendő veszteség a teljes CSM / LC arányában mutató értékei látszanak a 10. ábrával konzisztens scenáriókra. Mindkét ábra jól szemlélteti, hogy a költségallokációs paraméterek módosulása esetén (egyre kisebb %-ok alkalmazása esetén), egyre kedvezőbb a veszteségességi profil, és egyre kisebb a kezdetben kimutatandó veszteség is. Speciálisan, a 0%-os darabarányos költségarány esetén a veszteséges szerződés csoport megszűnik, hiszen ekkor a szerződésenkénti előrejelzett pénzáramok többsége is díjarányos lesz, ami jól igazodik a szerződések tartalékkal és díjjal arányos profitforrásához (Szepesváry, 2019). Mindez azt is előrejelzi, hogy ha a

költségek valós szerkezete jól igazodik a díjkalkulációs költségszerkezethez, akkor elérhető a veszteségességi profil optimális állapota.



**10. ábra:** A veszteséges szerződések díjaránya különböző költségallokációs paraméterek esetén. Forrás: (Szepesváry, 2019)



**11. ábra:** Kezdetben megjelenítendő veszteség különböző költségallokációs paraméterek esetén. Forrás: (Szepesváry, 2019)

Fontos megjegyezni azonban a fentiekkel kapcsolatban, hogy a megfelelő költségallokációs modell módszertanának használata nem csupán a paraméterek kiválasztását jelenti, hanem azok alátámasztását is. „Ennek meghatározása értelemszerűen vállalat-specifikus feladat, és adatokkal, elemzéssel való alátámasztás lehet szükséges a cash flow modellben való alkalmazáshoz. A közvetlenül hozzárendelhető költségek aránya sok esetben inkább adottságnak tekinthető egy vállalat és költséghelyzet esetében, míg a darabarányos és díjarányos költségfelosztásnál általában jelentős mérlegelési lehetősége van a vállalatnak a felosztási elvek tekintetében” (Szepesváry, 2019).

A vizsgált esettípus és az általánosabb környezetben említett, díjarányos költségfedezetet tartalmazó életbiztosítások vonatkozásában tehát a költségekre vonatkozó érzékenységvizsgálatok alátámasztják a vizsgált hipotézis második felét, miszerint az IFRS 17-beli kezdeti megjelenítéskori pénzügyi eredménnyel kapcsolatos mutatók optimalizálhatók a modell költségekre vonatkozó feltételezéseinek kalibrálásával.

Logikus azonban az is, hogy az ezzel ellentétes esetben, ha a díjkalkuláció nem díjarányos, hanem fix darabköltségeket tartalmaz, akkor pedig a tendenciák a fordított irányba fognak mutatni, akkor egy díjarányos költségallokációs eljárás esetén a magasabb díjú szerződések lehetnek veszteségesek. Ezen gondolatok tovább általánosíthatók, más terméktípusok és más korábban említett költségfajták (pl. tartalékarányos, biztosítási összeg arányos) esetére. Ilyen eseteket részletes számpéldákkal nem vizsgál a tanulmány, de heurisztikusan itt is adódik az eddigiekből, hogy a veszteségességi profil optimális állapotának elérése akkor lehetséges, ha a költségek valós szerkezete jól igazodik a díjkalkulációs költségszerkezethez. Mindez pedig egy nagyon komplex összefonódást követel meg hosszú távon a biztosító különböző területei és folyamatai közt: a költségek valós felmerülése és annak elméleti modellje összhangban kell legyen a díjkalkulációs elvekkel az optimális állapot eléréséhez. Mindehhez jó segédeszköz a modern aktuáriusi technikákat ötvöző cash flow modellezési módszertan, ami jelen bemutatott példákban is az igazolás eszköze volt.

### 2.5.3. Az IFRS 17-beli veszteségességi vizsgálat további eredményei

Az alábbi szakaszban röviden ismertetésre kerülnek a tanulmány további vizsgálatai az IFRS 17-beli veszteségességi vizsgálatban (Szepesváry, 2019).

A profittesztekről szóló általános bevezetésben már ismertetésre került, hogy nagyon fontos a modell főbb paraméterek szerinti érzékenységi vizsgálata. A korábbiak szerint a Szolvencia II rezsím sztenderd formulájának sokkjai az adott kockázatok egy éves időtávon mért 99,5%-os kvantilisait becslik (a mögöttes feltételezések teljesülte esetén). A tanulmány a sztenderd formulának megfelelő sokkokkal vizsgálja a veszteségességi profil érzékenységét (Szepesváry, 2019). Ezen módszer választásának előnye, egyrészt hogy azonos kvantilis szerinti sokkolás kerül végrehajtásra a kockázatokra, így azok eredményei jól összehasonlíthatók, másrészt az éves 99,5%-os biztonsági szint kellően nagy mértékű kilengését teszteli le az adott változóra vett érzékenységnél. A konkrét sokkok, a (2015/35/EU) szabályozással összhangban az alábbiak (a későbbi táblázatokban szereplő elnevezések *dőlt betűvel* szerepelnek):

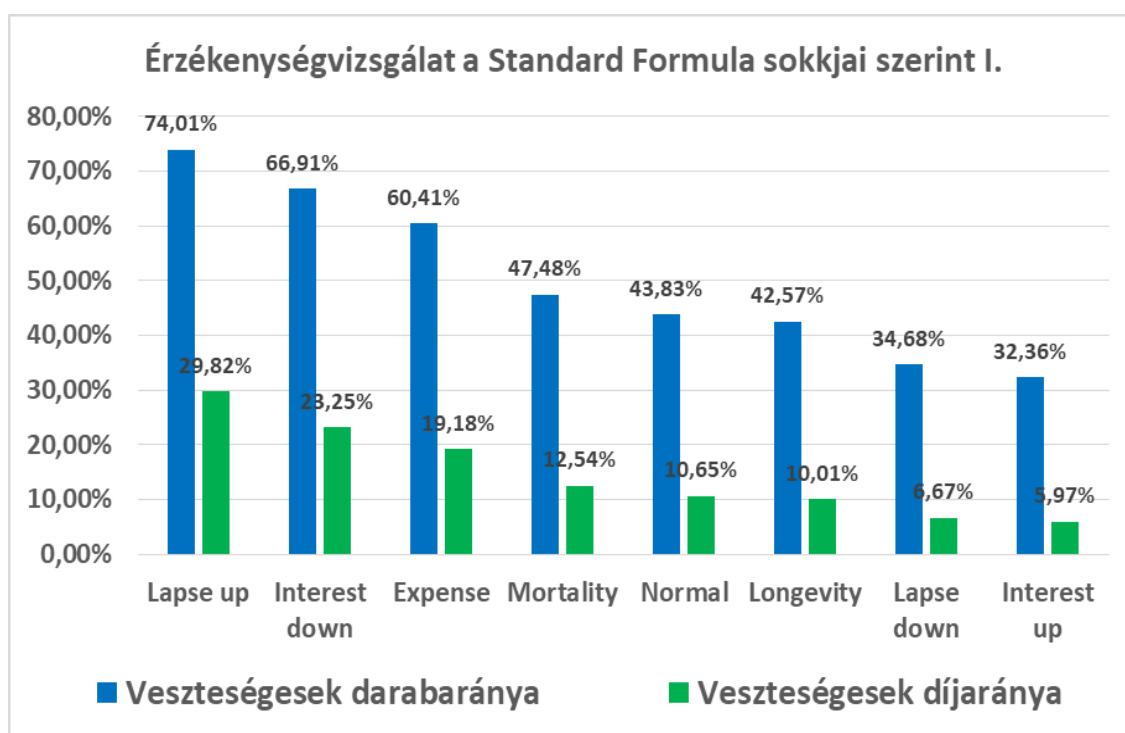
- Kamatláb sokk: a hozamgörbe emelkedése (*Interest up*) és a hozamgörbe csökkenése (*Interest down*). Az alkalmazandó sokk paraméterek megtalálhatók a Szolvencia II szabályozásban, de adott referencia dátumra vonatkozóan a normál kockázatmentes hozamgörbe mellett a kamatláb sokkolt hozamgörbék is letölthetők az EIOPA honlapjáról<sup>20</sup>.
- Költség és inflációs sokk (*Expense*): a költségek 10%-os megemelkedése és a költségekre vonatkozó inflációs ráta 1 százalékpontos megemelkedése<sup>21</sup>.
- Törlési arányok növekedése (*Lapse up*): a törlési arányok azonnali és tartós 50%-os emelkedése.
- Törlési arányok csökkenése (*Lapse down*): a törlési arányok azonnali és tartós 50%-os csökkenése (azzal a kitételrel, hogy a csökkenés nem haladhatja meg a 20 százalékpontot).
- Halandósági sokk (*Mortality*): halandósági arányok azonnali és tartós 15%-os emelkedése.

<sup>20</sup> <https://eiopa.europa.eu/regulation-supervision/insurance/solvency-ii-technical-information/risk-free-interest-rate-term-structures>

<sup>21</sup> A sokkolás mértékével most egy szabályt (sztenderd formula) követünk. De a 2021 végére jelentősen megnövekedett infláció tükrében érzékenységvizsgálati alapon ennél nagyobb sokk is kipróbálható.

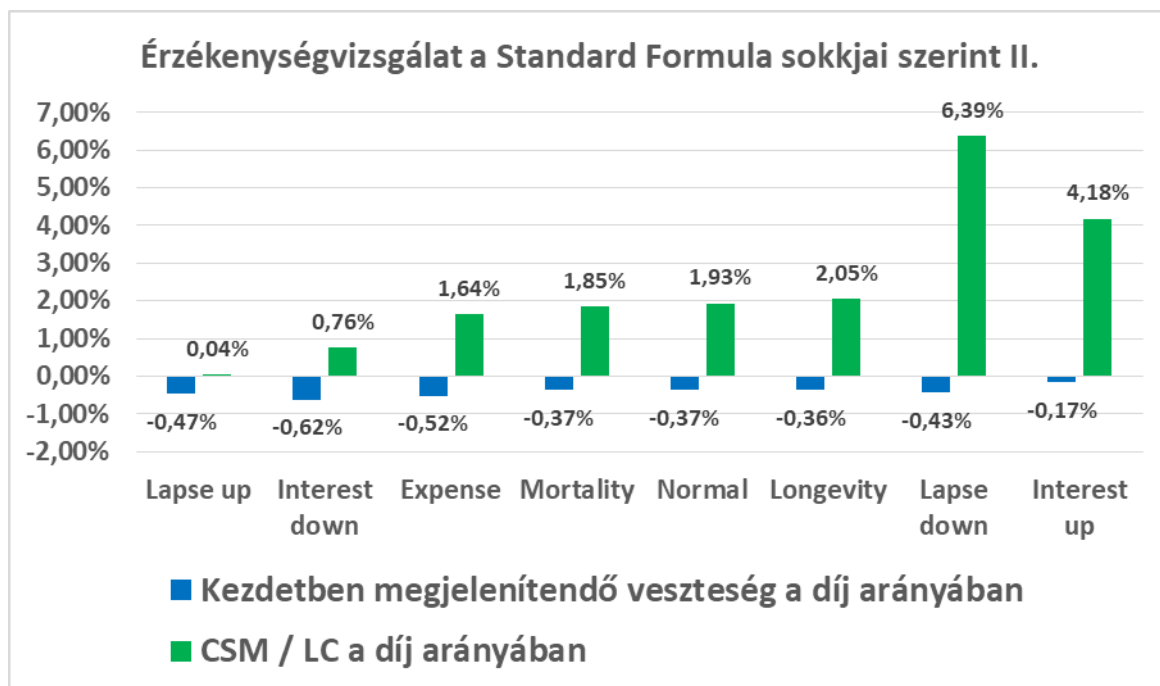
- Hosszú élet kockázatra vonatkozó sokk (*Longevity*): halandósági arányok azonnali és tartós 20%-os csökkenése.

A költségallokáció tekintetében 100%-os közvetlenül hozzákapcsolható költségarányt és 100%-os darabarányos költségek arányát használnak a számítások. A stresszelt beállításokkal kerültek futtatásra a modellek, majd a korábban szemléltetett táblázatok és mutatók kerültek kiszámításra, ezek bizonyos grafikus vetületei kerülnek bemutatásra. A 12. és 13. ábrán középen az alapszcenário eredményei láthatók, majd ettől jobbra és balra az előnyös illetve előnytelen sokkok eredményei. Látható, hogy a modell szempontjából a leginkább érzékeny paraméterek a törlési valószínűség és a kamatláb, ezek jelentősen befolyásolhatják a veszteségességi arányokat, a kezdetben kimutatandó veszteséget, de ezek továbbá nem csak a szerződésszintű eredményeket, hanem a teljes portfólió profitabilitását is szenzitíven érintik. Mindezek a vizsgált termék és feltételezés-környezet jellegéből adódnak.



**12. ábra:** Veszteségesek darab- és díjaránya a sztenderd formula sokkjain vizsgálva.  
Forrás: (Szepesváry, 2019)





**13. ábra:** Veszteségességi profil a sztenderd formula sokkjain vizsgálva.  
 Forrás: (Szepesváry, 2019)

A fenti megállapítások a konkrét példára igazak, ebből további általános következtetést nem von le az értekezés, de azt ismételten fontos kiemelni, hogy a cash flow modell érzékenységi vizsgálata minden esetben nagyon fontos, a befolyásoló tényezők tendenciáinak és érzékenységének megértése céljából.

A kalkulációs eredmények bemutatása után, a szakasz lezárásaként, a veszteségességi vizsgálat és szerződés csoport (GIC) besorolás informatikai implementálásának nehézségeiről esik szó. Az IFRS 17 felkészülés szempontjából az IT megvalósítás is innovációt igénylő és kulcsfontosságú terület, ezért megkerülhetetlen ennek a témakörnek a megemlítése a veszteségességi vizsgálat kapcsán. Mindezt a tanulmány leírása alapján mutatja be az értekezés (Szepesváry, 2019).

„Központi jelentőségű kérdés az IFRS 17 informatikai implementálásában, hogy hol (milyen rendszerben) és mikor történjen a kezdeti megjelenítéshez kapcsolódó veszteségességi vizsgálat. Ahogy korábban feltételeztük, nem áll rendelkezésre olyan információ, hogy bizonyos szerződéshalmazok azonos profitabilitási jellemzőkkel rendelkeznek, ezért a veszteségességi vizsgálat szerződésenként végzendő.

Alaphelyzetben mi a legalkalmasabb informatikai eszköz a szerződésenkénti profitessztre? Értelmszerűen a vállalat által használt aktuáriusi cash flow modellező

szoftver<sup>22</sup>, közismertek például a Prophet<sup>23</sup> és a Moses<sup>24</sup> programcsomagok, de más hasonló megoldások széles tárháza is használt a szakmában.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy rendelkezésre áll egy olyan aktuáriusi modellező szoftver, ami alkalmas a szerződésenkénti profitteszt elvégzésére. A következőkben négy adódó lehetőséget tekintünk át, ami esetleges megoldás kínálhat az IFRS 17 kapcsán felmerülő profittesztek elvégzésére, és a profitabilitási kategóriák biztosítástechnikai rendszerbe<sup>25</sup> történő átadására. A biztosítástechnikai rendszer és az aktuáriusi szoftver közötti feladatmegosztás és adatátvitel különböző lehetséges formái szerepelnek, lényegében aszerinti sorrendben, hogy melyik rendszerre hárul a kalkulációk döntő része. A szereplő lehetőségek és azok előnyei és hátrányai a szerző szubjektív meglátásán alapulnak, természetesen adott vállalatok esetén eltérő megoldások is adódhatnak, és eltérő lehet az is, hogy mennyire előnyösek-hátrányosak a felsorolt módszerek.

#### **1. A biztosítástechnikai rendszer alkalmassá tétele a szerződésenkénti profitteszt elvégzésére.**

Előnye, hogy nem szükséges interfész vagy adatkapcsolat kialakítása a két rendszer közt. Hátránya viszont, hogy emiatt minden kapcsolódó kalkulációt el kell, hogy tudjon végezni a biztosítástechnikai rendszer, ami jellemzően nem olyan funkcionalitásra van tervezve, hogy aktuáriusi cash flow projekciót készítsen. Ha továbbá a vállalat (más folyamatok miatt) megtartja az aktuáriusi szoftvert, akkor a két cash flow modellező rendszer fejlesztése, karbantartása, paraméter-frissítése folyamatos párhuzamosan munkát jelent, ami szintén előnytelen.

#### **2. Az aktuáriusi szoftver adja meg minden lehetséges szerződésparaméter-kombináció esetén a profitabilitási kategóriát, és ez alapján az összes lehetséges paraméterkombinációra adódó besorolási eredmény kerül eltárolásra a biztosítástechnikai rendszerben.**

Előnye, hogy a biztosítástechnikai rendszernek nem szükséges cash flow projektáló funkcionalitással rendelkeznie, elég ha csak az aktuális klasszifikációs eredményeket eltárolja, és be tudja sorolni az új szerződéseket. Hátránya viszont,

---

<sup>22</sup> Olyan speciális szoftver, ami alkalmas a korábban bemutatott példákhoz hasonló biztosítási szerződésekhez kapcsolódó cash flow projekcióra.

<sup>23</sup> Lásd például: <https://www.prophet-web.com/>

<sup>24</sup> Lásd például: <https://www.towerswatson.com/en/Services/Tools/moses-applications?webSyncID=dca92273-b327-e744-3344-5988e7a6178e&sessionGUID=dd50230b-ea5e-7200-be41-e87280a77d25>

<sup>25</sup> A továbbiakban értsük biztosítástechnikai rendszer alatt a biztosító szerződés-nyilvántartó rendszerét.

hogy az összes lehetséges szerződésparaméter-kombináció hatalmas adattömeget jelenthet a rendszerbeli letárolás-, valamint az aktuáriusi szoftverben való adatgenerálás szempontjából is. Problémás továbbá a rendszerek frissítése is, a hozamgörbe és egyéb paraméterek frissítése miatt gyakori adatgenerálás és adattranszfer lehet szükséges, ami nagy munka- és erőforrás igényvel társul.

- 3. A biztosítástechnikai rendszer nem tudja kiszámolni a veszteségességi kategóriát, és nincsenek is benne eltárolva a lehetséges paraméter-kombinációk, hanem (bizonyos időközönként) meghívja az aktuáriusi szoftvert, ami kiszámítja az adott szerződések nyereségességre vonatkozó besorolását, és visszaadja az eredményeket a biztosítástechnikai rendszernek.**

Informatikai szempontból az optimálisnak tűnő megoldás, minden rendszer azt a feladatot végzi, ami jellemzően annak a tipikus funkcionalitása. Nehézsége viszont, hogy speciális interfész és folyamat kialakítása lehet szükséges a két rendszer közt, ami kihívást jelent az informatikai- és adott esetben az aktuáriusi területnek is

- 4. Nincs közvetlen kapcsolat a biztosítástechnikai rendszer és az aktuáriusi szoftver közt, (bizonyos időközönként, például a zárások alkalmával) az aktuáriusi programban kerülnek futtatásra a besorolandó szerződések, majd az adódó eredmények átadhatók a biztosítástechnikai rendszer számára.**

Ez lényegében az előző módszer leegyszerűsítettebb, manuálisabb változata. Előnye, hogy egyszerűbb informatikai szempontból (nem szükséges az interfész és az automatizált folyamat kialakítása a két rendszer közt), hátránya viszont, hogy manuális, nagy ráfordításigénye lehet, és értékes időt emészt fel, például a zárási időszakok során.

A fentiek figyelembevételével az IFRS 17-beli profitteszt, és szerződésklasszifikáció nem kizárólag az aktuáriusi terület megoldandó feladata, komoly informatikai és rendszertechnikai kihívásokat is jelentő problémakör.” (Szepesváry, 2019, p. 33 - 35)

## 2.6. A halandóság modellezése

Az értekezés korábbi szakaszában kifejtésre került, hogy az életbiztosítások esetén szükségszerűen kell, hogy legyen a biztosított életben létével vagy halálával összefüggő biztosítási esemény. A klasszikus életbiztosítási technikák kapcsán ismeretesek a halandósági táblák és az ezeken alapuló hagyományos kalkulációs módszerek (lásd például Függelék 5.1). Mivel a cash flow modellezésnek is fontos befolyásoló eleme a halandóság és annak előrejelzése, ezért külön fejezetként tárgyalja az értekezés. Ezen szakasz témája a modern aktuáriusi modellezéshez kötődő mortalitási vizsgálatok áttekintése, a halandóság cash flow modellbe való beépítésére fókuszálva. Az értekezés ezen alfejezete nagyobb részben más szerzők által javasolt technikákat mutat be áttekintő jelleggel, de ismertetésre kerül egy saját készítésű empirikus esettanulmány is a legismertebb halandóság előrejelző modell, a Lee-Carter módszer segítségével. Ennek érthetőségéhez utóbbi módszer matematikai háttere is ismertetésre kerül jelen szakaszban.

### 2.6.1. A halandóság kezelésének problémája az életbiztosítási cash flow modellezésben

Két alapvető fontosságú kérdés fogalmazható meg a halandóság cash flow modellbe történő beépítése kapcsán:

- A múltban és jelenben megfigyelhető halandósági mutatókhoz viszonyítva változik-e és hogyan a halandóság a jövőben?
- Hogyan alakul a vizsgált biztosított csoport (akinek a vonatkozásában a cash flow modell készül) halandósága a néphalandósághoz képest?

Az első kérdés kapcsán megkülönböztethetők a hagyományos, statikus modellek, melyek egy adott időszakra vonatkozó (pl. népszámlálási és halandósági) adatok alapján becslik a jövőbeli halandóságot, és a modern, dinamikus mortalitási modellek, amik a halandóság időbeli (naptári év szerinti) változását is figyelembe veszik. (Vékás, 2019) sorra veszi a halandósági modellezés kialakulásának lépéseit, a halandósági törvényektől (halálozási mutatók paraméteres matematikai összefüggéseinek vizsgálata) a modern mortalitási

modellekig. A hagyományos halandósági mutatókat (halálozási ráták, halálozási intenzitás, kihalási rend), a klasszikus paraméteres becslőfüggvényeket (pl. Gompertz és Makeham törvényei) és az egyéb hagyományos, halálozással kapcsolatos statisztikai módszereket részletesen tárgyalja (Ágoston & Kovács, 2000) írása.

A népszámlálási adatok segítségével korévenként meghatározható az adott év elején élő személyek létszáma, előbbi az év során korévenként elhunytak létszámával összevetve kiszámíthatók az úgynevezett nyers halálozási valószínűségek, melyeket különböző approximációs technikákkal a véletlen hatásoktól megtisztítva adódnak a simított halálozási valószínűségek ( $q_x$ ), ahol  $x$  az életkort jelenti. A halálozási valószínűségek alapján képezhető halandósági tábla fontos mutatója a kihalási rend ( $l_x$ ), amely azt mutatja meg, hogy egy születéskor induló 100.000 fős populációból hányan vannak még életben  $x$  évesen, illetve a kihalási rend alapján képezhető a  $d_x$  mutató, ami az  $x$  évesen elhalálozók számát jelöli. A halálozási valószínűséghez kötődő eljárás mutatja, hogy a halandósági tábla adatai nem egy generációra vonatkoznak, hanem több együtt élő korcsoport adatain alapul a becslés, viszont az ebből származtatott kihalási rend már azt sugallja, mintha egy generáció adatait szemléltetné (Banyár, 2016). A probléma forrása az, hogy akár egy (klasszikus) életbiztosítási díjkalkuláció, akár egy modern pénzáram előrejelzés esetén, a halandóság kapcsán a jövőben várt halandóságot kell számszerűsíteni. Például, egy adott pillanatban 40 éves biztosított esetén, ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy mekkora valószínűséggel hal meg 60 évesen, akkor azt a jelenben (pontosabban a halandósági tábla készítésekor) 60 éves populáció adatai alapján becsli meg a hagyományos (statikus) modell. Empirikus tény viszont, hogy az emberi élettartam hossza az utóbbi 200 évben jelentősen növekedett (pl. az orvostudomány fejlődése, az életmód, az ellátás és a közegészségügy javulása miatt), és ez a tendencia gyakran rövid távon is érzékelhető (Vékás, 2019). A várható élettartam hosszának növekedése értelemszerűen a halálozási valószínűség csökkenésével jár együtt, így ha az említett trendek folytatódnak (a javulás üteme és időbeli lefolyása persze kérdéses<sup>26</sup>), akkor az életbiztosítási kalkulációk esetén a statikus halandósági modellezés hibákhoz vezethet. A 2020-ban elterjedt COVID-19 világjárvány hatalmas sokkot okozott a halálozás terén, erről a későbbiekben esik szó.

---

<sup>26</sup> Fontos változást emel ki a témában (Horváth, 2019) tanulmánya, miszerint az utóbbi években lassult a halandóság javulása, és akár trendforduló is elképzelhető a jövőben.

A statikus modellből adódó hiba több féle és irányú lehet, ami meghatározza annak súlyosságát. Például egy kockázati életbiztosítás hagyományos díjkalkulációja esetén, ha a biztosító nem veszi figyelembe a halandóság javulását, akkor hosszú távon a valósnál magasabb mortalitással fogja számolni a díjat, az ekvivalencia egyenletben nagyobb valószínűségű vagy korábban bekövetkező halálozást fog becsülni a valósnál, ezáltal magasabb nettó díj adódik majd, mint az elméletileg szükséges. Ez az irány a biztosító szempontjából előnyös is lehet a várható mortalitási nyereség miatt. Előbbi példának szöges ellentéte következik be egy járadékbiztosítási termék esetén, ahol az előbbi logika megfordításával pénzügyi vesztesége keletkezik a biztosítónak. Ezt a jellegű bizonytalanságot nevezi a szakirodalom *longevity* kockázatnak, amit (Májér & Kovács, 2011) megfogalmazása óta élettartam-kockázatnak szokás magyarul nevezni. Amellett, hogy ez a kockázat súlyos terhet ró például a nyugdíjrendszerre vagy egyes életbiztosítási konstrukciók árazására, az életbiztosítási cash flow modellezési alkalmazásokban is fontos szerepet játszik. A feltételezések meghatározása során figyelembe kell venni azokat a várható jövőbeli fejleményeket (többek közt demográfiai, orvostudományi, társadalmi változások), melyek jelentős mértékben befolyásolhatják a biztosítási szerződések pénzáramlásait (lásd például (2015/35/EU, 29. cikk)). A halandóság jövőbeli változása tipikusan ilyen tényező lehet. A Szolvencia II rezsimbeli biztosítástechnikai tartalékok és szavatolótőke-szükségletet nagy mértékben befolyásolhatja a halandóság jövőbeli trendjeinek figyelembe vétele, és ez nem korlátozódik azokra a biztosítási termékekre, ahol a *longevity* kockázat van, hanem az azzal ellentétes esetre is igaz. Hasonló megállapítás tehető a halandóság előrejelzés fontosságára az analóg cash flow modellezési alapelveket követő IFRS 17-beli alkalmazáskor, illetve a modern díjszámításnál használatos profit-teszt eljárás esetén.

A másik fontos megfogalmazott kérdés a biztosított csoportok halandósága és a néphalandóság viszonyára vonatkozik. Az életbiztosítók ügyfélköre általában jobb mortalitási mutatókkal rendelkezik, mint a teljes népességre vonatkozó néphalandóság, hiszen jellemzően aki életbiztosítást köt, az feltehetően jobb anyagi körülményekkel rendelkezik, hosszabb távon gondolkodik (Banyár, 2016). Ez alól kivételt az antiszelekció esetleges jelenléte okozhat. Antiszelekcióról akkor beszélünk, ha a biztosított kihasználja a közte és a biztosító közötti információs aszimmetriát, és eltitkolja kockázatának valós mértékét a biztosító előtt (Banyár, 2016). Logikus lehet például, hogy egy súlyos betegségben szenvedő egyén inkább kockázati életbiztosítást szeretne kötni, mint életjáradék konstrukciót. Az antiszelekció nagyon veszélyes lehet a biztosító

számára, hiszen ha a vállalt kockázat szempontjából rosszabb tulajdonságú csoport köti meg a biztosítást, mint amit a biztosító a díjkalkulációkor feltételezett (pl. a halandósági tábla vagy más statisztika alapján), akkor komoly veszteség érheti a biztosítót. Emiatt nagyon fontos az életbiztosítások esetén a megfelelő kockázat-elbírálási rendszer használata, ami segíthet elkerülni a fenti esetet. A kockázat-elbírálás módszere és az azzal összefüggő kockázatkezelési technikák lehetnek például az orvosi vizsgálatra vagy egészségügyi és egyéb nyilatkozat kitöltésére való kötelezés, az átlagosnál nagyobbnak ítélt kockázat esetén a kizárás vagy a magasabb kockázatnak megfelelő díj megállapítása, illetve további általános kockázatkezelési módszer lehet a várakozási idő vagy a lépcsőzetes biztosítási összeg alkalmazása (Banyár, 2016).

A továbbiakban a kockázatkezelési technikákat nem részletezzük, de feltételezzük, hogy a mögöttes folyamatok alkalmazása mellett számszerűsíthető a portfólió halandóságának és a néphalandóságnak a viszonya. A halandóság jövőbeli javulása esetén az élettartam kockázatnak kitett termékek esetén a díjkalkulációnál alkalmazott halandósági táblánál alacsonyabb mortalitás esetén érheti veszteség a biztosítót, ellenkező esetben nyereséges lesz, a haláleseti kockázatnak kitett termékek esetén pedig a fordított irányok érvényesülnek. Ugyancsak elmondható az is, hogy amíg a klasszikus díjkalkuláció esetén elégséges lehet arról meggyőződni, hogy a használt halandósági tábla „biztonságos” (nem rejt a veszteség veszélyét a biztosítóra nézve), addig a cash flow modellezésnél szükséges a jövőbeli várható trendek számszerűsítése és beépítése a pénzáram előrejelzésbe.

A biztosítási portfólió halandóságának figyelembe vételére a cash flow modellben (Janecek, 2012) a következő technikákat javasolja:

- a díjkalkulációban használt halandósági feltételezés arányában legyen kifejezve a jövőbeli várt halandóság,
- a néphalandósági tábla arányában legyen kifejezve a jövőbeli várt halandóság,
- amennyiben a biztosítónak kellő hosszúságú historikus adata áll rendelkezésre, számítsa az alapján a jövőbeli várt halandóságot.

Az utolsó lehetőség alkalmazásához jellemzően csak kevés biztosítónak áll rendelkezésre kellő mennyiségű adata, illetve ebben az esetben figyelembe kell venni a halandóság múltban már esetlegesen bekövetkezett javulását is. Az első két javasolt technika ellenben széles körben alkalmazott a biztosítási szakmában.

(Janecek, 2012) javasolja még a halandósági tapasztalat megbontását a nem, a kor, a biztosítási év, a biztosítás típusa, a biztosított dohányzására vonatkozó státusz és bármilyen egyéb szegmentáló tényező szerint. Arra is felhívja a figyelmet, hogy a kockázatelbírálás következtében az első biztosítási években jellemzően az adódó mortalitási arány alacsonyabb lesz, majd a későbbi biztosítási években folyamatosan növekszik.

### 2.6.2. A Lee-Carter módszer, esettanulmány a Lee-Carter módszer felhasználásával

A halandóság előrejelzését szolgáló dinamikus mortalitási modellek úttörője a Lee-Carter módszer volt (Lee & Carter, 1992). Az eljárás a koréves halálozási valószínűségek naptári év szerinti mátrixa alapján ad maximum likelihood becslést a jövőbeli halandósági rátára lineáris algebrai és idősorelemzési technikákat használva. Az alábbiakban bemutatásra kerül a módszer matematikai háttere, utána pedig egy segítségével készített esettanulmány, ami a Szolvencia II legjobb becslésének vonatkozásában vizsgálja a halandóság javulásának hatását.

A Lee-Carter módszer megértéséhez fontos használatos fogalom a központi halandósági ráta: a korábban bevezetett  $q_x$  halálozási valószínűségtől eltérően az év során elhunytak számát a központi halandósági ráta esetén nem az év elején, hanem az év közepén mért népességgel osztjuk (ezt szokás központi kitettségnek nevezni). Egyenletes halálozást feltételezve az év során utóbbi nevező az év eleji és év végi népesség számtani közepe, és ebben az esetben az is megmutatható, hogy a központi halandósági ráta kifejezhető a  $\frac{d_x}{l_{x-0,5d_x}} = \frac{q_x}{1-0,5q_x}$  formula segítségével (Ágoston & Kovács, 2000).

A Lee-Carter módszer alábbi bemutatása (Vékás, 2019) alapján történik. A modell a központi halandósági rátát ( $m_{x,t}$ ) becsüli korévenként ( $x$ ) és naptári évenként ( $t$ ):

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x \cdot k_t + \varepsilon_{x,t}, \quad (2.7)$$

ahol  $a_x, b_x, k_t$  a halandóság életkortól és naptári évtől függő paraméterei,  $\varepsilon_{x,t}$  pedig normális eloszlású, független hibtagokat jelöl, 0 várható értékkel és  $\sigma^2$  varianciával. Az empirikus adatokból feltételezés szerint rendelkezésre állnak  $m_{x,t}$  értékei  $t = 1, \dots, T$ -re minden  $x = 1, \dots, X$  értékekre.



Megmutatható, hogy az  $a_x$  paraméterek maximum likelihood becslése az alábbi:

$$\widehat{a}_x = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln(m_{x,t}). \quad (2.8)$$

Bevezethető még az úgynevezett centrált logaritmikus halandósági ráta:

$$\tilde{m}_{x,t} = \ln(m_{x,t}) - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln(m_{x,t}). \quad (2.9)$$

Előbbi mennyiségek  $M \in \mathbb{R}^{X \times T}$  mátrixba rendezhetők.  $b_x$  és  $k_t$  maximum likelihood becsléséhez a szinguláris érték felbontás technikáját kell alkalmazni. Megmutatható, hogy  $M$  felírható  $M = U\Delta V^T$  alakban ( $U \in \mathbb{R}^{X \times X}, \Delta \in \mathbb{R}^{X \times T}, V \in \mathbb{R}^{T \times T}$ ), ahol  $\Delta$  olyan diagonális mátrix, aminek a főátlójában a szinguláris értékek monoton csökkenő sorrendben következnek és a legnagyobb elem közülük  $\delta_1$ ,  $U$  és  $V$  pedig oszlopaikban a szinguláris értékekhez tartozó bal- és jobboldali szinguláris vektorokat tartalmazzák, amik közül a  $\delta_1$ -hez tartozókat jelöljük  $u_1$  és  $v_1$ -gyel. Belátható az is, hogy  $MM^T$  és  $M^T M$  pozitív sajátértékei  $M$  pozitív szinguláris értékeinek négyzeteivel egyeznek meg, sajátvektoraik pedig  $M$  bal-, illetve jobboldali szinguláris vektoraival egyeznek meg (Vékás, 2019).

Megmutatható, hogy  $b_x$  és  $k_t$  maximum likelihood becslései az alábbiak ( $\hat{b}$  és  $\hat{k}$ -val jelölve a becsült paraméter vektorokat):

$$\hat{b} = \frac{1}{\beta} \cdot u_1, \quad (2.10)$$

$$\hat{k} = \beta \cdot \delta_1 \cdot v_1 \quad (\beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0).$$

$\beta$  értéke megfelelően rögzített paraméter megkötések mellett számítható (pl.  $\sum_{x=1}^X b_x = 1$ ,  $\sum_{t=1}^T k_t = 0$  mellett  $\beta = \mathbf{1}^T \cdot u_1 \neq 0$  megfelelő lesz).

A szórásnégyzet maximum likelihood becslése pedig az alábbi:

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{XT} \sum_{x=1}^X \sum_{t=1}^T (\ln(m_{x,t}) - \widehat{a}_x - \widehat{b}_x \cdot \widehat{k}_t)^2. \quad (2.11)$$

(Vékás, 2019) kiemeli, hogy megvalósítható a mortalitási index tapasztalati adatokhoz való kiigazítása, amelyet az a hatás indokol, hogy a Lee-Carter becslés egyenlő súllyal kezeli az egyes korcsoportokat és azok halálozási gyakoriságait, így a fiatalabb

korosztályokra jellemzően pontosabb becslést ad, mint az idősebbekre. Az eljárás a megfigyelt központi kitettségek és halálozási darabszámok felhasználásával ad kiigazított becslést a  $k$  vektorra, amit  $\widehat{k}^{adj}$ -val jelölhetünk, és eredményeképp olyan becslés jön létre, amivel időszakonként a megfigyelt halálozások száma megegyezik azok modellbeli várható értékével.

A Lee-Carter módszert amennyiben a jövőbeli mortalitás előrejelzésére kívánjuk használni, szükséges a  $k$  vektor jövőbeli értékeinek is az előrejelzése. Mindezt Lee és Carter egy eltolásos véletlen bolyongási ARIMA folyamat segítségével modellezzik a  $\widehat{k}^{adj}$  vektorból kiindulva:

$$\widehat{k}_t^{adj} = \widehat{k}_{t-1}^{adj} + s + \Phi_t, (t = 2, \dots, T), \quad (2.12)$$

ahol  $s$  a trendparaméter,  $\Phi_t$  pedig a normális eloszlású hibatag, 0 várható értékkel és  $\sigma_\phi^2$  varianciával, melyik függetlenek egymástól és  $\varepsilon_{x,t}$  hibatagoktól,  $\widehat{k}_1^{adj}$  értéke pedig rögzített a korábban adott becslés alapján. A paraméterekre az alábbi maximum likelihood becslés adható:

$$\begin{aligned} \hat{s} &= \frac{\widehat{k}_T^{adj} - \widehat{k}_1^{adj}}{T - 1}, \\ \widehat{\sigma_\phi^2} &= \frac{1}{T - 1} \sum_{t=2}^T \left( \widehat{k}_t^{adj} - \widehat{k}_{t-1}^{adj} - \hat{s} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Észrevehetjük, hogy az  $\hat{s}$  eltolási paraméter egy lineáris interpolációt ad  $\widehat{k}_1^{adj}$  és  $\widehat{k}_T^{adj}$  közt, és ennek a meghosszabbítása lesz majd a  $T$  utáni előrejelzés.

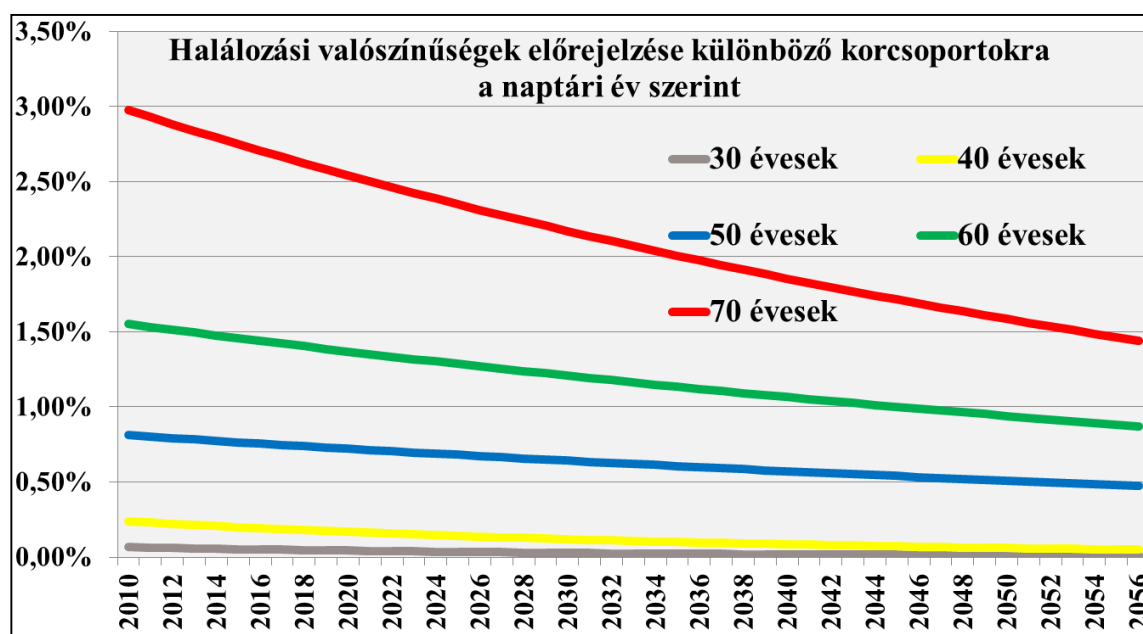
Előbbi formulák alapján elkészíthető a mortalitási index és a központi halandósági ráta előrejelzése a  $T$  utáni időpontokra:

$$\begin{aligned} \widehat{k}_{T+j}^{adj} &= \widehat{k}_T^{adj} + j \cdot \hat{s}, \\ \ln(\widehat{m}_{x,T+j}) &= \widehat{a}_x + \widehat{b}_x \cdot \widehat{k}_{T+j}^{adj} \quad (j = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (2.14)$$

amiből pedig végezetül a központi halandósági ráta és a halálozási valószínűség közti egyenlet alapján felírható a  $q_x$  mutatók naptári év szerinti előrejelzése is  $q_{x,T+j}$ . A  $\Phi_t$  hibatagok eloszlásának becsült paraméterei alapján Monte Carlo szimuláció készíthető, így biztosítási pénzáram modellben történő alkalmazáskor nem csak determinisztikus

cash flow modell építhető a mortalitás vonatkozásában, hanem sztochasztikus változat is lehetséges<sup>27</sup>.

A módszer ismertetése után a cash flow modellbeli alkalmazásra az alábbi esettanulmány kerül bemutatásra. Az esettanulmányt magam készítettem, a Lee-Carter eljárás leprogramozásával együtt, az eredmények a korábban már hivatkozott tanulmányban jelentek meg (Szepesváry, 2015). A tanulmány kapcsolódó része a Lee-Carter modell alkalmazásával azt vizsgálja, hogy milyen hatása van a Szolvencia II-beli legjobb becslés értékére a dinamikus mortalitási modell használatának. A vizsgálat ugyanazon a vegyes biztosítási konstrukción kerül elvégzésre, mint amin a hozamok modellezése történt az értekezés 2.4.1. szakaszában. A Lee-Carter modellel adódó becslés és előrejelzés a [www.mortality.org](http://www.mortality.org) honlapról (Human Mortality Database) összegyűjtött 1989 és 2009 közti magyar tényadatok alapján történt. Az előrejelzés eredményének egy keresztmetszeti diagramja a 14. ábrán látható, ami a koréves halálozási valószínűségekre előrejelzett javulást szemlélteti.



**14. ábra:** Halandósági előrejelzés a magyar adatokon a Lee-Carter módszer alapján.

Forrás: (Szepesváry, 2015)

A tanulmányban a Szolvencia II kalkulációs célokra létrehozott cash flow modell kerül kiszámításra kétféle jövőbeli mortalitási feltételezéssel: egyrészt a hagyományos statikus

<sup>27</sup> Utóbbi használható lehet például a Szolvencia II rezsimbeli szavatolótőke-szükséglet számításához, amennyiben a biztosító nem a sztenderd formula szerint, hanem (részleges) belső modell használatával kívánja meghatározni a 99,5%-os VAR értéket.

tábla szerinti, másrészt a Lee-Carter módszerrel adódó dinamikus (naptári évtől és életkortól függő) halandósági rátákkal. Mindkét esetben figyelembevételre kerül a biztosítási portfólió néphalandóságtól eltérő mortalitási tulajdonsága a korábban ismertetett, néphalandósági táblára vetített arányos technikai alkalmazásával. Egy szimulált mintaállomány (a 2. táblázatban bemutatott 1. mintaportfólió) legjobb becslésének vonatkozásában kerül összehasonlításra a két módszer eredménye, és az kerül kimutatásra, hogy az adott példában a dinamikus modellből adódó legjobb becslés 99,74%-a a statikus módszerből adódó párjának (Szepesváry, 2015).

Már a részletesen bemutatott Lee-Carter modell sem tekinthető egyszerű eljárásnak, széleskörű statisztikai és matematikai apparátus szükséges a megvalósításához, más mortalitási modellek pedig még bonyolultabbak is lehetnek. Felmerülhet kérdésként, hogy egyszerűsítési megfontolások alapján megteheti-e a biztosító, hogy statikus modellt alkalmazva nem veszi figyelembe a halandóság hosszútávú javulását, milyen esetekben mekkora hibát követ el ezzel? A fenti példában egy nem kifejezetten hosszú lefutású, 10,29 év átlagidejű, nagyobb részben megtakarítási jellegű vegyes biztosítás példáján adódott a 0,26% különbség a legjobb becslés vonatkozásában. Jelen értekezés nem készít érzékenységvizsgálatot más típusú termékek és eltérő portfólió átlagidők vonatkozásában, logikusan adódik azonban, hogy haláleseti kockázatnak jobban kitett termékek, vagy hosszabb időtáv esetén jóval nagyobb eltérést is jelenthet a halandóság esetleges javulásának figyelembe vétele a cash flow modellben. Illetve különösen fontos lehet ezen hatás modellezése az élettartam kockázatnak kitett termékek (pl. járadékkonstrukciók) esetén, ahol akár a tartalékszint jelentős alulbecslését jelentheti, ha a biztosító nem számszerűsíti a halandóság várható javulásának hatását. Előbbi megállapítások nem csak a Szolvencia II célokra használatos, hanem más cash flow modellezést igénylő biztosítási felhasználások esetén is ugyanígy érvényesek.

### **2.6.3. További lehetőségek a mortalitás modellezésére**

A Lee-Carter módszer számos esetben jól illeszkedő előrejelzést ad, de több kritika is érte megjelenése óta, amik lehetőséget adnak a modell kiterjesztésére és továbbfejlesztésére. A következőkben a teljesség igénye nélkül ezekbe ad rövid betekintést az értekezés. A szereplő módszerek támpontot adhatnak olyan esetben, ha a Lee-Carter modell illeszkedése nem megfelelő. (Kovács & Vékás, 2017) részletesen összefoglalják a Lee-

Carter modellt ért kritikákat és kiterjesztési lehetőségeket, valamint felhívják a figyelmet arra, hogy a halandóság bizonytalan jövőbeli javulásának lehetséges kezelési módszere lehet egy olyan típusú természetes fedezeti ügylet, hogy a biztosító összehangolja a mortalitási- és élettartam kockázatnak kitett portfólióját. A mortalitási modelleket nagyon részletesen tekinti át a magyar szakirodalomban (Vékás, 2019), aki a technikai felépítését és alkalmazását is bemutatja számos módszernek.

Lee és Miller részletesen értékeli a Lee-Carter módszer teljesítményét különböző országok adatain, és rámutatnak egyes gyengéire is (Lee & Miller, 2001). Kiemelik, hogy az eredeti modell által adott becslés sokszor nem illeszkedik jól az utolsó megfigyelt időszak értékeihez, emiatt az előrejelzés első éveiben is eltérések adódhatnak. Emiatt olyan korrekciót javasolnak, ami az utolsó megfigyelt időszak értékeihez igazítja az előrejelzést. Az említett szerzők elismerik azokat a kritikákat is, miszerint a  $b_x$  együtthatók változékonyak lehetnek az időben, például az idősebb korosztályok vonatkozásában a 20. század utolsó évtizedeiben gyorsult a halandóság javulása a fiatalabbakhoz viszonyítva.

Utóbbi hatást szokás rotációnak is nevezni, mely kezelhető az úgynevezett rotált Lee-Carter módszerrel, ahol a  $b_x$  értékek időben is változnak, és egy feltételezett végső görbéhez konvergálnak (Li, Lee, & Gerland, 2013).

Az eredeti Lee-Carter módszer nem kezeli az úgynevezett kohorszhatást. Kohorszoknak az azonos naptári évben született generációkat nevezik a szakirodalomban, amik adott esetben egyedi jellemzőkkel rendelkezhetnek a halandóság szempontjából. A korábbi jelölések mellett adott kohorszra  $t - x$  állandó. (Renshaw & Haberman, 2006) előbbi miatt a Lee-Carter modell alapegyenletét  $t - x$ -től függő magyarázó változóval bővítik (Renshaw-Haberman modell).

Széles körben használatos még a Cairns, Blake és Dowd által publikált eljárás (CBD-modell), ami egy kétfaktoros sztochasztikus modell segítségével jelzi előre a mortalitást (Cairns, Blake, & Dowd, 2006).

(Vékás, 2019) kiemeli, hogy a CBD modell az időskori halandóság előrejelzésére lehet különösen alkalmas, és azt is, hogy a CBD eljárás és a Renshaw-Haberman modell is a GAPC (általánosított korcsoport – időszak – kohorsz) modelles család egyenletének speciális esetei.

Kiemelendő Currie, Durban és Eilers tanulmánya, akik úgynevezett P-spline segítségével modellezik a halandóság változását (Currie, Durban, & Eilers, 2004) és Hunt és Blake General procedure névre keresztelt eljárása, amely képes minden szignifikáns demográfiai hatást figyelembe venni, ami befolyásolhatja a mortalitást (Hunt & Blake, 2014).

Az általános mortalitás előrejelző módszerekbe történő betekintés után néhány a magyar szakirodalom részét képező alkalmazás kerül bemutatása a halandóság előrejelzés témájában, szintén a teljesség igénye nélkül.

Baran – Gáll – Ispány – Pap szerzők a Lee-Carter módszer egy módosított változatának segítségével készítene előrejelzést a 2003-ig összegyűlt magyar adatok alapján (Baran, Gáll, Ispány, & Pap, 2007). Részben ennek a cikknek az eredményeire támaszkodik Arató – Bozsó – Elek – Zempléni tanulmánya, akik az Azbel modell felhasználásával adnak előrejelzési módszert a mortalitásra (Arató, Bozsó, Elek, & Zempléni, 2009). A cikk továbbá ismerteti a halandósági táblák hasonlóságát mérő mutatókat, az ezekhez kapcsolódó statisztikai próbákat, és a szimulációs alkalmazási lehetőségeket is.

(Májér & Kovács, 2011) a Lee-Carter módszert illesztik a magyar adatokra és ennek hatását vizsgálják a nyugdíjrendszer vonatkozásában. Megmutatják, hogy a nyugdíjjáradék egyszeri nettó díjában szignifikáns növekményt ad a Lee-Carter módszerrel adódó számítás a keresztmetszeti halandósági táblához viszonyítva. A tanulmány kétfelé megközelítésben is konfidencia-intervallumokat ad a 65 éves korban várható élettartamokra.

(Vékás, 2018) a rotáció jelenlétét vizsgálja a magyar adatokon és a Lee-Carter módszer rotációt figyelembe vevő változatával ad előrejelzést a halandóságra. A tanulmány alapján a férfiak esetén gyengén, a nők esetén erősen kimutatható a rotáció jelensége a magyar adatokból, és bizonyítást nyer, hogy hosszú távon súlyosan torzíthatja a halandóság előrejelzését a rotáció figyelmen kívül hagyása.

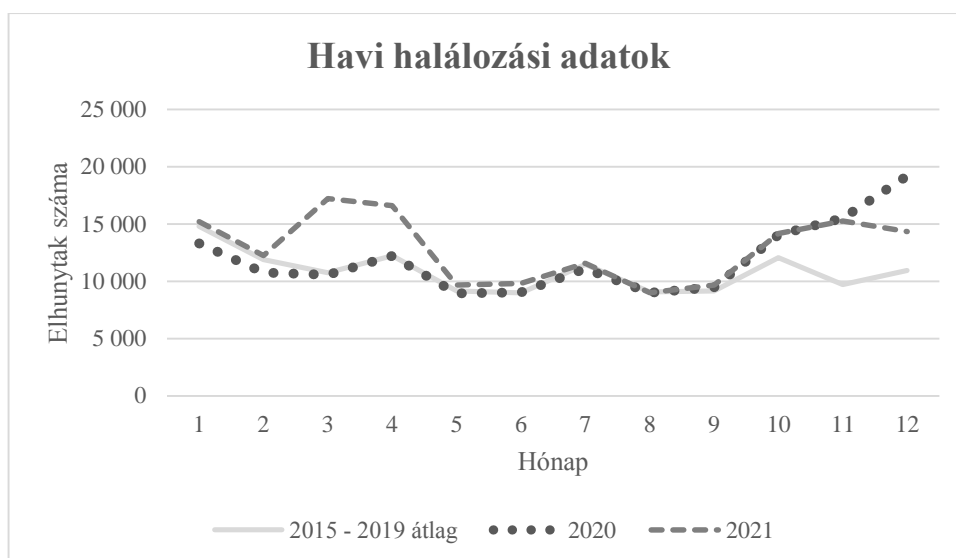
Kiemelendő még a hazai kötődésű eredményekből Arató – Dryden – Taylor tanulmánya, akik a Bayes-i megközelítés alapján, MCMC (Markov chain Monte Carlo) módszer felhasználásával készítettek 150 magyar régióra mortalitási becslést (Arató, Dryden, & Taylor, 2006).

#### 2.6.4. A COVID-19 világjárvány hatása

A 2019 decemberében Vuhan városából kiinduló SARS-CoV-2 vírus okozta COVID-19 betegség súlyos egészségügyi csapást mért az emberiségre. A járványt az Egészségügyi Világszervezet (WHO) 2020 márciusában világjárvánnyá nyilvánította. 2022.02.27-ig világszerte több, mint 430 millió megbetegedést igazoltak, közel 6 millió ember hunyt el a betegség következtében, Magyarországon pedig közel 1,8 millió megbetegedést és közel 44 ezer haláleset tartalmaz a hivatalos statisztika (<https://www.worldometers.info/coronavirus/> adatai alapján). Az oltási program 2020 decemberében kezdődött, a széleskörű vakcináció révén az egészségügyi krízis és a lezárások valamivel visszább szorultak, de az újabb és újabb mutánsok miatt a járvány és a járvánnyal összefüggő halálozás továbbra is a mindennapok része.

Az értekezésnek nem témája a világjárvány és hatásainak részletes ismertetése, de mivel a halandósági kockázatot és trendeket alapvetően módosította a COVID-19 hatása, ezért szükséges megemlíteni. Az értekezés a teljesség igénye nélkül néhány a járvány halálozási mutatóit elemző demográfiai – aktuáriusi tanulmány alapján mutatja be a főbb kapcsolódó aspektusokat.

A 15. ábra a KSH által publikált heti halálozási adatok alapján készült. Jól mutatja a magyarországi halálozások számának alakulását a pandémia előtti időszakra (a megelőző 5 év átlagaként), illetve a pandémia éveiben. A grafikonon kirajzolódik, hogy a második, harmadik és negyedik járványhullám alatt jelentősen több halálesetet regisztráltak Magyarországon, mint az azt megelőző évek azonos időszakaiban. 2020-ban közel 10%-kal, 2021-ben pedig közel 19%-kal volt magasabb a teljes halálozás, mint a 2015 – 2019 időszakon az éves átlag. Ez a nagyon egyszerű statisztika nem veszi figyelembe sem a népesség számának, sem kor- és nem szerinti összetételének változását, sem pedig a világjárvány előtt várt javuló halandóság hatását, de ezek nélkül is felhívja a figyelmet a járvány okozta jelentős halandósági többletre.



**15. ábra:** magyar halálozási adatok a járvány előtt és a járvány kezdete után  
 Forrás: saját szerkesztés KSH adatok ([https://www.ksh.hu/stadat\\_files/nep/hu/nep0065.html](https://www.ksh.hu/stadat_files/nep/hu/nep0065.html)) alapján

Hasonló, de jóval részletesebb bontású adatokat vizsgál (Csépai & Kovács, 2021) tanulmánya. Korcsoportok és nemek szerint is vizsgálják a 2021 tavaszi magyarországi többlethalandóságot. Ezen túl a világ számos más országának adatait is elemzik, milyen hatással vannak különböző egészségügyi és járványkezelési mutatók (pl. dohányzók aránya, idősek aránya, lezárásokat számszerűsítő szigorítási index) a COVID-19-cel kapcsolatos esetszámra és halálozásra.

(Tóth, 2021b) a Lee-Miller modell (lásd (Lee & Miller, 2001)) alapján jelzi előre a 2010 – 2019-es tényadatok alapján, hogy 2020-ban hogy alakult volna a mortalitás (az addig jellemző javuló tendenciát is figyelembe véve), és ehhez hasonlítja a COVID-19 járvány okozta többlethalandóságot is tartalmazó tény 2020-as halandóságot. 2020 március és decembere közt 14%-os többlethalandóságot mutat ki ezzel a módszerrel. Kiemeli a tanulmány, hogy ez a típusú megközelítés a közvetlen (a járvány egészségkárosító hatása miatt bekövetkező) és közvetett (pl. túlterhelt egészségügyi rendszer, elhalasztott vizsgálatok és kezelések, de akár az enyhébb influenza járványból adódó kevesebb haláleset is ilyen) hatásokat is tartalmazza. Tóth kiemeli, hogy a kapott 14%-os többlet nagyjából a másfélszerese volt az akkori hivatalos magyar COVID-19 statisztika szerinti halálozásnak, és ez jól illeszkedik az akkori EU-s adatokhoz, ahol 1 – 1,7 közt szóródó átlagosan 1,5-ös érték a jellemző (Tóth, 2021b).



Bár az értekezés írásának időpontjában írásos formában még nem jelent meg a kutatás, de a Magyar Közgazdasági Társaság Demográfiai Szakosztályának online szakmai rendezvényén bemutatásra került Tóth kutatásának folytatása, ami a 2021 szeptemberig összegyűlt adatok alapján készült a fent leírt módszertan alapján, bemutatva a kor, nem és régiós különbségeket is (Tóth, 2021a). Érdekes, hogy a hosszabb idősor alapján eliminálódott a fenti 1,5-szeres szorzó, és a többlethalandóság nagyjából a hivatalos COVID-19 halálozással volt egyenlő.

A nemzetközi szakirodalomban is számos a világjárvány és a mortalitás kapcsolatát elemző tanulmány született. (Islam et al., 2021) a Lee-Carter modellt használják különböző országok adataira, és azt mérik mennyivel csökkent a 2020-as többlethalálozással összefüggően a várható élettartam. (Doornik, Castle, & Hendry, 2021) tanulmánya pedig idősorok dekompozíciós technikájával vizsgálja különböző országok halandósági adatait.

Ahogy a fenti példák is mutatják, a járvány kezdete óta eltelt időszakban sok kutatás történt a mortalitással kapcsolatban bekövetkezett trendfordulással és az utóbbi két évben bekövetkezett többlethalandósággal kapcsolatban. Azonban az, hogy hogyan alakul a járvány és az azzal összefüggő halandósági kockázat a jövőben rengeteg bizonytalanságot tartalmaz, ebből adódóan a mortalitás előrejelzése is (velünk marad-e és milyen súlyos hullámokban a járvány, az utóbbi időszakban elmaradt vizsgálatok és a megterhelt egészségügy, illetve a post-covid szindróma emeli-e majd a halandóságot, stb.). Az ismertetett (általam ismert szakirodalom alapján bemutatott) mortalitási modellek még alapvetően a világjárvány időszaka előtt készültek, a trendfordulót tartalmazó adatokra új kérdéseket vet fel az alkalmazásuk. Ha stabilizálódik a járvánnyal és mortalitással kapcsolatos trend, az elméleti és gyakorlati szakemberek fontos feladata lesz a mortalitási modellek ehhez igazított (át)alakítása. Ahogy (Csépai & Kovács, 2021) is kiemelik fontos a halandósági adatok folyamatos monitorozása, és a tapasztalt hatások beépítése az alkalmazott mortalitási táblákba. A szerzők szerint „a folyamatos változások miatt lényegesen rugalmasabb kockázatelbírálásra és díjkalkulációs mechanizmusra lesz szükség a biztosításban” (Csépai & Kovács, 2021, pp. 41).

## 2.7. Törlések és ügyfélviselkedési opciók modellezése, összefüggéseik vizsgálata más gazdasági és nem gazdasági változókkal

A cash flow modellezés kapcsán nagy figyelmet érdemlő életbiztosítási változók még a törlések és más szerződéses opciók lehívásainak valószínűségei. Ide tartozik a biztosítás típusától függő törlés vagy visszavásárlás, de modellezési szempontból itt érdemes megemlíteni az egyéb szerződéses opciókat (pl. díjmentesítés, díjszüneteltetés, részvisszavásárlás, rendkívüli díj befizetése, indexálás elfogadása vagy elutasítása is), hiszen ezek is az ügyfél viselkedésének részei.

Az első alszakaszban a törlések modellezésének általános technikái kerülnek bemutatásra, a szakirodalom feldolgozásával. Ezt követően a második alszakaszban a témában tett saját kutatásaimat mutatom be. Ennek célja az alábbi hipotézisek vizsgálata:

- 3. Hipotézis:** Hagyományos folyamatos díjas életbiztosítások esetén releváns biztosítói adatokból nem kimutatható, hogy ha a referencia hozamok meghaladják a technikai kamatláb értékét, akkor megnő a törlési ráta.
- 4. Hipotézis:** Befektetési fókuszú egyszeri díjas életbiztosítási konstrukciók esetén viszont kimutatható releváns biztosítói adatokból a külső vagy belső kamatkörnyezettől való függés. Ha más befektetési formák magasabb hozamot kínálnak, vagy az adott szerződésen belül csökken az elérhető kamat szintje, akkor az adott szerződéscsoport tulajdonságaitól is függően megnőhetnek a törlési arányok.

A törlések hozamokkal és inflációval való összefüggésén túl a COVID-19 lezárásokkal való kapcsolatát is bemutatom hasonló modellkeretben.

### 2.7.1. A törlések modellezésének lehetőségei

A magyar szakirodalomban a törlések matematikai modelljét részletesen leírja Hanák tanulmánya (Hanák, 2001). A törléshányad, valamint a belépési és kilépési intenzitás definiálásán és matematikai tulajdonságának levezetésén túl a tanulmány felhívja a figyelmet annak fontosságára, hogy a biztosítási esemény miatt bekövetkező (pl. halálesi) megszűnéseket célszerű leválasztani a tényleges törlés miatti megszűnésektől

(díj nem fizetés miatti megszűnés és visszavásárlás), de például a díjmentesítési esemény értelmezhető a törlés részeként.

A törlések vizsgálata és azok cash flow modellbe építése kapcsán (Janecek, 2012) az alkalmazás szempontjából az alábbi fontos megállapításokat teszi. Érdekes olyan elemzést készíteni a törlések vonatkozásában a vállalat legfrissebb és legmegbízhatóbb adatai alapján, ami legalább az alábbi tényezőket figyelembe veszi:

- Szerződés kezdetének naptári éve (eltérő értékesítési tulajdonságok miatt lehet meghatározó),
- Biztosítási időszak (év / hónap),
- Termék típusa (egyszeri és rendszeres díjas termékeknel, a tartamtól és egyéb termékjellemzőktől is függhet a törlés).

A törlések modellezéséhez kapcsolódó módszertani eszközök közül fontos a túlélési (survival) modellek megemlítése. Az alábbi rövid bemutatáson túl részletesebben lásd például (Vékás, 2011) vagy (Szepesváry, 2016) írásában.

Jelölje  $T$  azt a valószínűségi változót, ami azt méri, hogy hány hónap telik el a szerződés megkötésétől az esetleges törléséig. A  $G(t) = P(T \geq t)$  képlettel definiált függvényt nevezik túlélési függvénynek, ami az egyes  $t$  időpontokhoz azt a valószínűséget adja meg, hogy legalább  $t$  hónapig életben volt a szerződés. A túlélési függvény (és a törlési valószínűségek becslése) kapcsán fontos az úgynevezett cenzorált adatok kezelése. Ezek olyan megfigyelések, amikre a megfigyelt időszak végéig nem következett be a kérdéses esemény (esetünkben a törlés, tehát még élő maradt a szerződés). Ezek a megfigyelések is fontos információval szolgálnak a törlés valószínűségéről (hiszen azt biztosan tudjuk, hogy az eltelt idő alatt nem következett be a törlés). A két legismertebb túlélési modell a Kaplan-Meier becslés és a Cox-regresszió. Előbbi magyarázó változók nélkül, utóbbi magyarázó változók bevonásával becsli a túlélésfüggvényt.

A Kaplan-Meier becslés az alábbiak szerint végezhető el a mintából:

$$P(T \geq t) = \prod_{\tau < t} p_{\tau} = \prod_{\tau < t} (1 - q_{\tau}) = \prod_{\tau < t} (1 - P(T = \tau | T \geq \tau)), \quad (2.15)$$

ahol a  $\tau$  helyére a mintából megfigyelt  $t$ -nél kisebb (nem cenzorált) megszűnési időpontokat kell helyettesíteni, a  $P(T = \tau | T \geq \tau)$  valószínűségek pedig a  $\tau$ -ban kilépő megfigyelések ( $\tau$ -ban törölt szerződések) és a vizsgálatban legalább  $\tau$  időt eltöltő

megfigyelések (legalább ennyi időt megélő szerződések, tartalmazva a cenzolált megfigyeléseket is) arányaként számolható.

A Cox regresszió pedig először  $F(t) = P(T < t)$  képlettel a  $T$  eloszlásfüggvényét, majd  $f(t) = F'(t)$  képlettel  $T$  sűrűségfüggvényét, végül  $h(t) = \frac{f(t)}{G(t)} (G(t) \neq 0)$  képlettel az úgynevezett kockázati rátát definiálja. A Cox-regressziós modell által becsült egyenlet:

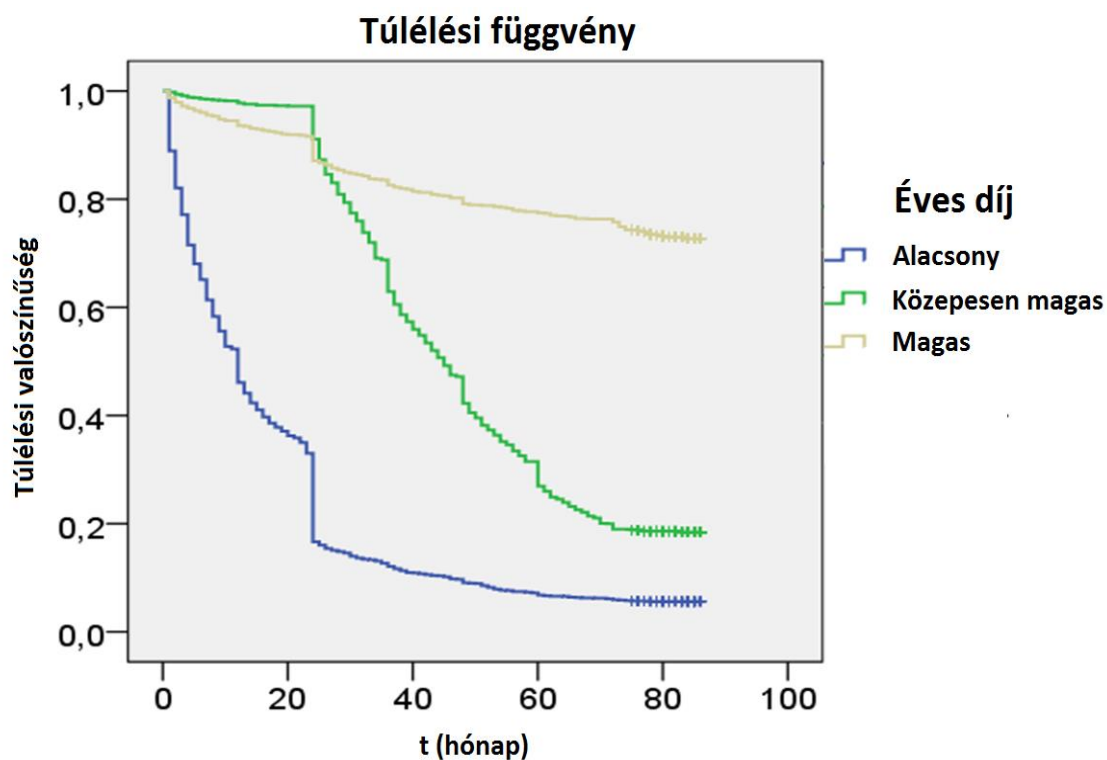
$$h(t) = h_0(t) \cdot e^{b_1x_1+b_2x_2+\dots+b_px_p}, \quad (2.16)$$

ahol  $h_0(t)$  az úgynevezett alap kockázati ráta,  $x_i$ -k a magyarázó változók,  $b_i$ -k az együtthatók. Az együtthatók és az alap kockázati ráta kétlépcsős maximum likelihood eljárással becsülhető (Vékás, 2011).

A becsült túlélési függvény beépíthető a cash flow modellbe a szerződések törlési valószínűségeire vonatkozó feltételezések kialakításakor.

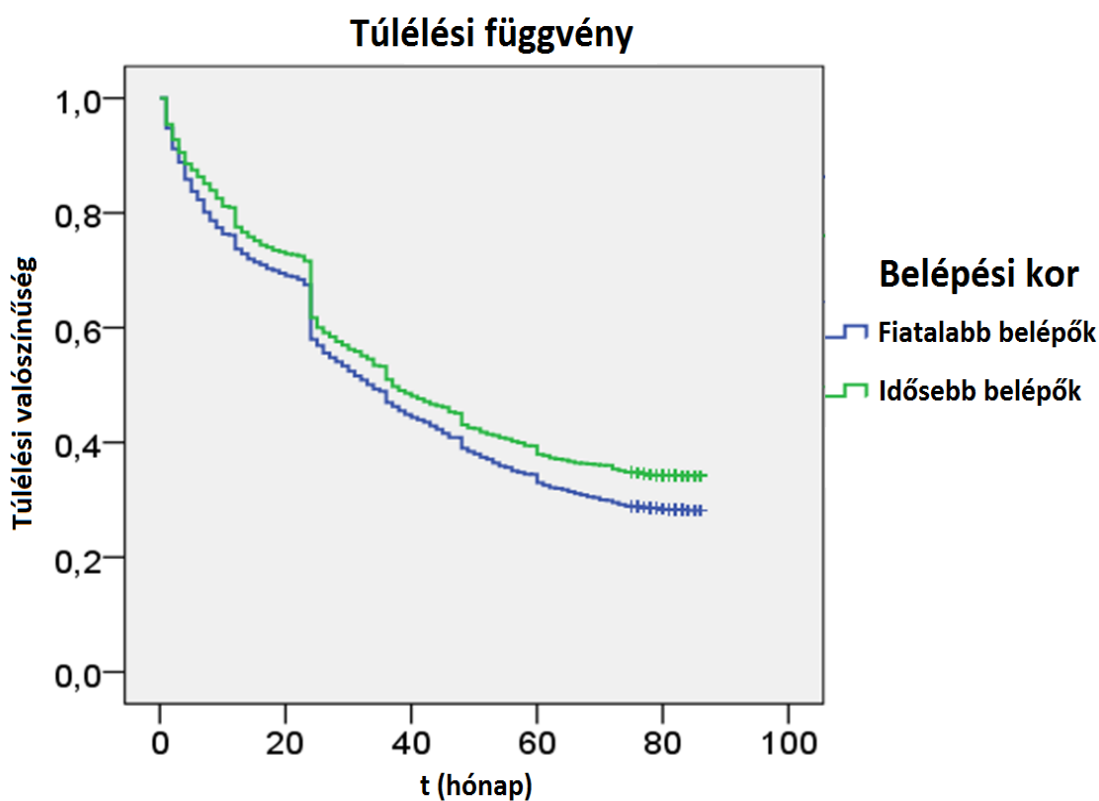
(Barabás, Csörgő, Horváth, & Yandell, 1986) bootstrap módszerrel készítenek konfidencia intervallumot az élettartam függvény eloszlására. Hasonló technika elképzelhető a biztosítási szerződések élettartamának modellezése kapcsán is.

(Szepesváry, 2015) tanulmányban túlélési modelleket alkalmaztam magam is, empirikus biztosítói adatok alapján igazoltam egy vegyes biztosítási portfólió példáján (a korábban is idézett esettanulmány részeként), hogy a biztosítás díja és a szerződő belépési kora alapján szignifikáns különbségek mutathatók ki a törlési valószínűségekből. A 16. és 17. ábrák az elemzett biztosítási részportfólió esetén mutatják a különböző díj- és belépési életkor szerinti csoportokra a becsült túlélésfüggvényeket (a Kaplan-Meier modellel előállítva). Jól látszik, hogy mindkét változó mentén szignifikáns eltérések mutatkoznak a becslésben, ezért alkalmasak, hogy egy Cox-regressziós modell magyarázó változói legyenek. A tanulmányban elvégzésre kerül a Cox-regressziós becslés, és az implementálásra kerül a biztosítási termék cash flow modelljébe.



**16. ábra:** Szerződés megmaradási valószínűségek t hónap elteltével az éves díj nagysága szerint.

Forrás: (Szepesváry, 2015)



**17. ábra:** Szerződés megmaradási valószínűségek belépési kor szerint.

Forrás: (Szepesváry, 2015)

Előbbihez hasonló vagy bővebb elemzés alapján a biztosító elkészítheti saját statisztikai alapján a törléseket befolyásoló belső tényezők figyelembevételével a jövőbeli megszűnések várható modelljét, ami a cash flow modellbe is beépíthető. A kapott statisztikák alapján a végső feltételezések beállítása sok esetben szubjektív megítélésen vagy szakértői becslésen kell alapuljon. Különösen igaz ez azokra a biztosítási időszakokra (pl. egy fiatal biztosító esetén), amikre még nincs megfelelő tapasztalata a vállalatnak (Janecek, 2012).

A fentebb említett belső tényezőkön túl külső hatások is befolyással lehetnek a törlésekre és annak jövőbeli alakulására. Ehhez kapcsolódó fogalom a szakirodalomban dinamikus ügyfélviselkedés néven ismert jelenség, lásd például (Barsotti, Milhaud, & Salhi, 2016). Ez annak a hatásnak a modellezését jelenti, hogy az ügyfelek által igénybe vehető opciók lehívási valószínűsége a külső (pl. gazdasági) környezet hatására dinamikusan változhat. A visszavásárlásokra vonatkozóan Campbell és társai két fő hipotézist emelnek ki részletes tanulmányukban (Campbell et al., 2014):

- A kamatláb hipotézis szerint a törlési arányok negatívan kapcsolódnak a belső megtérüléshez (például a technikai kamat mértékéhez) és pozitívan a külső (például piaci) kamatlábakhoz. Azaz ha magas a hozamgarancia, kevésbé törölnek az ügyfelek, viszont ha más befektetési formák nagyobb hozamokat kínálnak, akkor többen törlik a szerződésüket.
- A „véstartalék” hipotézis szerint a visszavásárlások a nehéz pénzügyi helyzet hatására következnek be legtöbbször.

A következő alfejezetben szereplő esettanulmány a kamatláb hipotézis és véstartalék hipotézisek magyarországi teljesülését is vizsgálja többek közt idősorelemzési technikákat is felhasználva.

Valdez módszertani kézikönyve egy alap törlési ráta és egy dinamikus faktor szorzataként javasolja modellezni a dinamikus visszavásárlási szokásokat (Valdez, 2011).

Amennyiben kimutatható a dinamikus ügyfélviselkedés jelensége annak modellezése és a pénzáram előrejelzésbe építése komoly kihívást jelentő feladat. A nehézséget az jelenti, hogy egy időben is változó folyamattól (például hozamok) is függ a törlés.

A kapcsolódó modellépítés történhet idősorlemzési módszerekkel, a törlések és az egyéb külső változók idősorainak kapcsolati elemzésével (lásd például a következő alfejezetben lévő esettanulmány). A Cox-regresszióknak is létezik továbbá egy időtől függő változókat is tartalmazó kiegészítése (lásd például (Fisher & Lin, 1999)), ami alkalmas eszköz a dinamikus ügyfélviselkedéshez kapcsolódó változók beépítéséhez. A kopulákról és Sklar tételéről már esett szó röviden a 2.2.2 szakaszban. A dinamikus ügyfélviselkedés változói kapcsán is felmerülhet a kopulával történő modellezés. (Simard & Rémillard, 2015) többváltozós idősorok erőjelzését mutatja be, ahol a változók közti kapcsolatot kopula írja le.

Kopulákkal és az időtől függő változókat tartalmazó Cox-regresszióval az értekezés nem foglalkozik részletesebben.

### **2.7.2. Esettanulmány – életbiztosítások törlési rátáinak elemzése külső körülményekkel összefüggésben**

Az alfejezet célja a 2.7 szakasz elején vázolt hipotézisek igazolása. A hipotézisek vizsgálata saját kutatáson alapul, amelyből tanulmány is készült (Szepesváry, 2022) Az értekezés szövegezésének lezárásakor a cikk benyújtott, elbírálásra váró státuszban volt, sikeres befogadás esetén a Hitelintézeti szemle folyóiratban jelenik meg 2022 júniusában. A továbbiakban ezen tanulmány (Szepesváry, 2022) alapján mutatom be a törlési vizsgálatokat és kutatási eredményeket.

A tanulmány megtakarítási elemet is tartalmazó klasszikus egyszeri és folyamatos díjas életbiztosításokat vizsgál. Különböző termékek törlési rátáinak idősora kerül elemzésre külső, gazdasági és nem-gazdasági idősorokkal, eseményekkel összefüggésben: a hozam- és inflációs környezet változásai, illetve a COVID-19-hez kapcsolódó lezárások törlésekre vonatkozó hatásai a vizsgálatok főbb pontjai. A külső kamatkörnyezet az Államadósság Kezelő Központ (ÁKK) 1, 5 és 10 éves referenciahozamainak<sup>28</sup> idősorával, az infláció az MNB által publikált szezonálisan igazított maginflációs mutatóval<sup>29</sup>, a COVID-19-hez kapcsolódó lezárásokból adódó hatás pedig az úgynevezett szigorúsági

---

<sup>28</sup> Lásd: <https://www.akk.hu/statisztika/hozamok-indexek-forgalmi-adatok/referenciahozamok> (Államadósság Kezelő Központ Zrt. referencia hozamai, 2021)

<sup>29</sup> Lásd <https://www.mnb.hu/statisztika/statisztikai-adatok-informaciok/adatok-idosorok/vi-arak> (MNB inflációs mutatói, 2021)

index mutatóval (Magyarországra vonatkozó adatok) kerül mérésre<sup>30</sup>. A törlési ráta az adott hónapban törölt (visszavásárolt vagy megszüntetett díjfizetésű) szerződésvolumen adott hónapban átlagosan életben lévő állomány arányában vett hányadosaként került definiálásra (darab- és díjarányos verziók is kiszámításra, megjelenítésre kerültek). Fontos feltett kérdése a tanulmánynak, hogy a 2021 második felében növekedésnek indult hozam- és inflációs környezet kimutatható hatást gyakorolt-e a törlési rátákra.

Az elemzés empirikus biztosítói adatok és más nyilvános (például MNB, ÁKK) adatforrások alapján készült. A biztosítói adatok, idősorok üzleti titokra vonatkozó megfontolások miatt bizonyos torzításokkal, átskálázásokkal jelennek meg a tanulmányban bemutatott grafikonokon és statisztikákon. Ez azonban az értelmezéseken, következtetéseken nem változtat.

A következő terméktípusok kerültek elemzésre:

- Folyamatos díjfizetésű vegyes életbiztosítás 2,25%-os, illetve 1,6%-os technikai kamattal és a technikai kamatot meghaladó hozam esetén legalább 80%-os többlethozam visszatérítéssel. Visszavásárlás esetén az aktuális díjtartalék bizonyos része képezi a maradékjog alapját.
- Folyamatos díjfizetésű megtakarítási (díjvisszatérítéses elérési) életbiztosítás 2,25%-os, illetve 1,6%-os technikai kamattal és a technikai kamatot meghaladó hozam esetén legalább 80%-os többlethozam visszatérítéssel. Visszavásárlás esetén az aktuális díjtartalék bizonyos része képezi a maradékjog alapját.
- Folyamatos díjas nyugdíjbiztosítás (2%-os illetve 1,6%-os technikai kamattal és legalább 80%-os többlethozam visszatérítéssel). A díjvisszatérítéses elérési életbiztosításhoz hasonló konstrukció, annyi különbséggel, hogy a hatályos jogszabályok alapján a befizetett díjak után 20%-os állami adójóváírás vehető igénybe, amit viszont visszavásárlás esetén jelentős büntetés terhel.
- „Egyszeri díjas hagyományos megtakarítási életbiztosítás, előre rögzített rövid távú kamatperiódusokkal. A biztosító negyedéves gyakorisággal, minden esetben előre hirdeti meg a rövid távú kamatperiódusokat az egyes szerződésekre kiígért hozamok formájában. Tehát legkésőbb az adott hónap végéig minden ügyfél tájékozódhat, hogy a következő hónapra milyen hozamot kínál számára a biztosító, és ennek függvényében dönthet megtakarítása megtartásáról vagy

---

<sup>30</sup> Lásd: <https://ourworldindata.org/grapher/covid-stringency-index?tab=chart&region=Europe&country=~HUN> (COVID-19 szigorúsági index, 2021)



esetleges visszavásárlásáról. A fentiekből következően az ügyfelek 1 – 3 hónapra láthatják előre a várható hozamukat. Visszavásárlás esetén kis mértékű büntetés terheli az ügyfeleket (de az sem minden esetben), így jelentős szankció nélkül fektetheti más konstrukcióba a megtakarítását a szerződő. A megtakarítási elemen túl baleseti eredetű biztosítási szolgáltatásokat tartalmaz a szerződés.” (Szepesváry, 2022)

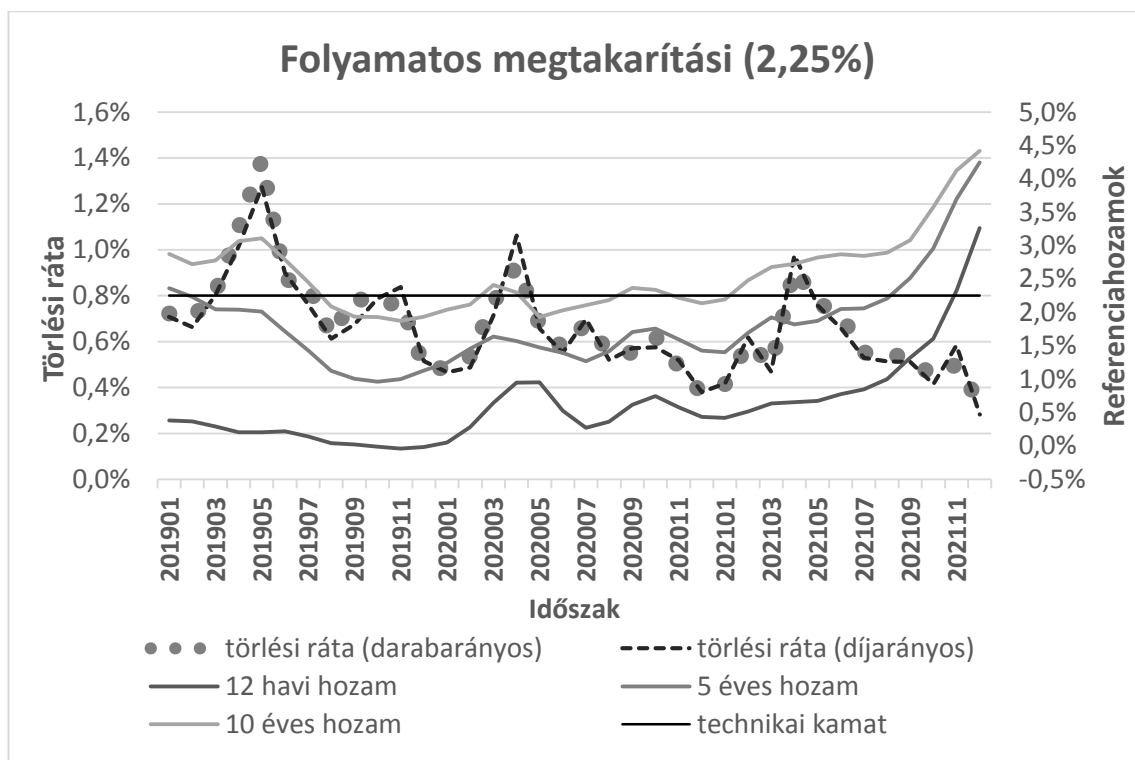
#### **2.7.2.1. Technikai kamatos folyamatos díjas termékek törlése és a külső kamatkörnyezet kapcsolata**

Jelen alszakasz a fentebb bemutatott folyamatos díjas konstrukciók törlési rátáinak a külső kamatkörnyezettel való kapcsolatát mutatja be. Terjedelmi okokból sem a hivatkozott tanulmányban, sem az értekezésben nem kerül minden az elemzésben elkészült ábra és táblázat bemutatásra csak néhány releváns példa (az elemzett termékek és technikai kamatlábak közül), amik általánosságban jellemzik a tapasztalt viszonyokat. Mivel éppen a 3. hipotézis vizsgálatát tartalmazza, ezért a saját tanulmányt (Szepesváry, 2022) idézve mutatom be a vizsgálatokat.

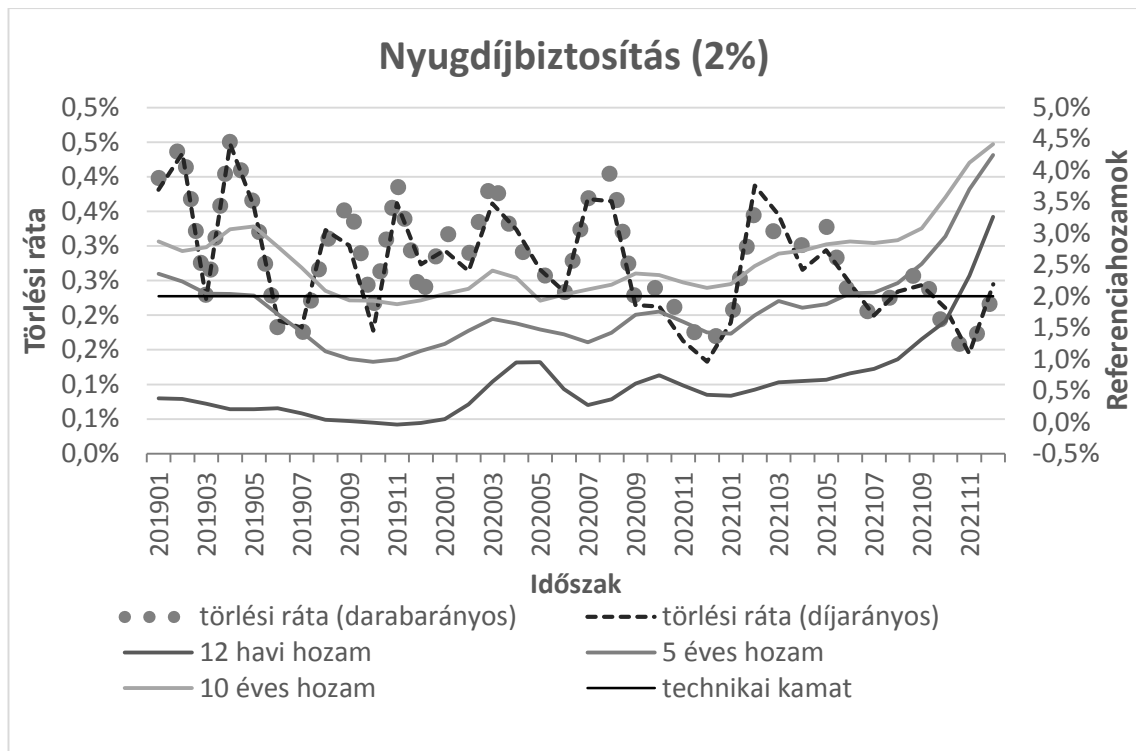
„A 18. és 19. ábrán láthatók grafikusán megjelenítve az eredmények. Egy grafikonon kerültek ábrázolásra a 2019 – 2021 időszakra havi bontásban a darab- és díjarányos törlési ráták (bal oldali függőleges tengelyen látható a skálája), illetve az ÁKK referencia hozamok és a termékre jellemző technikai kamat szintje (jobb oldali függőleges tengelyen látható a skálája). Az ábra fejlécében a konstrukció neve mellett megjelenő százalékos érték a szerződéscsoport technikai kamatlábát mutatja.” (Szepesváry, 2022)

„Az alábbi következtetések vonhatók le a grafikonok alapján (18. és 19. ábra). A referenciahozamok 2021 második félévében bekövetkező növekedése nem növelte meg a vizsgált termékek törlési rátáit, még akkor sem volt tapasztalható növekedés, amikor az elérhető kamat szintje átlépte a technikai kamat mértékét. Természetesen ebben akár annak is szerepe lehet, hogy a technikai kamat feletti többlethozamok döntő része is visszajár az ügyfeleknek, illetve a szerződés hosszú távú garanciát biztosít. De sokkal inkább az valószínűsíthető, hogy ezen szerződéseket azért kötik az ügyfelek, mert hosszú távú életbiztosítási vagy nyugdíjbiztosítási termékre van szükségük, amiben megtakarításuk fedezetét folyamatos díjfizetések révén teremtik meg, kihasználva közben az adott biztosítási konstrukció előnyeit, és ezért az állampapír referencia hozamok nem

jelentenek konkurenciát a terméknek (azaz nem módosítják a törlési valószínűséget). Felmerülhet még további lehetséges magyarázatként az is, hogy nem elég fejlett Magyarországon a pénzügyi kultúra és a termékek ismerete, és az ügyfelek jó részének nincs kellő információja a komplex, technikai kamat és többlethozam visszajuttatás nyújtotta hozamszintről és nem tudják azt összehasonlítani egyéb befektetési lehetőségekkel. Bár a magyarázat tekintetében nem lehet bizonyítékot felállítani egyik hipotézisre sem, de ez nem változtat azon az eredményen, hogy nem rajzolódik ki kapcsolat a törlésráta és a referencia hozamok közt.” (Szepesváry, 2022)



**18. ábra:** Folyamatos díjas megtakarítási biztosítás törlése a hozamok függvényében  
Forrás: (Szepesváry, 2022)



**19. ábra:** Nyugdíjbiztosítás törlése a hozamok függvényében  
Forrás: (Szepesváry, 2022)

A grafikonok alapján levont következtetések idősorelemzési módszerekkel is igazolásra kerülnek. Terjedelmi okokból sem a hivatkozott cikk, sem az értekezés nem ad részletes idősorelemzési áttekintést, csak a legfontosabb használt modellek kerülnek rövid ismertetésre (Kirchgässner, Wolters, & Hassler, 2013) könyvével összhangban. A Granger okság segítségével kerül igazolásra, hogy van-e magyarázó ereje a referencia hozamoknak a törlés rátákra.

„Vektorautoregresszív (VAR) modelleket illesztünk a törlési rátákra és a referencia hozamok idősoraira. Ennek lényege, hogy minden változót, mint endogén változót (eredményváltozót) tekintünk, és egy olyan egyenletrendszerrel magyarázzuk, ahol a magyarázó változók az endogén változók késleltetettjei. Például két endogén változó,  $X_t$  és  $Y_t$  idősorok esetén  $k$  maximális késleltetésszám esetén az (2.17) egyenlet írja le a VAR modellt ( $\alpha, \beta$  együtthatók konstansok,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  a hibatag változók, feltételezés szerint fehér zajok,  $t$  pedig az idő paraméter).

$$\begin{aligned} X_t &= \alpha_0 + \alpha_{1,1}X_{t-1} + \dots + \alpha_{1,k}X_{t-k} + \alpha_{2,1}Y_{t-1} + \dots + \alpha_{2,k}Y_{t-k} + \varepsilon_{1,t} \\ Y_t &= \beta_0 + \beta_{1,1}X_{t-1} + \dots + \beta_{1,k}X_{t-k} + \beta_{2,1}Y_{t-1} + \dots + \beta_{2,k}Y_{t-k} + \varepsilon_{2,t} \end{aligned} \quad (2.17)$$

A Granger okság definíciója szerint  $Y_t$  Granger oka az  $X_t$ -nek, ha az  $X_t$ -re felírt egyenletben  $Y_t$  idősor késleltetett értékei szignifikáns hatással vannak  $X_t$  értékére (nem nullák az együtthatói), tehát  $Y_t$  múltja tartalmaz magyarázó erőt  $X_t$  jelenjére. A definíció nem zárja ki azt sem, hogy egy változó saját magára vett Granger okságát vizsgáljuk. Ez esetben egy változós autoregresszív (AR) modell is elégséges, ami a VAR modell egy dimenziós megfelelője. A példáinkban azt fogjuk vizsgálni, hogy a törlési rátának Granger oka-e valamely változó, tehát valamely folyamat múltja befolyásolja-e a törlési ráta adott időszaki értékét, vagy kizárható-e az összefüggés.

A Granger okság vizsgálatához szükséges, hogy  $X_t$  és  $Y_t$  idősorok stacionáriusak legyenek (várható értékük és varianciájuk konstans legyen, autokovariancia függvényük pedig csak a megfigyelések távolságától függjön, időben legyen állandó). A stacionaritás vizsgálatát a Gretl szoftverben a kibővített Dickey-Fuller teszt segítségével végeztük, a teszt nullhipotézise, hogy az idősor nem stacionárius. A mintáinkban vizsgált idősorok esetén a teszt p-értéke meghaladta a szokásos szignifikancia szinteket (tehát a nem stacionaritás hipotézise elfogadható volt). Ilyen esetben az idősor differenciálása (különbségek képzése) bevett gyakorlat, tehát az adott idősor változásainak elemzése. A referencia hozamok esetén még az első differencia sem volt elég, hogy stacionáriusnak tudjuk tekinteni az idősorokat, ezért egységesen (tehát minden változóra) a második differenciákat képeztük meg, és ezeket vontuk be az elemzésbe. A vizsgált változók esetén így 0 – 3% közti p-értékeket kaptunk, amit már megfelelőnek ítéltünk a folytatáshoz. A második differencia hátránya a nehezebb értelmezhetőség (a változás változását mutatja), ezért az együtthatókat nem értelmeztük a később kapott egyenletekben.

A stacionaritás vizsgálata után történt meg a VAR egyenletek becslése. Mivel rövidek az idősoraink ezért egyszerre mindig csak két változót (egy törlési és egy hozamváltozót) vontunk be a becslésbe. Az optimális késleltetésszámot az információs kritériumok értékei alapján választottuk meg (Bayes-i információs kritérium, Hannan-Quinn és az Akaike kritériumok). Jellemzően 2 – 6 közti maximális késleltetést alkalmaztunk a felírt modellekben a mutatók alapján.

A Gretl a hagyományos legkisebb négyzetek módszerével becsli meg az együtthatókat. A változók becsült együtthatóihoz t-teszt készíthető, amivel az adott változó szignifikanciája tesztelhető. A teszt nullhipotézise, hogy az együttható valódi értéke 0 (és csak a mintabeli véletlen szóródás miatt nem 0 a becsült érték), tehát nincs szignifikáns

magyarázó ereje a változónak. Hasonló logikával képződik az F-próba, amivel tesztelhető a nullhipotézis, hogy például az  $Y_t$  összes késleltetett értékének nulla-e az együtthatója  $X_t$  becslésében. Ha a teszt nullhipotézise elfogadható, az pont azt jelenti, hogy  $Y_t$  nem Granger oka  $X_t$ -nek.

A VAR modell elkészültével tesztelésre került még a hibatag változók fehér zaj mivolta.

A három folyamatos díjas biztosítástípus darab- és díjarányos törlési rátáira, valamint a referencia hozamok idősoraira páronként elvégeztük a fent bemutatott folyamat szerint a Granger oksági tesztet. Szinte minden esetben azt az eredményt kaptuk, hogy minden szokásos szignifikancia szint esetén elfogadható volt az F-próba hipotézise, tehát hogy a referencia hozam nem Granger oka a törlésnek. Érdekes módon egy-egy esetben (például mikor a folyamatos díjas megtakarítási biztosítás díjarányos törlését a 10 éves referencia hozammal vizsgáltuk egy VAR modellben) az F-próba hipotézisét nem lehetett elfogadni, csak legfeljebb 1%-os szignifikancia szint mellett. Az első 30 hónapban valóban kivehető valamilyen együtt mozgás a késleltetett 10 éves referencia hozamok és a törlési ráta közt (18. ábra), illetve további közgazdasági érv lehet emellett, hogy főleg akkor volt magasabb a törlés, amikor a referencia hozam a technikai kamat szintje fölött helyezkedett el. Azonban teljesen ellentmond ennek a hipotézisnek, hogy az utolsó 6 hónapban, amikor a legjelentősebb hozamnövekedés következett be, egyáltalán nem nőttek a törlési ráták. Megismételtük az elemzést csak a 2020-2021-es év adataira (hogy nagyobb súlyt kapjon az utolsó fél év megfigyelése), ekkor már minden szokásos szignifikancia szinten el lehetett fogadni az F-próba nullhipotézisét.

Megemlítendő még, hogy a törlési rátán (pontosabban mondva annak második differenciáján) egy tiszta AR hatás sok esetben megfigyelhető az illesztett egyenletek alapján, mind a t-, mind az F-próbák alapján szignifikáns a kapcsolat az idősor múltjával.

Összességében sikerült statisztikai módszerekkel is meggyőződnünk róla, hogy a vizsgált időszakban az elemzett folyamatos díjas konstrukciók esetén a referencia hozamnak nem volt szignifikáns hatása a törlési rátákra. Azonban még elég rövid idő telt csak el a hozamkörnyezet jelentős megváltozása óta, célszerű lehet ezt a vizsgálatot később (pl. egy év múlva, ha addig is hasonló magas hozamszint lesz a meghatározó) is elvégezni. Adott esetben elképzelhető, hogy akár termékek szerint is megváltoznak majd a viszonyok, és azon termékeknél, ahol nincs magasabb biztosítási fedezet, vagy nem élvezhetik az ügyfelek a nyugdíjbiztosítás adóvisszatérítési előnyét, ott alakul ki egy

növekmény a törlésekben. De egyelőre ilyen hatás nem körvonalazódik az adatokból.” (Szepesváry, 2022)

A bemutatott vizsgálatok bizonyítékot szolgáltatnak a 3. hipotézisre: hagyományos folyamatos díjas életbiztosítások esetén releváns biztosítói adatokból nem kimutatható, hogy ha a referencia hozamok meghaladják a technikai kamatláb értékét, akkor megnő a törlési ráta.

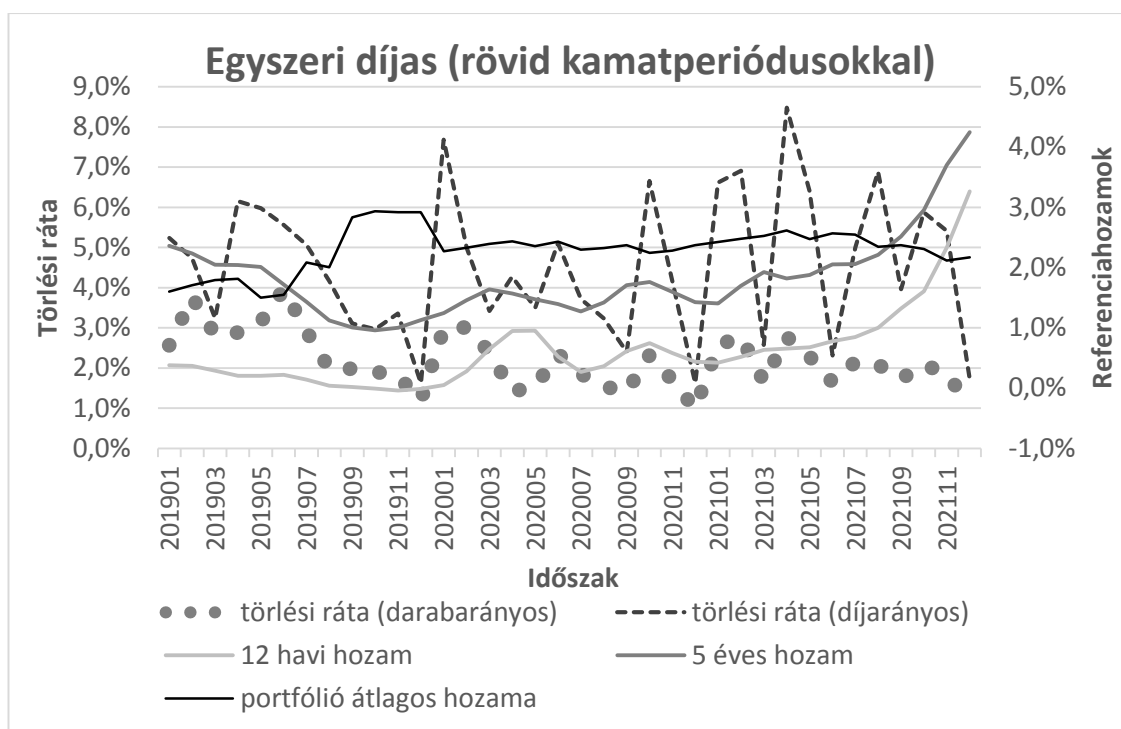
#### **2.7.2.2. Egyszeri díjas termékkonstrukció törlése és a külső-, valamint a belső kamatkörnyezet kapcsolata**

Mivel éppen a 4. hipotézis vizsgálatát tartalmazza, ezért a saját tanulmányt (Szepesváry, 2022) idézve mutatom be a vizsgálatokat.

„Először a folyamatos díjasokéhoz hasonló grafikon segítségével vizsgáljuk az egyszeri díjas konstrukció törlési rátáit (20. ábra). Itt a technikai kamatláb helyett a rövid távú kamatperiódusok szerinti átlagos kamatszintet jelenítettük meg az ábrán. Mivel ezt a terméktípust rövidebb tartási idő jellemzi, mint a folyamatos díjasokat, ezért itt csak a 12 hónapos és az 5 éves referencia hozamot szerepeltettük.

Az ábra alapján nem rajzolódik ki kapcsolat a referencia hozamok és törlési ráták közt. 2021 utolsó hónapjaiban nőtt a referencia hozam a portfólió átlagos hozama fölé. Ez a hatás azonban egyáltalán nem emelte meg a portfólió törlését. Az ez előtti időszakban sem rajzolódik ki kapcsolat a törlés és a referencia hozam közt, ami talán azzal is magyarázható, hogy a portfólió átlagos hozama magasabb volt ebben az időszakban, mint a referencia hozam.

Szembevetendő az ábrán, hogy a díjarányos törlés lényegesen magasabb és sokkal volatilisabb, mint a darabarányos. Ebből arra lehet következtetni, hogy az ügyfélportfólió nem homogén, a befektetett díj nagysága kihat a törlési rátára, a magasabb megtakarítási összeggel rendelkező ügyfelek nagyobb valószínűséggel hívják le a törlési opciót. Hogy a volatilis viselkedés okait jobban meg tudjuk érteni, részletesebb, az egyes ügyfelek szintjére lebontott adatokkal vizsgáljuk tovább a hozamszint törlésre mért hatását.” (Szepesváry, 2022)



**20. ábra:** Egyszeri díjas biztosítás törlése a hozamok függvényében  
Forrás: (Szepesváry, 2022)

„Ezúttal keresztmetszeti adatokkal kezdjük az elemzést. A 3 éves időtávban bekövetkezett összes törlési eseményt vizsgáljuk meg szerződésenként. Logikus lehet, hogy ennél a konstrukciónál a belső kamatszint és annak változásai is szerepet játszhatnak az ügyfelek döntéseiben (a folyamatos díjas esetekhez képest itt nagyobb lehet a belső kamatszint ingadozása, mint a fix technikai kamatos termékeknél volt). Ezért az egyes károkhoz<sup>31</sup> hozzárendelésre került, hogy az adott ügyfél számára meghirdetett rövid távú kamat hogyan alakult a visszavásárlás közelében, a visszavásárlás előtti hónapban (jelöljük  $r_{t-1}$ -vel), a visszavásárlás hónapjában (jelöljük  $r_t$ -vel), és hogyan alakult volna a visszavásárlás utáni hónapban, ha nem töröl az ügyfél (jelöljük  $r_{t+1}$ -vel). Minden esetben az évesített hozamokat használjuk. Az elvégzett elemzések alapján az  $r_{t+1} - r_{t-1}$  mennyiség nagy hatással van a bekövetkezett károkra. Ez tehát azt méri mennyivel változott volna az adott ügyfél számára a jóváírt hozamszint, ha nem törli a biztosítását. Ezt hozamcsökkenési mutatónak fogjuk nevezni. Amennyiben  $r_{t-1}$  nem ismert (pl. mert nem volt még akkor élő a biztosítás), akkor az  $r_{t+1} - r_t$  képlettel definiáljuk a hozamcsökkenést. A bekövetkezett károk megoszlását az előbb definiált hozamcsökkenés mértéke szerint láthatjuk (9. táblázat.” (Szepesváry, 2022)

<sup>31</sup> Életbiztosítások esetén is gyakran nevezik kárnak a szolgáltatási vagy maradékjog szerinti kifizetéseket.

Hozamcsökkenési mutató	Összes visszavásárlás arányában	
	Darab szerint	Díj szerint
- 1% és alatta	12,6%	41,1%
-1% és 0% közt	7,3%	5,0%
0%	68,0%	47,6%
0% feletti (hozamnövekedés)	12,2%	6,3%

**9. táblázat:** Egyszeri díjas visszavásárlások megoszlása a hozamcsökkenési mutató függvényében

Forrás: (Szepesváry, 2022)

„Törlési darabszám szerint a bekövetkezett visszavásárlások darabszámának több, mint 80%-a esetén nem csökkent volna a szerződés kamatszintje a törlést követő hónapban. Ez alapján itt feltételezhetjük, hogy nem a belső kamatszint volt a törlés kiváltó oka.

Ami viszont nagyon szembetűnő, hogy a visszavásárlások darabszámának 12,6%-a a díj szerinti megoszlásnál 40% fölötti arányt mutat, méghozzá abban az esetben, ha a hozamcsökkenési mutató a -1%-os szinten vagy alatta volt. Tehát az ügyfelek másik csoportja meg kifejezetten kamatérzékeny, 1%-ot elérő kamatcsökkenés esetén törölte a szerződését.

Hogy jobban megértsük ezt a hatást, a többváltozós statisztikai modellezésből ismert  $k$ -közép klaszterezés segítségével klasszifikáljuk a törlési eseményeket, és ez alapján vonunk le következtetést a portfólióra, hogy végül a szerződésparaméterek segítségével csoportosíthassuk az ügyfeleket a hozamérzékenység szempontjából. Egyedi szinten csak ezt a belső kamatfüggést vizsgáljuk. Arról nincs információnk, hogy ha az ügyfél törölt (megszüntette a szerződését), akkor utána egy konkurens (magasabb hozamú) megtakarítási termékbe fektette-e a pénzét, vagy egyéb okból szüntette-e meg a biztosítását. De amint látni fogjuk a hozamcsökkenési mutató is nagyon informatív a törlések kapcsán.

A klaszterezésnél a vizsgált 3 év összes törlési eseményei képezték a megfigyeléseket, és a következő változókat vizsgáltuk:

- Szerződés kezdete és törlése közt eltelt idő (hónapban)
- Befektetett díj
- Hozam a törlési döntés előtt
- Hozam a törlési döntés után
- Hozamcsökkenési mutató (előbbi kettő különbsége)



A változókat sztenderdizáltuk (0 várható értékűvé és egységnyi szórásúra transzformáltuk), hogy az eltérő mértékegységek és nagyságrendek ne torzítsák a távolságokat. A  $k$ -közép klaszterezés lényege, hogy a kiválasztott változók által alkotott térben alakítsa ki a módszer  $k$  darab klaszterközéppontot, majd az egyes megfigyeléseket egy definiált távolság alapján a legközelebb eső klaszterközépponthoz besorolva,  $k$  osztályba lehessen besorolni a megfigyeléseket. A klaszterközéppontok koordinátái alapján lehet következtetéseket levonni az adott csoport tulajdonságairól. A módszer további matematikai alapjait nem mutatjuk be, arról részletesebben lehet olvasni például (Kovács, 2011) könyvében.

A klaszterezést az IBM-SPSS szoftver segítségével végeztük. A  $k = 2, 3, 4, 5$  eseteket vizsgáltuk. Minden bevont változó jelentős csoportosító erővel rendelkezett. A  $k = 2$  esetben a klaszterközéppontok koordinátái alapján az alábbi két klaszter rajzolódik ki (ezeket nevezzük a továbbiakban törlési klasztereknek):

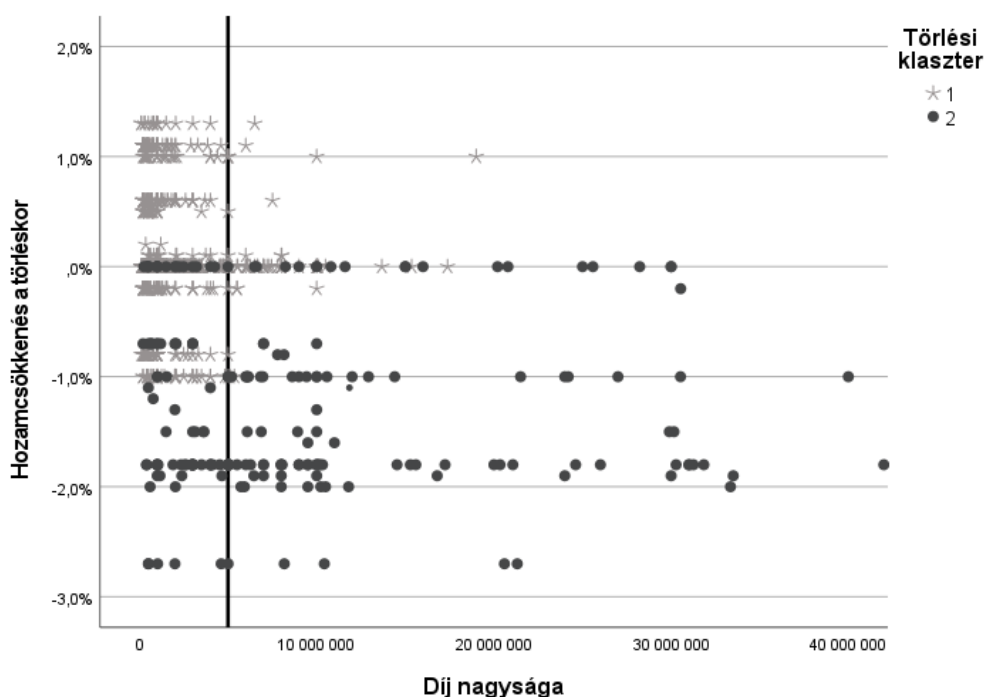
- Alacsonyabb díjú, törlés szempontjából kevésbé hozamérzékeny ügyfelek (alacsonyabb hozamszintről kisebb hozamcsökkenés következett be a törléskor), és hosszabb volt az eltelt idő a szerződés kezdetétől a törlésig. (1-es számú törlési klaszternek nevezzük a továbbiakban a csoportot.)
- Magasabb díjú, törlés szempontjából hozamérzékenyebb ügyfelek (magasabb hozamszintről magasabb hozamcsökkenés következett be a törléskor), és rövidebb volt az eltelt idő a szerződés kezdetétől a törlésig. (2-es számú törlési klaszternek nevezzük a továbbiakban a csoportot.)

A  $k = 3, 4, 5$  esetekben leginkább a díj szerint bontotta tovább az eljárás a csoportokat a  $k = 2$  esethez képest, a törlés idejében és a hozammutatókban nem volt jelentős a különbség az újabb csoportokban. Az ANOVA táblák alapján előálló úgynevezett klaszterkönyök módszer alapján a  $k = 4$  is optimális választás lehetne, de a csoportok közti varianciáknál is főképp a díjból magyarázott variancia nő a klaszterszám növelésével, ezért maradunk a 2 klaszteres klasszifikációnál, a fenti értelmezéssel.

Mivel a teljes szerződésalmazt (tehát nem csak a törölt szerződéseket) szeretnénk klasszifikálni, és mivel a törlési adatok előre nem ismertek, ezért a fenti változók közül a befizetett díj nagyságával (ami minden szerződésre ismert a szerződés kezdetétől) próbáljuk meg minél jobban közelíteni a törlési klaszterezéssel kapott csoportokat. Ezt úgy érjük el, hogy a klaszterközéppontok befektetett díjra vonatkozó koordinátáit vesszük, és szerződésenként azt nézzük, hogy melyik ponthoz van közelebb az adott

szerződés díja. Tehát a keletkező vágási pont a két értéknek (klaszterközepek díj koordinátáinak) az átlaga lesz. Ezt a típusú csoportbontást nevezzük a továbbiakban díj szerinti klaszterezésnek.

A (21. ábra) mutatja egy kisebb mintán a teljes adathalmazból a díj nagysága és a hozamcsökkenési mutató keresztmetszetében, hogy a törlés szerinti klaszterek, hogy helyezkednek el a díj szerinti klaszterezéshez képest (utóbbi a függőleges vonal bal és jobb oldala, ahol a jobb oldalon helyezkednek el a magasabb díjú, jellemzően magasabb törlési valószínűségű ügyfelek). A törlés szerinti klaszterek jól visszatükrözik a fent leírt tulajdonságokat, mind a hozamcsökkenési mutatóban, mint a díjban jelentős különbség rajzolódik ki a két csoport közt.” (Szepesváry, 2022)



**21. ábra:** Törlés és díj szerinti klaszterek a díj nagysága (Ft) és a hozamcsökkenési mutató dimenziói szerint

Forrás: (Szepesváry, 2022)

„A törlés és díj szerinti klaszterezésből adódó szerződésenkénti besorolást keresztábrával is összehasonlítottuk az összes törlési esemény vonatkozásában (lásd 10. táblázat). Az egyszerűbb, díj szerinti besorolással 88,7%-ban lehet a többváltozós, törlés szerinti klasztereket magyarázni. Tovább bontva az 1-es törlési klaszter 94,3%-át lehet helyesen besorolni a díjosztály szerinti vágással, míg a 2-es törlési klaszternél 56,3%-os pontossággal lehet besorolni csak a díj alapján.” (Szepesváry, 2022)

Csoportok megoszlása az összes törölt szerződés arányában		Törlési klaszterek		
		1	2	Összesen
Díj szerinti klaszterek	1	80,3%	6,5%	86,8%
	2	4,8%	8,4%	13,2%

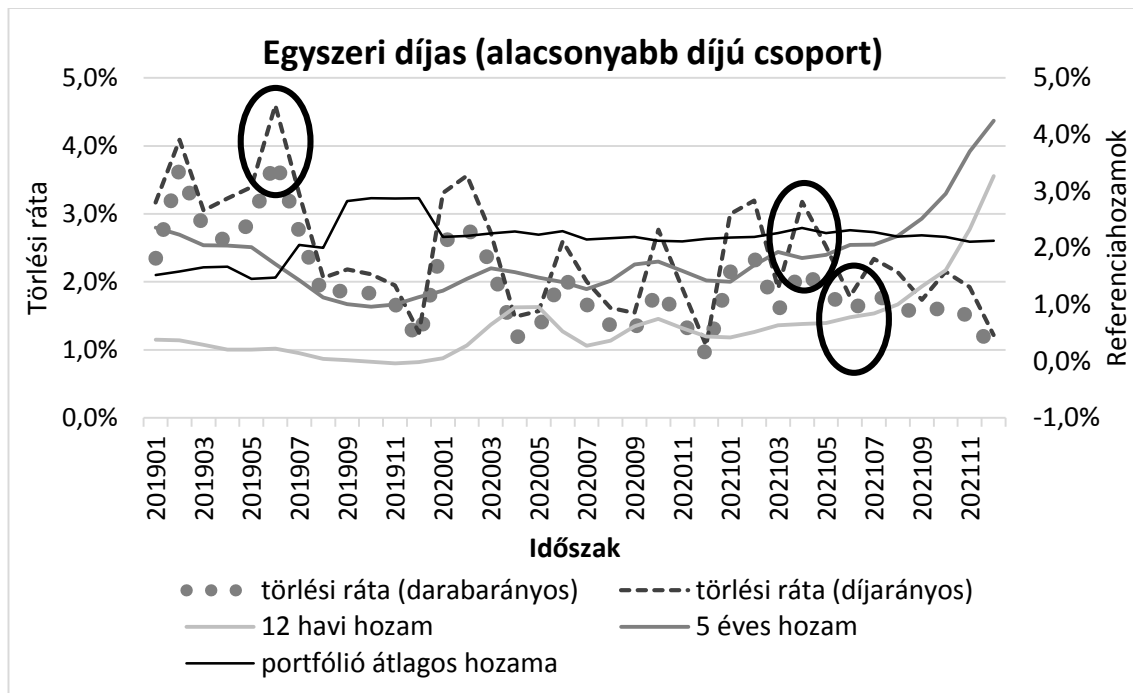
Helyes besorolás díj szerinti klaszterek alapján	94,3%	56,3%	88,7%
--	-------	-------	-------

**10. táblázat Törlés és díj szerinti klaszterek keresztábrák hasonlítása**

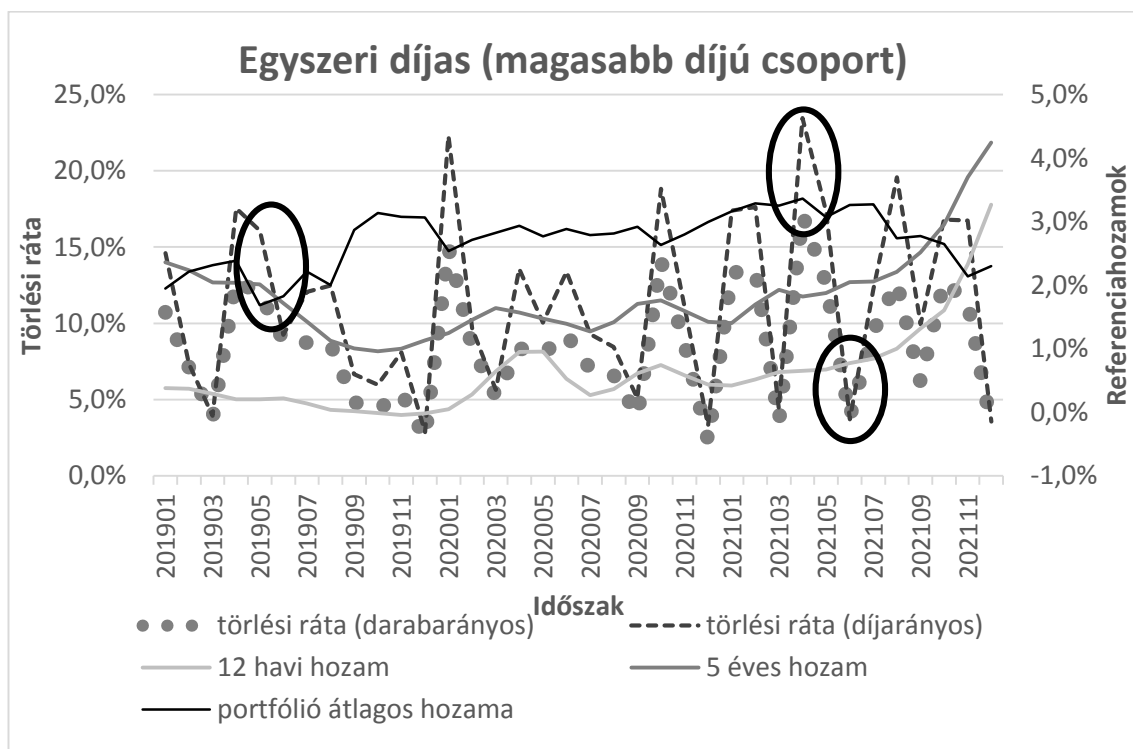
Forrás: (Szepesváry, 2022)

„Mivel összességében a díj szerinti besorolással is jó találati arányt lehet elérni a törlési klaszter csoportjaira, és a továbbiakban a teljes szerződés-halmazt szeretnénk tovább elemezni (nem csak a törölt szerződéseket), ezért a díj szerinti klaszterezés alapján folytatjuk a vizsgálatokat.

A díj szerinti klaszterezésből adódó vágás szerint bontjuk kétfelé a portfóliót, és rajzoljuk ki a törlési ráták idősorát (22. és 23. ábrák), abban bízva, hogy így már homogénebb csoportokra látjuk a törlési adatokat. A díj-csoportokra bontott grafikonokon a darab és díjarányos ráták idősorai sokkal közelebb kerültek egymáshoz. Még ezeken az ábrákon is magasabb némileg a díjarányos törlés, amiből arra következtethetünk, hogy még ezeken az osztályokon belül is teljesül, hogy magasabb díj esetén valamivel magasabb a törlési valószínűség.” (Szepesváry, 2022)



**22. ábra** Egyszeri díjas biztosítás (alacsonyabb díjosztály) törlése a hozamok függvényében  
Forrás: (Szepesváry, 2022)



**23. ábra:** Egyszeri díjas biztosítás (magasabb díjosztály) törlése a hozamok függvényében  
Forrás: (Szepesváry, 2022)

„Hogy a havi adatokban mutatkozó volatilitást jobban megértsük, tovább vizsgáljuk az immár két csoportra bontott halmazt, összefügghet-e a hozamokkal az ingadozás. Három

időszakot vizsgálunk meg részletesebben (ezek az időszakok kerültek bejelölésre a 22. és 23. ábrákon), mi okozhatja a magasabb vagy alacsonyabb törléseket. Erre a három időszakra esett a választásunk:

- 2019. június. Ebben a hónapban vezették be a MÁP+ államkötvényt<sup>32</sup>, ami kiemelkedő hozamot biztosít(ott) az (akkori) állampapír hozamokhoz és más befektetési formákhoz képest, továbbá mind likviditásban, mind adózási feltételekben előnyös tulajdonságokkal rendelkezik. Mindkét grafikonon látható, hogy magas törlés volt jellemző ebben az időszakban.
- 2021. április. Kiemelkedően magas törlés volt jellemző mindkét csoportban (de különösen a magasabb díjosztály esetén).
- 2021. június. Alacsony törlés volt jellemző mindkét csoportban.” (Szepesváry, 2022)

<b>Alacsonyabb díjú szerződéscsoport</b>	<b>201906</b>	<b>202104</b>	<b>202106</b>	<b>3 éves törlési átlag</b>
Darabarányos törlés	3,81%	2,18%	1,56%	2,00%
Díjarányos törlés	4,60%	3,17%	1,78%	2,45%

<b>Magasabb díjú szerződéscsoport</b>	<b>201906</b>	<b>202104</b>	<b>202106</b>	<b>3 éves törlési átlag</b>
Darabarányos törlés	8,87%	17,09%	3,85%	8,55%
Díjarányos törlés	9,26%	23,46%	3,71%	11,47%

**11. táblázat:** A két szerződéscsoport havi törlési rátái három kiválasztott időszak esetén  
Forrás: (Szepesváry, 2022)

„Mindhárom kiválasztott időszakban megvizsgáltuk, hogy alakult a két csoport szerződéseinek esetén a hozamcsökkenési mutató, mind a teljes mintára, mind az adott hónapban törölt szerződésekre, illetve hogy a csoportra jellemző átlagos (a három éves időtávon számolt átlagos) törléshez viszonyítva hogy alakult a törlés (11. táblázat és 24. ábra, a diagramot csak a 2021 4. havi adatokra tüntettük fel).

2019 júniusában egyik szerződéscsoport esetén sem következett be hozamcsökkenés a korábbi definíció szerint mérve. Az alacsonyabb díjú csoport esetén mégis közel kétszeresére növekedett a törlés az átlagoshoz képest. A magasabb díjú csoport esetén is kifejezetten magas volt a törlés, bár itt a saját hosszú távú átlagához képest nem lett magasabb a havi adat. Azt feltételezhetjük, hogy a MÁP+ államkötvény bevezetése vezethetett a magas törléshez. Különösen szembetűnő, hogy az alacsonyabb díjosztály

<sup>32</sup> Lásd: <https://www.allampapir.hu/allampapirok/MAPP/>

esetén (akik jellemzően kevésbé hozamérzékenyek) is milyen jelentős növekményt okozott a hatás. Az ÁKK referencia hozammal nem mutatkozott összefüggés a törlési rátában, azonban egy olyan jó marketinggel és erős pénzügyi előnyökkel támogatott állami konstrukció, mint a MÁP+ viszont kimutatható növekményt okozott a törlésben a megjelenésének hónapjában.” (Szepesváry, 2022)



**24. ábra:** Törlési ráták díjosztály és hozamcsökkenés szerint (2021 április)  
Forrás: (Szepesváry, 2022)

„2021 áprilisában egyértelműen a hozamcsökkenési mutató befolyásolta a törlési rátát (24. ábra). Az alacsonyabb díjosztályú csoportban 3 – 3,87-szeres (darab és díj szerint) volt a törlési rátája azoknak a szerződéseknek, ahol (abszolútértékben) 1%-ot elérő hozamcsökkenés következett volna be a következő hónaptól, azokhoz a szerződésekhez viszonyítva, ahol nem volt ekkora hozamcsökkenés (vagy hozamnövekedés volt). Ugyanez a mutató 5,8 – 5,9-szeres törlési ráta növekedést jelentett a magasabb díjú csoportban. Mindebből arra következtethetünk, hogy az adott termék belső hozamszintje nagyon erős indikátora a törlésnek. 1%-os hozamcsökkenés már jelentős rétegeket ösztönöz a visszavásárlásra. A magasabb díjosztály esetén ez még inkább teljesül, (ott arányaiban még több a hozamérzékeny ügyfél), de még az alacsony díjosztály esetén is jelentős többlettörlés alakult ki a hozamcsökkenés bekövetkezte előtt.

2021 júniusában is kimutatható, hogy azon szerződésekre, ahol nagyobb volt a hozamcsökkenési mutató, nagyobb volt a törlési valószínűség is. Azonban ebben az időszakban arányaiban nagyon kevés szerződés volt hozamcsökkenésnek kitéve (a

portfólió 90% feletti része esetén nem változott, vagy nőtt a hozamszint a következő hónapra), ebből adódóan nyugalmi helyzetben volt a törlési ráta.

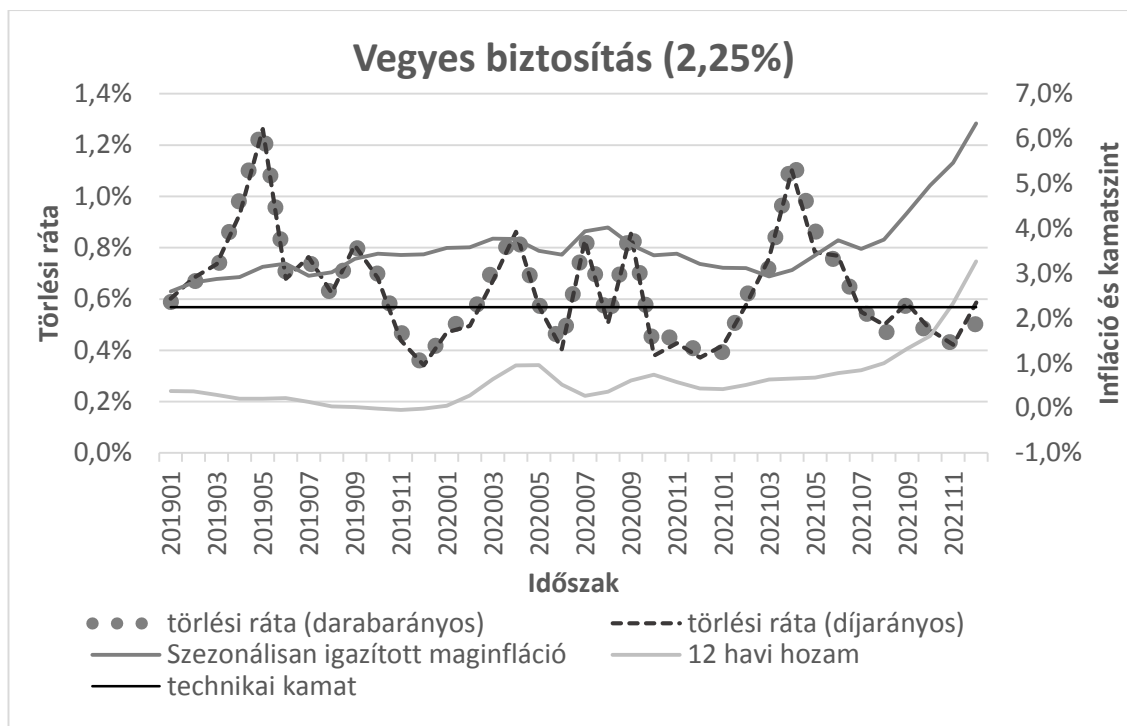
Végezetül elvégeztük a két díjosztály esetén a Granger oksági vizsgálatot, arra keresve a választ, hogy a referencia hozam Granger oka-e a törlésnek. Minden esetben el lehetett fogadni a nullhipotézist a szokásos szignifikancia szinteken, hogy nem teljesül a Granger oksági kapcsolat. Ennek valószínűleg az is az oka, hogy a referencia hozam szinte végig alacsonyabb volt, mint a portfólió átlagos hozama. Ezt az elemzést is célszerű lehet megismételni egy év múlva, hogy ha tartósabban magasak maradnak a referencia hozamok addig is.

A fenti elemzésekből arra következtethetünk, hogy a hozamszint az egyik fő tényezője a törlésnek a vizsgált egyszeri díjas konstrukció esetén, hiszen azokban a hónapokban, amikor a külső vagy belső hozamszintben nagyobb változás állt be, a törlés is megnőtt, amikor nem volt ilyen esemény, alacsony törlés volt jellemző. Azonban a külső hozamszint tekintetében a referencia hozammal nem volt igazolható kapcsolat, de a MÁP+ megjelenésének hónapjában jelentős törlési többletet detektáltunk. A belső hozamszint változására is érzékenyek az ügyfelek. Itt különbséget azonosítottunk a törlésben a biztosítás díja szerint, a magasabb díjú ügyfelek körében magasabb a hozamérzékenyek aránya, de az alacsonyabb díjosztály esetén is megfigyelhető volt a hozamcsökkenési mutató által vezérelt törlés.” (Szepesváry, 2022)

A bemutatott vizsgálatok bizonyítékkul szolgálnak a 4. hipotézisre: befektetési fókuszú egyszeri díjas életbiztosítási konstrukciók esetén viszont kimutatható releváns biztosítói adatokból a külső vagy belső kamatkörnyezettől való függés. Ha más befektetési formák magasabb hozamot kínálnak, vagy az adott szerződésen belül csökken az elérhető kamat szintje, akkor az adott szerződéscsoport tulajdonságaitól is függően megnőhetnek a törlési arányok.

### **2.7.2.3. Törlési ráták vizsgálatának további eredményei**

A fejezet és az értekezés életbiztosítási szakaszának lezárásaként a tanulmányban kapott további, a törlési rátákhoz kapcsolódó eredményeket mutatom be röviden (Szepesváry, 2022).



**25. ábra:** Vegyes biztosítás törlése az infláció függvényében  
Forrás: (Szepesváry, 2022)

A 25. ábrán a szezonálisan igazított maginflációval együtt kerül kirajzolásra a vegyes biztosítás törlési rátája. A tanulmány megállapítja, hogy akárcsak a referencia hozam esetén, az infláció esetén sincs ok-okozati kapcsolat a törlési ráta vonatkozásában (Szepesváry, 2022). Hasonló eredmény adódik a többi folyamatos díjas és az egyszeri díjas konstrukcióra is. Azonban akárcsak a referencia hozamok esetén itt is megállapítja a tanulmány, hogy még nem telt el kellően hosszú idő a hozam- és inflációs környezet nagyfokú megváltozása óta, ezért érdemes lehet egy későbbi időpontban is megismételni a vizsgálatokat, hogy hogy késleltetett hatásként megjelenik-e a visszavásárlások gyakoriságának változása.

Végezetül pedig a COVID-19 lezárásokat számszerűsítő szigorúsági index és a törlési ráták kapcsolata kerül bemutatásra (Szepesváry, 2022) tanulmányban. A szigorúsági index más biztosítási tanulmányokban is felhasználásra került már. (Csépai & Kovács, 2021) tanulmányukban a COVID-19 miatti halálesetek arányát elemezték a szigorúsági index függvényében különböző európai országokra. A törlési ráták kapcsán az alábbiak állapíthatók meg.

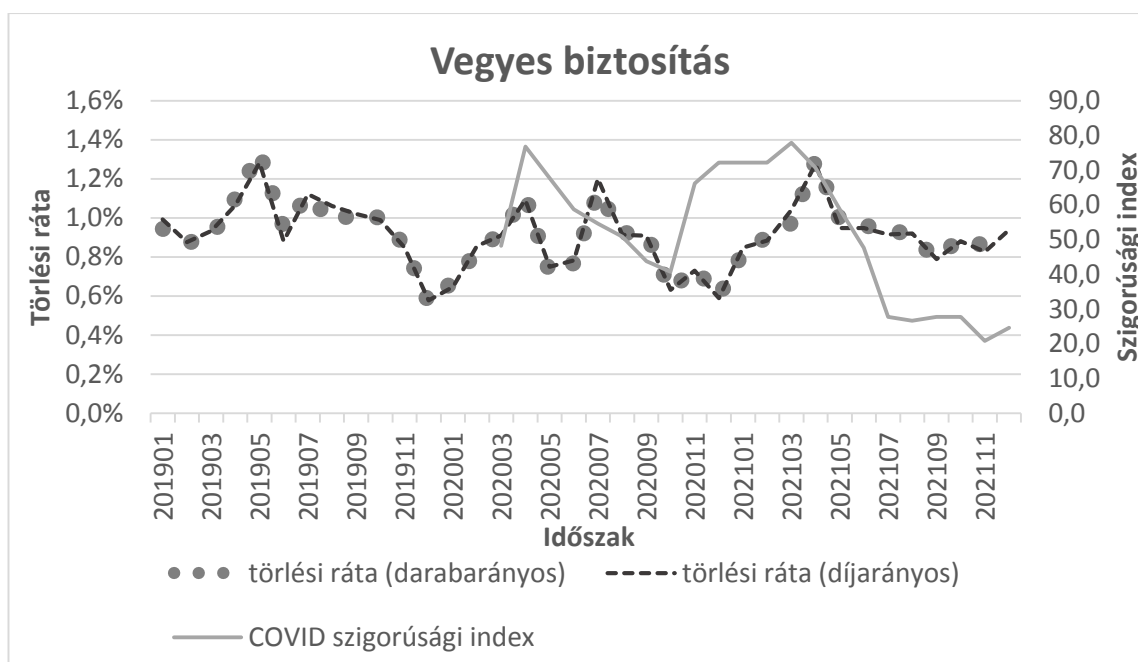
„A COVID-19 lezárásoknak (a szigorúsági index-szel mérve) sem volt jelentős hatása sem a folyamatos díjas, sem az egyszeri díjas életbiztosítások törlési rátáira (26. és 27.



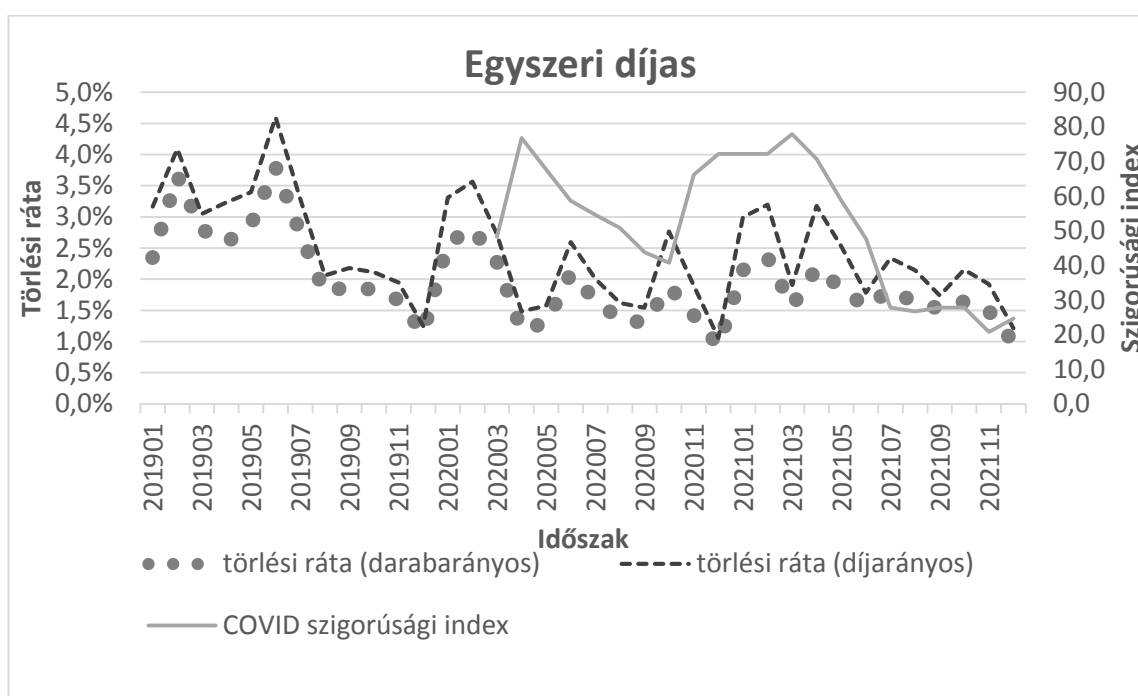
ábrák). A grafikonokon megfigyelhetjük, hogy a világjárvány kitörése utáni időszakban lényegében nem lépett ki a 2019. január – 2020. február közti időszakban megfigyelt sávból a törlés egyik irányban sem.

Érdekes viszont, hogy a folyamatos díjas biztosítás esetén egy kis mértékű összefüggés látszólag kirajzolódik, pár hónapos késleltetéssel a nagyobb fokú lezárások után kis mértékben emelkedtek a törlési ráták. A késleltetés logikailag azzal függhet össze, hogy ezekhez a hosszú távú megtakarításokhoz csak akkor nyúlnak az ügyfelek, ha mindenképp szükséges, és már nincs más likvid forrásuk. Illetve a biztosító pár hónap türelmi időt alkalmaz, ha nem folyik be a díj, ez is okozhatja a késleltetést.

Hogy az előbbi hatás valóban kimutatható-e statisztikailag is, azt a Granger okság segítségével vizsgáltuk ismét. Ehhez az idősoroknak a 2020 márciustól induló részeit tartottuk meg a világjárvány kezdetével összefüggően, így viszonylag rövid idősorokat kaptunk. A második differenciálás után tudtuk stacionáriusnak tekinteni az idősorokat, ezekkel dolgoztunk. Minden szokásos szignifikancia szinten el lehetett fogadni a hipotézist, hogy a COVID-19 szigorúsági index nem Granger oka a törlésnek, minden biztosítástípus esetén. Nem kizárható persze, hogy valamilyen komplexebb gazdasági összefüggés átrajzolta a törlések pályáját, de a rövid idősor alapján és kevés adat alapján erre nem tudunk bizonyítékot felállítani. Illetve meggyőző érv amellet, hogy ha volt is ilyen hatás az nem jelentős, hogy a világjárvány alatt sem felfelé, sem leféle nem mozdultak el a törlési ráták a grafikonok alapján.” (Szepesváry, 2022)



**26. ábra:** Vegyes biztosítás törlése a COVID-19 szigorúsági index függvényében  
 Forrás: (Szepesváry, 2022)



**27. ábra:** Egyszeri díjas biztosítás törlése a COVID-19 szigorúsági index függvényében  
 Forrás: (Szepesváry, 2022)

### 3. GÉPI ALGORITMUSOK ALKALMAZÁSA A NEM-ÉLETBIZTOSÍTÁSI ÁRAZÁSBAN

Az életbiztosítási témák mellett az értekezés másik nagyobb egysége a nem-életbiztosításokkal foglalkozik.

Az értekezés életbiztosításokat tárgyaló részében számos modern statisztikai technikát és gépi megvalósítást igénylő módszertani apparátus került bemutatásra, melyek hatékony eszköznek bizonyultak az életbiztosításokhoz kötődő aktuáriusi alkalmazásoknál.

Az értekezés bevezető szakasza bemutatta az élet- és nem-életbiztosítási üzletág sajátosságait és a kockázatok eltérő mivoltát. Ezen különbségekből adódóan a nem-életbiztosítások modellezésénél sok esetben más technikák is szükségesek lehetnek. Az esetenként eltérő módszertani tárháztól függetlenül azonban a nem-életbiztosítási üzletág esetén is élesen szétválik a hagyományos és a modern szemléletmód. A kockázati kultúra fejlődése, az informatikai alkalmazások térnyerése és az üzleti - gazdasági igények által vezérelt modern gondolkodásmód és módszertan ugyanígy utolérte a nem-életbiztosítások esetén használt aktuáriusi technikákat is. Itt fokozottan igaz, hogy az adatok és az adatelemzés a fő építőköve az alkalmazás szempontjából releváns modern módszereknek.

A nem-életbiztosítási matematika számos területe közül az értekezés az adatelemzésen alapuló modern díjszámítás (árazás) kérdéskörével foglalkozik, ezen belül is fő célként annak vizsgálatát tűzi ki, hogy egyes mesterséges intelligencián alapuló gépi tanulási algoritmusok segítségével lehetséges-e a kockázatok valós természetéhez jobban illeszkedő modellt készíteni, mint a már széles körben elterjedt többváltozós statisztikai módszerek, mint például az általánosított lineáris modell segítségével.

A 3. fejezet céljai és fő témái az alábbiak:

- A legismertebb hagyományos nem-életbiztosítási díjszámítási technikák áttekintése (részben a Függelék 5.2 szakaszában), illetve egyes termékkonstrukciók- és a díjszámítási szemléletmód történeti fejlődésének bemutatása.
- Olyan módszertani technikák ismertetése, melyek alkalmas eszközei lehetnek a modern kockázati struktúrák árazásának: az általánosított lineáris modellek, a

döntési fák és véletlen erdők illetve a neurális hálók alapvető technikáit mutatom be.

- A fejezet célja végül az alábbi kutatási hipotézis (5. hipotézis) igazolása egy esettanulmányon keresztül: *empirikus adatokon bizonyítható, hogy a gépi tanulási módszerek, illetve azok kombinálásai alkalmasak lehetnek rá, hogy felhasználásukkal az általános lineáris modellnél jobb előrejelző eszköz jöjjön létre a nem-életbiztosítási kármodellezésben, és bizonyos közelítésekkel formalizálhatók is ezek a modellek, a magyarázó erő részének elvesztése árán.*

Az esettanulmány egy saját társszerzős kutatáson alapszik (Burka, Kovács, & Szepesváry, 2021). A cikk eredményei közös szellemi alkotásunknak tekinthető a társszerzőkkel, de a társszerzők hozzájárultak az eredmények értekezésében való szerepeltetéséhez. A kapcsolódó kutatás kapcsán jómagam főként az adatelőkészítésben, illetve az eredmények statisztikai kiértékelésében és az aktuáriusi alkalmazásában vettem részt, a gépi algoritmusok programozását, modellillesztést és változószelekciót a társszerzők végeztek. Ennek megfelelően az értekezésben is az aktuáriusi alkalmazást és statisztikai kiértékelést helyeztem előtérbe (de természetesen a kutatás többi részét is ismertetem, hogy teljes érthető kép álljon össze). A cikk 2021 decemberében jelent meg a Statisztikai Szemle angol nyelvű különszámában (Hungarian Statistical Review).

2012 óta foglalkozom nem-életbiztosítási árazáshoz, valamint gépi tanuláshoz kapcsolódó témákkal, mind kutatási, mind gyakorlati oldalról. Nem-életbiztosítási témában a fenti említett társszerzős publikációm jelent meg ez idáig. Gépi tanulás témában részt vettem egy másik társszerzős kutatásban is, aminek célja a neurális hálók technikájának szavazási eljárásokra történő alkalmazása volt (Burka, Puppe, Szepesváry, & Tasnádi, 2022). A kutatásban jómagam főképp a statisztikai kiértékelésben, és annak grafikus illusztrációjában vettem részt. Az ebből született tanulmány 2021-ben jelent meg a European Journal of Operational Research folyóiratban.

### 3.1 A nem-életbiztosítási termékek történeti fejlődése és a klasszikus nem-életbiztosítási díjszámítási technikák áttekintése

Az életbiztosítások esetén is kiemelésre került, hogy a modern szemléletmód nem csak a kalkulációs technikákat alakította át, hanem új típusú termékkonstrukciók (mint például a unit linked biztosítások) megjelenését is magával hozta. A nem-életbiztosítások esetén is fokozottan igaz, hogy a klasszikus és a modern világ közt a termékek jelentős fejlődésen mentek keresztül.

Jó példa minderre a kötelező gépjármű felelősségbiztosítások történeti fejlődése Magyarországon. 1982-től 1991-ig a felelősségbiztosítási díjakat az üzemanyagárba építették be, aminek praktikus előnye volt az egyszerű adminisztráció és a biztosítatlanság lehetőségének elkerülése (Kiss, 2013). Egészen pontosan a benzinüzemű gépjárművekre volt érvényes ez a szabályozás, a gázolajüzemű járművek esetén biztosítási díjat kellett fizetni (ahogy az 1982-ig tartó időszakban minden biztosítandó gépjármű esetén), de minden esetben az Állami Biztosító állt helyt a pénzügyi következmények kapcsán (Pataky, 2019). 1991. július 1-től került bevezetésre a szerződéses struktúrájú felelősségbiztosítás. Az akkor kezdődő időszakban az állam határozta meg a díjtarifát, majd 1998-tól került bevezetésre, hogy a pénzügyminiszter által megállapított alapidíjtól előbb 5, 1999-től 10, majd 2000-től 15%-kal térhettek el az egyedi díjtételek, majd 2001-2002-ben átlagos mértékű engedélyezett díjnövekedések engedélyezése után 2003. január 1-től következett be a teljes díjliberalizáció (Pataky, 2019). Jelenleg Magyarországon a *2009. évi LXII. törvény a kötelező gépjármű-felelősségbiztosításról* adja meg a legfőbb törvényi kereteket a kötelező gépjármű-felelősségbiztosítások (röviden KGFB) kapcsán (2009. évi LXII. törvény, 2009), amely néhány későbbi díjtarifát is érintő módosulással került jelenleg hatályos állapotába. Általánosságban elmondható, hogy a jelenlegi jogszabály jóval nagyobb rugalmasságot enged a díjtarifa kialakítása kapcsán, mint az áttekintett régebbi időszakok esetén.

A bemutatott folyamat jól körvonalazza a termékkonstrukció összetettségének fejlődését és a kockázati struktúra szerinti differenciálás díjtarifába való beépítésének lehetőségeit. A benzinárba épített biztosítási díj ilyen szegmentálást egyáltalán nem tartalmazott, az egyedüli figyelembe vett kockázati tényező az összes megtett úttal korreláló elégetett üzemanyag mennyisége. Később az „állami tarifa” időszakában a biztosítási díj bónusz-

málusz osztályok<sup>33</sup> szerint már differenciálása került. A modern termékkonstrukciók felé az áttörést azonban a liberalizált tarifák világa hozta el, ahol már részletes kockázati szegmentáció is sok esetben része lett a KGFB biztosításoknak.

Mivel Magyarországon kötelező a KGFB tarifák publikálása, ezért a jelenleg hatályos tarifák alapján<sup>34</sup> könnyűszerrel képet nyerhetünk, hogy milyen tényezők és hogyan befolyásolhatják a kapcsolódó kockázatot. Néhány ilyen tényezőt kiemelve az elérhető tarifák alapján:

- a gépjármű teljesítménye,
- a gépjármű hengerűrtartalma,
- a gépjármű hajtóanyaga,
- a gépjármű gyártmánya,
- a gépjármű gyártási éve,
- a gépjármű használati módja,
- a szerződő kora,
- a szerződő bonus-malus besorolása,
- a szerződő lakhelye,
- a szerződő jogosítvány szerzésének éve,
- várható éves futásteljesítmény stb.

Egyes tarifák akár tíz feletti számú változó felhasználásával határozzák meg a díjat. Különböző technikákkal kerülhetnek beépítésre a változók a díjszámítási struktúrába, előfordulnak multiplikatív díjstruktúrák, de olyanok is, amik egyes változók interakciói szerint is szegmentálva adnak díjképleteket.

Mindez előrevetíti, hogy a modern nem-életbiztosítási termékkonstrukciók árazásakor bonyolult kapcsolatrendszerek feltérképezése és speciális modellezés válhat szükségessé, szemben a régebbi idők biztosítási termékeivel, ahol az egyszerűbb struktúrából adódóan az alkalmazandó módszerek és statisztikai tárház is egyszerűbbek lehettek.

Az értekezés más nem-életbiztosítási termékkonstrukciók történeti fejlődését nem ismerteti a fentihez hasonló részletességgel, de általánosan elmondható, hogy a klasszikus egyszerű elveken alapuló struktúrákat a modern szemléletmód sok esetben komplex

---

<sup>33</sup> A bónusz-málusz rendszerek célja a vezetők klasszifikációja egyéni kártörténetük szerint. Ha egy vezető nem okoz kárt adott évben, akkor pozitív irányban lép előre a rendszerben, ha kárt okoz, negatív irányban visszafelé lép. A rendszerek sajátosságai jellemzően törvényileg szabályozottak.

<sup>34</sup> Lásd például <https://mabisz.hu/kgfb-dijtarifak/>

termékkonstrukciókká formálta át, amely ezáltal a kapcsolódó aktuáriusi modellezésnél is újfajta technikák megjelenését generálta.

Terjedelmi okok miatt a klasszikus nem-életbiztosítási díjszámítási módszereket részletesen nem mutatja be az értekezés. A későbbiek megértéséhez az alábbi alapfogalmak és technikák ismerete szükséges:

- Az egyéni- és az összetett kockázat modellje,
- A kárszámok és kárnagyságok modellezése kapcsán leggyakrabban feltételezett eloszlástípusok,
- Előbbiek eloszlás-paramétereinek becslése,
- Klasszikus díjkalkulációs elvek.

A legfontosabb képleteket és eljárásokat a Függelék 5.2 szakasza ismerteti, hogy nem aktuárius szakemberek számára is érthetők legyenek az értekezés későbbi eredményei. Részletesebb bemutatást pedig (Arató, 2001) könyve ad az általános biztosításmatematikai alapokról.

### **3.2 A klasszikus nem-életbiztosítási díjszámítási technikák problémái és a modern szemléletmód alapjai**

Egyszerű kockázati struktúra és a tapasztalathoz jól illeszthető eloszlások esetén a klasszikus díjszámítási technikák jól alkalmazhatók az ismert módon (lásd például Függelék 5.2). Azonban mind a homogén káreloszlás feltételezése, mind az ismert eloszlások jó illeszkedése sok esetben nem teljesül a valóságban. Könnyen előfordulhat, hogy különböző ügyfeleknek különböző eloszlás szerint alakul a kár-kockázati profilja.

Előbbihez hasonló esetekre számos példát mutat a vonatkozó szakirodalom is. Ohlsson és Johansson kiemelik, hogy a kárdarabszámokat gyakran modellezzik Poisson eloszlással, azonban ennek paramétere sok esetben eltér az egyes ügyfelek közt, így a paraméter tekinthető egy valószínűségi változó realizációjának. Az így adódó eloszlást nevezik keverék Poisson eloszlásnak, ami gyakran jobban illeszkedik a biztosítási adatokra, mint a sztenderd Poisson eloszlás (Ohlsson & Johansson, 2010). A Poisson eloszlás paraméter változóját ( $\theta$ ) nevezik keverő valószínűségi változónak, és definíció szerint ha a kárszám  $\theta$ -ra vonatkozó feltételes eloszlása Poisson eloszlás, akkor beszélünk keverék

Poisson eloszlásról. (Arató, 2001) megmutatja, hogy a keverék Poisson-eloszlás gamma-eloszlású keverő valószínűségi változóval negatív binomiális eloszlású, valamint ha  $Y$  rögzített  $\theta = y$  esetén exponenciális eloszlású és  $\theta$  gamma eloszlású  $(\beta, \alpha)$  paraméterekkel, akkor  $Y$   $(\alpha, \beta)$  paraméterű Pareto-eloszlású. Természetesen előbbiek csak speciális esetek, sok esetben valószínűségi változók ilyen típusú keveréke nem írható le valamely ismert eloszlás segítségével.

Utóbbi példák azt sugallják, hogy bizonyos esetekben a káreloszlás paramétereit valószínűségi változónak tekintve (jelöljük a továbbiakban  $\theta$ -val a paraméter vektort), az egyes szerződések kockázatai azonos eloszlásúnak tekinthetők, de amint már a kárt mérő változó (jelöljük a továbbiakban  $Y$ -nal) „keverő” változó szerinti feltételes eloszlásait tekintjük ( $Y|\theta$ ), azok már nem azonos eloszlásúak, tehát ennek ismeretében már nem homogén a kockázat. Felmerül a fontos kérdés, hogy  $\theta$  értékei teljesen véletlenszerűek-e, vagy esetlegesen összefüggenek-e a biztosítási szerződés valamely attribútumával, meghatározható vagy megbecsülhető-e adott szerződésre  $\theta$ . Amennyiben  $\theta$  teljesen véletlenszerűen viselkedik, akkor nincs más lehetőség, mint  $Y$  változó eloszlása alapján számolni az egységes szerződésenkénti díjat. Azonban a valóságban sok esetben  $\theta$  összefügg a szerződés jellemzőivel, tehát ilyen esetekben  $\theta$  értéke megbecsülhető, és ezáltal lehetőség van a szerződéses attribútumok alapján a  $\theta$ -ra vonatkozó feltételes eloszlás alapján differenciálni a díjat.

Az előbbihez hasonló lehetőségek tapasztalati felismerését jól mutatja a nem-életbiztosítások kockázati strukturáltságának az értekezésben már áttekintett fejlődése. Az alkalmazandó módszertan komplexitása bizonyos szintig a szükséges kockázati struktúra bonyolultságán múlik. Amennyiben például egy kategorikus változó szerint homogén kockázati csoportokra bontható a szerződés-halmaz (pl. korábban mutatott példa a magyar állami KGFB tarifa esetén, ahol a bonus-malus osztályok szerint volt differenciálva a díj, ez lehetett az elvi megközelítés alapja), viszonylag egyszerű módszer is elképzelhető. Elegendő a kérdéses változó szerinti csoportokra osztani a mintát, és ezekben a klaszterekben egyesével elvégezni az eloszlások illesztését (amennyiben kellő számú adat áll rendelkezésre és adódik jól illeszkedő eloszlás).

Bonyolultabb kockázati struktúra esetén azonban az előbbi megközelítés lehetetlenné válhat. Például ha több kategorikus változó is befolyásolja a kockázatot, akkor az összes változó összes kombinációja szerint kéne felbontani a mintát, és ezekre egyesével eloszlásokat illeszteni. Az is elképzelhető továbbá, hogy folytonos változók is



befolyásolják a kockázatot, amire ez a megközelítés nem működik, hacsak nem a folytonos változó ordinális változóvá történő egyszerűsített kategorizálásával. A hasonló elvek szerint adódó homogén kockázatúnak tekintett kategóriákat szokás tarifa celláknak is nevezni (összefüggésben azzal, hogy ezen kategóriák szerinti bontásban adódik a díjtarifa). Gyakran előfordul, hogy egyes kategóriákba akár egyáltalán nem esik kár egy megfigyelt időszakon (ami értelemszerűen nem azt jelenti, hogy ott 0 a kockázat mértéke, csak a granuláris felosztás miatt előfordulhat, hogy nem esik, vagy nem kellően megbízható mennyiségű adat esik egy-egy cellába). A gyakorlatban azonban cellánként sima és nagy mértékű véletlen fluktuációknak nem kitett díjak preferáltak, ami előbbi esetben, előbb becslési módszerrel gyakran nem teljesül (Ohlsson & Johansson, 2010).

A modern megközelítésű díjszámítás lényege, hogy a káreloszlások illesztése és ezáltal a kockázati struktúrának megfelelő díjszámítás valamilyen statisztikai modell alkalmazásával áll elő, úgy hogy a szerződésparaméterek, mint magyarázó változók bevonásával készül becslés az adott szerződés káreloszlására. Jó példa erre, hogy a kárdarabszám vagy a kárnagyság eloszlása valamilyen ismert eloszlásnak van feltételezve, és az eloszlás paraméterei kerülnek becslésre a szerződésparaméterek alapján.

Előbbiek kialakulásához egyrészt hozzájárult a már említett deregularizáció, azzal hogy a szabályozási környezet egyre nagyobb szabadságot engedett meg az árazás során. Másrészt pedig a '90-es évek közepétől a számítási és számítógépes technikák növekedő elérhetősége révén, illetve a modern statisztikai módszerek (mint például az általánosított lineáris modellezés) térnyerésével létrejött ennek technológiai háttere is (Frees, Meyers & Derrig, 2016).

A szakasz további részében bemutatom a modern díjszámítás elméleti keretrendszerének legfontosabb alapjait, jó részben (Ohlsson & Johansson, 2010) könyvére támaszkodva.

Először ismertetésre kerülnek a statisztikai modell legfontosabb változói. A tükörfordítás helyett a magyar statisztikai nyelvezethez jobban igazodó elnevezéseket használtam, de definiálásukkor szerepelnek az eredeti angol elnevezések is zárójelben.

Jelölje a továbbiakban a kár-kockázathoz kapcsolódó **függő változót** (*response variable*) *Z*. A függő változó lehet például a károk száma, a károk összege vagy akár a nagykárok száma is. Fontos a függő változó mellé egy úgynevezett **kitettség** (*exposure*) definiálása (*w*-vel jelölve a továbbiakban), hiszen nem mindegy például hogy hány szerződés, vagy

egy szerződés esetén mekkora kockázatban töltött idő eredményezte a függő változó szerinti károkat. Kitétség változó lehet a **kockázatban töltött időtartam** (*duration*) jellemzően évben megadva; a **károk száma**; vagy a **megszolgált díj**<sup>35</sup> a vizsgált megfigyelési egységre (pl. szerződésre vagy portfólióra). A függő változó és a kitétség hányadosa a **korrigált függő változó** (*key ratio*), melynek lényege az, hogy azonos bázisra normálva összehasonlíthatóvá teszi az egyes megfigyelések esetén a függő változó értékeit, ami a statisztikai modellépítés alapja lesz. A korrigált függő változót  $Y$  jelöli a továbbiakban,  $Y = Z/w$ . Végezetül az **árazási faktorokat** (*rating factors*)  $X = (X_1, X_2, \dots, X_p)$  jelöli a későbbiekben, ennek a  $p$  darab, megfigyelési egységek különböző tulajdonságait tartalmazó magyarázó változók segítségével kerül modellezésre  $Y$  értéke. Azaz a statisztikai elemzés célja olyan  $f$  függvénykapcsolat megtalálása, amivel az  $Y = f(X)$  káralakulás jól magyarázható. Más megfogalmazással gondolhatunk a problémára az  $Y|X$  feltételes eloszlásának feltérképezéseként is. Az árazási faktorok lehetnek a szerződő vagy a biztosított különböző tulajdonságai (például kora, lakhelye, egyéb biztosítás szempontjából releváns jellemzői, mint például bonus-malus besorolása), a biztosított objektum különböző tulajdonságai (például gépjármű teljesítménye, gyártmánya, vagy más esetben egy ingatlan alapterülete vagy területi elhelyezkedése) stb.

Kitettség ( $w$ )	Függő változó ( $Z$ )	Korrigált függő változó ( $Y$ )
Kockázatban töltött időtartam	Károk száma	Kárgyakoriság
Károk száma	Károk összege	Átlagkár
Kockázatban töltött időtartam	Károk összege	Elméleti díj
Megszolgált díj	Károk összege	Kárhányad
Károk száma	Nagykárok száma	Nagykárok aránya

**12. táblázat:** Gyakran használt korrigált függő változók.

Forrás: (Ohlsson & Johansson, 2010)

A 12. táblázatban gyakran használt korrigált függő változók és az azok kiszámításához szükséges mennyiségek szerepelnek. Ezek közül párat érdemes külön is kiemelni és megmagyarázni. A **kárgyakoriság** azt fejezi ki, hogy egységnyi időtartam (jellemzően egy év) alatt egy megfigyelési egység (pl. egy szerződés vagy egy portfólió) átlagosan hány kárt okoz. Az **átlagkár** azt mutatja meg, hogy egy kár átlagosan milyen összegű. Lehetséges megközelítés a 0 összegű károk kihagyása az átlagkárból, de ez esetben konzisztensen kell eljárni a kárgyakoriság számításakor is (Ohlsson & Johansson, 2010).

<sup>35</sup> Az előírt díjnak a kockázatban töltött időtartamra eső része, amit jellemzően arányosan számítanak.

Az **elméleti díj** (*pure premium*) azt fejezi ki, hogy egységnyi időtartam (jellemzően egy év) alatt egy megfigyelési egység átlagosan milyen összegű kárt okoz. Nem véletlen a fogalom elnevezése, az elméleti díj nem más, mint a  $\lambda = 0$  paraméterű várható érték díjelv. A **kárhányad** pedig már egy részben pénzügyi szemléletű mutató, azt fejezi ki, hogy egységnyi megszolgált díjra vetítve mekkora az átlagos kárráfordítás. 100%-ot meghaladó kárhányad már biztosan veszteséget okoz a biztosítónak, de nem szabad elfelejtkezni arról, hogy a kárhányad csak a kárráfordítás összegét tartalmazza, a biztosító költségeit nem. Amennyiben a hányados számlálójában a költségeket is figyelembe vesszük, akkor beszélünk **kombinált hányadról**.

A modern nem-életbiztosítási díjszámítás esetén nagyon gyakran a következő formulával határozzák meg a nettó díjat (lásd például (Ohlsson & Johansson, 2010), (Frees, Meyers & Derrig, 2016)):

$$\text{Nettó díj} = \text{Kárgyakoriság} \cdot \text{Átlagkár}. \quad (3.1)$$

A formulát úgy kell érteni, hogy két statisztikai modell kerül felépítésre, az egyik a kárgyakoriságra, a másik az átlagkára, mint két korrigált függő változóra, majd a modellekből megfigyelési egységenként adódó várható kárgyakoriság és várható átlagkár értékek szorzata adja a nettó díj értékét. Észrevehetjük, hogy ez a formula ekvivalens az összetett kockázat modelljével,  $\lambda = 0$  paraméterű várható érték díjelv mellett, valamint hogy mindez megegyezik az imént definiált elméleti díj fogalmával is.

Felmerülhet olyan jellegű módszertan is, hogy a kárgyakoriság és átlagkár külön történő modellezése helyett az elméleti díj legyen a statisztikai elemzés korrigált függő változója. Ennek a módszernek előnye, hogy csak egy modellt kell építeni, hátránya viszont abból fakad, hogy a megfigyelési egységenkénti kárráfordítások sok esetben egy 0 pontban kiemelkedő, utána pedig folytonos tapasztalati eloszlást mutatnak (abból adódóan, hogy bizonyos megfigyelésekre nincs káresemény, másokra viszont van), erre pedig nehezebb feladat eloszlást illeszteni, mint a külön modellezett kárgyakoriságra és átlagkára. Ilyen típusú eloszlás leírható például az úgynevezett Tweedie eloszlással, ami lényegében egy összetett Poisson-gamma eloszlás, ahol a kárszám Poisson, a kárnagyságok gamma eloszlást követnek (Frees, Meyers & Derrig, 2016). Az értekezésben a továbbiakban az elméleti díj szerinti modellezéssel nem foglalkozunk, hanem a nettó díjra a kárgyakoriság és átlagkár modellek szorzatából adódó eljárás szerinti megközelítést használjuk. Ezzel együtt megjegyezzük még, hogy a modern megközelítés nem zárja ki más díjelvek

használatát sem, de a leginkább elterjedt a fent bemutatott várható érték elven alapuló kárgyakoriságon és átlagkárán alapuló megközelítés.

A statisztikai modellezéshez gyakran az alábbi feltételezéseket szokás tenni (Ohlsson & Johansson, 2010):

1. Megfigyelési egységek függetlensége. Adott  $n$  különböző megfigyelési egység, amikre a kapcsolódó függő változó értékei  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ .  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  feltételezés szerint függetlenek.
2. Időszakok függetlensége. Adott  $t$  diszjunkt időintervallum, amikre a kapcsolódó függő változó értékei  $Z_1, Z_2, \dots, Z_t$ .  $Z_1, Z_2, \dots, Z_t$  feltételezés szerint függetlenek.
3. Homogenitás. Tekintsünk két megfigyelési egységet egy azonos tarifa cellában, azonos kitettséggel. Jelölje a függő változó értékeit  $Z_1, Z_2$ .  $Z_1, Z_2$  feltételezés szerint azonos eloszlásúak.

Előbbi 3 feltételezés teljesülése esetén (Ohlsson & Johansson, 2010) megmutatják az alábbi állítást. Legyen  $Z$  akármelyik függő változó a korábbi 12. táblázatból, és legyen  $w > 0$  és  $Y = Z/w$  a kapcsolódó kitettség és korrigált függő változó, valamint  $w = 1$  esetén legyen a függő változó várható értéke  $\mu$ , szórásnégyzete pedig  $\sigma^2$ . Ekkor a függő változó és a korrigált függő változó várható értéke és szórásnégyzete:

$$\begin{aligned} E(Z) &= w\mu, & D^2(Z) &= w\sigma^2; \\ E(Y) &= \mu, & D^2(Y) &= \frac{\sigma^2}{w}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Az állítás alapján a korrigált függő változó szórásnégyzete a kitettséggel fordított arányban csökken.

A szakasz további részében arról ejtünk még szót, hogy a kérdéses  $Y = f(X)$  becslésnél mik a leggyakrabban használt  $f$  függvényre vonatkozó lehetséges modellkeretek.

Ilyen típusú problémákra gyakran használatos modell a lineáris regresszió (lásd például (Kovács, 2011)). Ohlsson és Johansson kiemelik, hogy a lineáris regresszió nem ideális a nem-életbiztosítási árazási modellek esetén, mert a lineáris regressziónál feltételezett normális eloszlás helyett a kárdarab és kárnagyság eloszlások nemnegatív értékűek, és a kárnagyságok továbbá jellemzően jobbra ferdek, illetve a lineáris regressziónál az átlag a magyarázó változók lineáris függvénye, amíg az árazásnál a multiplikatív modellek használata jellemzően észszerűbb választás (Ohlsson & Johansson, 2010).

Előbbi problémákra megoldást adnak az *általánosított lineáris modellek* (*generalized linear models* – röviden GLM), amik lehetőséget adnak általánosabb valószínűség-eloszlással dolgozni, és arra is, hogy az átlag valamilyen monoton függvénytranszformációjára kerüljön felírásra a lineáris modell, így összességében jóval rugalmasabb módszertani keretet képeznek, mint az egyszerű lineáris regresszió. Az általánosított lineáris modellek alapjai és nem-életbiztosítási árazási alkalmazásuk a következő szakaszban kerülnek bemutatásra.

A GLM típusú módszertan alkalmazása széles körben elterjedt a biztosítási szakmában, amihez jó alapot adott az informatikai fejlődés, a számítási kapacitások bővülése és a nagy méretű adatbázisok kezelésének lehetősége. Manapság számos programcsomagot használnak az aktuáriusok, amiket delegáltan a biztosítási árazáshoz fejlesztettek, pl. a GLM modellek felhasználóbarát megvalósítására.

Látni fogjuk azonban a GLM modellkeret elméleti háttéréből, hogy habár jóval rugalmasabb eljárás, mint a lineáris regresszió, bizonyos hátrányai ennek a módszernek is vannak. A használható eloszlások lerögzített családja, illetve hogy a módszer nem tudja automatikusan kezelni a magyarázó változók közti interakciókat, bonyolultabb adatstruktúrák esetén kevésbé jó illeszkedéshez vezethet.

Az a tény, hogy minél általánosabb és jobb tanulási képességű modellek szükségesek a nagy méretű, komplex adatstruktúrák megértéséhez, feltérképezéséhez és azzal kapcsolatos becslések készítéséhez, nem csak a biztosítmatematikában, hanem számos más adatelemzés vezérelt tudományágban előtérbe kerültek az utóbbi évtizedekben. Ez generálta, hogy megszületett az adatbányászat és ezen belül a gépi tanulási algoritmusok tudománya. Ezek a technikák az adat-feltérképezési és előrejelzési üzleti alkalmazásaik révén nyerték el népszerűségüket, ide tartoznak például a neurális hálók vagy a döntési fák (Frees, Meyers & Derrig, 2016). A gépi tanulási algoritmusok matematikai modellt építenek egy adatmintára, az úgynevezett tanító adatokra, hogy ez alapján becsléseket készíthessenek más mintákra, úgy hogy mindezt saját tanulásuk (tehát nem további emberi programozás) alapján tudják megtenni (Koza, Bennett, Andre, & Keane, 1996).

A gépi tanulási algoritmusok használata még jóval kevésbé elterjedt a nem-életbiztosítási árazásban, mint a már említett GLM modelleké. A szakirodalomban pár szerző azonban már sikerrel alkalmazta ezeket a módszereket (hivatkozásokat lásd a későbbi szakaszokban), és prognosztizálható hogy a gépi tanulási algoritmusok egyre fontosabb szerepet tölthetnek majd be a jövőben az üzleti alkalmazások esetében is. Az értekezés

utolsó szakaszában egy témába vágó esettanulmány kerül bemutatásra, ami azt vizsgálja, hogy a modern gépi tanulási algoritmusok segítségével készíthető-e pontosabb kárelőrejelző modell, mint a jelenleg még szélesebb körben alkalmazott GLM technika segítségével. Az esettanulmány felhasznált módszereivel összhangban, az értekezés két modellesaládba ad rövid betekintést, egyrészt a döntési fák, és az ennek általánosításával adódó véletlen erdők modelljeibe, másrészt a neurális hálók egyes típusaiba. További gépi tanulási eljárásokról részletes összefoglalást ad például (Hastie, Tibshirani, & Friedman, 2009).

### 3.3 Az általánosított lineáris modellezés és alkalmazása a nem-életbiztosítási árazásban

Az általánosított lineáris modell alapjai és táamához kapcsolódó alkalmazása (Gray & Kovács, 2001), valamint (Ohlsson & Johansson, 2010) írása alapján kerül áttekintésre.

Jelöljük a továbbiakban is  $X = (X_1, X_2, \dots, X_p)$ -vel a magyarázó változókat, és  $Y$ -nal az eredményváltozót (esetünkben a korrigált függő változót). Adott  $n$  darab megfigyelés esetén pedig a változók megfelelőit jelöljük  $y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) és  $x_{i,j}$  ( $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, p$ ).

Az általánosított lineáris modell tekinthető a jól ismert lineáris regresszió általánosításának, illetve fordított irányban az általánosított lineáris modell speciális esete a lineáris regresszió. A lineáris regresszió alapegyenlete az alábbi:

$$y_i = \mu_i + \varepsilon_i, \quad \mu_i = a + \sum_{j=1}^p b_j x_{i,j}, \quad y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3.3)$$

Problémát az okozhat a modell alkalmazásakor, ha  $y_i$  nem normális eloszlású, vagy ha a várható érték nem közvetlenül a lineáris magyarázó formulával egyenlő, hanem annak valamilyen függvényével. Ezeket a típusú általánosításokat teszi lehetővé az általánosított lineáris modell, melynek alapegyenlete az alábbi:

$$y_i = \mu_i + \varepsilon_i, \quad E(y_i) = \mu_i, \quad g(\mu_i) = \sum_{j=1}^p b_j x_{i,j}, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3.4)$$

A  $g$  függvényt link függvénynek szokás nevezni,  $g$  feltételezés szerint differenciálható és monoton függvény,  $y_i$  eloszlása pedig feltételezés szerint az exponenciális eloszláscsaládhoz tartozik, és a megfigyelt  $y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) mennyiségek továbbá függetlenek.

$y_i$  valószínűségi változó eloszlása az exponenciális eloszláscsaládból származik, ha sűrűségfüggvénye vagy a diszkrét esetben a valószínűségeloszlása felírható az alábbi alakban:

$$f_{y_i}(y, \theta_i, \Phi) = \exp \left\{ \frac{y\theta_i - b(\theta_i)}{a(\Phi)} + c(y, \Phi) \right\}, \quad (3.5)$$

ahol  $a(\cdot), b(\cdot), c(\cdot)$  függvények,  $a(\Phi)$  az úgynevezett diszperziós függvény,  $a(\Phi) = \Phi/\omega_i$ ,  $\Phi > 0$ ,  $\omega_i \geq 0$ ,  $b(\theta_i)$  pedig kétszer folytonosan differenciálható konvex függvény, invertálható második deriválttal. A fenti képlet azokra az  $y$  értékre érvényes, amik lehetséges kimenetelei  $y_i$ -nek, minden más pontban  $f_{y_i}$  értéke 0.

(Gray & Kovács, 2001) megmutatják, hogy ha  $y_i$  valószínűségi változó eloszlása az exponenciális eloszláscsaládból származik, akkor várható értéke és szórásnégyzete az alábbi formulák szerint adódik:

$$E(y_i) = \mu_i = b'(\theta_i), \quad (3.6)$$

$$D^2(y_i) = a(\Phi)b''(\theta_i).$$

Számos jól ismert eloszlásról megmutatható, hogy az exponenciális eloszláscsaládba tartozik, ilyenek például a normális, az exponenciális, a gamma, a Poisson, a binomiális vagy a Tweedie eloszlások is.

Eloszlás	$\theta_i$	$\Phi$	$a(\Phi)$	$b(\theta_i)$	$c(y, \Phi)$
Normális $N(\mu, \sigma^2)$	$\mu$	$\sigma^2$	$\Phi$	$\frac{\theta_i^2}{2}$	$\frac{y^2}{\Phi} + \log(2\pi\Phi)$ -2
Binomiális $Z \sim B(m, p),$ $y = \frac{Z}{m}$	$\log\left(\frac{p}{1-p}\right)$	$m$	$\frac{1}{\Phi}$	$\log(1+e^{\theta_i})$	$\log\left(\frac{m}{my}\right)$
Poisson $P(\lambda)$	$\log(\lambda)$	1	1	$e^{\theta_i}$	$-\log(y!)$

**13. táblázat:** A normális, a binomiális és a Poisson eloszlások, mint az exponenciális eloszláscsalád tagjai. Forrás: (Gray & Kovács, 2001).

A normális, a binomiális és a Poisson eloszlások esetén például a 13. táblázat szerint alakulnak az eloszlások megfelelő paraméterezései (a bizonyítások megtalálhatók (Gray & Kovács, 2001) cikkében).

Nagyon fontos a GLM modellek esetében a link függvényre vonatkozó feltételezés. Ohlsson és Johansson kiemelik, hogy multiplikatív modell feltevés esetén a logaritmikus link függvényt (log-link,  $g(\mu_i) = \log(\mu_i)$ ), lineáris modellek esetén az identitás link függvényt  $g(\mu_i) = \mu_i$ , arányok vagy valószínűségek esetében a logit-link függvény  $g(\mu_i) = \log\left(\frac{\mu_i}{1-\mu_i}\right)$  használják gyakran (Ohlsson & Johansson, 2010). Könnyen látható ennek oka az alábbi felírásokból:

$$\text{Log-link: } \mu_i = \exp\left\{\sum_{j=1}^p b_j x_{i,j}\right\} = \prod_{j=1}^p e^{b_j x_{i,j}}, \quad (3.7)$$

$$\text{Identitás-link: } \mu_i = \sum_{j=1}^p b_j x_{i,j}, \quad (3.8)$$

$$\text{Logit-link: } \frac{\mu_i}{1-\mu_i} = \exp\left\{\sum_{j=1}^p b_j x_{i,j}\right\} = \prod_{j=1}^p e^{b_j x_{i,j}}, \text{ így:} \quad (3.9)$$

$$\mu_i = \exp\left\{\sum_{j=1}^p b_j x_{i,j}\right\} / \left(1 + \exp\left\{\sum_{j=1}^p b_j x_{i,j}\right\}\right). \quad (3.10)$$

A GLM modellek esetén a  $b_j$  ( $j = 1, \dots, p$ ) paraméterek becslése maximum likelihood elven történik, a feltételezett exponenciális eloszláscsaládba tartozó eloszlás sűrűségfüggvénye alapján. A log-likelihood maximalizálása jellemzően numerikus módszerekkel végezhető el, például a Newton-Raphson módszerrel (lásd például (Ohlsson & Johansson, 2010)). Manapság a modellillesztést és a kapcsolódó számításokat szinte kizárólag számítógépes programcsomagok (pl. R, SPSS) felhasználásával készítik a valós adatokon történő alkalmazás során.

Az informatika fejlődésével, az egyre nagyobb számítási kapacitások rendelkezésre állásával lehetőség van számos modellváltozatot is kiszámítani, de ezek összehasonlításához szükség van valamilyen illeszkedési mutató definiálására.

A különböző modellek összehasonlítására gyakran használt mutató a deviancia. Az  $n$  megfigyelésre illesztett  $p < n$  számú paramétert tartalmazó, maximum likelihood



becsléssel kapott modell log-likelihood értékét jelölje  $\ell(\hat{\mathbf{b}})$ . Telített modellnek nevezzük azt a modellt, ami ugyanilyen feltételezett eloszlást és link függvényt használ, de amiben  $n$  számú becsült paraméter található. Ez esetben a maximum likelihood becsléssel adódó modell tökéletes illeszkedést fog adni, ennek a modellnek a log-likelihood értékét jelölje  $\ell(\hat{\mathbf{b}}_{\max})$ . Ezek alapján az illesztett  $p$  paraméterű modellhez tartozó deviancia képlete:

$$D = 2(\ell(\hat{\mathbf{b}}_{\max}) - \ell(\hat{\mathbf{b}})). \quad (3.11)$$

Megmutatható, hogy a deviancia mérőszáma közelítőleg  $(n - p)$  szabadságfokú khi-négyzet eloszlást követ.

A képlet alapján világos, hogy az alacsonyabb deviancia jelenti a jobb illeszkedést, és hogy a deviancia minimuma 0. Felmerül azonban a kérdés, hogy meddig érdemes növelni a paraméterek számát. Erre vonatkozóan Gray és Kovács a következőt javasolják. Tegyük fel, hogy a paraméterek számának  $q$ -ról  $p$ -re növelése, a devianciát  $D_q - D_p$  mértékkel változtatja. Megmutatható, hogy  $D_q - D_p$   $(p - q)$  szabadságfokú khi-négyzet eloszlást követ. A modellek közti választás történhet a likelihood arány teszt néven ismert próbával, vagy hüvelykujj-szabályként alkalmazható az az eljárás, hogy  $D_q - D_p > 2(p - q)$  esetén növeljük meg  $p$ -re a paraméterszámot (Gray & Kovács, 2001).

A GLM módszer alkalmazása kapcsán fontos kiemelni, hogy definíciójából és paraméter-becslési technikájából adódóan nem tudja automatikusan feltérképezni és kezelni a magyarázó változók közti interakciókat, hanem pontosan azokkal a magyarázó változókkal készül el az eredményváltozó becslése, amik kiválasztásra kerülnek a modell beállításakor. A maximum likelihood becslés elkészülte után az egyes magyarázó változók  $b_j$  együtthatói kapcsán tesztelhető azok szignifikanciája: a Wald-tesztstatisztika segítségével vizsgálható a  $b_j = 0$  nullhipotézis, aminek fennállása esetén az adott magyarázó változó nem szignifikáns. A lehetséges magyarázó változókkal modellt építve megvizsgálható, mely magyarázó változók tekinthetők szignifikánsnak. Ezen elv alapján különféle változószelekciós eljárások definiálhatók, melyek jellemzően implementáltak a különböző statisztikai programcsomagokba, és céljuk a szignifikáns változók megtartásával minél jobb előrejelző modell készítése. Azt azonban, hogy szükséges-e interakciókat vagy nem-lineáris függvényeket szerepeltetni a magyarázó változók közt, csak egyedi elemzés alapján lehet megállapítani. Előnye viszont a GLM módszernek, hogy a  $b_j$  együtthatók ismeretében könnyen formalizálható a modell, és díjszámításkor

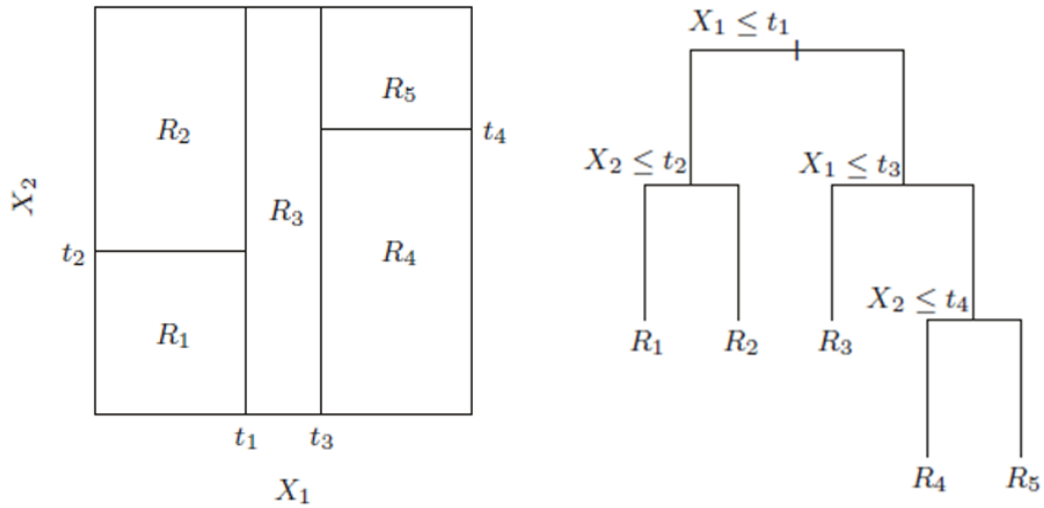
segítségükkel az ismert tarifa változók (magyarázó változók) szerinti képlet határozható meg.

A GLM technikának számos biztosítási alkalmazása ismert, segítségével becslés adható a halandósági valószínűségekre különböző magyarázó változók bevonásával, vagy használható nem-életbiztosítási (pl. gépjármű) káradatok modellezésére (Gray & Kovács, 2001). Kiemelve néhány szakirodalmi hivatkozást a gépjármű károkra történő alkalmazásra, (Kafková & Krivánková, 2014), (Giancaterino, 2016) és (Henckaerts, Antonio, Clijsters & Verbelen, 2018) is felhasználják a módszert tanulmányaikban.

### 3.4 Döntési fák és véletlen erdők modelljei

A döntési fák népszerű és egyszerűen megvalósítható gépi tanulási algoritmusként szolgálnak, mely alkalmas lehet nem-lineáris struktúrák feltérképezésére. A *klasszifikációs és regressziós fák* (angolul: *classification and regression trees*, röviden CART) matematikai modelljét tekinti át az értekezés (Hastie, Tibshirani & Friedman, 2009) módszertani könyve alapján.

A regressziós fák esetén az  $Y$  eredményváltozó folytonos változó, a klasszifikációs fák esetén pedig kategorikus változó. Mindkét esetben a cél az  $X = (X_1, X_2, \dots, X_p)$  magyarázó változók terét partícionálni  $X_i \leq s_{i,j}$  és  $X_i > s_{i,j}$  szerinti vágások sorozatával ( $s_{i,j}$  jelöli az  $i$ -edik magyarázó változóra vonatkozó  $j$ -edik vágást), és a kialakuló partíciókon belül a függő változó értékeit konstansként megbecsülni úgy, hogy egy választott célfüggvény alapján minél kisebb legyen a függő változó  $n$  megfigyelt értékére a valós ( $y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )) és a becsült ( $\hat{y}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )) értékek eltérése. A magyarázó változók megfigyelt értékeit pedig jelölje a továbbiakban  $x_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,p})$ ,  $i = 1, \dots, n$ . A 28. ábra mutatja be egy kétdimenziós magyarázó tér esetén a döntési fa sematikus struktúráját és az általa partícionált teret.



**28. ábra:** A döntési fa sematikus struktúrája és a partícionált tér.  
 Forrás: (Hastie, Tibshirani & Friedman, 2009)

A **regressziós fák** esetén, amennyiben a módszer  $M$  számú  $R_1, R_2, \dots, R_M$  partícióra osztotta fel a teret, ahol a  $c_1, c_2, \dots, c_M$  a függő változó becslései, akkor tetszőleges megfigyelt  $x_i$  megfigyelés esetén az  $f$  regressziós fa becslése az alábbi képlettel formalizálható:

$$\hat{y}_i = f(x_i) = \sum_{m=1}^M c_m \chi(x_i \in R_m). \quad (3.12)$$

A regressziós fák esetén gyakori a négyzetes eltérés hibafüggvény használata  $\sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2$ , ami a csoportonkénti átlaggal való becsléssel minimalizálható (Hastie, Tibshirani, & Friedman, 2009):

$$c_m = \frac{\sum_{i: x_i \in R_m} y_i}{\#\{x_i \in R_m\}}. \quad (3.13)$$

Az optimális vágás megtalálása a négyzetes eltérés hibafüggvény esetén megvalósítható egy mohó algoritmus segítségével. Ehhez adott  $j$  magyarázó változó és  $s$  vágási pont esetén  $(j, s)$  pár esetén adódó vágást definiálják  $R_1(j, s), R_2(j, s)$  halmazok az alábbiak szerint:

$$R_1(j, s) = \{X: X_j \leq s\}, \quad R_2(j, s) = \{X: X_j > s\}. \quad (3.14)$$

A feladat annak a  $(j, s)$  párnak a megtalálása, ami minimalizálja az alábbi formulát:

$$\min_{j,s} \left\{ \min_{c_1} \left\{ \sum_{i:x_i \in R_1(j,s)} (y_i - c_1)^2 \right\} + \min_{c_2} \left\{ \sum_{i:x_i \in R_2(j,s)} (y_i - c_2)^2 \right\} \right\}. \quad (3.15)$$

A belső  $c_1, c_2$  szerinti optimalizálás megoldása a fenti (3.13) egyenletnek megfelelően végezhető. A külső  $(j, s)$  szerinti optimalizálás pedig megvalósítható, ha előbb minden egyes rögzített  $j$  esetén kerül meghatározásra a minimum, majd ezek minimuma adja a teljes minimumot. Rögzített  $j$  esetén pedig, adott  $x_{1,j}, x_{2,j}, \dots, x_{n,j}$  megfigyelt értékeket nagyság szerinti sorrendbe rendezve legfeljebb  $(n + 1)$  lehetőség adódhat a partícionálásra, aminek vizsgálatával adódik adott  $j$  esetén a minimum.

Levélnak szokták nevezni az aktuális fa azon csomópontjait, ahol már további vágás nincs alkalmazva. Előbbi eljárással a már kialakított fa tetszőleges levelei esetén meghatározható a következő optimális tulajdonságú vágás, annyi megszorítással, hogy már csak a levélnek megfelelő partíción kell vizsgálni az új vágás lehetőségét.

Fontos kérdés, hogy milyen nagyra legyen növelve a fa, egy túlságosan szerteágazó fa esetén fennáll a lehetősége, hogy nemcsak a valódi összefüggésekre, hanem a véletlen hibákra is rátanul a mintából, úgynevezett túlillesztett modell jön létre. Természetesen a másik irány, az alulillesztés esete sem előnyös.

Népszerű eljárás a megfelelő méretű fa beállításához a *költség-komplexitási metszés* (angolul: *cost-complexity pruning*). Ennek lényege, hogy először egy biztosan elég nagy  $T_0$  fa kerül konstruálásra, majd ez kerül metszésre, amivel egy  $T \subset T_0$  részfa marad meg, ami a  $T_0$  fában szereplő valamely vágások elhagyásával keletkezik. Indexeljük a részfa leveleit  $m = 1, \dots, M_T$ -vel, a kapcsolódó partíciókat jelölje  $R_1, R_2, \dots, R_{M_T}$ , a (3.13) egyenlet szerinti becsléseket pedig  $c_1, c_2, \dots, c_{M_T}$ , legyen továbbá  $\alpha \geq 0$  rögzített paraméter. A költség komplexitási függvény:

$$C_\alpha(T) = \left( \sum_{m=1}^{M_T} \sum_{i:x_i \in R_m} (y_i - c_m)^2 \right) + \alpha M_T = c(T) + \alpha M_T. \quad (3.16)$$

Feladat annak a  $T \subset T_0$  fának a megtalálása, ami minimalizálja  $C_\alpha(T)$  függvényt. Megmutatható (lásd például (Breiman, Friedman, Olshen, & Stone, 2017)), hogy ez megtehető a következő algoritmus szerint. Egymás után távolítsuk el a belső csomópontjait a  $T_0$  fának, olyan sorrendben, hogy mindig azt a csomópontot szüntessük

meg, ami a legkisebb növekményt okozza a fenti  $c(T)$  szerinti függvényben, és folytassuk ezt az eljárást addig, amíg egy vágás nélküli fát nem kapunk. A fák ezen sorozata tartalmazni fogja a  $C_\alpha(T)$ -t minimalizáló fát, tetszőleges  $\alpha$  esetén.

A **klasszifikációs fák** esetén az  $Y$  eredményváltozó értékei az  $1, 2, \dots, K$  kategóriák közül kerülnek ki. A regressziós fák módszertanához képest csak annyi a különbség, hogy itt a négyzetes eltérés hibafüggvény nem lesz alkalmas sem a vágások, sem a metszés algoritmusára, ezért más típusú eltérésfüggvényt kell választani. Tegyük fel, hogy a módszer  $M$  számú  $R_1, R_2, \dots, R_M$  partícióra osztotta fel a teret, ahol a  $k_1, k_2, \dots, k_M$  a függő változó becslései. Jelölje  $p_{m,k}$  az  $m$ -edik csoportban a függő változó  $k$  értékének relatív gyakoriságát.  $k_m$  nem lesz más, mint az adott csoportban a legnagyobb relatív gyakoriságú elem (ha több ilyen is van, akkor tetszőleges választható közülük, legyen megállapodás szerint a legkisebb indexű). Mindez képletekkel:

$$p_{m,k} = \frac{\#\{i: x_i \in R_m, y_i = k\}}{\#\{x_i \in R_m\}}, \quad m = 1, \dots, M, \quad k = 1, \dots, K, \quad (3.17)$$

$$k_m = \arg \max_k p_{m,k}.$$

A négyzetes eltérés hibafüggvényt az  $m = 1, \dots, M$  partíciók esetén valamely úgynevezett *tisztasági mérték* (angolul: *impurity*) váltja fel, a leggyakrabban használtak az alábbiak (Hastie, Tibshirani & Friedman, 2009) rögzített  $m$  partíció esetén:

Félreosztályozás hibája:  $1 - p_{m,k_m}$ ,

$$\text{Gini-index: } \sum_{k=1}^K p_{m,k}(1 - p_{m,k}),$$

$$\text{Kereszt-entrópia: } - \sum_{k=1}^K p_{m,k} \log p_{m,k},$$

A választott tisztasági mértékkal, mint hibafüggvénnyel végezhető el mind a vágások, mind a metszés algoritmusai a klasszifikációs fák esetén. A később bemutatott esettanulmány esetén a Gini-index kerül majd alkalmazásra.

A **véletlen erdők** úgynevezett *bootstrap aggregálási* (angolul: *bootstrap aggregation*, röviden *bagging*) eljárás a klasszifikációs és regressziós fák módszerére építve. Ennek lényege, hogy az eredeti tanító mintából véletlen alminták készülnek nagyobb számban, ezeken tanul egymás után az algoritmus, majd a betanított modellek átlagolásával adódik

a végső modell, amivel a becslés varianciája nagy mértékben csökkenthető (Hastie, Tibshirani & Friedman, 2009).

Az algoritmus egzakt lépései az alábbiak (Hastie, Tibshirani & Friedman, 2009):

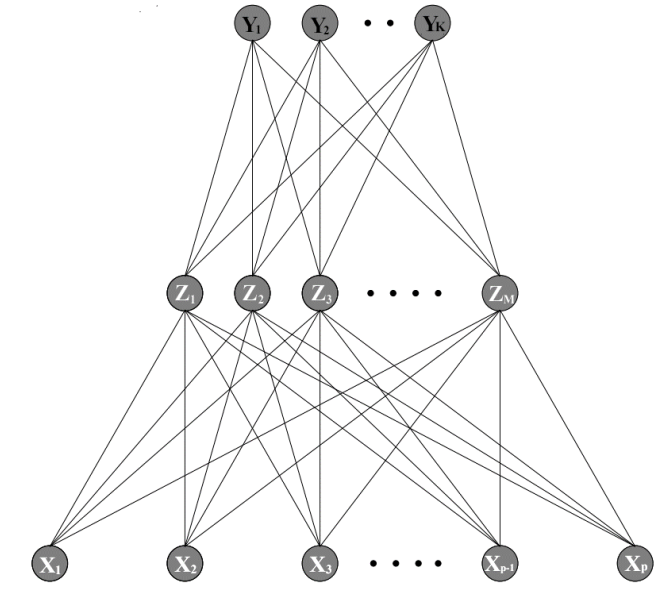
1.  $b = 1, \dots, B$ -re ismételjük az alábbiakat:
  - a. Készítsünk az eredeti input adatokból  $N$  elemszámú véletlenszerű mintát (visszatevéses mintavétellel),
  - b. Előbbire, mint tanító mintára készítsünk  $T_b$  döntési fát az alábbiak szerint a fa leveleire, mindaddig amíg a definiált minimális levél-elemszámot el nem éri a fa :
    - i. a  $p$  változóból válasszunk véletlenszerűen  $m$ -et,
    - ii. ezek alapján keressük meg és végezzük el az optimális vágást,
2. Tekintsünk ezen döntési fák együttesét  $\{T_b\}_{b=1}^B$ . Egy új  $x$  megfigyelés esetén a véletlen erdő becslése:
  - a.  $f(x) = \frac{\sum_{b=1}^B T_b(x)}{B}$  – regressziós fa esetén,
  - b.  $k_b(x)$ -szel jelölve a  $b$ -edik fa esetén adott klasszifikációs becslést,  $\{k_b(x)\}_{b=1}^B$  leggyakoribb becslése lesz véletlen erdő szerinti besorolás – klasszifikációs fa esetén.

A biztosítási kármodellezés kapcsolódó szakirodalmából (Henckaerts, Côté, Antonio & Verbelen, 2019) tanulmányát emeljük ki, akik a belga KGFB káresemény adatok modellezésére alkalmazták a véletlen erdők technikáját.

### 3.5 Neurális hálók modelljei

Az úgynevezett *mesterséges neurális hálók*, vagy röviden *neurális hálók*, kialakulásának alapgondolata abból a megfontolásból származik, hogy az emberi agy teljesen másképp tanul és cselekszik, mint egy hagyományos számítógép. Ahogy az emberi agyban lévő neuronok komplex hálózatot képeznek, ehhez hasonló struktúrát épít fel a mesterséges neurális hálók modellje is. Ahogy az emberi agy is, a neurális hálók is egy tanulási folyamattal fejlődnek, és további hasonlóság, hogy a neuronok közti kapcsolatok tárolják a rendszer tudását (Hajek, 2005).

Manapság a leggyakrabban alkalmazott neurális háló modell a *többrétegű perceptron hálózatok* (angolul *multi-layer perceptrons*, röviden *MLP*). Népszerű tanítási eljárásuk a *visszaterjesztési algoritmus* (angolul: *back-propagation*), ami a gradiens-ereszkedésen alapszik. Először az egy rejtett rétegű hálózat matematikai modelljét ismertetem (Hastie, Tibshirani & Friedman, 2009) alapján, majd ennek kiterjesztését a több rejtett réteg esetére.



**29. ábra:** Egy rejtett rétegű neurális hálózat sematikus ábrája.  
Forrás: (Hastie, Tibshirani & Friedman, 2009)

Az 29. ábrán látható az egy rejtett rétegű neurális hálózat sematikus gráfja. Az alsó réteg a bemeneti réteg,  $X = (X_1, X_2, \dots, X_p)$  input (magyarázó) változók, aminek a megfigyelt  $n$  számú megfigyelés esetén a konkrét értékei  $x_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,p}), i = 1, \dots, n$ . A középső réteg a rejtett réteg, melyet  $M$  számú látens, származtatott változó alkot. A bemeneti és a rejtett réteg változói közti kapcsolat az alábbi képlettel írható le:

$$Z_m = \sigma(\alpha_{0m} + \alpha'_m X), \quad m = 1, \dots, M, \quad (3.18)$$

ahol az  $\alpha$  értékek súly-paraméterek,  $\sigma(v)$  pedig az úgynevezett aktivációs függvény.  $\sigma(v)$ -re gyakori választás a szigmoid-függvény, ami a  $(0,1)$  intervallumon veszi fel az értékkészletét:

$$\sigma(v) = \frac{1}{1 + e^{-v}}. \quad (3.19)$$

A felső réteg a kimeneti réteg  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_K)$ . Regressziós modellezés (folytonos output változó) esetén jellemzően  $K = 1$  használatos, klasszifikációs modellezés esetén pedig jellemzően a csoportok számával megegyező kimeneti változó, ahol  $Y_k$  ( $k = 1, \dots, K$ ) a 0 – 1 értékű indikátora a  $k$ -adik csoportnak (Hastie, Tibshirani és Friedman, 2009). A megfigyelt  $n$  számú megfigyelés esetén a konkrét értékeket jelölje  $y_i = (y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,K})$ ,  $i = 1, \dots, n$ . A kimeneti réteg és a rejtett réteg közti kapcsolat az alábbi képletekkel írható le:

$$\begin{aligned} T_k &= \beta_{0k} + \beta'_k Z, \quad k = 1, \dots, K, \\ Y_k &= f_k(X) = g_k(T), \quad k = 1, \dots, K, \end{aligned} \quad (3.20)$$

ahol  $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_M)$ ,  $T = (T_1, T_2, \dots, T_K)$ , a  $\beta$  értékek súly-paraméterek,  $g_k(T)$  pedig transzformációs függvény a  $T$  outputra. Regressziós modellek esetén gyakran szokás az identitás függvényt választani ( $g_k(T) = T_k$ ), klasszifikációs modellek esetén pedig vagy az identitás függvényt, vagy az úgynevezett *softmax* függvényt, ami az alábbi képlettel formalizálható (Hastie, Tibshirani és Friedman, 2009):

$$g_k(T) = \frac{e^{T_k}}{\sum_{l=1}^K e^{T_l}}. \quad (3.21)$$

A bemutatott módszertan könnyen általánosítható több rejtett réteg esetére. Ha a 29. ábra szerinti struktúrába egy újabb rejtett réteget szeretnénk szúrni  $Z$  és  $Y$  közé,  $V = (V_1, V_2, \dots, V_J)$  változókkal, akkor az alábbiak szerint módosuló egyenletek definiálják a hálózatot:

$$Z_m = \sigma(\alpha_{0m} + \alpha'_m X), m = 1, \dots, M, \quad (3.22)$$

$$V_j = \sigma(\gamma_{0j} + \gamma'_j Z), j = 1, \dots, J,$$

$$T_k = \beta_{0k} + \beta'_k Z, \quad k = 1, \dots, K,$$

$$Y_k = f_k(X) = g_k(T), \quad k = 1, \dots, K,$$

Ezzel a módszerrel további tetszőleges számú új rejtett réteg adható hozzá a hálózathoz.

A neurális hálók illesztéséhez a tanuló minta alapján szükséges az úgynevezett súlyok meghatározása. A korábbi egy rejtett réteget tartalmazó neurális háló esetén ez az  $\{\alpha_{0m}, \alpha_m, m = 1, \dots, M\}$  (összesen  $M(p + 1)$  paraméter) és  $\{\beta_{0k}, \beta_k, k = 1, \dots, K\}$  (összesen  $K(M + 1)$  paraméter) értékek meghatározását jelenti. A teljes



paraméterhalmazt jelölje  $\Theta$ . Szükséges még egy hibafüggvény ( $R$ ) definiálása, amivel mérhető az illeszkedés jósága. Regressziós modellek esetén gyakori a négyzetes eltérés hibafüggvény használata:

$$R(\theta) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n \left( y_{i,k} - f_k(x_i) \right)^2, \quad (3.23)$$

klasszifikációs modellek esetén pedig gyakran a négyzetes eltérés vagy a kereszt-entrópia hibafüggvény használatos (Hastie, Tibshirani & Friedman, 2009), ez utóbbi képlete:

$$R(\theta) = - \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n y_{i,k} \log f_k(x_i). \quad (3.24)$$

A *visszaterjesztési algoritmus* (angolul: *back-propagation*) esetén meghatározásra kerülnek  $R(\theta)$  parciális deriváltjai  $\{\alpha_{0m}, \alpha_m, m = 1, \dots, M\}$  és  $\{\beta_{0k}, \beta_k, k = 1, \dots, K\}$  komponensei szerint, majd egy iteratív eljárás segítségével, a gradiens-ereszkedés módszerével, lépésenként a parciális deriváltak ellentettjének egy konstans-szorosával elmozdulva közelednek a paraméterek végső értékükhöz. A parciális deriváltak meghatározása egy kétlépcsős folyamat az úgynevezett visszaterjesztési egyenletek segítségével történhet. A részletes algoritmust lásd például (Hastie, Tibshirani & Friedman, 2009) leírásában.

A neurális hálók illesztése során a következő szempontokat érdemes még figyelembe venni (Hastie, Tibshirani & Friedman, 2009):

- Az iteráció kezdő súlyait érdemes 0 közelinek választani, így egy lineáris közeli modellből indul az iteráció, ami a későbbi lépéseknél nem-lineáris hatásokkal bővül, amennyiben azok szükségesek.
- Az  $R(\theta)$  globális minimumpontja jellemzően egy túlillesztett modellt jelent már. Ez orvosolható egy korai megállítási kritérium segítségével, ami történhet a validációs adathalmaz felhasználásával aszerint állítva meg a folyamatot, amikor a validációs halmazon növekedni kezd a hiba értéke. Másik lehetőség valamilyen büntetési faktorról bővíteni a hibafüggvényt, ami nem engedi túltanulni a modellt.
- A neurális hálók érzékenyek az input változók nagyságrendjére, ezért azokat célszerű előzetesen skálázni, például sztenderdizálással vagy a (0,1) intervallumra transzformálással.

Nem-életbiztosítási károk modellezésére alkalmazza a neurális hálókat (Yeo, 2011), aki úgynevezett használatalapú (*pay as you go*) KGFB biztosítások kárvalószínűségeit becsli a módszerrel amerikai adatokon.

### 3.6 Esettanulmány – KGFB biztosítások károkozási valószínűségének modellezése különböző gépi algoritmusok segítségével

Ebben a szakaszban a saját társszerzős kutatáson alapuló tanulmány eredményeit mutatom be (Burka, Kovács & Szepesváry, 2021), ami az alábbi hipotézist igazolja:

5. **Hipotézis:** empirikus adatokon bizonyítható, hogy a gépi tanulási módszerek, illetve azok kombinálásai alkalmasak lehetnek rá, hogy felhasználásukkal az általános lineáris modellnél jobb előrejelző eszköz jöjjön létre a nem-életbiztosítási kármodellezésben, és bizonyos közelítésekkel formalizálhatók is ezek a modellek, a magyarázó erő egy részének elvesztése árán.

#### 3.6.1 Felhasznált adatok és alkalmazott adattranszformációk

A tanulmány egy magyar nem-életbiztosító kötelező gépjármű felelősségbiztosítási adatain vizsgálja a kár bekövetkezésének eseményét különböző gépi algoritmusok segítségével. Két naptári év szerződéses és káradatai kerültek be a kezdeti adatbázisba. Minden kár egyértelműen hozzárendelhető az azt okozó szerződéshez, továbbá a káresemény dátuma alapján az is besorolható, hogy mely biztosítási időszakban történt a kár. Értelemszerűen adott szerződés, adott biztosítási időszaka esetén előfordulhat, hogy történt káresemény, ahogyan az is, hogy nem történt.

Az elemzés függő változója egy bináris változó, ami azt mutatja meg, hogy adott szerződés adott biztosítási évében okozott-e káreseményt (a tanulmányban és a később szereplő ábrákon *ClaimBool* néven szerepel ez a változó). Jelöljük a károkozást jelző valószínűségi változót a továbbiakban  $Y$ -nal, melynek értékei 0 vagy 1 lehetnek. Ahogy a korábban ismertetett modellfelírás esetén is, feltételezés szerint adott  $n$  darab független megfigyelés,  $y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), amik vonatkozásában differenciálni kívánjuk a feltételes eloszlást  $X = (X_1, X_2, \dots, X_p)$  magyarázó változók ismeretében, amiknek konkrét

megfigyelt értékei  $x_{i,j}$  ( $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, p$ ). Könnyen adódik, hogy  $P(Y = 1) = E(Y)$ , és hasonló egyenlőség igaz a feltételes eloszlás és feltételes várható érték esetén is.

Már itt fontos megemlíteni, hogy a mintában a károkozás egy meglehetősen ritka esemény, a kárt tartalmazó rekordok száma nem éri el az adathalmaz 4%-át. Ezen kis valószínűségű esemény bekövetkezése vagy be nem következése a modell függő változója, aminek becsléséhez számos lehetséges magyarázó változó szerepel az adatbázisban, az alábbiakban szerepel néhány példa (zárójelben a tanulmányban használt angol nyelvű rövidítése a változónak, ami a későbbi ábrákon is megjelenik majd):

- Ügyfél korcsoport (*AgeGroup*),
- Ügyfél lakhelyének régió kódja (*RegionCode*),
- Ügyfél bonus-malus besorolása az adott biztosítási évben (*BM*),
- Gépjármű teljesítmény osztálya (*KWclass*),
- Gépjármű gyártmánya (*VehicleType*),
- Gépjármű motorjának hengerűrtartalma (*VehicleCubicCapacity*),
- Gépjármű hajtóanyaga (*VehicleFuel*),
- Gépjármű gyártási éve (*VehicleManufactureYear*),
- Szerződéshez tartozó értékesítési csatorna (*VehicleSalesChannel*),
- Igényeltek-e gyermek-kedvezményt a szerződéshez (*Child*),
- Igényeltek-e családi-többautó kedvezményt a szerződéshez (*MultipleCarsinFamily*),
- Igényeltek-e tapasztalt vezető kedvezményét a szerződéshez (*ExperiencedDriver*).

A statisztikai modellépítés előtt számos előzetes adat-előkészítő lépés történt.

Egyes folytonos változók esetén (mint például az ügyfél kora vagy a gépjármű teljesítménye) előzetes kategorizáláson estek át az adatok, összhangban a vizsgált biztosító adatbázisával és szokásosan alkalmazott eljárásaival. A fentiekben felsorolt változók ezeket a kategorizálásokat már tartalmazzák. Néhány adat esetén torzítást, vagy egyes kategóriák felcserélésének módszerét alkalmaztuk, hogy a tanulmány eredményei ne sértsék az üzleti titkokat, de mindezt csak olyan mértékig tettük, hogy a modellek alkalmazhatósága és eredményei ne sérüljenek.

Mivel a díjszámítási alkalmazáshoz az éves kockázat vonatkozásában szükséges becslést adni, ezért éves bázisú időszakokra kerültek felbontásra az egyes szerződések adatai,

évenként külön rekordokat definiálva. Mindez biztosítási évek szerinti felosztással történt: az első biztosítási év a kockázatviselés kezdetével indul el, majd definíció szerint két biztosítási évforduló közti időszak tekintendő egy biztosítási évnak. Az árazási perióduson túl olyan szempontból is fontos a biztosítási évek szerinti szegmentáció, hogy egyes magyarázó változók értékei (pl. a kor vagy a bonus-malus osztály) évenként változnak. Tehát szerződésenként és biztosítási évenként meghatározhatók a magyarázó változók értékei (a biztosítási év elején érvényes adatok szerint), illetve egy-egy ilyen rekordhoz hozzárendelhető az is, hogy történt-e károkozás az adott időszakban, és amennyiben igen, hány darab, és mekkora összegben.

Fontos még kiemelni, hogy egyes rekordok egy évnél rövidebb időszak adatát is felölelhetik, amennyiben a szerződés megszűnt a biztosítási év közben, avagy cenzorált megfigyelések esetén (pl. 2019.07.01-én indul el egy biztosítási év, de 2019.12.31-ig kerülnek megfigyelésre az adatok, így csak fél évnyi időszak adata elérhető az adott egységre). Emiatt definiálandó az adott biztosítási évből kockázatban töltött idő mértéke, ami egyfajta kitettség változónak tekinthető, amit a tanulmány éves egységnek (*yearly unit*) nevez. Értelemszerűen rövidebb időszak esetén kisebb a kockázat mértéke is.

A fenti transzformációkból adódó adatbázisban szereplő nyers adatok további adattisztításnak lettek alávetve. A hiányzó és hibás adatok miatt a rekordok 0,3%-át kellett törölni. Az extrém értékek is kezelve lettek, az első és a harmadik kvartilis közötti interkvartilis terjedelem háromszorosával meghosszabbított sávokon kívüli értékek voltak extrémként kezelve (lásd például (Kovács, 2011)), ezek a rekordok is kiszűrésre kerültek a mintából. Az így adódó adatbázis több mint 200 000 rekordot tartalmaz, és több mint 20 magyarázó változó áll rendelkezésre a károkozást vizsgáló függő változó modellezéséhez.

### **3.6.2 A statisztikai modellkeret általános feltételezései és alkalmazott egyszerűsítései**

A modellezéshez implicite az alábbi feltételezéseket tettük:

- Az egyes megfigyelések (szerződésenkénti és biztosítási évenkénti rekordok) egymástól függetlenek,

- Adott szerződés és biztosítási év esetén a kockázat mértéke arányos a kockázatban töltött idő (éves egység) nagyságával,
- Két megfigyelés, amely esetén a magyarázó változók és a kockázatban töltött idő értéke is megegyezik azonos eloszlás szerint okoznak káreseményt.

A tanulmány a károkozás biztosítási évre vonatkozó bekövetkezését vizsgálja, tehát a kárral terhelt megfigyelések esetén a célváltozó értéke a károk darabszámától függetlenül 1. Ennek oka, hogy a 0 – 1 értékű függő változóval, azonos modellkeretben, egyszerűbb és jobb illeszkedésű modelleket lehetett készíteni, mintha a célváltozó a károk darabszáma, értékkészlete pedig ezáltal a természetes számok halmaza lett volna. Megvizsgáltuk, hogy a kárral rendelkező rekordok esetén milyen arányban fordul elő az egynél magasabb kárszám. Ehhez definiáltuk a  $z = \frac{\text{károk darabszáma}}{\text{kárral érintett megfigyelések száma}} - 1$  mennyiséget, melynek értéke 5% alatti. Tehát az amúgy is ritkán bekövetkező, kárt mutató megfigyeléseknek is csak kis százalékában fordul elő az egynél több okozott kár, a teljes mintára vonatkozóan pedig kevesebb, mint 2 ezrelék az ilyen esetek aránya. Ennek kezelésére lehetőség, hogy az eljárás utolsó lépésében, ha az eredményeket díjszámításra kívánjuk alkalmazni, akkor a modellek által becsült  $P(y_i = 1 | x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,p}) = E(y_i | x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,p})$  kárvalószínűségek kerüljenek felszorzásra a fenti  $(1 + z)$  mennyiséggel. Ezen szorzat előállításának célja a károk számának várható értékének becslése, ami éves kockázati kitettség esetén a kárgyakorisággal egyezik meg. Ez a becslési formula azonban csak akkor igaz, ha  $z$  értékre, mint egy  $Z$  valószínűségi változó realizációjára tekintve,  $Z$  és  $X$  függetlenek lennének. Másképp fogalmazva ez azt jelentené, hogy a sofőr tulajdonságaitól függetlenül az okozott károk darabszáma várhatóan ugyanannyi, feltéve ha tudjuk hogy a sofőr kárt okoz az adott évben. Ez a feltételezés könnyen sérülhet a valóságban, azonban jelen esetben mivel marginális az egynél több kár okozásának valószínűsége, és ezáltal az elkövethető hiba, így a fenti egyszerűsítő feltételezést alkalmaztuk a tanulmányban (Burka, Kovács & Szepesváry 2021). Eltérő kárdarabszám-eloszlás esetén megfontolandó lehet a károkozás és a kárgyakoriság más megközelítésű becslése.

További egyszerűsítő feltételezés került alkalmazásra a kitettség változó vonatkozásában. Habár például a korrigált függő változó technikájával ez jól kezelhető még a statisztikai modellépítés előtt, a tanulmány más megközelítést alkalmaz. Az  $y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) változók korrekció nélkül lesznek a statisztikai modellépítés függő változói, mintha minden megfigyelés esetén 1 lenne a kitettség értéke. Ennek oka az előbb említett 0 – 1

értékű függő változóból adódó jobb illeszkedésű modellek megőrzése. Ennek a hatásnak a korrigálására az összes megfigyelés vonatkozásában kiszámolt átlagos éves kockázatban töltött idő (jelölje  $\bar{w}$ ) reciprokával való szorzást alkalmaztuk a tanulmányban a modellek által becsült  $P(y_i = 1|x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,p}) = E(y_i|x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,p})$  kárvalószínűségek vonatkozásában. Hasonló technikát követ a kapcsolódó irodalomban (De Jong & Heller, 2008) is. A technika mögött az a feltételezés áll, hogy a kockázat mértéke arányosnak tekintett a kockázatban töltött idő mértékével, valamint hogy a kockázatban töltött idő (tekintsük  $W$  valószínűségi változónak, amelynek realizációi  $w_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )) függetlennek tekintett  $X = (X_1, X_2, \dots, X_p)$  magyarázó változóktól.

Még egy fontos számszerűsítendő hatás kerül említésre a tanulmányban. Mindez pedig abból fakad, hogy a káradatok megfigyelése adott időpontra lezáródik a modellépítéshez használt adatbázis kapcsán, és előfordulhatnak olyan károk, amik eddig az időpontig már bekövetkeztek, de még nem jelentették be őket a biztosító számára. Az ilyen károkat nevezik IBNR (*incurred but not reported*) károknak a biztosításban. Világos, hogy a díjszámítás kapcsán figyelembe kell venni ezt a típusú kötelezettséget is, hiszen a kockázatvállalás idején bekövetkezett káreseményekről van szó, csak még nem áll rendelkezésre erről adat. Emiatt az ilyen károk darabszámát és nagyságát statisztikai módszerekkel becslik a biztosító aktuáriusai. A kárgyakoriság pontos becsléséhez az IBNR károk darabszámát kell megbecsülni és a statisztikai modellépítés során korrigálni ezzel a mértékkel. Népszerű és egyszerűen kivitelezhető becslési technika a lánclétra módszer az IBNR károk előrejelzésére, az eljárás részleteit lásd például (Matvejevs, Malyarenko, & Matvejevs, 2014) írásában. Az értekezés nem tárgyalja az IBNR számítási technikákat további részleteiben.

A fenti technikák alkalmazásával elérhető az, hogy  $P(y_i = 1|x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,p}) = E(y_i|x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,p})$  mennyiségekből kiindulva megbecsülhető legyen a kárgyakoriság, és ezáltal a későbbiekben az összetett kockázat modellje – várható érték díjelv szerinti díjszámítás elkészülhessen. Az így kapott kárgyakoriság kizárólag a múltbeli tapasztalat alapján becsli a jövőbeli várható értéket, amennyiben valamilyen további várakozás van a jövőre vonatkozó tendenciákkal kapcsolatban, az külön építendő be a modellbe.

### 3.6.3 A modellek eredményei kapcsán alkalmazott kiértékelési és összehasonlítási technikák

A statisztikai modellépítés folyamatában jellemzően több halmazra szokták felosztani a megfigyeléseket, a modell hatékony tanítása érdekében azért, hogy az eljárás csak a valódi összefüggésekre tanuljon rá a mintából, a véletlen hibákra való rátanulással ne jöjjön létre túlillesztett modell.

Ezt az eshetőséget és kezelési technikáját számos szerző bemutatja a szakirodalomban, az értekezés (Frees, Meyers & Derrig, 2016) leírása alapján tekinti át a jól ismert adatelemzési gyakorlatot, annyi különbséggel, hogy a tesztelő és validáló halmazok megnevezése a könyvben szereplőhöz képest fordítottnak történik, a jobban elterjedt terminológia szerint.

Amennyiben kellő számú adat áll rendelkezésre, tanító, validáló és tesztelő halmazokra szokás felosztani a teljes mintát. A tanító és a validáló halmazok egymást kiegészítve kerülnek alkalmazásra, a tanító mintára illesztett modell a validáló halmazon kerül kiértékelésre valamilyen előre definiált mérőszám (pl. deviancia) segítségével, és a két mintán mindaddig folytatódik az adott algoritmus, amíg a kritériumok szerinti legjobb modell létre nem jön (például a véletlen erdők esetén a döntési fák számának kiválasztása, vagy a neurális hálók esetén a rejtett rétegek, illetve változók számának meghatározása a validációs halmazon adódó eredmények alapján történhet jellemzően). A teszt halmaz egy teljesen független, leválasztott minta, melyen akkor kerül alkalmazásra a modell, miután az elérte végső konfigurációját a tanító és validáló halmazokon fejlesztve. A teszt halmaz lényege, hogy megmutassa, hogy egy teljesen új mintán hogyan teljesít az algoritmus, ezért például több lehetséges modellkonstrukció esetén adott teljesítménymérőszám definiálásával hatékony összehasonlítási alapot teremt a különböző modellváltozatok közt. Az előbbiekből szerinti tanítási – validálási – tesztelési folyamat segítséget ad mind a túlillesztés, mind az alulillesztés elkerülésében.

Amennyiben nem áll rendelkezésre kellő számú adat a tanítási – validálási halmazok szétválasztásához, akkor szokás az úgynevezett  $k$ -szoros kereszt-validációt alkalmazni. Ennek lényege, hogy egy adathalmazon történik a tanítás és a validálás, a következők szerint. A minta  $k$  részre kerül felosztásra, és kiválasztásra kerül ebből  $k - 1$  tanító és 1 darab validáló halmaz, és ezen a két egységen kerül elvégzésre az adott algoritmus szerinti illesztés és validálás. Majd ez az eljárás kerül megismétlésre  $k$ -szor úgy, hogy

mindig másik alminta lesz a validáló halmaz. A  $k$  számú modell eredményei a definiált mérőszám vonatkozásában kiátlagolhatók, ezzel egy mutatóba összegezhető a  $k$ -szoros kereszt-validáció eredménye.

(Burka, Kovács & Szepesváry, 2021) tanulmányban a teljes adathalmaz véletlenszerűen kiválasztott 20%-át használtuk teszt mintaként, a többi adat töltötte be a tanítás és validálás funkcióját, amennyiben annak szétválasztására szükség volt az adott algoritmushoz. Utóbbi halmaz esetén a 10-szeres kereszt-validáció módszerével történt a szükséges felosztás.

(Burka, Kovács & Szepesváry, 2021) tanulmányban kiemelésre került, hogy a nem-életbiztosítási árazásnál használt modellillesztések esetén a legtöbb szerző a deviancia mutató segítségével értékeli ki a modellek teljesítményét. (Yeo, 2011), (Kafková & Krivánková, 2014), (Giancaterino, 2016), (Henckaerts, Antonio, Clijsters & Verbelen, 2018), (Verbelen, Antonio, & Claeskens, 2018) is eszerint járnak el tanulmányaikban. Ennek a megközelítésnek az a hátránya, hogy a deviancia csak azonos modellkeretben készült becslések esetén alkalmas az összehasonlításra, hiszen a telített modell eljárásokként más eredményt ad. Mivel a tanulmány több különféle statisztikai eljárással készített becslő modellt használ, ezért az összehasonlításhoz más típusú kiértékelési módszertan szükséges (Burka, Kovács & Szepesváry, 2021).

A kiértékelés egyik eszköze az osztályozó eljárások módszertanából ismert vágási értékre és igazságmátrixra épülő eljárás, amely segítségével a ROC görbe kirajzolható. A továbbiak megértéséhez szükséges alapfogalmak alább kerülnek áttekintésre, további részletek a módszertanról megtalálhatók például (Kovács, 2011) könyvében. Az eljárás lényege, hogy lerögzítésre kerül egy vágási érték (angol nyelvű irodalomban *cut-off value*, a továbbiakban  $c$ -vel hivatkozunk erre a mennyiségre). Majd az egyes megfigyelések a modell által becsült  $P(y_i = 1|x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,p})$  valószínűségek szerint kerülnek besorolásra a lehetséges két kategóriába, a vágási érték figyelembe vételével: amennyiben  $P(y_i = 1|x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,p}) > c$ , akkor az adott megfigyelésre a függő változó értéket 1-es értékkel (esetünkben károkozó) osztályozza a modell, egyébként pedig 0-val (kármentes). Mivel az adatmintában rendelkezésre állnak az  $y_i$  változók tényleges értékei is, ezért a függő változó valós és a modell által besorolt értékei egy  $2 \times 2$ -es mátrixban összevethetők, amit igazságmátrixnak (angol nyelvű irodalomban *confusion matrix*) szoktak nevezni. Egy sematikus példa a 14. táblázatban látható.



Valós \ Modell	0	1
0	$a$	$b$
1	$c$	$d$

**14. táblázat:** Az igazságmátrix sematikus példája.

Forrás: saját szerkesztés.

Világos, hogy az igazságmátrixot nagyban befolyásolja a vágási érték nagysága, minél kisebb az értéke, annál több megfigyelést sorol majd károkozónak a modell. Hogy egy összesített képet lehessen nyerni a besorolásról, a következőt szokás tenni. 0 és 1 közti vágási pontok sokaságán (pl. percentilisenként) kiszámításra kerül az igazságmátrix, és a 14. táblázatban használt jelölésekkel vágási értékenként kiszámításra kerülnek a következő mennyiségek:

- Valós pozitívok aránya (angol nyelvű irodalomban *true positive rate*, TPR):  $d/(c + d)$ .
- Hamis pozitívok aránya (angol nyelvű irodalomban *false positive rate*, FPR):  $b/(a + b)$ .

Előbbi pontokat vágási pontonként koordináta-rendszerben kirajzolva (vízszintes tengelyen az FPR, függőleges tengelyen a TPR értékek) kapjuk az úgynevezett ROC-görbét (angolul *receiver operating characteristic curve*). Könnyen látszik, hogy tökéletes besorolás a koordináta-rendszer (0,1) pontjának felelne meg, az  $y = x$  egyenes pontjai pedig a véletlenszerű találgatásnak felelnek meg, mintha semmi információ nem állna rendelkezésre a függő változóról. Emiatt szokás használni a ROC görbe alatti területet, mint a besorolás mérőszámát, amit AUC-vel jelölnek (angolul *area under curve*). Minél nagyobb az AUC értéke, annál jobb a modell.

A bemutatott tanulmányban a kiértékelésnél használt másik eszköz szintén az igazságmátrix logikája alapján adódik, az alábbi megfontolások alapján (Burka, Kovács & Szepesváry, 2021):

- A hibás besorolás a károkozó és a kármentes szerződések körében nem szimmetrikus pénzügyi szempontból, hiszen a kármentes ügyfeleken megszerezhető profit jellemzően sokkal alacsonyabb, mint a károkozó ügyfeleken elszenvedett veszteség a vizsgált KGFB ágazatban,
- A vállalat alapvetően a profit maximalizálásában érdekelt, a ROC görbe viszont nem hatékony eszköze az ezzel kapcsolatos elemzésnek.

A tanulmányban ezért egy hasznossági függvényt vezettünk be, amely mögött a következő megfontolások állnak. Feltételezzük, hogy a vállalat az előrejelző modellt mint egyfajta kockázat-elbírálási eszközt használja, és azokat az ügyfeleket tartja meg, akiknél az alkalmazott vágási érték mellett kármentességet jelez a modell<sup>36</sup>. Ezzel a 14. táblázat jelölése szerint  $a + c$  számú szerződést tart meg a biztosító. Tegyük fel, hogy minden kármentes szerződésen 1 egységnyi profitja van a biztosítónak, és minden károkozó szerződésen  $L$  egységnyi vesztesége<sup>37</sup>. Ez alapján a definiált hasznossági függvény:  $U(\alpha) = a + L \cdot c$ , ami az alkalmazott egyszerűsítő feltételezések mellett a vállalat profitjának mértéke az  $\alpha$  vágási érték mellett (Burka, Kovács & Szepesváry, 2021). A cél azon  $\alpha$  érték meghatározása, amely mellett  $U(\alpha)$  felveszi a maximumát, valamint számszerűsítésre kerülhet ez alapján a megtartott portfólió  $(a + c) / (a + b + c + d)$  aránya is. Az igazságmátrixok különböző kiértékelő függvényekkel való elemzése nem egyedi a szakirodalomban, egy általános modellkeretet mutat be (Figini & Uberti, 2010) tanulmánya.

### 3.6.4 Modellillesztés az adatokra, az eredmények kiértékelése és a modellek kiterjesztése

Ebben a szakaszban az idézett tanulmányban szereplő modellillesztések legfontosabb eredményeit mutatom be (Burka, Kovács & Szepesváry, 2021). A számítások az R programcsomag segítségével készültek.

A tanulmány először feltáró adatelemzési módszerekkel igazolja, hogy a károkozás összefügg a szerződések bizonyos tulajdonságaival, például a korcsoportok vagy a lakóhely régiók megoszlása eltér a kárt okozó és a kárt nem okozó megfigyelések csoportjaiban.

<sup>36</sup> Megjegyzés: A hatályos magyar jogrend szerint, évfordulóra felmondhatja a biztosító a nem-életbiztosítási szerződéseket, de KGFB ágazat esetén a szerződéskötés előtt nincs lehetőség kockázat-elbírálásra, minden érvényes ajánlatot be kell fogadni a hatályos tarifának megfelelően. Veszélyesnek ítélt ügyfél-szegmensre azonban meghatározható magasabb díj, a kockázat megfelelő alátámasztásával.

<sup>37</sup> Emögött implicite az a feltételezés áll, mintha minden szerződésnek azonos lenne a díja, azonos lenne az egy szerződésre jutó költség, és ha minden okozott kár azonos nagyságú lenne. Ezek a feltevések a valóságban természetesen sérülhetnek, azonban mivel a tanulmány csak a károkozás valószínűségét vizsgálja (a díjszámítás más összetevőit nem) így célszerű ezt az egyszerűsítő feltevést tenni. A díjszámítás további elemeivel történő kiegészítés után feloldhatók ezen egyszerűsítések.

A **GLM** modell illesztése a következők szerint történt. A vizsgált károkozást jelző változót binomiális eloszlásúnak tekintettük  $(1, p)$  paraméterekkel (ezt a speciális esetét a binomiális eloszlásnak szokás Bernoulli-eloszlásnak nevezni). Link függvénynek a korábban ismertetett logit-link függvény került alkalmazásra. Változószelekciós eljárásnak az úgynevezett iteratív SIS eljárást használtuk (lásd például (Fan & Lv, 2018)). A GLM modellek nem kezelik automatikusan a magyarázó változók esetleges interakcióinak kezelését a függő változó vonatkozásában. Először a folytonos változókat (mint például a gépjármű motorjának hengerűrtartalma) vizsgáltuk meg, hogy nemlineáris hatások jellemzőek-e. Ez az úgynevezett *thin plate spline* függvények (lásd például (Wood, 2003)) segítségével történt, amelyekkel igazolásra került, hogy a kárvalószínűség logit transzformáltja lineáris függvényének tekinthető a szereplő folytonos magyarázó változóknak. Az interakciók vonatkozásában pedig a legfeljebb három-utas kombinációkig adódó interakciók kerültek a változószelekciós eljárás hatókörébe. A tanító halmazon végül az eljárás a következő magyarázó változókból épített modellt képezte:

$$\text{AgeGroup} + \text{BM} + \text{RegionCode} + \text{KWclass} + \text{VehicleFuel} + \text{Child} + \text{VehicleCubicCapacity} + \text{MultiplieCarsInFamily} + \text{VehicleFuel} * \text{RegionCode} + \text{VehicleFuel} * \text{VehicleCubicCapacity} + \text{VehicleCubicCapacity} * \text{RegionCode}$$

A **véletlen erdő** modellje az alábbiak szerint készült. A beágyazott döntési fák esetén a Gini-index hibafüggvény került alkalmazásra az illesztéskor. A véletlen erdő esetén használt veszteségfüggvény pedig a deviancia, aminek felhasználásával kifejezhető az egyes magyarázó változók vonatkozásában is egy fontossági mérték, annak kiszámításával, hogy átlagosan mekkora relatív csökkenést okoznak a devianciában. A modellillesztés a véletlenszerűen leválasztott, megfigyelések 80%-át tartalmazó tanító – validáló halmazon történt, 10-szeres kereszt-validációt alkalmazva, az átlagos deviancia mutató használatával. A  $T = 500$  fát használó modell bizonyult a legjobbnak előbbi mérési technikai alapján. Változószelekciós eljárásként a rekurzív változó elimináció (*RFE, Recursive Feature Elimination*, lásd például (Kuhn, 2011)) módszere került alkalmazásra, ami a következő magyarázó változók alapján előálló modellt képezte:

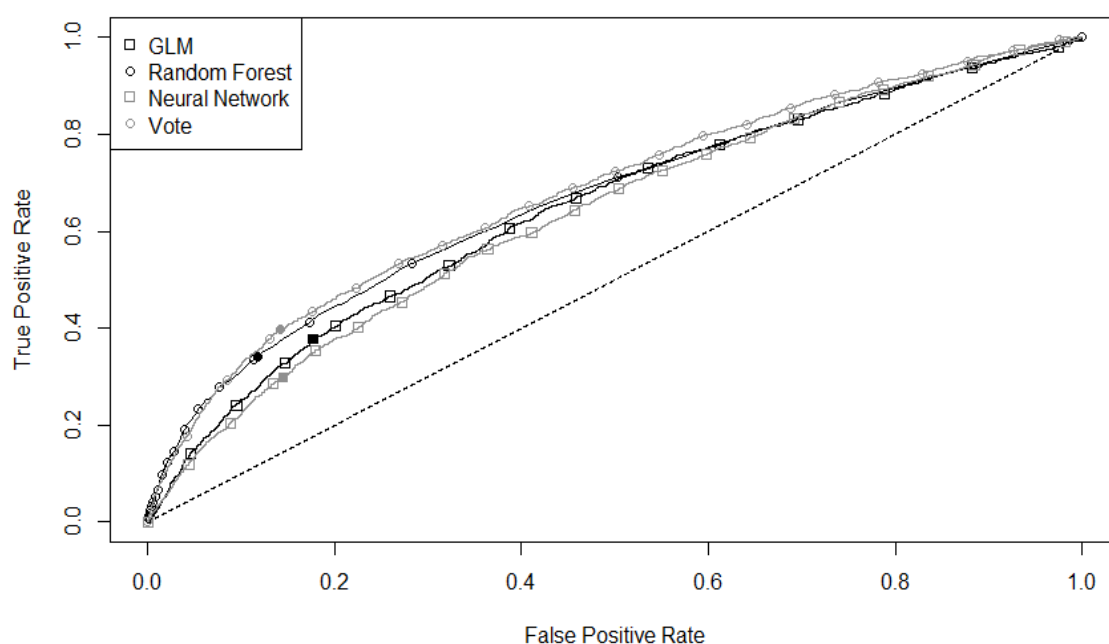
$$\text{VehicleCubicCapacity} + \text{VehicleManufactureYear} + \text{RegionCode} + \text{BM} + \text{AgeGroup} + \text{KWclass} + \text{VehicleSalesChanel} + \text{ExperiencedDriver} + \text{VehicleFuel} + \text{Child}$$

A **neurális háló** modell készítése a következők szerint történt. MLP neurális háló lett illesztve, három rejtett réteggel, és rétegenként 64 látens változóval (Lecun, Bengio, & Hinton, 2015) ajánlása alapján. Az aktivációs függvény a szigmoid függvény volt minden rétegre, a korábbi  $Y_k = f_k(X) = g_k(T)$  szerinti becslő-formulában a  $g_k$  pedig az identitás függvény. Az illesztés a visszatérjesztési algoritmus alapján történt, az alkalmazott hibafüggvény a deviancia volt. A súlyok induló értékei véletlen értékek a 0 körül. Egy elkülönített validációs halmaz támogatta a tanulási folyamatot, a visszatérjesztési algoritmus akkor áll le, ha a validációs mintán számolt hibafüggvény nem csökken adott szintet meghaladóan. Az RFE változószelekciós eljárás az összes magyarázó változót meghagyta a modellben. Az egyes változók fontossága számszerűsíthető az alapján, hogy egy adott változó milyen mértékben járult hozzá a hibafüggvény gradiens újraszámolásához az iteráció során átlagosan lépésenként (Hajek, 2005).

A tanulmány kiemeli, hogy az egyes modellek eltérő magyarázó változó halmazzal dolgoznak, továbbá eltér az is, hogy melyik módszer esetén melyek a legfontosabb ismérvek.

A kapott modellek kiértékelése és összehasonlítása a véletlenszerűen képzett, megfigyelések 20%-át tömörítő teszt halmazon történt, az előző szakaszban ismertetett kiértékelési elvek alapján. Megképzésre kerültek a ROC görbék és az AUC értékek. Az AUC értékek alapján a véletlen erdő a legjobb illeszkedésű modell, a neurális háló és a GLM hasonló teljesítményűek, de a GLM jobb némileg. Azonban a ROC görbék alapján az rajzolódik ki, hogy a vágási pontok különböző tartományaiban eltér, hogy melyik modell illeszkedése a legjobb, például a magas vágási értékek esetén a véletlen erdő módszer teljesít a legjobban, de az alacsony vágási pontok esetén (a ROC görbe jobb felső sarkánál) a neurális háló a leghatékonyabb. Ez a gondolat vezet ahhoz az ötlethez, hogy a három illesztett modell felhasználásával képződjön egy negyedik kevert modell, ami ötvözni képes az egyes eljárások előnyeit. Ezt nevezi a tanulmány **Szavazó modellnek** (Vote model), melynek lényege, hogy az egyes alapmodellek becsült valószínűségeit különböző súlyokkal kiátlagolva adódnak a Szavazó modellhez tartozó valószínűség-becslések. Az optimális súlyok egy segédprogram segítségével álltak elő. Az [1;10] intervallumba eső egész számok mint lehetséges súlyok alapján, a 10-szeres kereszt-validáció módszerével történt a kiértékelés a deviancia mutatóval. Az optimális súlyok a következők szerint adódtak: 1 GLM + 2 Véletlen erdő + 1 Neurális háló.

A 30. ábrán és a 15. táblázatban láthatók az alapmodellek és a szavazó modell ROC görbéi és AUC értékei. Az eredmények alapján egyértelműen a Szavazó modell teljesítménye a legjobb a teszt halmazon. Itt érdemes még kiemelni, hogy az AUC értékek egységesen nem túl magasak, nem érik el a hüvelykujj-szabályként definiálható, már elfogadható, közepes illeszkedést jelző 0,7-es szintet (Kovács, 2011). Ennek oka, hogy egy nagyon ritka (5% alatti relatív gyakoriságú) eseményt jelzünk előre, és hogy véletlenszerűnek tekinthető, hogy azonos tulajdonságokkal rendelkező sofőrök közül ki okoz kárt az adott biztosítási évben.



**30. ábra:** Különböző eljárások ROC görbéi.  
Forrás: (Burka, Kovács & Szepesváry, 2021)

Modell	AUC
GLM	0,6446
Véletlen erdő	0,6657
Neurális háló	0,6347
Szavazó modell	0,6791

**15. táblázat:** Különböző eljárások AUC értékei.  
Forrás: (Burka, Kovács & Szepesváry, 2021)

Mind a négy modellhez elvégzésre került továbbá az  $U(\alpha)$  hasznossági függvényhez kapcsolódó elemzés is. A 16, 17, 18, 19. táblázatokban  $L = -10, -20, -30, -50$  paraméterek mellett került kiszámításra az optimális vágási érték, és az ebből adódó maximális hasznosság és megtartott portfólió, valamint a maximális hasznosság szerinti sorrend. Az outputok alapján az  $L = -10$  esetet leszámítva mindig a szavazó modell teljesítménye a legjobb a módszer alapján. A tanulmány kiemeli, hogy a publikus magyar adatok alapján (az átlagos díjak és károk nagyságát figyelembe véve a hazai KGFB piacra)  $-20 \leq L \leq -10$  nagyságú  $L$  paraméter lehet reális. Azonban más alkalmazás esetén ennél extrémebb értékek is érdekesek lehetnek.

$L = -10$	GLM	Véletlen erdő	Neurális háló	Szavazó modell
Maximális hasznosság	27 978	28 894	27 936	28 675
Megtartott portfólió	95,7%	95,5%	99,9%	93,8%
Optimális vágási érték	8,4%	15,0%	14,0%	8,7%
Sorrend	3	1	4	2

**16. táblázat:** Az  $U(\alpha)$  hasznossági függvény elemzése  $L = -10$  paraméter mellett.

Forrás: (Burka, Kovács & Szepesváry, 2021)

$L = -20$	GLM	Véletlen erdő	Neurális háló	Szavazó modell
Maximális hasznosság	16 927	18 495	16 257	19 043
Megtartott portfólió	81,6%	88,0%	82,0%	85,0%
Optimális vágási érték	5,0%	8,6%	4,7%	5,9%
Sorrend	3	2	4	1

**17. táblázat:** Az  $U(\alpha)$  hasznossági függvény elemzése  $L = -20$  paraméter mellett.

Forrás: (Burka, Kovács & Szepesváry, 2021)

$L = -30$	GLM	Véletlen erdő	Neurális háló	Szavazó modell
Maximális hasznosság	9 046	10 422	8 297	11 009
Megtartott portfólió	56,2%	72,4%	64,8%	71,8%
Optimális vágási érték	3,4%	4,5%	3,3%	4,2%
Sorrend	3	2	4	1

**18. táblázat:** Az  $U(\alpha)$  hasznossági függvény elemzése  $L = -30$  paraméter mellett.

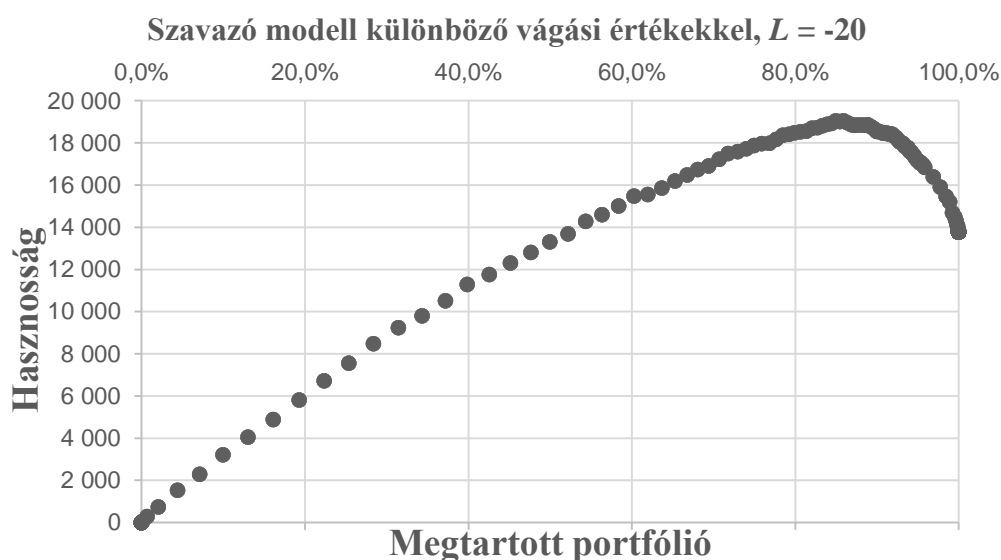
Forrás: (Burka, Kovács & Szepesváry, 2021).

$L = -50$	GLM	Véletlen erdő	Neurális háló	Szavazó modell
Maximális hasznosság	1 174	1 440	1 540	3 023
Megtartott portfólió	34,1%	26,1%	25,3%	28,4%
Optimális vágási érték	2,6%	0,7%	2,3%	2,1%
Sorrend	4	3	2	1

**19. táblázat:** Az  $U(\alpha)$  hasznossági függvény elemzése  $L = -50$  paraméter mellett.

Forrás: (Burka, Kovács & Szepesváry, 2021).

Összefoglalóan elmondható, hogy az alkalmazott kiértékelési szempontok alapján a Szavazó modell tekinthető a leghatékonyabb eljárásnak a vizsgált módszerek közül.



**31. ábra:** Megtartott portfólió és hasznosság különböző vágási értékek mellett.

Forrás: (Burka, Kovács & Szepesváry, 2021)

A 31. ábrán a Szavazó modell  $U(\alpha)$  függvényvel kapcsolatos eredményei láthatók ( $L = -20$  paraméterrel) különböző vágási pontok mellett. Az optimális pontban a portfólió 85%-a kerül megtartásra, és a kapcsolódó számítás alapján ebben a pontban a TPR mutató értéke 39,8%, az FPR mutatóé pedig 14,2%. Figyelembe véve, hogy a károkozás egy ritka és véletlenszerű esemény, megállapítható hogy a modell hatékony, a károkozó ügyfelek közel 40%-os arányát detektálja úgy, hogy nem sorol be túl sok kármentes szerződést károkozónak (Burka, Kovács & Szepesváry, 2021).

Azt a következtetést is le lehet vonni, hogy az  $L$  paraméter normál tartományba eső értékei esetén a legtöbb szerződést még az egységes díjon is érdemes megkötni / megtartani. Az

egységes díj azonban csak az elméleti modellkeret felépítéshez kellett, az alkalmazás szempontjából a cél a díjak szegmentálása, amelynek egyik pillére épp a kárvalószínűségek szerinti differenciálás. A tanulmány és egyben az értekezés utolsó szakaszában ennek megvalósítási lehetőségei kerülnek áttekintésre a leghatékonyabbnak értékelt eljárásból, a Szavazó modellből kiindulva.

### 3.6.5 A Szavazó modell alkalmazása díjszámítási célokra

Az esettanulmány bemutatása kapcsán már ismertetésre került, hogy a becült  $P(y_i = 1|x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,p}) = E(y_i|x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,p})$  valószínűségek alapján milyen lépésekkel, milyen feltételezések mellett lehet eljutni a kárgyakoriság becsléséhez. A tanulmány csak a kárbekövetkezés eseményét elemzi, a díjszámítás egyéb aspektusait, a károk nagyságát és díjak bruttósítását nem, ezek későbbi kutatások vizsgálatai lehetnek.

Az előállított Szavazó modell díjszámításra történő alkalmazására kétféle lehetőséget mutat be a tanulmány. Az első lehetőség a Szavazó modell eredményeinek változatlan formában történő felhasználása: a felhasznált magyarázó változók értékeinek bármely kombinációjára lehetséges a modell szerinti egyedi valószínűség meghatározása, ami a díjszámítás első pillére lehet. A módszer előnye, hogy megőrzi a modell teljes varianciáját, hátránya azonban a komplex struktúra és az, hogy szinte lehetetlen leírni vagy publikálni az eredményeket (Burka, Kovács & Szepesváry, 2021). Magyarországon kötelező írásos formában is meghirdetni a KGFB biztosítások tarifáit, így egy le nem írható gépi algoritmus nem teljesíti a törvényi követelményeket.

Ezen problémák orvoslására készült a következő eljárás a tanulmányban. Egy vizualizálható magyarázó modell készült a Szavazó modell becült valószínűségeire. Mindez egy regressziós fa segítségével jött létre, a becült valószínűségek, mint függő változók kerültek modellezésre az eredeti magyarázó változók felhasználásával. A négyzetes eltérés hibafüggvényt használta az algoritmus. Metszés nem került alkalmazásra, hanem adott paraméter szerinti maximális mélységig épülő fa került kiszámításra, majd ezek közül, különböző szempontok figyelembevételével készült javaslat a fa ideális méretére. A képződő fa egyes levelei klasztereket képeznek, melyekhez így könnyen döntési szabály definiálható, és amely csoportok a díjszámítás során egyszerűsítő feltételezéssel azonos kárvalószínűségűnek tekinthetők. A módszer



előnye a leírható struktúra, hátránya azonban a variancia-vesztés az eredeti Szavazó modellhez képest (Burka, Kovács & Szepesváry, 2021).

Fontos kérdés a klaszterszám meghatározása, várakozás szerint minél szerteágazóbb a fa, annál jobban leírhatók segítségével a Szavazó modell eredményei. Ennek vizsgálatához két mutatót is ismertet a tanulmány. Jelölje először is  $k$  számú klaszter esetén minden  $j = 1, \dots, k$ -ra  $\xi_j^{(k)}$  a  $j$ -edik csoport átlagos kárvalószínűséget a megfigyelt adatok alapján, és  $y_j^{(k)}$  a Szavazó modell eredményére illesztett döntési fa által adott valószínűség becslést a csoportra. Az egyik használt mutató a rangkorrelációs mutató  $\xi_j^{(k)}$  és  $y_j^{(k)}$  vektoraik közt. Ennek előnye, hogy megmutatja, hogy a csoportok becsült kárvalószínűségének sorrendje mennyire jól őrzi meg a tapasztalati kárvalószínűségek sorrendjét, ami fontos tulajdonság, hiszen a díjak sorrendjének is ezt a sorrendet kell követni. A másik használt mutató a belső eltérés-négyzetösszeg képletéhez hasonlóan azt méri, hogy a bináris célváltozó mennyire ingadozik a becsült csoportátlag valószínűség körül, képlettel:

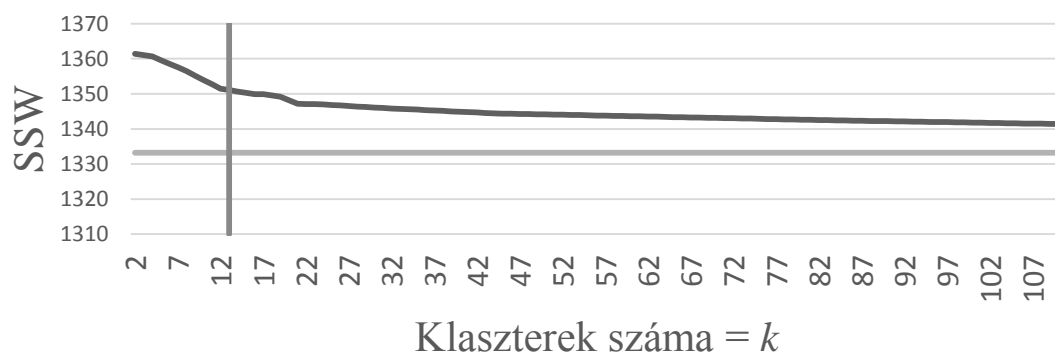
$$SSW = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} \left( y_{i,j}^{(k)} - y_j^{(k)} \right)^2, \quad (3.25)$$

ahol  $n_j$  a  $j$ -edik csoportba eső megfigyelések száma, amik esetén a vizsgált függő változó értékei  $y_{i,j}^{(k)}$  ( $i = 1, \dots, n_j$ ).

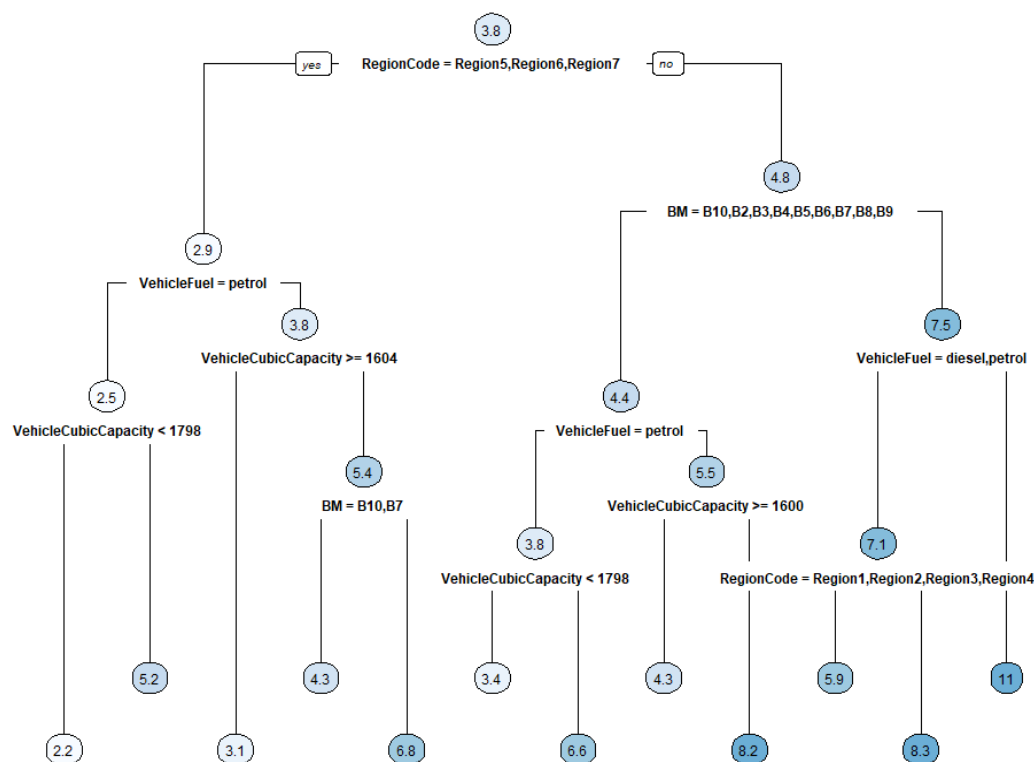
A 32. és 33. ábrán láthatók a rangkorrelációs és SSW mutatók, különböző klaszterszámok esetén (aminek értéke a vonatkozó döntési fa maximális mélységétől függ). A rangkorrelációs mutató egy bizonyos klaszterszám után csökkenni kezd, ami előnytelen tulajdonság. Az SSW viszont egyre közelebb kerül a klaszterezés nélküli eredeti Szavazó modellből számolható SSW értékhez (vízszintes vonal jelöli a 33. ábrán), bár egy bizonyos klaszterszám fölött a csökkenés marginálissá válik. A klaszterszám meghatározásánál az is fontos szempont, hogy a fa mélységének növelésével egyre bonyolultabb magyarázó struktúra jön létre. A tanulmány két javasolt klaszterszámot javasol az ábrák alapján: 12 klaszter (4-es famélységgel adódik), avagy 21 klaszter (9-es famélységgel adódik) lehet optimális választás, de a jobban vizualizálható eredmények miatt a 12-es csoportszámra szerepelnek részletesebb eredmények (Burka, Kovács & Szepesváry, 2021).



**32. ábra:** Rangkorrelációs mutató  $\xi_j^{(k)}$  és  $y_j^{(k)}$  vektoraik közt különböző  $k$  értékek esetén.  
 Forrás: (Burka, Kovács & Szepesváry, 2021)



**33. ábra:** SSW értékek különböző  $k$  értékek esetén.  
 Forrás: (Burka, Kovács & Szepesváry, 2021)



**34. ábra:** Döntési fa által javasolt klaszter-besorolás 4-es famélység (12-es klaszterszám) esetén.

Forrás: (Burka, Kovács & Szepesváry 2021)

A 34. ábrán látható a  $k = 12$  klaszterhez tartozó döntési fa. Az egyes vágásoknál a balra irány az „igen”, a jobbra irány a „nem” szétválasztást jelenti, a bekarikázott számok pedig a vonatkozó csoport átlagos becsült kárvalószínűségeit mutatják (a fa levelein  $y_j^{(12)}$  értékei láthatók). A döntési fából adódó 12 klaszter az eredeti Szavazó modell varianciájának 64%-át őrzi meg. Már ez az egyszerűsített modell is számos interakcióra világít rá a magyarázó változók közt a kárvalószínűség becslésekor, kirajzolódik az ügyfél lakhelyének régiójának számos más változóval való interakciója (az 5,6,7-es régió esetén lényegesen eltérő függőségek mutatkoznak, mint a többi helyiség esetén), de a hajtóanyag típusa, a motor hengerűrtartalma és a bonus-malus osztály is számos kölcsönhatás szerint hat a kárvalószínűsége.

A döntési fával adódó klaszterekkel már megvalósítható az eredmények publikálhatóságának kritériuma, fontos kérdés azonban, hogy a Szavazó modellből adódó eredmények varianciájának részleges elvesztésével mennyivel rosszabb előrejelző modell jött létre az eredeti modelleknél, más szavakkal megéri-e a Szavazó modellt egyszerűsített

klaszterekké visszasorolni? Ugyan a véletlen erdő, a neurális háló és a szavazó modell nagyon nehezen formalizálható eljárások, de a GLM módszer a becsült együtthatóin keresztül a díjszámításkor egyszerűen felhasználható alapot adhat, tehát egy GLM-nél rosszabb előrejelző modell nem ad többletet a formalizálandó díjszámítás esetén. A korábbi kiértékelési technikák alapján került vizsgálatra a módszer teljesítménye, az alaplátók módszerek mellé sorba állítva a döntési fával egyszerűsített Szavazó modell eredményeit is, különböző klaszterszámok esetén.

Modell	AUC, (Sorrend)
GLM	0,6446, (4.)
Véletlen erdő	0,6657, (2.)
Neurális háló	0,6347, (6.)
Szavazó modell	0,6791, (1.)
Szavazó modell (klaszterezett, k=12)	0,6361, (5.)
Szavazó modell (klaszterezett, k=21)	0,6523, (3.)

**20. táblázat:** AUC értékek kiegészítve a döntési fával egyszerűsített Szavazó modell eredményeivel.

Forrás: (Burka, Kovács & Szepesváry, 2021)

$L = -20$	GLM	Véletlen erdő	Neurális háló	Szavazó modell	Szavazó modell (klaszterezett, k=12)	Szavazó modell (klaszterezett, k=21)
Maximális hasznosság	16 927	18 495	16 257	19 043	17 280	17 877
Megtartott portfólió	81,6%	88,0%	82,0%	85,0%	82,1%	80,0%
Optimális vágási érték	5,0%	8,6%	4,7%	5,9%	4,4%	4,2%
Sorrend	5	2	6	1	4	3

**21. táblázat:** Az  $U(\alpha)$  hasznossági függvény elemzése  $L = -20$  paraméter mellett, kiegészítve a döntési fával egyszerűsített Szavazó modell eredményeivel.

Forrás: (Burka, Kovács & Szepesváry, 2021)

A 20. táblázat a különböző módszerek AUC értékeit mutatja, a 21. táblázat pedig az  $U(\alpha)$  hasznossági függvény elemzése  $L = -20$  paraméter mellett, kiegészítve a döntési fával egyszerűsített Szavazó modell eredményeivel. Mindkét táblázat azt mutatja, hogy sorban a Szavazó modell és a véletlen erdő eljárások bizonyulnak a legjobbnak. Viszont a klaszterszám növelésével  $k = 21$ -nél már az egyszerűsített Szavazó modell lesz a 3.

legjobb eljárás, tehát mind a GLM, mind a neurális háló módszereket túl tudja teljesíteni az új technika.

Ezzel a vizsgált adatokon sikerült empirikus bizonyítását adni, hogy a gépi tanulási módszerek, illetve azok kombinálásai alkalmasak lehetnek rá, hogy felhasználásukkal az általános lineáris modellnél jobb előrejelző eszköz jöjjön létre a nem-életbiztosítási kármodellezésben, és bizonyos közelítésekkel formalizálhatók is ezek a modellek, a magyarázó erő egy részének elvesztése árán.

## 4. ÖSSZEGZÉS, LEHETSÉGES IRÁNYOK KÉSŐBBI KUTATÁSOK KAPCSÁN

Az értekezésben ismertetésre került a biztosítási kockázat fogalma, az élet- és nem-életbiztosítások definíciói. A hagyományos technikákból kiindulva bemutatásra kerültek az utóbbi évtizedekben lezajlott változások, amelyek során gyökeres átalakuláson mentek keresztül a biztosítási konstrukciók mind az élet-, mind a nem-életbiztosítások esetében, ami a modern aktuáriusi technikák kialakulásához vezetett.

Az életbiztosítások esetén a modern cash flow modellezés témája képezte a vizsgálat középpontját. Ismertetésre kerültek a leginkább fontos és aktuális alkalmazási területek, valamint a cash flow modellezés általános módszertana. A pénzáram előrejelzés legfontosabb befolyásoló változói közül a befektetési hozamok, a költségek, a halandóság és az ügyfélviselkedés modellezési technikái kerültek áttekintésre. Kapcsolódó esettanulmányok segítségével az alábbi hipotézisek kerültek igazolásra:

- 1. Hipotézis:** sztochasztikus módszerek révén számszerűsíthetővé válik a technikai kamatláb által nyújtott garancia értéke, amely különösen az alacsony hozamkörnyezetben jelentős hatással lehet a kötelezettségek értékére.
- 2. Hipotézis:** a *veszteséges szerződéseknek* jelentős kihatása van az IFRS 17-beli *kezdeti megjelenítéskor* a pénzügyi eredménnyel kapcsolatos mutatókra, ami optimalizálható a modell költségekre vonatkozó feltételezéseinek kalibrálásával vagy a díjkalkulációs és valóságbeli költségstruktúra hosszú távú konzisztenssége tételével.
- 3. Hipotézis:** Hagyományos folyamatos díjas életbiztosítások esetén releváns biztosítói adatokból nem kimutatható, hogy ha a referencia hozamok meghaladják a technikai kamatláb értékét, akkor megnő a törlési ráta.
- 4. Hipotézis:** Befektetési fókuszú egyszeri díjas életbiztosítási konstrukciók esetén viszont kimutatható releváns biztosítói adatokból a külső vagy belső kamatkörnyezettől való függés. Ha más befektetési formák magasabb hozamot kínálnak, vagy az adott szerződésen belül csökken az elérhető kamat szintje, akkor az adott szerződéscsoport tulajdonságaitól is függően megnőhetnek a törlési arányok.

A nem-élet biztosítások esetén a modern díjszámítás egyes releváns kihívásai kerültek górcső alá. Olyan gépi tanulási és statisztikai módszerek (pl. általánosított lineáris modell,

döntési fák és véletlen erdők, neurális hálók) kerültek bemutatásra, amik alkalmasak nagyszámú magyarázó változó segítségével becslést adni a kárbekövetkezésre, és ezáltal a biztosítási portfólió részletes kockázati szegmentációjára, ami alapvető elvárás a modern biztosítási konstrukcióknál. Egy esettanulmány segítségével az alábbi hipotézis került igazolásra:

- 5. Hipotézis:** empirikus adatokon bizonyítható, hogy a gépi tanulási módszerek, illetve azok kombinálásai alkalmasak lehetnek rá, hogy felhasználásukkal az általános lineáris modellnél jobb előrejelző eszköz jöjjön létre a nem-életbiztosítási kármodellezésben, és bizonyos közelítésekkel formalizálhatók is ezek a modellek, a magyarázó erő egy részének elvesztése árán.

A dolgozat logikai fonalát végigkísérte a módszertan és annak gépi megvalósítási technikáinak ismertetése. Gépi tanulási algoritmusok, Monte Carlo szimulációk, idősorelemzési és többváltozós statisztikai eljárások és részletes érzékenységvizsgálati elemzések is alkalmazásra kerültek a kutatási témák vonatkozásában.

Az egyes kutatások kapcsán az értekezés kiemelte az abban lévő korlátokat és a továbblépési lehetőségeket.

Az 1. hipotézis kapcsán a kamatlábmodellek használata és a Szolvencia II belső modell szerinti tőkeszükséglet számítása lehet későbbi kutatások kiindulópontja. Itt továbbá áttekintette az értekezés a kapcsolódó tanulmány megjelenése óta végbement hozamgörbe változásokból következő hatásokat, de mivel a hozamkörnyezet folyamatosan változik, ennek figyelemmel kísérése a jövőben is fontos lehet. A hozam- és inflációs környezet változásai a 3. és 4. hipotézishez is szorosan kapcsolódnak, az értekezés kiemelte, hogy érdemes lehet egy későbbi időpontban is megismételni a vizsgálatokat, hogy hogy késleltetett hatásként megjelenik-e a visszavásárlások gyakoriságának változása. A mortalitást elemző fejezet a COVID-19 világjárvány halandóságra vonatkozó jövőbeli következményeit vetette fel, mint fontos későbbi kutatási területet. A nem-életbiztosítási elemzéseknél a kárgyakoriságra készült modell mellett fontos lehet a későbbiekben az átlagkár modellezése, illetve a bemutatott módszerek más biztosítástípusokra történő alkalmazása.

## 5. FÜGGELÉK

### 5.1. A klasszikus életbiztosítási technikák és legfontosabb összefüggéseik rövid ismertetése

A függelék első szakasza a klasszikus életbiztosítási technikák rövid áttekintését mutatja be (Banyár, 2016) könyvével összhangban.

A népszámlálási adatok segítségével korévenként meghatározható az adott megfigyelési év elején élő személyek létszáma, előbbi az egy éven belül korévenként elhunytak létszámával összevetve kiszámíthatók az úgynevezett nyers halálozási valószínűségek, melyet különböző approximációs technikákkal a véletlen hatásoktól megtisztítva adódnak a simított halálozási valószínűségek ( $q_x$ ), ahol  $x$  az életkort jelenti, évben megadva. A halálozási valószínűségek alapján képezhető halandósági tábla fontos mutatója a kihalási rend ( $l_x$ ), amely azt mutatja meg, hogy egy születéskor induló 100 000 fős populációból hányan vannak még életben  $x$  évesen:

$$l_x = l_{x-1} \cdot (1 - q_{x-1}), \quad (5.1)$$

ahol  $l_0 = 100\,000$ , és  $x = 1, \dots, \omega + 1$ ,  $\omega$ -val jelölve a feltételezett legmagasabb életkort ( $l_{\omega+1} = 0$ ). A kihalási rend alapján  $x$  évesen elhalálozók számát pedig  $d_x$  jelöli  $d_x = l_x - l_{x+1}$ .

Előbbi segítségével könnyen képezhetők a klasszikus életbiztosítási kalkulációk adatai. A klasszikus díjkalkulációban a kockázati díjrész számítása az ekvivalencia elven alapul, miszerint a bevételek jelenértékeinek várható értéke meg kell egyezzen a kiadások jelenértékeinek várható értékével (Banyár, 2016). Az ismert életbiztosítási alapkonstrukciók (pl. kockázati, elérési, járadék biztosítások stb.) nettó (kockázati fedezetre várhatóan szükséges) díjrészeinek számítása az ekvivalencia elv kibontásával egyszerű díjképletekké alakíthatók, melyek a kihalási renden és a feltételezett kamatlábon alapuló kommutációs számokból építkeznek. A bemutatott formulák bizonyításait, további részleteket lásd például (Banyár, 2016).

Jelölje  $i$  a díjszámításnál feltételezett éves kamatlábat (úgynevezett technikai kamatláb), és jelölje  $v$  az ebből számolt diszkontfaktort  $v = 1/(1 + i)$ . Az eddigi jelölések felhasználásával a legfontosabb kommutációs számok az alábbiak:



$$C_x = d_x v^{x+1}, \quad D_x = l_x v^x, \quad (5.2)$$

$$M_x = \sum_{k=x}^{\omega} C_k, \quad N_x = \sum_{k=x}^{\omega} D_k, \quad (5.3)$$

$$R_x = \sum_{k=x}^{\omega} M_k, \quad S_x = \sum_{k=x}^{\omega} N_k. \quad (5.4)$$

A teljesség igénye nélkül, néhány alapvető biztosítástípus egyszeri (azaz a tartam elején egy összegben esedékes) nettó díjának képlete az alábbi:

- Kockázati életbiztosítás (kezdetben  $x$  éves biztosított  $n$  éves tartam alatt bekövetkező halála esetén fizet 1 Ft biztosítási összeget a biztosító a halál bekövetkezési évének végén):

$$A_{x:n}^1 = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}, \quad (5.5)$$

- Elérési életbiztosítás (kezdetben  $x$  éves biztosított  $n$  éves tartam alatt nem bekövetkező halála esetén fizet 1 Ft biztosítási összeget a biztosító a tartam végén):

$$A_{x:n}^{\overline{1}} = \frac{D_{x+n}}{D_x}, \quad (5.6)$$

- Vegyes életbiztosítás (a kockázati és elérési életbiztosítások összege, azaz a két kockázat uniója):

$$A_{x:n} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}, \quad (5.7)$$

- Teljes életre szóló kockázati életbiztosítás (kezdetben  $x$  éves biztosított bármilyen későbbi időpontban bekövetkező halála esetén fizet 1 Ft biztosítási összeget a biztosító a halál bekövetkezési évének végén):

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}, \quad (5.8)$$

- Term fix életbiztosítás (kezdetben  $x$  éves biztosított  $n$  éves tartam alatt bekövetkező halálától vagy életben lététől függetlenül fizet 1 Ft biztosítási összeget a biztosító a tartam végén<sup>38</sup>):

$$A_n = v^n, \quad (5.9)$$

- Időleges járadékbiztosítás (kezdetben  $x$  éves biztosított  $n$  éves tartam alatt minden év elején 1 Ft biztosítási összeget fizet a biztosító, amíg a biztosított életben van):

$$\ddot{a}_{x:n} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}, \quad (5.10)$$

- Életjáradék-biztosítás (kezdetben  $x$  éves biztosított  $n$  éves tartam korlátozása nélkül minden év elején 1 Ft biztosítási összeget fizet a biztosító, amíg a biztosított életben van):

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}. \quad (5.11)$$

A biztosítási összegre vonatkozó 1 Ft-os érték nem jelent megszorítást, a díj egyenesen arányos a biztosítási összeggel, tehát tetszőleges pozitív  $SA$  értékkel felszorozható.

Ha a nettó díj nem egy összegben fizetendő, hanem éves rendszerességgel azonos összegben minden év elején egészen addig, amíg a biztosított életben van, de legfeljebb  $m$  évig, akkor megmutatható, hogy  $AN_{x:n}$ -nel jelölve tetszőleges biztosítástípus egyszeri nettó díját, és  $PN_{x:m}$ -mel előbb definiált rendszeres nettó díját, a következő formula igaz általánosan:

$$PN_{x:m} = \frac{AN_{x:n}}{\ddot{a}_{x:m}}. \quad (5.12)$$

A bruttó díjak (melyek a kockázati díjrészen túl fedezetül szolgálnak a biztosító költségeinek és nyereségének is) számítása a klasszikus díjkalkulációban  $\alpha, \beta, \gamma$  költségparaméterek bevezetésével történik. Az  $\alpha$  költségek a biztosítás kezdetekor felmerülő egyszeri kiadásokat tartalmazzák, amit sokszor a biztosítási összeggel tekintenek arányosnak. A  $\beta$  költségek olyan folyamatos költségek, amiket a biztosítás bruttó díjával tekintenek arányosnak, a  $\gamma$  költségelemek pedig a nem díjfizetéshez köthető

---

<sup>38</sup> A term fix biztosítás az egyszeri díjas esetben nem tartalmaz biztosítási kockázatot, a rendszeres díjas esetben válik csak valódi biztosítássá, a díjfizetés időtartamában rejlő haláleseti kockázat kapcsán.

kiadások (amik a biztosítási összeg és az időleges járadékbiztosítás egyszeri nettó díjának szorzatával arányosak). A bruttó díj ezen paraméterek, valamint a nettó díj formulájának felhasználásával szintén egyszerű matematikai képletekkel formalizálható. A fentebb ismertetett (5.5) – (5.11) biztosítási alapkoncepciók eseteire megmutatható, hogy a fenti feltételezések szerinti egyszeri bruttó díj képlete:

$$AB_{x:m} = \frac{AN_{x:n} + \alpha + \gamma \cdot a_{x:n}}{(1 - \beta)}, \quad (5.13)$$

a rendszeres éves bruttó díj képlete pedig:

$$PB_{x:m} = \frac{AN_{x:n} + \alpha + \gamma \cdot a_{x:n}}{(1 - \beta)\ddot{a}_{x:m}}. \quad (5.14)$$

A klasszikus technikák nemcsak a díjkalkulációt jelentenek, hanem további más fontos eljárások is nélkülözhetetlen eszközei a hagyományos módszertannak. A számviteli biztosítástechnikai tartalékok megfelelő képzése és számítása minden kétséget kizáróan a biztosítási üzletág egyik kardinális kérdése. Ennek egyik fontos típusa az életbiztosítási díjtartalék (matematikai tartalékok egy fajtája), ami nagyon egyszerűen fogalmazva az a pénzösszeg, amit a biztosítónak azért kell elkülönítenie, mert a jövőben bekövetkező életbiztosítási károk (pl. haláleset vagy elért életkor) fedezete részben a múltban befolyó díjaiból származik, tehát a jövőbeli szolgáltatásnak azt a részét, amit nem a jövőbeli díj fedez, tartalékként kell megképezni. Az életbiztosítási díjtartalékokra felhasználva a klasszikus díjkalkuláció eszköztárát és jelölésrendszerét szintén egyszerű matematikai képletek adhatók a kommutációs számok segítségével. A fentebbi (5.5) – (5.11) alapkoncepciók esetén megmutatható (lásd szintén (Banyár, 2016)), hogy  $V_t$ -vel jelölve a  $t$  év elteltével szükséges tartalékot,  $AN_{x:n}$ -nel jelölve az egyszeri nettó díj,  $PN_{x:m}$ -mel a rendszeres nettó díj képletet, az alábbi formulák igazak az úgynevezett prospektív (előretekinthető) szemlélet alkalmazásával:

- Egyszeri díjas esetben, illetve rendszeres díjas esetben, ha  $t > m$ :

$$V_t = AN_{x+t:n-t} \quad (5.15)$$

- Rendszeres díjas esetben, ha  $t \leq m$ :

$$V_t = AN_{x+t:n-t} - \ddot{a}_{x+t:m-t} PN_{x:m}. \quad (5.16)$$

A klasszikus életbiztosítási technikák megoldást adnak sok egyéb gyakorlati problémára is, mint például a költségek időbeli optimalizálására (*zillmerezés*), az infláció kezelésére (*indexálás, többlethozam-visszajuttatás, revalorizáció*), vagy a *maradékjogok* kezelésére.

A zillmerezés a költségek felmerülésének nem egyenletes mivoltából adódó problémára ad megoldást úgy, hogy a tartam elején kölcsön vesz a biztosító a felmerülő többletköltségekre, kevesebb tartalékot képez, mint ahogy az eredeti díjkalkulációból adódna, majd a későbbi időszakban törleszti ezt a kölcsönt vissza (akkor pedig kevesebb költséget számol el, mint az eredeti díjkalkuláció szerinti). Az indexálás egy olyan díjmelési technika, amivel a rendszeresen megképződő bruttó díjtöbbletet a biztosító a szolgáltatás emelésére fordítja, az eredeti díjkalkuláció szerinti módszertannal. A többlethozam visszaosztás a technikai kamat feletti hozamok esetén az ügyfélnek az abból való nyereségrészesedését jelenti. A revalorizáció komplex technikája úgy egyesíti az indexálás és a többlethozam visszaosztás módszerét, hogy annak eredményeképp a biztosítás díja és szolgáltatása azonos arányban változzon. A maradékjogok lényege, hogy ha a szerződő nem kívánja tovább fizetni a biztosítási díjakat, vagy szeretné a neki járó részt visszakapni az addig befizetett díjakból, akkor lehívhatja valamelyik maradékjogot képező opciót. A két leggyakoribb ilyen opció a *visszavásárlás* (amikor az addig összegyűlt díjtartalék bizonyos részét kapja vissza a szerződő és ezzel a biztosítás megszűnik) és a *díjmentesítés* (amikor az addig összegyűlt díjtartalék bizonyos részéből mint egy egyszeri bruttó díjból ad a továbbiakban szolgáltatást a biztosító, és ezzel a későbbi díjfizetési kötelezettség megszűnik).

## 5.2. A klasszikus nem-életbiztosítási technikák és legfontosabb összefüggéseik rövid ismertetése

A klasszikus nem-életbiztosítási díjszámítási technikák kapcsán, azon alapvető modellekre koncentrálva, amelyekre az értekezés megértéséhez szükség lehet (Arató, 2001) könyve alapján ad rövid betekintést az értekezés.

A klasszikus irodalom megkülönbözteti az egyéni- és az összetett kockázat modelljét. Az egyéni kockázat modelljét az alábbi egyenlettel definiálhatjuk:

$$S_e = \sum_{i=1}^n X_i, \quad (5.17)$$

ahol  $n$  a szerződések számát jelöli,  $X_i$  az  $i$ -edik szerződésre eső időszakai kárkifizetés, melyek feltételezés szerint függetlenek és ismert eloszlásúak,  $S_e$  pedig az időszakra eső össz-kárkifizetés.

Az összetett kockázat modellje pedig az alábbi:

$$S_{\delta} = \sum_{i=1}^{\eta} Y_i, \quad (5.18)$$

ahol  $\eta$  az időszak kárainak számát jelöli,  $Y_i$  az  $i$ -edik kárra vonatkozó kárkifizetés, melyek feltételezés szerint függetlenek és azonos eloszlásúak, valamint  $\eta$ -tól is függetlenek,  $S_{\delta}$  pedig az időszakra eső össz-kárkifizetés.  $S_{\delta}$  vonatkozhat akár az összes szerződés össz-kárkifizetésére vagy egy szerződésére is (ez esetben  $\eta$  az adott szerződés adott időszaki kárainak számát jelöli).

Megmutatható, hogy  $S_{\delta}$  várható értéke és szórásnégyzete:

$$E(S_{\delta}) = E(Y_1)E(\eta), \text{ ha } E(\eta) < \infty, \quad (5.19)$$

$$D^2(S_{\delta}) = E(\eta)D^2(Y_1) + D^2(\eta)(E(Y_1))^2, \text{ ha } D^2(\eta) < \infty.$$

Érdemes külön kiemelni a kárszámok és kárnagyságok modellezése kapcsán leggyakrabban feltételezett eloszlástípusokat.

A kárszámokat gyakran feltételezik Poisson, binomiális vagy negatív binomiális eloszlásúnak. Ezen eloszlások, valamint várható értékeik és szórásnégyzeteik az alábbi matematikai formulákkal írhatók le:

- $\lambda$ -paraméterű Poisson eloszlás ( $\lambda \geq 0$ ):

$$P(\eta = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, \dots \quad (5.20)$$

$$E(\eta) = \lambda,$$

$$D^2(\eta) = \lambda.$$

- $(m, p)$ -paraméterű binomiális eloszlás ( $m$  pozitív egész,  $0 \leq p \leq 1$ ):

$$P(\eta = k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}, k = 0, 1, \dots, m$$

$$E(\eta) = mp,$$

$$D^2(\eta) = mp(1-p).$$

- $(r, q)$ -paraméterű negatív binomiális eloszlás ( $r$  pozitív,  $0 \leq q < 1$ ):

$$P(\eta = k) = \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)k!} q^k (1-q)^r, k = 0, 1, \dots$$

$$E(\eta) = \frac{rq}{1-q}, \quad (5.22)$$

$$D^2(\eta) = \frac{rq}{(1-q)^2},$$

ahol  $\Gamma(\cdot)$  a gamma függvény, a természetesen számokon értelmezett faktoriális művelet általánosítása az alábbi formula segítségével:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt. \quad (5.23)$$

A kárnagyságok ( $Y_1$ ) eloszlása kapcsán jellemzően pozitív értékű abszolút folytonos eloszlásokat szoktak feltételezni, leggyakrabban az exponenciális, a lognormális, Pareto és gamma eloszlásokat, melyeknek sűrűségfüggvényei, várható értékük és szórásnégyzetük szintén áttekintésre kerül az alábbiakban:

- $\lambda$ -paraméterű exponenciális eloszlás ( $\lambda > 0$ ):

$$f_{Y_1}(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0 \quad (5.24)$$

$$E(Y_1) = \frac{1}{\lambda},$$

$$D^2(Y_1) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

- $(\mu, \sigma^2)$ -paraméterű lognormális eloszlás ( $\sigma^2 > 0$ ):

$$f_{Y_1}(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\ln(x) - \mu}{\sigma} \right)^2}, x > 0 \quad (5.25)$$

$$E(Y_1) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}},$$

$$D^2(Y_1) = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1).$$

- $(c, a)$  paraméterű Pareto eloszlás ( $c, a > 0$ ):

$$f_{Y_1}(x) = \frac{a}{c} \left( \frac{c}{x} \right)^{a+1} \chi(x > c), \quad x > 0, \quad (5.26)$$

$$E(Y_1) = \frac{a}{a-1} c, \quad a > 1,$$

$$D^2(Y_1) = \frac{ac^2}{(a-1)^2(a-2)}, \quad a > 2.$$

- $(\lambda, \alpha)$  paraméterű gamma eloszlás ( $\lambda, \alpha > 0$ ):

$$f_{Y_1}(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0, \quad (5.27)$$

$$E(Y_1) = \frac{\alpha}{\lambda},$$

$$D^2(Y_1) = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Akár a kárszámok, akár a kárnagyságok eloszlás-paramétereinek becslése kapcsán a momentumok módszere praktikus eljárást szolgáltathat (amennyiben kiválasztásra, lerögzítésre került valamelyik eloszlástípus). Ezután pedig az elemi statisztikából ismert khi-négyzet alapú illeszkedésvizsgálat segítségével tesztelhető az illesztett eloszlás megfelelése.

Tekintettel kell lenni rá, hogy bizonyos időbeli változások miatt sok esetben hibás következtetéseket eredményezhet az a módszer, hogy a múltbeli adatokra illesztett eloszlások alapján kerül modellezésre a jövőbeli kockázat, és ezáltal a jövőbeli díj mértéke. Gyakori jelenség, hogy az infláció jelentős hatással van a nem-életbiztosítási kárkifizetésekre<sup>39</sup>, emiatt a tapasztalati adatokat a kárinfláció mértékével szokás korrigálni, és a jövőre számszerűsített díj mértékében is figyelembe kell azt venni. Más időbeli változások is elképzelhetők, például általános gazdasági, természeti vagy demográfiai folyamatokkal összefüggő trendek vagy periodikus változások (Arató, 2001).

A továbbiakban a legismertebb klasszikus díjkalkulációs elvek kerülnek ismertetésre.

A  $\Pi$  díjkalkulációs elv olyan függvény, ami a nemnegatív értékeket felvevő eloszlásokhoz vagy ilyen eloszlású valószínűségi változókhoz rendel hozzá nemnegatív értékeket, a hozzárendelt érték pedig nem más, mint a díj. Érdemes lehet például  $S_0$  összetett kockázatot leíró valószínűségi változóra gondolni, és ennek kapcsán tekinteni a díjkalkulációs elvre, mint ami adott kockázathoz annak díját rendeli hozzá.

A továbbiakban  $\xi$ -vel jelöljük a vizsgált valószínűségi változót, és  $\Pi$ -vel a díjkalkulációs elvet. Itt most csak a nettó (kockázati) díjak számításával foglalkozunk. A díjak bruttósítása, azaz a költségekkel való kiegészítésük nem témája az értekezésben bemutatott számításoknak.

---

<sup>39</sup>A nem-életbiztosítási szerződések ugyan éven belüliek, de a kárkifizetések jelentősen elhúzódhatnak, például egy kötelező gépjármű felelősség biztosítás (KGFB) esetén akár teljes életre szóló járadékkötelezettségek is adódhatnak egy kárból. Továbbá az infláció figyelembevétele azért is fontos, mert a díjszámítás a jövőbeli kockázatra vonatkozik, statisztika viszont csak a múltra vonatkozóan áll rendelkezésre. Ezért a múltbeli adatok vonatkozásában is fontos az inflációs kiigazítás, és a jövő vonatkozásában is. Például a KGFB biztosítások esetén az utóbbi évek bérinflációs hatása megjelent a károkból, illetve a modernebb autók drágább alkatrészeinek hatására is nőtték a károk az utóbbi években.

A leggyakrabban használt klasszikus díjkalkulációs elvek az alábbiak:

- $\Pi$   $\lambda$ -paraméterű várható érték elv ( $\lambda \geq 0$ ), ha:

$$\Pi(\xi) = (1 + \lambda)E(\xi), \quad (5.28)$$

- $\Pi$   $\beta$ -paraméterű szórásnégyzet elv ( $\beta \geq 0$ ), ha:

$$\Pi(\xi) = E(\xi) + \beta D^2(\xi), \quad (5.29)$$

- $\Pi$   $\alpha$ -paraméterű szórás elv ( $\alpha \geq 0$ ), ha:

$$\Pi(\xi) = E(\xi) + \alpha D(\xi), \quad (5.30)$$

- $\Pi$   $\beta$ -paraméterű féloldali szórásnégyzet elv ( $\beta \geq 0$ ), ha:

$$\Pi(\xi) = E(\xi) + \beta D_+^2(\xi), \text{ ahol } D_+^2(\xi) = E(|\xi - E(\xi)|^+)^2, \quad (5.31)$$

- $\Pi$   $p$ -paraméterű maximális veszteség elv ( $1 > p > 0$ ), ha:

$$\Pi(\xi) = pE(\xi) + (1 - p) \sup\{x: P(\xi > x) > 0\}, \quad (5.32)$$

- $\Pi$   $(1 - \varepsilon, p)$ -paraméterű kvantilis elv ( $1 > p > 0, 1 > \varepsilon > 0$ ), ha:

$$\Pi(\xi) = pE(\xi) + (1 - p) \inf\{x: P(\xi < x) \geq 1 - \varepsilon\}. \quad (5.33)$$

Végezetül érdemes meggondolni, hogy az eddigi ismeretek alapján a klasszikus módszerekkel praktikusán milyen lépések szerint számolható a szerződésenkénti nettó díj. Egy olyan veszélyközösséget tekintünk, ahol a szerződésenkénti kárdarabszámok függetlenek és azonos eloszlásúak, a káronkénti kárnagyságok függetlenek és azonos eloszlásúak és a kárdarabszámoktól is függetlenek. Csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor a biztosító kellő tapasztalati adattal rendelkezik ennek a veszélyközösségnek a vonatkozásában, és ennek figyelembe vételével számolja a díjat.

A tapasztalati adatok alapján történhet a kárdarabszámok szerződésenkénti eloszlásának, illetve a kárnagyságok káronkénti eloszlásának vizsgálata. A megfelelő káreloszlások illesztésével becslés adható az összetett kockázati modell  $\eta$ , illetve  $Y_i$  eloszlásainak paramétereire (az eljárással impliciten feltételezve már az összetett kockázati modell feltevéseit). Végezetül a kiválasztott díjkalkulációs elv segítségével számolhatók a nettó díjak, figyelembe véve szükséges esetben az időbeli változások esetleges hatásait.  $E(S_0)$  és  $D^2(S_0)$  képletei a (5.19) alapján meghatározhatók, amivel a várható érték-, a szórásnégyzet- és a szórás díjkalkulációs elvek kiszámíthatók. Azon díjelvek esetén, ahol az eloszlás alapján más mutatók számszerűsítése is szükséges (lásd például kvantilis elv), adott esetben nehéz feladat lehet a díj kiszámítása. Ha a klasszikus valószínűség-számítási eszközök segítségével ez nem kivitelezhető, segítségül szolgálhatnak a korábban már említett Monte Carlo szimulációs technikák a közelítő megoldás előállítására.



## Irodalomjegyzék

- 192/2000. (XI. 24.) kormányrendelet. *192/2000. (XI. 24.) kormányrendeletet a biztosítók éves beszámoló készítési és könyvvizetési kötelezettségének sajátosságairól.* (2000).
1996. évi LXXXI. Törvény. *1996. évi LXXXI. törvény a társasági adóról és az osztalékadóról.* (1996).
2009. évi LXII. törvény. *2009. évi LXII. törvény a kötelező gépjármű-felelősségbiztosításról.* (2009).
- 2009/138/EK. *Európai Parlament és Tanács 2009/138/EK irányelve.* (2009).
2014. évi LXXXVIII. törvény. *2014. évi LXXXVIII. törvény a biztosítási tevékenységről.* (2014).
- 2014/51/EU. *Európai Parlament és Tanács 2014/51/EU irányelve.* (2014).
- 2015/35/EU. *Bizottság (EU) 2015/35 felhatalmazáson alapuló rendelete.* (2015).
- 2019/981/EU. *A Bizottság (EU) 2019/981 felhatalmazáson alapuló rendelete.* (2019).
- 54/2015. (XII. 21.) MNB rendelet. *54/2015. (XII. 21.) MNB rendelet a technikai kamatláb maximális mértékéről.* (2015).
- Ágoston, K., & Kovács, E. (2000). *Halandósági modellek.* Budapest: BKÁE Aktuárius Jegyzetek 3. kötet.
- Államadóság Kezelő Központ Zrt. referencia hozamai. (2021). Letöltve: <https://www.akk.hu/statisztika/hozamok-indexek-forgalmi-adatok/referenciahozamok>
- Anderson, J. C. H. (1959). Gross Premium Calculations and Profit Measurement for Non-Participating Insurance. *Transactions of the Society of Actuaries*, 4.
- Andrews, D. L. (1996). Simplified Cash Flow Testing of Traditional Participating Whole Life Insurance. *Actuarial Research Clearing House*, 1996 Vol. 2. Letöltve: <https://www.soa.org/library/research/actuarial-research-clearing-house/1990-99/1996/arch-2/arch96v28.pdf>
- Arató, M., Dryden, I. L., & Taylor, C. C. (2006). Hierarchical Bayesian modelling of spatial age-dependent mortality. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(2),

1347–1363.

- Arató, M. (2001). *Nem-élet biztosításmatematika*.  
<https://doi.org/10.13140/2.1.5085.0081>
- Arató, M., Bozsó, D., Elek, P., & Zempléni, A. (2009). Forecasting and simulating mortality tables. *Mathematical and Computer Modelling*, 49(3–4), 805–813.  
<https://doi.org/10.1016/j.mcm.2008.01.012>
- Árendás, Á. T., Orbán, B., & Urbán, D. (2018). Az IFRS 17 hatásai a biztosítók üzleti működésére és pénzügyi eredményére. *Biztosítás És Kockázat*, 5(3), 58–75.  
<https://doi.org/10.18530/bk.2018.3.58>
- Ballotta, L., & Haberman, S. (2008). *Options and Guarantees in Life Insurance*.  
<https://doi.org/10.1002/9780470061596.risk0362>
- Banyár, J. (2016). *Életbiztosítás (2. javított, bővített kiadás)*. Budapesti Corvinus Egyetem, Budapest.
- Barabás, B., Csörgő, M., Horváth, L., & Yandell, B. S. (1986). Bootstrapped confidence bands for percentile lifetime. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 38(3), 429–438.
- Baran, S., Gáll, J., Ispány, M., & Pap, G. (2007). Forecasting Hungarian mortality rates using the Lee-Carter method. *Acta Oeconomica*, 57(1), 21–34.  
<https://doi.org/10.1556/AOecon.57.2007.1.3>
- Barsotti, F., Milhaud, X., & Salhi, Y. (2016). Lapse risk in life insurance: Correlation and contagion effects among policyholders' behaviors. *Insurance: Mathematics and Economics*, 71, 317–331. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2016.09.008>
- Bellhouse, D. R. (2011). A new look at Halley's life table. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A: Statistics in Society*, 174(3), 823–832.  
<https://doi.org/10.1111/j.1467-985X.2010.00684.x>
- Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, A. J. (2005). *Befektetések*. Aula Kiadó, Budapest.
- Bølviken, E. (2014). *Computation and Modelling in Insurance and Finance*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Börger, M. (2010). Deterministic shock vs. stochastic value-at-risk — an analysis of the Solvency II standard model approach to longevity risk. *Blätter Der DGVFM*, 31,

225–259. <https://doi.org/10.1007/s11857-010-0125-z>

- Breiman, L., Friedman, J. H., Olshen, R. A., & Stone, C. J. (2017). Classification and regression trees. <https://doi.org/10.1201/9781315139470>
- Buchardt, K., & Møller, T. (2015). Life Insurance Cash Flows with Policyholder Behavior. *Risks*, 3(3), 290–317. <https://doi.org/10.3390/risks3030290>
- Bugár, G., & Rátting, A. (2016). A piaci kockázat számszerűsítésének változása a Bázeli III szabályozásban. *HITELINTÉZETI SZEMLE*, 15(1), 33–50. Letöltve: <https://hitelintezetiszemle.mnb.hu/letoltes/2-bugar-ratting.pdf>
- Cairns, A. J. G., Blake, D., & Dowd, K. (2006). A two factor model for stochastic mortality with Parameter uncertainty: theory and calibration. *Journal of Risk and Insurance*, 73(2), 687–718.
- Campbell, J., Chan, M., Li, K., Lombardi, L., Purushotham, M., & Rao, A. (2014). *Modeling of Policyholder Behaviour for Life Insurance and Annuity Products. A survey and literature review*. Letöltve: <https://www.soa.org/Files/Research/Projects/research-2014-modeling-policy.pdf>
- COVID-19 szigorúsági index. (2021). Letöltve: <https://ourworldindata.org/grapher/covid-stringency-index?tab=chart&region=Europe&country=~HUN>
- Csépai, O., & Kovács, E. (2021). Koronavírus-járvány adatok és biztosítási hatások elemzése. *Biztosítás És Kockázat*, 8(3–4), 24–43. <https://doi.org/10.18530/bk.2021.3-4.24>
- Csóka, P. (2003). Koherens kockázatmérés és tőkeallokáció. *Közgazdasági Szemle*, 50(10), 855–880. Letöltve: <http://epa.oszk.hu/00000/00017/00097/pdf/2csoka.pdf>
- Currie, I. D., Durban, M., & Eilers, P. H. C. (2004). Smoothing and forecasting mortality rates. *Statistical Modelling*, 4, 279–298. Letöltve: <https://www.macs.hw.ac.uk/~iain/research/Currie.SM.pdf>
- D’Amato, V., Di Lorenzo, E., Russolillo, M., & Sibillo, M. (2012). Internal risk control by solvency measures. In C. Perna & M. Sibillo (Eds.), *Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance*. Springer - Verlag Italia.
- De Jong, P., & Heller, G. Z. (2008). Generalized Linear Models for Insurance Data. In

*International Statistical Review* (Vol. 76). [https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2008.00054\\_17.x](https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2008.00054_17.x)

Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., & Kaas, M. (2005). *Actuarial Theory for Dependent Risks. Measures, Orders and Models*. Wiley Publishing, Inc.

Dömötör, B., & Miskó, J. (2016). A piaci kockázat tőkekövetelményének szabályozása. *Gazdaság És Pénzügy. 3.* Letöltve: <http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/2672/1/188-210-ig-domotor-misko.pdf>

Doornik, J. A., Castle, J. L., & Hendry, D. F. (2021). Modeling and forecasting the COVID-19 pandemic time-series data. *Social Science Quarterly*, 102(5), 2070–2087. <https://doi.org/10.1111/ssqu.13008>

Doró, A. (2015). Hogyan értékeljük pénzügyi opciókat és garanciákat piac-konzisztens módon? *Biztosítás És Kockázat*, II(1), 54-75.

EIOPA. (2014). *The underlying assumptions in the standard formula for the Solvency Capital Requirement calculation*. 1–74. Letöltve: [https://www.bafin.de/SharedDocs/Downloads/EN/Aufsichtsrecht/dl\\_underlying\\_assumptions\\_en\\_va.pdf?\\_\\_blob=publicationFile&v=2](https://www.bafin.de/SharedDocs/Downloads/EN/Aufsichtsrecht/dl_underlying_assumptions_en_va.pdf?__blob=publicationFile&v=2)

EIOPA. (2018). *EIOPA's analysis of IFRS 17 Insurance Contracts*. Letöltve: [https://register.eiopa.europa.eu/Publications/Reports/EIOPA-18-717\\_EIOPA\\_Analysis\\_IFRS\\_17\\_18\\_10\\_2018.pdf](https://register.eiopa.europa.eu/Publications/Reports/EIOPA-18-717_EIOPA_Analysis_IFRS_17_18_10_2018.pdf)

Elek, P., & Lőrincz, L. (2015). Az effektív társasági adókulcs rugalmassága Magyarországon a 2009 – 2011 közötti adókulcs csökkentés alapján. *Közgazdasági Szemle*, LXII(1), 27–47.

Eling, M., & Holder, S. (2013). Maximum technical interest rates in life insurance in Europe and the United States: An overview and comparison. *Geneva Papers on Risk and Insurance: Issues and Practice*, 38(2), 354–375. <https://doi.org/10.1057/gpp.2012.41>

Fabozzi, F. J., & Konishi, A. (1996). *The Handbook of Asset / Liability Management*. McGRAW-HILL Book Company.

Fan, J., & Lv, J. (2018). Sure Independence Screening. *Wiley StatsRef: Statistics Reference Online*, 1–8. <https://doi.org/10.1002/9781118445112.stat08043>

- Figini, S., & Uberti, P. (2010). Model assessment for predictive classification models. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 39(18), 3238–3244. <https://doi.org/10.1080/03610920903243751>
- Fisher, L. D., & Lin, D. Y. (1999). Time-dependent covariates in the cox proportional-hazards regression model. *Annual Review of Public Health*, 20(6), 145–157. <https://doi.org/10.1146/annurev.publhealth.20.1.145>
- Frees, E. W., Meyers, G., & Derrig, R. A. (2016). *Predictive modeling applications in actuarial science: Volume 2, case studies in insurance* (E. Frees, G. Meyers, & R. Derrig, Eds.). Cambridge: Cambridge University Press.
- Giancaterino, C. G. (2016). GLM , GNM and GAM Approaches on MTPL Pricing. *Journal of Mathematics and Statistical Science. Volume 2016 (pp. 427 - 481)*. Letöltve: <http://www.ss-pub.org/wp-content/uploads/2016/08/JMSS16040502.pdf>
- Gilbert, & Rivington. (1854). *Amicable Society, The charters, acts of Parliament, and by-laws of the corporation of the Amicable Society for a perpetual assurance office*.
- Gray, R., & Kovács, E. (2001). Az általánosított lineáris modell és biztosítási alkalmazásai. *Statisztikai Szemle*, 8., 689–702.
- Gutterman, S. (2000). The Valuation of Future Cash Flows: An Actuarial Issues Paper. In I. T. Vanderhoof & E. I. Altman (Eds.), *The Fair Value of Insurance Business* (pp. 49–131). [https://doi.org/10.1007/978-1-4615-4623-8\\_2](https://doi.org/10.1007/978-1-4615-4623-8_2)
- Hajek, M. (2005). *NEURAL NETWORKS*. University of KwaZulu - Natal, KwaZulu - Natal.
- Hanák, G. (2001). Törléshányadok. In Gy. Horváth (Ed.), *Aktuáriusi esettanulmányok, Aktuáriusi Jegyzetek 11. kötet*. BKÁE, Budapest.
- Hanák, G. (2017). IFRS 17 ante portas. A biztosítók pénzügyi jelentéseire vonatkozó új nemzetközi szabvány, az IFRS 17 kérdésköre – három évvel a bevezetés előtt. *Biztosítás És Kockázat*, IV(4). Letöltve: <https://mabisz.hu/wp-content/uploads/2018/08/biztositas-es-kockazat-4-evf-4-szam.pdf>
- Hastie, T., Tibshirani, R., & Friedman, J. (2009a). *The Elements of Statistical Learning*. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-84858-7>
- Henckaerts, R., Antonio, K., Clijsters, M., & Verbelen, R. (2018). A data driven binning

- strategy for the construction of insurance tariff classes. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2018(8), 681–705. <https://doi.org/10.1080/03461238.2018.1429300>
- Henckaerts, R., Côté, M.-P., Antonio, K., & Verbelen, R. (2019). *Boosting insights in insurance tariff plans with tree-based machine learning methods*. (1972), 1–34. Letöltve: <http://arxiv.org/abs/1904.10890>
- Holsboer, J. H. (2000). The Impact of Low Interest Rates on Insurers. *The Geneva Papers on Risk and Insurance*, 25(1), 38–58.
- Horváth, Gy. (2019). Fordulat a halandóságban? *Biztosítás És Kockázat*, 6(3), 18–33. <https://doi.org/10.18530/BK.2019.3.18>
- Hull, J. C. (1999). *Opciók, határidős ügyletek és egyéb származtatott termékek*. Panem Könyvkiadó.
- Human Mortality Database. Letöltve: [www.mortality.org](http://www.mortality.org)
- Hunt, A., & Blake, D. (2014). A General Procedure for Constructing Mortality Models. *North American Actuarial Journal*, 18(1), 116–138. <https://doi.org/10.1080/10920277.2013.852963>
- IASB. (2017). *IFRS Standards – IFRS 17 Insurance contracts*.
- Islam, N., Jdanov, D. A., Shkolnikov, V. M., Khunti, K., Kawachi, I., White, M., Lacey, B. (2021). Effects of covid-19 pandemic on life expectancy and premature mortality in 2020: Time series analysis in 37 countries. *The BMJ*, 375. <https://doi.org/10.1136/bmj-2021-066768>
- Janecek, M. (2012). *Valuation Techniques of Life Insurance Liabilities: Valuation Techniques and Formula Derivation*. LAP LAMBERT Academic Publishing.
- Kafková, S., & Krivánková, L. (2014). Generalized linear models in vehicle insurance. *Acta Universitatis Agriculturae et Silviculturae Mendelianae Brunensis*, 62(2), 383–388. <https://doi.org/10.11118/actaun201462020383>
- Kirchgässner, G., Wolters, J., & Hassler, U. (2013). Introduction to modern time series analysis. In *Springer Verlag*. Springer.
- Kiss, E. (2013). A kötelező gépjármű-felelősségbiztosítás rövid története és alapvető jellemzői. *Debreceni Jogi Műhely*, 3, 17–36. <https://doi.org/10.24169/DJM/2013/3/2>

- Koller, M. (2012). *Stochastic models in life insurance*. Springer.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-642-28439-7>
- Kovács, E. (2011). *Pénzügyi adatok statisztikai elemzése*. Tanszék Kft., Budapest.
- Kovács, E., & Vékás, P. (2017). Mortality and Longevity Risk. In M. Pompella & N. A. Scordis (Eds.), *The Palgrave Handbook of Unconventional Risk Transfer* (pp. 269–298). Palgrave-Macmillan.
- Koza, J. R., Bennett, F. H., Andre, D., & Keane, M. A. (1996). Automated Design of Both the Topology and Sizing of Analog Electrical Circuits Using Genetic Programming. In *Artificial Intelligence in Design '96* (pp. 151–170). [https://doi.org/10.1007/978-94-009-0279-4\\_9](https://doi.org/10.1007/978-94-009-0279-4_9)
- Kuhn, M. (2011). The caret Package. *A Unified Interface for Predictive Models*, 1–27.
- Lecun, Y., Bengio, Y., & Hinton, G. (2015). Deep learning. *Nature*, 521(7553), 436–444.  
<https://doi.org/10.1038/nature14539>
- Lee, R. D., & Carter, L. R. (1992). Modeling and Forecasting U.S. Mortality. *Journal of the American Statistical Association* 87, 659–671.
- Lee, R., & Miller, T. (2001). Evaluating the performance of the Lee-Carter method for forecasting mortality. *Demography*, 38(4), 537–549.  
<https://doi.org/10.1353/dem.2001.0036>
- Li, N., Lee, R., & Gerland, P. (2013). Extending the Lee–Carter method to model the rotation of age patterns of mortality-decline for long-term projections. *Demography*, 50(6), 2037–2051.
- Magyar Aktuárius Társaság. (2007). *A Magyar Aktuárius Társaság szakmai ajánlása A biztosító által végzendő kötelezettség megfeleléségi teszt ( KMT )*. Letöltve: [http://actuary.hu/weblap2/wp-content/uploads/KMT\\_Elfogadott\\_2007Apr261.pdf](http://actuary.hu/weblap2/wp-content/uploads/KMT_Elfogadott_2007Apr261.pdf)
- Májér, I., & Kovács, E. (2011). Élettartam-kockázat – a nyugdíjrendszerre nehezedő egyik teher. *Statisztikai Szemle*, 89 (7-8), 790–812. Letöltve: [http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/3541/1/2011\\_07-08\\_790.pdf](http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/3541/1/2011_07-08_790.pdf)
- Matvejevs, A., Malyarenko, A., & Matvejevs, A. (2014). Estimation and Calculation Procedures of the Technical Provisions for Outstanding Insurance Claims. *Applied Computer Systems*, 15(1), 14–21. <https://doi.org/10.2478/acss-2014-0002>

- Maurer, R., Rogalla, R., & Siegelin, I. (2013). Participating Payout Life Annuities: Lessons from Germany. *ASTIN Bulletin*, 43(2), 159–187. <https://doi.org/10.1017/asb.2013.10>
- Medvegyev, P., & Száz, J. (2010). *A meglepetések jellege a pénzügyi piacokon*. Nemzetközi Bankárképző Központ Zrt.
- Mehta, S. (1996). Quantifying the Success of a Life Office - Cost of Capital and Return on Capital. *SIAS Paper*, (1996 October). Letöltve: <https://www.actuaries.org.uk/documents/success-investment-management-identifying-tomorrows-successful-manager-today-0>
- MNB inflációs mutatói. (2021). Letöltve: <https://www.mnb.hu/statisztika/statisztikai-adatok-informaciok/adatok-idosorok/vi-arak>
- Ogborn, M. E. (1956). The Professional Name of Actuary. *Journal of the Institute of Actuaries*, 82(2), 233–246. <https://doi.org/10.1017/s0020268100046424>
- Ohlsson, E., & Johansson, B. (2010). *Non-Life Insurance Pricing with Generalized Linear Models*. Springer, Berlin, Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-10791-7>
- Pataky, T. (2019). *A KÖTELEZŐ GÉPJÁRMŰ-FELELŐSSÉGBIZTOSÍTÁS SZABÁLYOZÁSA ÉS TOVÁBBFEJLESZTÉSÉNEK LEHETŐSÉGEI*. HVG-ORAC Kiadó.
- Renshaw, A. E., & Haberman, S. (2006). A cohort-based extension to the Lee-Carter model for mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and Economics*, 38(3), 556–570. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2005.12.001>
- Richards, S. J. (2004). Profit Testing. In J. L. Teugels & B. Sundt (Eds.), *Encyclopedia of Actuarial Science*. <https://doi.org/10.1002/9780470012505.tap033>
- Ross, S. M. (2006). *Simulation*. Elsevier Academic Press.
- Rüfenacht, N. (2012). *Implicit Embedded Options in Life Insurance Contracts: A Market Consistent Valuation Framework*. Springer Science & Business Media.
- Segal, D. (2002). An Economic Analysis of Life Insurance Company Expenses. *North American Actuarial Journal*, 6, (2), 81–94.
- Simard, C., & Rémillard, B. (2015). Forecasting time series with multivariate copulas.



- Slud, E. V. (2006). Actuarial Mathematics and Life-Table Statistics. *University of Maryland, USA*, 2006.
- Szüle, B. (2010). Biztosítási és pénzügyi kockázat együttes hatása a biztosítók szolvencia-számításánál. *Sigma*, 41, 39–59.
- Szüle, B. (2017). On the efficiency of solvency optimizing guaranteed returns in the insurance sector. *Periodica Polytechnica Social and Management Sciences*, 25(1), 25–31. <https://doi.org/10.3311/PPso.8992>
- Tóth, C. G. (2021a). Pandémia, többlethalandóság. Magyar Közgazdasági Társaság Demográfiai Szakosztályának online szakmai rendezvénye Megtekinthető: <https://www.youtube.com/channel/UCQn9xUBg0ybiPRfB2QM4QOA/>
- Tóth, C. G. (2021b). Többlethalandóság a koronavírus-járvány miatt magyarországon 2020-ban. *Korfa* 2, 1–4.
- Tucker, H. G. (1959). A Generalization of the Glivenko-Cantelli Theorem. *The Annals of Mathematical Statistics*, 30(3). <https://doi.org/10.1214/aoms/1177706212>
- Valdez, E. (2011). *International Actuarial Association, Stochastic Modeling: Theory and Reality from an Actuarial Perspective*. Annals of Actuarial Science.
- Varga, E. T. (2014). *A progresszív fogyasztási adó alkalmazásának lehetősége*. Doktori értekezés. Letöltve: [http://www.gtk.ke.hu/tartalom/doktori/varga\\_erzsebet\\_disszertacio.pdf](http://www.gtk.ke.hu/tartalom/doktori/varga_erzsebet_disszertacio.pdf)
- Vékás, P. (2011). Túlélési modellek. In E. Kovács (Ed.), *Pénzügyi adatok statisztikai elemzése* (IV. bővített kiadás, pp. 173–194). Tanszék Kft., Budapest.
- Vékás, P. (2018). Változások a halandóságjavulás mintázatában Magyarországon. *Biztosítás És Kockázat*, 5(3), 34–47. <https://doi.org/10.18530/bk.2018.3.34>
- Vékás, P. (2019). *Az élettartam-kockázat modellezése*. Budapesti Corvinus Egyetem, Budapest.
- Verbelen, R., Antonio, K., & Claeskens, G. (2018). Unravelling the predictive power of telematics data in car insurance pricing. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C: Applied Statistics*, 67(5), 1275–1304. <https://doi.org/10.1111/rssc.12283>

- Wood, S. N. (2003). Thin plate regression splines. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B: Statistical Methodology*, 65(1), 95–114. <https://doi.org/10.1111/1467-9868.00374>
- Wüthrich, M. V., & Merz, M. (2013). *Financial Modeling, Actuarial Valuation and Solvency in Insurance*. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-31392-9>
- Yeo, A. C. (2011). Neural Networks for Automobile Insurance Pricing. In *Encyclopedia of Information Science and Technology, Second Edition* (pp. 2794–2799). <https://doi.org/10.4018/978-1-60566-026-4.ch446>

### **Egyéb szövegek közötti internetes hivatkozások:**

<https://apps.who.int/gho/data/view.main.SDG2016LEXv?lang=en>

<https://eiopa.europa.eu/>

<https://eiopa.europa.eu/regulation-supervision/insurance/solvency-ii-technical-information/risk-free-interest-rate-term-structures>

<https://mabisz.hu/kgfb-dijtarifak/>

<https://www.akk.hu/statisztika/hozamok-indexek-forgalmi-adatok/referenciahozamok>

<https://www.allampapir.hu/allampapirok/MAPP/>

[https://www.eiopa.europa.eu/tools-and-data/risk-free-interest-rate-term-structures-0\\_en](https://www.eiopa.europa.eu/tools-and-data/risk-free-interest-rate-term-structures-0_en)

<https://www.ifrs.org/news-and-events/2020/03/ifrs-17-effective-date/>

<https://www.insuranceerm.com/guides/enterprise-risk-management-technology-guide/sungard-sungard-iworks-erm-framework.html>

[https://www.ksh.hu/stadat\\_files/nep/hu/nep0065.html](https://www.ksh.hu/stadat_files/nep/hu/nep0065.html)

<https://www.mnb.hu/letoltes/idosor-biztosito-2021iine.xlsx>

<https://www.prophet-web.com/>

<https://www.towerswatson.com/en/Services/Tools/moses-applications?webSyncID=dca92273-b327-e744-3344-5988e7a6178e&sessionGUID=dd50230b-ea5e-7200-be41-e87280a77d25>

<https://www.worldometers.info/coronavirus/>

**A szereplő internetes hivatkozások (Irodalomjegyzék és egyéb szövegek közötti hivatkozások) utolsó ellenőrzése (letölthetőségének dátuma) egységesen: 2022.03.01.**

## A témakörrel kapcsolatos saját (ill. társszerzős) publikációk jegyzéke

### Idegen nyelvű – referált szakmai folyóirat

Burka, D., Kovács, L., & Szepesváry, L. (2021). Modelling MTPL insurance claim events: Can machine learning methods overperform the traditional GLM approach? *Hungarian Statistical Review*, 4(2), 34–69. <https://doi.org/10.35618/hsr2021.02.en034>

Burka, D., Puppe, C., Szepesváry, L., & Tasnádi, A. (2022). Voting: A machine learning approach. *European Journal of Operational Research*, 299(3), 1003–1017. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2021.10.005>

### Magyar nyelvű – referált szakmai folyóirat

Szepesváry, L. (2019). Onerous test, avagy az IFRS 17 szerinti veszteségességi vizsgálat : Aktuáriusi és informatikai kihívások egy életbiztosítási portfólió példáján. *Biztosítás És Kockázat*, 6(2), 18–37. <https://doi.org/10.18530/bk.2019.2.18>

Szepesváry, L. (2022). Életbiztosítások törlési rátáinak elemzése – Hogyan hatottak a hozam- és inflációs környezet változásai valamint a COVID 19-cel kapcsolatos lezárások az ügyfélviselkedésre? *(Az értekezés szövegezésének lezárásakor a cikk benyújtott, elbírálásra váró státuszban volt, sikeres befogadás esetén a Hitelintézeti szemle folyóiratban jelenik meg 2022 júniusában.)*

### Magyar nyelvű – konferencia kiadvány

Szepesváry, L. (2015). Dinamikus modellek alkalmazása életbiztosítások cash flow előrejelzésére. In *Tavaszi szél 2015 Konferenciakötet II. kötet* (pp. 581-599.). Líceum Kiadó, Eger, Doktoranduszok Országos Szövetsége.

### Magyar nyelvű – könyvfejezet

Szepesváry, L. (2016). Túlélési modellek. In B. Szüle (Ed.), *Többváltozós adatelemzési számítások* (pp. 92–110). Letölthető: <http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/2438/> (utolsó letöltés dátuma 2022.03.01.)