BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM

Közgazdasági és Gazdaságinformatikai Doktori Iskola

TÉZISGYŰJTEMÉNY

Gyetvai Márton

Optimization of Bonus-Malus Systems
című Ph.D. értekezéséhez

Témavezető:
Ágoston Kolos Csaba, PhD
Egyetemi Docens

Budapest, 2021

Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék

TÉZISGYŰJTEMÉNY

Gyetvai Márton

Optimization of Bonus-Malus Systems
című Ph.D. értekezéséhez

Témavezető:
Ágoston Kolos Csaba, PhD
Egyetemi Docens

Tartalomjegyzék

1. Szakirodalmi áttekintés és a téma fontosságának indoklása

1.1. Az optimalizálás célja

A Bónusz-málusz (BM) rendszer (BMR) egy kockázatkezelési módszer, amelyet leginkább felelősségbiztosításoknál alkalmaznak. A legismertebb alkalmazása a Kötelező gépjármű-felelősségbiztosítás (KGFB) esetén figyelhető meg. Ezért a kutatásunkban ennek a típusú biztosításnak a feltételeit használtuk fel a vizsgált modellekben. Annak ellenére, hogy a BMR optimalizálása más típusú biztosítás esetén is feltehetően hasonló lenne, minden vizsgált esetben feltettük, hogy a BM rendszert a KGFB-ra alkalmazzák.

A KGFB-ban a biztosítottak azért kötnek biztosítást, hogy fedezzék az esetlegesen másnak okozott károkat. A kutatásban feltettük, hogy a gépjármű vezetője a biztosított (szerződő), ami nem feltétlenül teljesül a gyakorlatban. Amennyiben a szerződő kárt okoz, és ezt jelenti a biztosító felé, a biztosító kifizeti az okozott kárt a károsultnak. Általában, a fejlett országokban, a gépjárművekre vonatkozó felelősségbiztosítás kötése kötelező minden gépjárműre.

A biztosító társaság a képzett tartalékból kifizeti az okozott kárt. Az erre elkülönített tartalékot minden szerződő díjfizetéséből állítják össze. Az a biztosított, aki több, vagy nagyobb kárt okoz, többet használja ki ezt a tartalékot. Tehát amennyit a szerződő kivesz ebből a keretből, erősen összefügg a kockázatával.

A szerződők a biztosítási díjuk befizetésével járulnak hozzá a tartalékhoz. Ezért értelemszerűen a biztosítási díj meghatározásánál célszerű figyelembe venni a biztosítottak kockázatát. Tehát a biztosító célja, hogy meghatározzon egy igazságos biztosítási díjat minden szerződőnek.

A díj akkor tekinthető igazságosnak, amennyiben megközelíti a szerződő kockázatát. Tehát a magasabb kockázatú biztosítottak egy igazságos díj esetén várhatóan többet fizetnek, mint a kevésbé kockázatosak. Azonban a biztosítottak tényleges kockázatát pontosan megfigyelni gyakorlati alkalmazásokban nem egyszerű feladat.

A szerződő kockázatát több paraméter is befolyásolhatja. Ezek közül feltehetően létezhet olyan paraméter, amelyet a biztosító nem-, vagy csak nehezen tud megfigyelni. Azonban amennyiben a szerződés több időszakon keresztül tart a biztosító meg tudja figyelni a szerződő viselkedését és ezáltal becsülheti a nem megfigyelhető változók hatásait.

Másképpen fogalmazva a biztosító az igazsásos díj meghatározása érdekében megpróbálja a szerződőket a kockázatuk alapján csoportosítani. Azonban kizárólag megfigyelhető változók figyelembevételével (mint például a szerződő-, jogosítvány- vagy gépjármű kora vagy pedig annak típusa) általános esetben nem tudja pontosan meghatározni a szerződők tényleges kockázati csoportjait. Ezeket a tényleges kockázati csoportokat a szakirodalomban gyakran kockázati típusoknak is szokták nevezni. Tehát a biztosító nem tudja pontosan osztályozni a biztosítottakat, feltehetően azért, mert vannak olyan nem megfigyelhető változók, amelyek befolyásolják a szerződő kockázatát.

Például, tegyük fel, hogy a biztosító egyedül a szerződők lakóhelye alapján próbálja meg meghatározni a kockázati csoportokat. Megfigyelhető, hogy a városban használt gépjárművek jellemzően kockázatosabbak, mint a vidéken használt járművek. Ez általánosságban igaz, de valamennyi eltérés is megfigyelhető. Tehát létezhetnek olyan szerződők, akik jellemzően városban használják a gépjárművüket, viszont a kártörténetük alapján kevésbé kockázatosabbak, mint egy átlagos vidéken használt gépjármű.

Ennek oka lehet, hogy léteznek még olyan változók, a szerződők lakóhelyén kívül, amelyek befolyásolják a biztosítottak díjait. Ezek a változók lehetnek akár nem megfigyelhetőek is, például a gépjárművezetők óvatossága vagy vezetési képessége.

Azt, hogy a gépjárművezető általánoságban mennyire szokott figyelmesen, vagy óvatosan vezetni a forgalomban a biztosító nem igazán tudja megfigyelni. Feltehetően a szerződő sejti magáról, hogy mennyire szokott óvatosan vezetni, de ahhoz, hogy erre a biztosító viszonylag jó becslést tudjon adni, több időszakon keresztül kell a biztosított kártörténetét figyelembe vennie. Tehát feltehetjük, hogy információs aszimmetria van jelen a biztosító és a szerződő között. Az információs aszimmetria jóléti veszteséget okoz, amelynek a mértéke csökkenthető különböző módszerekkel, például a BMR alkalmazásával.

Egy BM rendszerben véges számú osztály van. Minden osztályhoz tartozik egy díj, amelyet a szerződő fizet amennyiben ebbe az osztályba kerül besorolásra. A szerződés kezdetén minden szerződőt egy úgynevezett kezdő osztályba sorolnak. Az ezt következő időszakokban amennyiben a szerződő kárt okoz egy rosszabb (magasabb díjú) osztályba fog kerülni, ezáltal a díja várhatóan növekedni fog. Ha nem okoz kárt, akkor pedig egy alacsonyabb díjú osztályba kerül, tehát a díjfizetése várhatóan csökkenni fog. Az átsorolási szabály adja meg az időszakok közötti osztályozások rendjét. Tehát ez a szabály rögzíti, hogyha a szerződő egy adott osztályba van jelenleg besorolva, akkor melyik osztályba léphet a következő időszakban attól függően, hogy hány darab kárt okoz. Általában az átsorolási szabályok egyedül a károk számától függenek, a károk nagysága nem befolyásolja a bónusz-málusz besorolását a szerződőknek. Az átsorolási szabály lehet egységes (U - *unified*). Ebben az esetben a szerződő akármelyik osztályba van besorolva, ugyanaz az átsorolási szabály vonatkozik rá. De lehet a szabály akár nem-egységes (*NU - non-unified*) is, amely esetén az osztálybesorolástól függ, hogy az adott számú kár esetén hány osztályt ront/javít a szerződő.

Információs aszimmetria nélkül, tehát amennyiben a biztosító meg tudná figyelni tökéletesen a szerződők tényleges kockázatát, akkor minden szerződő díja megegyezne a saját kockázatával. Ez a díj lenne az ideális, de a gyakorlatban ez nehezen kivitelezhető. Ezért az optimalizálás célja, hogy minden szerződőnek olyan díj legyen meghatározva, amely a lehető legközelebb van az ideális állapothoz. Tökéletesen az ideális állapotot nem lehet elérni gyakorlati alkalmazásokban, ezért a cél, hogy a különbség minimális legyen.

Ahhoz, hogy ez a különbség a lehető legkisebb legyen, megfelelő díjakat és átsorolási szabályokat kell alkalmazni a BM rendszerben. Míg a BMR díjainak optimalizálásával számos cikk foglalkozik az aktuáriusi szakirodalomban, az optimális átsorolási szabályok meghatározásán jóval kevesebb a hangsúly.

1.2. Közgazdasági szakirodalmi áttekintés

A BM rendszereknek széles irodalma van mind közgazdasági, mind matematikai területen. Közgazdasági oldalról lényeges vizsgálódási terület volt a nem homogén kockázatok vizsgálata. Biztosíthatóság szempontjából lényeges, hogy ne egyedi kockázatokat tekintsünk, hanem több kockázat együttesét. Ha több kockázatot együtt kezelünk, óhatatlan, hogy kockázatközösségben megjelenjen valamiféle heterogenitás.

Meg lehet próbálni megfigyelhető változók szerint csoportokra osztani a kockázatközösséget (például szerződő életkora, gyermekeinek száma vagy akár a gépjármű motorjának hengerűrtartalma), ezt hívja a szakirodalom kockázati csoportokba sorolásnak.

A kockázati csoportokba sorolás az egyik leginkább alkalmazott technika a biztosítási területen, de a kockázati csoport heterogenitása nem szüntethető meg teljesen ezzel a módszerrel. Akárhány változó szerint is hozunk létre csoportokat, azt tapasztaljuk, hogy egy adott csoporton belül még mindig többféle kockázatú biztosított keveredik, ezeket a biztosítottakat a mérhető tulajdonságaik alapján vagy nem tudjuk megkülönböztetni, vagy csak nagyon nagy költséggel. Ezt a jelenséget hívja a közgazdasági irodalom antiszelekciónak. A jelenséget biztosítási piacon elsőként Rothschild and Stiglitz (1976) írta le és elemezte. A cikkben megállapítják, hogy az antiszelekció jelensége jóléti veszteséget okoz a társadalomban, ráadásul a piaci egyensúly nem is mindig létezik. Az antiszelekció okozta jóléti veszteség bizonyos módszerekkel mérsékelhető.

Cooper and Hayes (1987) többperiódusú szerződéseket vizsgált, és megállapítja, hogyha a díjszámításnál figyelembe vesszük az előző évek kártörténetét — vagyis akinek több vagy nagyobb kára volt, az a következő évben magasabb díjat fizet— akkor az antiszelekció okozta jóléti veszteség mérsékelhető. Nem nehéz ebben egy kezdetleges BM rendszert látnunk. De fontos hangsúlyozni, hogy az elméleti eredmény szerint nem minden biztosított esetén érdemes figyelembe venni a kártörténetet, és különböző kockázatú biztosítottakra különböző díjakat (= különböző BM rendszert) érdemes alkalmazni. Nyilván ez nehezen kivitelezhető a gyakorlatban. Az antiszelekcióból adódó jóléti veszteség csökkentésének másik lehetséges módja a kötelező biztosítás előírása. Érdekes módon a gépjármű felelősség biztosítás esetén ez a két mód (kötelező biztosítás és kártörténet figyelembe vétele) egyszerre jelenik meg.

A BM rendszerek kapcsán érdemes még szót ejtenünk a morális kockázat jelenségéről. Morális kockázat modellje esetén a kárbekövetkezési valószínűségek (vagy azok nagysága) nem független a biztosított viselkedésétől, tehát az erőfeszítésének mértékétől függ. Az erőfeszítés mértékét a biztosító nem tudja megfigyelni, csak a kár nagyságából tud (jó vagy rossz) következtetéseket levonni (lásd pl.: Shavell (1979)). BM rendszerek esetén a morális kockázat is kontrollálható, hiszen, ha a biztosított kisebb erőfeszítést tesz a kár elkerülésére, a következő éveben rosszabb BM osztályba kerül és nagyobb díjat kell fizetnie.

Az antiszelekciót és morális kockázat nagyon sokszor összefonódik (mint pl. a BM rendszerben is egyszerre jelentkezik), nehéz őket szétválasztani.

Holton (2001) várható hasznosság modellel vizsgálta együttesen a morális kockázatot és az antiszelekciót. Az eredményeik azt mutatják, hogy a BMR csak akkor lehet Pareto hatékony (azaz hatékony mind a biztosítónak és a szerződőknek), amennyiben az antiszelekció és a morális kockázat, vagy pedig a biztosítási költségek figyelembe vannak véve az elemzésben.

Morális kockázat egy tipikus megjelenési formája az ún. bónusz éhség, ami azt jelenti, hogyha valaki kis méretű kárt okoz, akkor érdemes lehet a kár kifizetését bevállalnia, mert a romló BM besoroláson adott esetben többet veszít, mint a kár tényleges nagysága (De Prill (1979), Sundt (1989)).

A BMR hatékonyságát rendszerint az ún. rugalmassággal (vagy az angol kifejezés után elaszticitással) mérik, amelyet Loimaranta (1972) vezetett be (ezért gyakran Loimaranta-rugalmasságnak is szokták nevezni). Az elaszticitás megmutatja, hogy ha 1%-kal növekszik a kockázat, akkor hány százalékkal változik a várható díjfizetés. Jónak tekinthető a BMR, ha az elaszticitás nulla felett van. Ideális esetben az értéke egy, de lehet több is akár.

Lemaire (1995) empirikusan vizsgált néhány gyakorlatban használt BM rendszert. A vizsgálódásából arra következtetett, hogyha a díjak nem változnak sokat az osztályok között, akkor az elaszticitás általában 1 alatti. De Prill (1978) általánosította a Loimaranta-rugalmasságot.

Loimaranta (1972) még egy fontos hozzájárulást tesz a BM rendszerek tanulmányozásához. Az általa bevezetett hasznosság mutató nem teljesen kielégítő, mert bár matematikailag könnyen megvalósítható, de csak azon az áron, hogy a BM kategóriák díjai nagy mértékben különböznek egymástól, amivel (szerinte) igazából a biztosítás eredeti értelme veszik el.

A közgazdasági irodalom ezt úgy fogalmazza meg, hogy egy kockázatkerülő döntéshozó (biztosított) nem csak a díjak várható értékét veszi számításba, hanem azok ingadozását is. Egy kockázatkerülő döntéshozó megelégszik egy nagyobb várható értékű díjjal is, ha annak az ingadozása jelentősen kisebb. Loimaranta (1972) ezért megad egy olyan díjvektort is, ami adott hatékonyság mellett a legkisebb varianciával rendelkezik.

Lemaire (1995) könyvében számos európai BM rendszert hasonlított össze. Azóta számos országban a szabályozás megváltozott, ezért utánajártunk, hogy jelenleg a KGFB-re vonatkozó BM rendszerekre milyen szabályozások vonatkoznak néhány Európai országban.

Számos országban a központi hatóság által meghatározott rendszereket eltörölték, a biztosítók szabadon megválaszthatják az értékelési rendszerüket. Ilyen ország például Belgium, vagy Portugália. Néhány ország esetében már 1995-ben is szabadon választható volt a BMR a biztosítóknak, mint például az Egyesült Királyságban, vagy Svédországban.

Azonban jelenleg is vannak olyan országok, ahol szigorú központi szabályozás van érvényben, tehát minden biztosítónak ugyanazokat az átsorolási szabályokat kell használnia. Ilyen ország például Magyarország, vagy Luxemburg. A magyarországi BM rendszerben 15 osztály van. Kármentes esetben a biztosítottak egy osztályt javítanak, illetve két osztályt rontanak a biztosítottak, minden egyes okozott kár esetén. Amennyiben 4 vagy annál több kárt okoztak az időszak alatt, akkor a legmagasabb díjú osztályba kerülnek a szerződők.

Vannak olyan országok, mint például Németország vagy Hollandia, ahol néhány paraméterét a BMR-nek szabadon megválaszthatják a biztosítók, de bizonyos paraméterek pedig rögzítettek. Például Németország esetén kármentes esetben egy osztályt lépnek felfelé a szerződők, de kár esetén a besorolás eltérhet biztosítónként.

Azonban általánosságban elmondható, hogy az utóbbi időkben jellemzően feloldják a szigorú korlátozásokat a BM rendszerekre, tehát a biztosítók egyre több országban használhatnak saját BM rendszert a KGFB-re és nem pedig egy központilag meghatározott szabályt. Azonban az antiszelekciót még azokban az országokban is kezelnie kell a biztosítóknak, ahol teljesen szabadon dönthetnek, mivel a szerződők kártörténetét, a keresésünk alapján, minden országban figyelembe kell vennie a biztosítónak a díj meghatározásához. Összességében elmondható, hogy bár egyre kevésbé jellemző a központilag szabályozott BMR Európában, a BMR alkalmazása jelenleg a leginkább a használt technika KGFB esetén.

1.3. Matematikai szakirodalmi áttekintés

Matematikai szempontból a BMR jellemzően a Markov láncok alkalmazásai esetén tűnik fel. A BM rendszerek matematikai tárgyalása Molnar and Rockwell (1966) cikkében tűnik fel először. Ebben munkában már feltűnik a BM rendszerek Markov folyamattal való leírásának lehetősége.

Általában a BM rendszerek vizsgálása esetén felteszik, hogy a szerződő díja egyedül a BM rendszertől függ. Tehát nincsenek olyan további díjtételek, amelyek a szerződő végső díjfizetését befolyásolnák. Ezért a biztosított díjfizetése egy adott időszakban egyedül attól függ, hogy melyik osztályba van besorolva.

A BM rendszerben minden időszakban besorolják a szerződőket. Egy időszak a gyakorlatban jellemzően egy év. Tehát az összes időszakban minden szerződőt átsorolnak egy másik osztályba, vagy a szerződő akár ugyanabban az osztályban marad a következő időszakban is. A szerződők következő időszaki osztálybesorolása egyedül attól függ, hogy jelenleg melyik osztályba vannak sorolva. Tehát a következő időszak várható besorolásának a meghatározásához a jelenlegi időszak előtti besorolásokat nem kell ismerni.

Jelölje X_t a BM rendszerben egy biztosított osztálybesorolását a t-edik időpontban, amelyet értelmezhetünk úgy, mint egy diszkrét időszakokban értelmezett sztochasztikus folyamat. Továbbá legyen ρ a t időszak előttire vonatkozó minden megfigyelés a szerződőről.

$$\mathbb{P}(X_t = k|X_{t-1} = l, \rho) = \mathbb{P}(X_t = k|X_{t-1} = l) \qquad \text{(Markov tulajdonság)}$$

Mivel egy adott időszakban a szerződő osztálybesorolása egyedül a károk számától és a korábbi időszak besorolásától függ, ezért a BMR átsorolási folyamata Markov tulajdonságú.

1. Definíció. *Egy diszkrét időszakokban értelmezett sztochasztikus folyamatot akkor nevezünk Markov-láncnak, ha minden t időszakra igaz, hogy:*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{t+1} = k_{t+1}|X_t = k_t, X_{t-1} = k_{t-1}, \ldots, X_1 = k_1, X_0 = k_0) = \\ \mathbb{P}(X_{t+1} = k_{t+1}|X_t = k_t)\end{aligned} \tag{1}$$

Kutatásunkban feltesszük, hogy minden vizsgált BMR esetén ez a feltétel teljesül. Azonban gyakorlatban nem nehéz példát találni olyan BM rendszerre, amely nem teljesíti szigorúan ezt a feltételt.

Például, ha a szerződő két kármentes időszak után léphet csak felfelé a BM rendszerben. Ekkor nem csak a legutolsó időszak besorolását, hanem az azt megelőzőét is ismerni kell ahhoz, hogy a következő időszak várható besorolását pontosan meg tudjuk határozni.

Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy minden vizsgált BMR esetén a minden időszakban bekövetkezik a szerződők átsorolása. Tehát a biztosítók besorolása Markov láncnak tekinthető.

2. Definíció. *A t-edik átsorolási valószínűségeit egy Markov láncban jelölje:*

$$p_{k,l}(t) = \mathbb{P}(X_{t+1} = k | X_t = l)$$

3. Definíció. *Egy Markov lánc homogén, ha a t-edik átsorolási valószínűségek $(p_{k,l}(t))$ nem függenek a t-től.*

Ezért egy homogén Markov lánc esetén az átsorolási valószínűségeket $p_{k,l}$-nek jelölhetjük.

A valóságban a szerződők az idő előrehaladtával egyre inkább tapasztaltabb lesznek. Ezért számukra a károkozás valószínűsége általánosságban csökken ahogy egyre több időszakot töltenek a BM rendszerben. Ezért az a feltételezés, hogy a BMR besorolása homogén Markov lánc nem igazán realisztikus, azonban az egyszerűbb számítás miatt általában felteszik a szakirodalomban. A Markov lánc állapotai (amelyek a BMR esetében az adott időszak osztálybesorolása az adott szerződőnek), két féle halmazba sorolható be. Egyrészt egodikus halmazba (*ergodic set*) valamint átmeneti halmazba (*transition set*). A k-adik osztály elérhető az l-edik osztályból, ha az l-edik osztályba sorolt szerződők a későbbiekben besorolhatók lesznek a k-adik osztályba (nem feltétlenül a következő időszakban).

A k-adik osztály az ergodikus halmaznak az eleme, amennyiben a k-adik osztály elérhető az ergodikus halmaz összes osztályából és az ergodikus halmaz minden osztálya innen is elérhető. Azok az osztályok, amelyek nem ergodikus halmazba tartoznak, azokat az átmeneti halmazba lehet csoportosítani.

Az általunk vizsgált BM rendszerekben egyedül egy ergodikus halmaz van, tehát nincsenek olyan osztályok, amelyek átmeneti halmazba sorolhatók. Ebből következik, hogy az átsorolások Markov lánca irreducibilis.

4. Definíció. *Egy Markov-láncot akkor nevezünk irreducibilisnek, ha minden k, j osztályra és bármely t időpontra létezik olyan s, amelyre*

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = k | X_t = j) > 0 \tag{2}$$

Tehát minden osztály minden másik osztályból véges időn belül elérhető. Ez a gyakorlatban nem minden esetben teljesül (a BMR néhány alkalmazásában a kezdő szerződőknek külön osztályuk van, amelybe az első év után nem térhetnek vissza), azonban az optimalizálás során feltesszük a Markov lánc irreducibilitását. Az átsorolási szabályok optimalizálása esetén erre külön korlátot is bevezetünk. Továbbá a BMR besorolásának Markov lánca még aperiodikusnak is tekinthető.

5. Definíció. *Jelölje θ_k a k-adik osztály esetén a $\theta_k = lnko\{t \geq 1 : p_{k,k}(t) > 0\}$ értéket, ahol az „lnko" jelöli a legnagyobb közös osztót. Legyen $\theta_k = \infty$, ha $p_{k,k}(t) = 0$ minden $t \geq 1$ esetén.*
A k-adik osztály aperiodikus, ha $\theta_k = 1$. A Markov láncot akkor hívjuk aperiodikusnak, ha minden osztálya aperiodikus.

A disszertációban kizárólag olyan BM rendszerekkel foglalkozunk, amelyek besorolásai aperiodikusok. Ha a szerződő a legalacsonyabb díjú osztályba van besorolva (az egyszerűség kedvéért nevezzük a legfelső osztálynak), akkor lehetetlen onnan feljebb sorolni. Hasonlóan igaz a legalsó osztályra is, hogy a szerződő annál lejjebb nem tud kerülni. Mivel a BM rendszerben véges számú osztály van, és az osztályok egy ergodikus halmazt alkotnak, ezért az általunk vizsgát BM rendszerek besorolása aperiodikus.

Egy olyan Markov láncban, amelynek egy ergodikus halmaza van és aperiodikus, a szerződő akármelyik osztályban kezd, egy bizonyos időszak eltelte után bármelyik osztályban lehet. Az ilyen láncokat a szakirodalom reguláris Markov láncoknak (*regular Markov chain*) nevezi.

Egy reguláris Markov láncban a besorolási valószínűségek egy egyedi stacionárius eloszláshoz tartanak. A BMR optimalizálása során általában ezeket a stacionárius valószínűségeket veszik figyelembe.

2. Alkalmazott módszerek

2.1. Optimalizálási modellek

Feltesszük, hogy I kockázati csoport (vagy másképpen típus) van a szerződők között. Minden csoportnak másik csoportoktól eltérő kockázata van, amelyről feltesszük, hogy nem változik az idő előrehaladtával. A gyakorlatban a BMR átsorolási szabályai általában egyedül a károk számától függenek, a károk nagysága nem befolyásolja a szerződők besorolását. Ezért a modellben mi is feltettük, hogy az átsorolási szabályok kizárólag a kárszámoktól függenek.

Legyen $M > 0$ a lehető legtöbb kár, amelyet egy biztosított okozhat egy periódus alatt. λ^i_m pedig jelölje annak a valószínűségét, hogy egy i típusú szerződő m darab kárt okoz. ($i = 1, \ldots, I$, $\sum_{m=0}^{M} \lambda^i_m = 1$).

Az i-edik típus kockázati paraméterét (várható kárszámát) λ^i-vel jelöljük ($\lambda^i = \sum_{m=0}^{M} m\lambda^i_m$). A típusokat, vagy másnéven kockázati csoportokat a kockázatuk alapján növekvő sorrendbe rendezzük. Tehát az 1-es típus várható kárszáma a legkevesebb, az I-edik kockázati csoporté pedig a legnagyobb. ϕ^i jelöli az i-edik kockázati csoport arányát az egész kockázatközösségen belül ($\sum_{i=1}^{I} \phi^i = 1$).

A BM rendszerben $K+1$ különböző BM osztály található; 0 jelöli a legmagasabb díjú osztályt, K pedig a legalacsonyabbat. A k-adik osztály ($k = 0, \ldots, K$) díját π_k-val jelöljük. A BMR díjai osztályonként monoton változnak, ezért feltesszük, hogy $\pi_{k-1} \geq \pi_k$ ($k = 1, \ldots, K$). A reguláris Markov láncnak létezik egy egyedi stacionárius eloszlása. A modellben minden egyes kockázati csoporthoz tartozik egy egyedi stacionárius eloszlás. A c^i_k jelöli annak a valószínűségét, hogy egy i-edik típusú szerződő a k-adik osztályba van besorolva, a stacionárius időben, tehát ha elegendő idő eltelt a szerződés kezdete óta. Mi a c^i_k értékére az egyszerűség kedvéért úgy hivatkozunk, mint a stacionárius valószínűsége az i-edik típusú szerződőknek a k-adik osztályban.

2.1.1. Díjak optimalizálása rögzített átsorolási szabályok mellett

A disszertációban bemutattunk egy lineáris programozási (LP) modellt, a díjak optimalizálására. A modell első verzióját (Heras et al., 2004) cikkében vezették be.

$$\min \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=0}^{K} \phi^i g^i_k \qquad \text{(LP1.obj)}$$

Feltéve, hogy

$$\pi_k c_k^i + g_k^i \geq \lambda^i c_k^i \qquad \forall i, k \tag{LP1.1}$$

$$\pi_k c_k^i - g_k^i \leq \lambda^i c_k^i \qquad \forall i, k \tag{LP1.2}$$

$$\pi_{k-1} \geq \pi_k \qquad k = 1, \ldots, K \tag{LP1.3}$$

$$\begin{aligned} \pi_k &\geq 0 \qquad \forall k \\ g_k^i &\geq 0 \qquad \forall k, i \end{aligned}$$

A modell célja, hogy a kockázati csoportok várható díja és kárszáma közötti különbség minimális legyen osztályonként. Az abszolút eltérés minimalizálására bevezetünk g_k^i segédváltozókat minden i típus és k osztályra.

2.1.2. Átsorolási szabályok optimalizálása rögzített díjak mellett

A disszertációban bemutattunk egy vegyes egészértékű lineáris programozási feladatot (mixed integer linear programming, MILP), az átsorolási szabályok optimalizálására. Az átsorolási szabályokat rendszerint ún. átmenetmátrixokkal szokták definiálni. A modellben az átmenetmátrixok minden elemére bevezetünk egy bináris változót. Tehát ha $T_{j,m,k}$ értéke egy, akkor azok szerződők akik a k-adik osztályba vannak besorolva és m darab kárt okoztak az időszakban, j osztályt fognak lépni a következő periódusban. A j értéke bármilyen egész szám lehet, pozitív esetben a biztosított a BM rendszerben felfele lép, tehát javít a besorolásán. Másképpen fogalmazva olyan osztályba fog kerülni, ahol a díj vagy kevesebb, vagy megegyezik a jelenlegi díjával. Amennyiben j negatív, akkor ront a besorolásán, tehát a rendszerben lefele lép a szerződő.

A lehetséges lépések alsó és felső korlátja a k-adik osztályban $J_k = [\underline{J_k} : \overline{J_k}]$, ahol $\underline{J_k} < 0$ és $K - k = \overline{J_k} > 0$ a két legszélsőbb érték.

A célfüggvény megegyezik a díjak optimalizálásának célfüggvényével: minden kockázati csoport várható díjfizetése és kárkifizetése közötti abszolút eltérést minimalizáljuk osztályonként.

Gyakorlati alkalmazások esetén gyakori, hogy az átsorolási szabályok nem térnek el osztályonként, tehát egy egységes (U - *unified*) átsorolási szabály van. Ebben az esetben nem kell minden osztályhoz külön átsorolási bináris változókat bevezetni, elég, ha minden lehetséges j lépésre és m kárra vezetjük be ezeket a változókat. Tehát ebben az esetben ha $T_{j,m} = 1$, az optimális megoldásban, akkor a biztosított, akármelyik osztályban is van j osztályt lép, ha m kárt okozott. Ebben az esetben a j alsó és felső korlátja is megegyezik minden osztályban, az átlépések határa ($\overline{J} = K$) fentről és ($\underline{J} = -K$) alulról.

Néhány numerikus példát is prezentáltunk mindegyik típusú modellről. Általánosságban elmondható, hogy egy optimalizált átsorolási szabállyal észrevehetően jobban lehet szétválasztani a különböző kockázati csoportokat. Valamint minél több osztály van a BM rendszerben, annál inkább jobban működik.

A NU típusú átsorolási szabályok jellemzően sokkal igazságosabb kifizetéseket eredményeztek, mint az U típusú átsorolási szabályok. Azonban az NU típusú modell számítása meglehetősen hosszadalmassá vált az osztályok számának növelésével. Ezért a nagyobb számú BM rendszerek optimalizálására bevezettünk két közelítő módszert. Általánosságban még a talált közelítő értékek is sokkal jobbak voltak, mint az U típusú modellek optimális megoldásai.

2.1.3. Díjak és átsorolási szabályok együttes optimalizálása

Bemutattunk még egy olyan MILP modellt is, amelyben mind a díjakat és az átsorolási szabályokat együttesen optimalizálhatjuk. Ebben az esetben, amennyiben a π_k díjakat ($\forall k$) változókként vezetjük be, akkor egy vegyes egészértékű kvadratikus-korlát problémát (MIQCP) kapunk. Mivel MILP modellek megoldása egyszerűbb, ezért olyan modellt vezettünk be, amelyben linearizálhatóak ezek a kvadratikus korlátok. Ekkor meghatározunk egy kiinduló (default) díjvektort, amelyet a modellben módosítani lehet, bevezetett bináris változók segítségével. Tehát első lépésként minden díjat a legkevésbé kockázatos típus várható kárszámának állítjuk be $\pi_k = \lambda^1$, $\forall k$, mivel ennél nem lehet kevesebb a díj. És minden osztályra bevezetünk különböző bináris változót, amellyel növelhetjük az osztály díját. Amennyiben egy bináris változó értéke egy, akkor az optimális díj egy előre rögzített ε értékkel lesz több, mint λ^1. Azért, hogy többféle díj legyen az optimális megoldásban, több különböző díjnövelés szintet vezetünk be.

Tehát O_k^ℓ bináris változó teszi lehetővé, hogy amennyiben az értéke egy, akkor a k-adik osztály díja $\pi_k = \lambda^1 + \varepsilon^\ell$

Ez a MILP modell a szerződők stacionárius valószínűségével optimalizálta a díjakat és az átsorolási szabályokat. Azonban a stacionárius valószínűségek eléréséhez a szerződőknek sok időszakon keresztül a rendszerben kell lenniük. Több osztály több szükséges időszakot jelent. Ezért nem biztos, hogy a stacionárius valószínűségeket feltételező modell ténylegesen a legjobb megoldást adja valós alkalmazás esetén. Ezért egy olyan módosítást is bemutattunk, amelynél a stacionárius valószínűségek helyett rögzített időszakokra optimalizáljuk a díjakat és az átsorolási szabályokat.

Mivel ez a modellhez nem kellenek a stacionárius valószínűségek, a reguláris

Markov lánc feltételeit sem kell teljesítenie a paramétereknek. Ezért egy ilyen modellel akár realisztikusabb eseteket is lehet vizsgálni, például a károkozási valószínűségek időbeni változását. Vagy pedig olyan esetet, ahol a kockázati csoportok aránya változik az idő előrehaladtával. Azonban annak ellenére, hogy modellezhető ezzel az eljárással olyan eset, hogy az időben változnak a szerződők paraméterei, ezt a disszertációban nem vizsgáltuk, mivel még a legegyszerűbb többperiódusos modell esetén is kifejezetten hosszú volt az optimalizálási program futásideje.

Ahhoz, hogy többperióduson keresztül optimalizáljuk a BM rendszert, rögzítjük az első Θ időszakot. Az idő indexét t jelöli, tehát legyen $t = 0, \dots, \Theta$, ahol a $t = 0$ a szerződéskötés pillanatát jelenti. Ebben az esetben a kezdő osztály helyzetét is lehet optimalizálni. Bevezetjük a B_k bináris változókat minden osztályhoz. Amennyiben a B_k értéke egy, az összes új szerződő a k-adik osztályból indul. Minden olyan változó, amelynek az értéke a korábbi modellben a stacionárius valószínűségekkel volt kapcsolatban, ebben a modellben az időtől is függ.

Továbbá egy olyan módosítását is bemutattuk a modellnek, amely esetén az osztályok számát is optimalizálhatjuk a díjakkal, átsorolási szabályokkal és az induló osztállyal együtt.

Valósághű paraméterek esetén az együttes optimalizálási modellben számos bináris változót kell bevezetni. Ezért az optimalizálási program futásideje meglehetősen hosszú lehet. Külön a díjak optimalizálása, illetve az átsorolási szabályok optimalizálása azonban lényegesen gyorsabban számolható, mint együttesen. Ezért bevezettünk egy olyan iteratív eljárást, amellyel közelíthetjük az együttes optimalizálási modell optimumát. Ebben az iteratív eljárásban először rögzítjük a díjakat és meghatározzuk az optimális átsorolási szabályokat. Majd pedig kiszámoljuk az optimális díjakat az előző modellben kapott átsorolási szabályai rögzítése mellett. Ezután ismért fixáljuk a díjakat, most az eggyel korábbi modell optimális megoldására és újra optimalizáljuk az átsorolási szabályokat. Ezt addig folytatjuk, amíg a célfüggvény javítható.

Ezt az eljárást összehasonlítottuk az együttes optimalizálás modelljével. Összességében az jött ki nekünk eredményül, hogy az iteratív eljárás sokkal gyorsabb, mint az együttes optimalizálás módszere, és az optimális megoldás általában nem sokkal rosszabb.

2.2. Megfigyelhető változók figyelembevétele

Az eddig bemutatott modellekben feltételeztük, hogy a biztosított díja egyedül a BMR besorolásától függ. Azonban a KGFB gyakorlati alkalmazásai során a biztosító társaságok általában a szerződők megfigyelhető adottságait is figyelembe veszik a biztosítási díj meghatározásánál, hogy jobban meg tudják becsülni a kockázati csoportokat. Ezt valamilyen statisztikai módszer alkalmazásával becsülik. Az egyik részét a biztosított díjának tehát egy statisztikai módszer alapján határozzák meg, a másik részét pedig a BMR besorolása adja.

A pontos becslése a kockázatoknak fontos szempontja a biztosítónak, azonban tökéletes eredményt szinte lehetetlen elérni. A statisztikai módszerrel a biztosító a kockázatokat a szerződők megfigyelhető paramétereiből (például szerződő kora, gépjármű típusa, vagy szerződő lakóhelye) tudja megbecsülni. Azonban feltesszük, hogy vannak olyan nem megfigyelhető változók is, amelyek hatással vannak a szerződők kockázatára. Korábban példaként említettük a gépjárművezető óvatosságát, de lehet akár másmilyen nem megfigyelhető tulajdonság is. A nem megfigyelhető változók okozta becslési hiba csökkenthető bizonyos módszerekkel, például a BMR alkalmazásával. A bevezettet BMR optimalizálási modellekben feltételeztük, hogy a díj egyedül a BM besorolástól függ. Ezért bemutattunk és összehasonlítottunk néhány technikát arra, hogy hogyan lehet a BM rendszert úgy optimalizálni, hogy a biztosító a BMR mellett egy statisztikai módszert is alkalmaz a díj meghatározására. A következő technikákat vizsgáltuk:

- ***Scaling***: A biztosító külön-külön optimalizálja a BM rendszert és számítja ki a statisztikai becslést. Ezután egy $(0 \leq \alpha \leq 1)$ súly segítségével rakja össze a végső díjat a BMR díjából és a statisztikai becslés díjából.

- ***Merging***: Ebben az esetben a díjat egyedül a BMR besorolása adja. Azonban az együttes optimalizálási modellben a szerződők *default* díja a statisztikai becsléstől függ. A korábbi példa esetén, amikor a biztosító egyedül a lakóhelyet veszi figyelembe, a statisztikai becslés alapján két megfigyelhető kockázati csoportot tud megkülönböztetni: városi és vidéki gépjárműveket. A *Merging* módszer esetén minden szerződőre ugyanaz az átsorolási szabály vonatkozik, de az osztály díja eltérő a városban és a vidéken használt gépjárművekre.

- ***Independent***: Ebben az esetben minden megfigyelhető kockázati csoportnak külön BM rendszere van. Tehát az előző példában a városi és a vidéki gépjárművekre nem csak más díjak vonatkoznak, hanem a BMR átsorolási szabályai is különbözhetnek.

2.3. Kárnagyságtól függő átsorolási szabályok optimalizálása

A BMR gyakorlati alkalmazásai esetén általában egyedül a károk száma határozza meg a szerződők időszakok közöti átsorolásait. Tehát a kár nagysága nem befolyásolja a BMR által meghatározott díjakat.

Ez a feltételezés nem torzít nagyon, mivel empirikus kutatások kimutatták, hogy a „jó” és „rossz” biztosítottak jobban különböznek a kárszámeloszlásban mint károsultnagyságeloszlások esetén (amennyiben legalább egy kár bekövetkezik). Azonban annak ellenére, hogy a kárszámok jobbnak tűnnek a szerződők csoportosítására, mint a kárnagyságok, észlelhető a kárszámokból képzet csoportoktól valamilyen kárnagyságtól függő eltérés.

Ezért olyan BM rendszert is vizsgáltunk, ahol az osztálybesorolás esetén a károk nagyságát is figyelembe vesszük.

Az (aggregált) kárnagyságot jelölje L^i paraméter az i-edik kockázati csoportra. Feltesszük, hogy ez minden típus esetén különböző. Ahhoz, hogy az átsorolási szabályok a kárnagyságtól függjenek, bevezetünk K darab töréspontot (*breakpoint*), minden egyes osztályra, az elsőtől kezdve (k: $\ell_1^k > \ell_2^k > \cdots > \ell_K^k$).

Az átsorolási szabály ezektől a töréspontoktól függenek: Ha az a szerződő, aki a k-adik osztályba van sorolva és az ℓ_h^k valamint ℓ_{h+1}^k közötti kárt okozott, akkor a következő időszakban a h-adik osztályba lesz besorolva. Ha a kára nagyobb, mint ℓ_1^k, akkor a legalsó, tehát nulladik osztályba kerül, míg ha a kára kevesebb, mint ℓ_K^k, akkor pedig a legalacsonyabb díjú, K-adik osztályba lesz besorolva a következő időszakban.

Az optimalizálási feladat célja, hogy a díjak mellett az optimális töréspontokat is meghatározza. Ebben az esetben összesen $K^2 + K$ töréspontot kell meghatározni.

Ha a töréspontok nem függenek az osztálytól, akkor csökkenthető a számuk, így az optimalizálás szempontjából sokkal kezelhetőbb problémát kapunk. Így összesen $2K + 1$ töréspont lesz: $\ell_{-K} > \ell_{-(K-1)} > \cdots > \ell^{-1} > \ell_0 > \ell_1 > \cdots > \ell_K$. Ebben az esetben, ha a biztosítottnak a kára ℓ_h és ℓ_{h+1} közé esik, akkor a következő időszakban a szerződő h osztályt lép felfelé (ha $h < 0$, akkor pedig lefelé).

A második megközelítés esetén még akár tovább is csökkenthetjük a töréspontok számát, ha rögzítjük a maximális fel és le lépést. Tehát a töréspontok ekkor $\ell_{-D} > \ell_{-(D-1)} > \cdots > \ell^{-1} > \ell_0 > \ell_1 > \cdots > \ell_U$, ahol $U, D < K$. Tehát ebben az esetben a szerződők legfeljebb D osztályt léphetnek lefelé és U osztályt felfelé.

3. A disszertáció új eredményei

3.1. Díjak optimalizálása rögzített átsorolási szabályok mellett

Bemutattunk egy LP modellt a díjak optimalizálására, amelyet először (Heras et al., 2004) vezetett be. Azonban mi módosítottuk a modell célfüggvényét, hogy az osztályok díjai közötti eltéréseket is figyelembe vegyük az optimalizálás során.

1. Állítás. *A használt célfüggvény esetén ennek a modellnek mindig létezik olyan optimális megoldása, ahol minden osztály díja megegyezik valamelyik kockázati csoport várható kárszámával.*

Ezért az együttes optimalizáláshoz minden osztályhoz elegendő a kockázati csoportok számával megegyező bináris változót bevezetni.

Ezt a modellt módosítottuk úgy, hogy a biztosító számára a BMR bevezetése nem okozhat veszteséget. Ezért a modellhoz hozzáadtuk az úgynevezett profit-korlátot:

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=0}^{K}\left(\pi_k c_k^i\right) \geq \sum_{i=1}^{I}\phi^i\lambda^i. \tag{LP1.4}$$

Ebben az esetben azonban nem igaz az előző állítás, másmilyen díj is megjelenhet az optimális megoldásban.

2. Állítás. *A használt célfüggvény és a profit-korlát figyelembevétele esetén ennek a modellnek mindig létezik olyan optimális megoldása, ahol minden osztály díja megegyezik valamelyik kockázati csoport várható kárszámával, vagy pedig egy egyedi díjjal, amely nem egyezik meg egyik kockázati csoport kockázatával sem. Az optimális megoldásban összesen legfeljebb egy egyedi díj lehet.*

3.2. Átsorolási szabályok optimalizálása

A BM rendszerek átsorolási szabályának optimalizálására két típust vettünk figyelembe: Egységes átsorolási szabályt (U), ami esetén a szabályok minden osztályban megegyeznek, és a nem egységes átsorolási szabályt (NU) amikor osztályonként eltérhetnek.

Mivel a BM rendszer optimalizálásában a stacionárius valószínűségeket használjuk fel, ezért az átsorolási szabálynak teljesítenie kell a reguláris Markov láncok feltételeit. Ehhez külön meg kell határozni a modellben, hogy csak olyan átsorolási szabályokat vegyünk figyelembe a modellezés során, amelyek irreducibilis Markov láncot eredményeznek.

Elégséges feltétel lenne, ha minden stacionárius valószínűségre elvárnánk, hogy pozitív legyen, azonban optimalizálás során szigorú egyenlőtlenéget nem tudunk figyelembe venni. Ezért egy megoldás lehet egy nagyon kicsi, pozitív érték bevezetése, amelyre bevezetünk olyan korlátokat, hogy az összes stacionárius valószínűség legyen ennél az értéknél nagyobb.

Ez az egyenlőtlenség azonban erősebb korlát az irreducibilitásnál. Másképp fogalmazva ez a korlát biztosítja a Markov lánc irreducibilitását, viszont nem minden irreducibilis Markov lánc tud eleget tenni ennek a korlátnak.

Amikor az átsorolási szabályok egységesek minden osztályban, azokat a szabályokat, amelyek esetén az Markov lánc nem lenne irreducibilis, viszonylag egyszerű meghatározni. Ezért bemutattunk egy szabályt, amellyel ezek az átsorolási szabályokról könnyedén ellenőrizhető, hogy teljesíti az irreduiblis Markov lánc feltételét, és amennyiben nem, akkor ezáltal kizárható az optimalizálásból.

Ehhez először arra az esetre mutattuk be ezt a szabályt, amikor legfeljebb egy kár következhet be egy időszak alatt. Jelölje j_0 a kármentes esetben a lépést a rendszerben, továbbá jelölje j_1 a kár okozás esetén a lépések számát. Feltesszük, hogy $j_0 > 0$ és $j_1 < 0$, tehát kármentes esetben mindenképpen javítanak a szerződők, kár esetén pedig rontanak.

3. Állítás. *$lnko(j_0, |j_1|)$ jelölje a legnagyobb közös osztót a j_0 és $|j_1|$ között. Ahol legyen $j_0 > 1$ és $|j_1| > 1$. Egy BMR $(j_0; j_1)$ átsorolási szabállyal akkor és csak akkor nem irreducibilis, ha a következő feltételek közül legalább az egyik teljesül:*

$$\begin{cases} j_0 + |j_1| > K + 1 \\ lnko(j_0, |j_1|) > s \quad \& \quad j_0 + |j_1| \leq K + 1 \end{cases}$$

Ahol $s = 1$, ha $K + 1$ páratlan, különben $s = 2$.

A 4. Állításban bővítettük a 3. Állítást arra az esetre, amikor akár két kár is bekövetkezhet egy időszak alatt.

4. Állítás. *Egy BMR $(j_0; j_1, j_2)$ átsorolási szabállyal akkor és csak akkor nem irreducibilis, ha a következő feltételek közül legalább az egyik teljesül:*

$$\begin{cases} j_0 + |j_1| > K + 1 \\ lnko(j_0, |j_1|, |j_2|) > s & \& \quad lnko(j_0, |j_1|) + |j_2| \leq K + 1 \\ lnko(j_0, |j_1|) > s & \& \quad lnko(j_0, |j_1|) + |j_2| = K + 2 \quad \& \quad \frac{K+1}{gcd(j_0, |j_1|)} \notin \mathbb{Z} \\ lnko(j_0, |j_1|) > s & \& \quad lnko(j_0, |j_1|) + |j_2| > K + 2 \end{cases}$$

Ahol $s = 1$, ha $K + 1$ páratlan, különben $s = 2$.

3.3. Díjak és átsorolási szabályok együttes optimalizálása

A 1. Állítás miatt az osztályok díjait véges számú lehetőség közül lehet kiválasztani. Emiatt minden osztályhoz a kockázati csoportok számával megegyező bináris változó bevezetésével meg tudjuk határozni az optimális díjvektort, miközben az átsorolási szabályokat is optimalizáljuk. A profit-korlát figyelembevétele esetén azonban lehet egy egyedi díj, amiről csak alsó korlátot tudjuk meghatározni. Ezért a numerikus számításoknál, azokban a modellekben, amelyekben a profit-korlát is figyelembe vettük, Iterated Local Search metaheurisztikával tudtuk csak közelíteni az optimális megoldást. A modellnek olyan módosítását is bevezettük, amelyben a stacionárius valószínűségeken alapuló optimalizálás helyett többperiódusos optimalizálást végzünk. Egy ilyen modellel a károkozások változását, vagy a kockázati csoportok arányának alakulását is lehetne modellezni.

A bemutatott modelleket numerikus példákkal is szemléltettük. Általánosságban elmondható, hogy az optimalizálásban az átsorolási szabályok figyelembevétele nagyban javította a BMR hatékonyságát. Összességében minden modellnél hasonló eredmény jött ki: Minél több az osztályok száma, annál jobban tudja a BMR szétválasztani a kockázati csoportokat. Azonban túl sok osztály használata nem biztos, hogy eredményes lenne gyakorlati alkalmazások esetén, mivel a szerződők csak véges számú időszakig vannak a rendszerben és ez az időszak nem biztos, hogy elegendő a stacionárius állapot eléréséhez. Az eredmények a kockázati csoportok paramétereitől is függenek. Ha a várható kárszámok közötti különbség nagyobb, akkor a BMR is könnyebben szét tudja választani a típusokat.

Valós adatokon is vizsgáltuk a bevezetett modelleket. Ehhez rendelkezésünkre állt egy magyarországi biztosító KGFB adatai a 2008 és 2009 évekre. Összességében a vizsgált modellek alapján sokkal szigorúbb (károkat jobban büntető) átsorolási szabályokat kellene alkalmazni, mint ami jelenleg használatban van.

3.4. Megfigyelhető változók figyelembevétele

Megvizsgáltuk, hogy a BMR optimalizálását hogyan lehet figyelembe venni gyakorlati alkalmazás esetén. A korábban bemutatott modellekben feltételeztük, hogy a díj egyedül a BM besorolástól függ, azonban azt is vizsgáltuk, hogy hogyan alakulnak a szerződők díjai, ha a biztosító más módszert is alkalmaz a szerződők kockázatának meghatározására, a BM rendszeren kívül. Numerikus példákkal hasonlítottuk össze a különböző módszerek (*Scaling*, *Merging* és *Independent*) eredményeit, azzal az esettel, amikor nem használnak BM rendszert illetve amikor a biztosító nem próbálja megbecsülni a szerződő kockázatát, hanem egyedül a BM rendszer díja lesz a szerződők díja.

Összességében az *Independent* módszer tekinthető a leghatékonyabbnak. Ebben az esetben minden megfigyelhető kockázati csoportnak optimalizálunk egy saját BM rendszert. Azonban ennek a technikának az alkalmazása nehezen kivitelezhető a gyakorlati alkalmazások esetén, mivel feltételezi, hogy minden szerződőnek hosszú távon ugyanaz marad a kockázata és a kockázati csoportja nem fog változni. Ezután a *Merging* módszer tűnt a leghatékonyabbnak, tehát az az eset, ahol minden szerződőre ugyanaz az átsorolási szabály vonatkozik, de a BMR osztályainak díjai eltérhetnek a megfigyelhető változók alapján.

Valós adatokon is vizsgáltuk a bevezetett módszereket. Ehhez két különböző technikát is bemutattunk a megfigyelhető és nem megfigyelhető kockázati csoportok meghatározására. Összességében elmondható, hogy a BMR hatékonysága erősen függ attól, hogy mekkora az a kockázat, amelyet a biztosító meg tud becsülni a statisztikai módszerrel. Tehát ha lényegében nincs nem megfigyelhető változó és a biztosító becslési modellje pontos, a BMR nem sokat tud rajta javítani. Azonban, ha a becslés nagyon pontatlan, akkor BMR bevezetése sokat tud javítani ahhoz, hogy igazságosabbak legyenek a szerződők díjai.

Azonban azt is fontos megjegyezni, hogy minden modellünk esetén, akárhogyan is vettük figyelembe a megfigyelhető változókat, a BMR alkalmazása mindig javított az eredményen, csak a hatás mértéke változott.

3.5. Kárnagyságtól függő átsorolási szabályok optimalizálása

A gyakorlatban, általában egyedül a károk száma határozza meg az osztálybesorolást. A disszertáció utolsó fejezetében olyan modelleket vizsgáltunk, amelyeknél a károk nagysága határozza meg az átsorolási szabályokat.

A bemutatott modellek optimális megoldásait csak közelíteni tudtuk, mivel az ilyen jellegű átsorolási szabályok (töréspontok) és díjak együttes optimalizálása egy nem-konvex probléma. Ezért metaheurisztikákkal határoztunk meg töréspontokat és díjakat. A kisebb BM rendszerek esetén szimulált hűtést használtunk az optimalizáláshoz. A realisztikusabb eseteket, amikor csak kár esetén léphetnek lefelé a szerződők, ahol a lépés mértékét a kárnagyság határozza meg, különben egy osztályt javítanak, egy genetikus algoritmussal optimalizáltuk. A két metaheurisztikát össze is hasonlítottuk az ilyen jellegű modelleken. Az összehasonlítás alapján a szimulált hűtés általában sokkal gyorsabban futott le, de a genetikus algoritmus jobb, tehát stabilabb eredményt adott.

A kárnagyságon alapuló átsorolási szabállyal rendelkező BM rendszerek eredményeit numerikus példákon keresztül összehasonlítottuk az eredeti, kárszámon alapuló BMR eredményeivel. Ezen kívül valós adatokból becsült paraméterekkel is meghatároztunk egy kárnagyságtól függő átsorolási szabállyal rendelkező BM rendszert. Összességében a számításokból arra tudunk következtetni, hogy bár annak ellenére, hogy a kárnagyságok figyelembevétele a kárszámok helyett sokkal rugalmasabb átsorolási szabályt tud adni, a BMR hatékonysága nem tud sokat javulni. Tehát ebben az esetben is számos kockázati csoport az igazságos díjánál jóval többet, vagy kevesebbet fizet.

4. Témában megjelent saját publikációk

1. Ágoston, K. Cs. and Gyetvai, M. (2021). Comparison of an iterative heuristic and joint optimization in the optimization of bonus-malus systems. *In: Drobne S., Zadnik Stirn L., Kljajić Borštar M., Povh J. and Žerovnik J.(ed.) Proceedings of the 16th International Symposium on Operational Research : SOR '21 Online (2021)* pp. 55-60., 5 p.

2. Ágoston, K. Cs. and Gyetvai, M. (2020). Joint Optimization of Transition Rules and the Premium scale in a Bonus-Malus System *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, Volume 50, Issue 3*, pp. 743-776, 34 p.
   DOI: `https://doi.org/10.1017/asb.2020.27`

3. Ágoston, K. Cs. and Gyetvai, M. (2019). Átsorolási szabályok optimalizálása bónusz-málusz rendszerekben - *Szigma, Vol. 51, Issue 4* pp. 335-362., 28 p.

4. Ágoston, K. Cs., Gyetvai, M. and Kovács, L. (2019). Optimization of transition rules based on claim amounts in a bonus-malus system. *In: Zadnik Stirn, L; Kljajić Borštar, M; Žerovnik, J; Drobneand, S; Povh, J (ed.) Proceedings of the 15th International Symposium on Operational Research : SOR '19 Ljubljana, Slovenia : Slovenian Society Informatika, (2019)* pp. 375-380., 6 p.

5. Gyetvai, M. and Ágoston, K. Cs. (2018). Optimization of transition rules in a Bonus-Malus system. *Electronic Notes in Discrete Mathematics. Vol. 69.* pp. 5-12., 8 p.
   DOI: `https://doi.org/10.1016/j.endm.2018.07.002`

Hivatkozások

Arató, M. and Martinek, L. (2014). Estimation of claim numbers in automobile insurance. *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae. Sectio computatorica*, **42**, pp. 19-35, 11 p.

Bolton, P. and Dewatripont, M. (2005) *Contract theory.* Cambridge: The MIT Press.

Bonsdorff, H. (1992) On the Convergence Rate of Bonus-Malus Systems. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, **22**(2), 217-223.

Bonsdorff, H. (2008) On optimal monotone Bonus-Malus systems where the premiums depend on both the number and on the severity of the claims. *Reports in Mathematics / Department of Mathematics and Statistics. University of Helsinki*, **490**, 27 p.

Borgan, Ø., Hoem, J. and Norberg, R. (1981) A nonasymptotic criterion for the evaluation of automobile bonus systems. *Scandinavian Actuarial Journal*, **1981**(3), 165-178.

Brouhns, N., Guillén, M., Denuit, M. and Pinquet J. (2003) Bonus-Malus Scales in Segmented Tariffs With Stochastic Migration Between Segments. *The Journal of Risk and Insurance*, **70**(4), 577-599.

Burka, D., Kovács, L. and Szepesváry, L. (2021) *Modelling MTPL insurance claim events: can machine learning methods overperform the traditional GLM approach?*, Working Paper , 1-30.

Chiappori, P. and Salanié, B. (2000) Testing for Asymmetric Information in Insurance Markets. *Journal of Political Economy*, **108**(1), 56-78.

Coene, G. and Doray, L. (1996) A financially Balanced Bonus-Malus System. *ASTIN Bulletin*, **26**(1), 107-116.

Cooper, R. and Hayes B. (1987) Multi-period Insurance Contracts, *International Journal of Industrial Organization*, **5**, 211-231.

Crocker, K. J., and Snow, A. (1986) The Efficiency Effects of Categorical Discrimination in the Insurance Industry. *Journal of Political Economy*, **94**(2), 321-344.

Crocker, K. J., and Snow, A. (2000) The Theory of Risk Classification. In *Handbook of Insurance* (ed. Dionne, G.).Boston/Dordrecht/London: Kluwer Academic Publishers.

Datta, S., Roy, S. and Davim. J. P. (2019). Optimization Techniques: An Overview. In Datta, S. and Davim. J. P. (Eds.). Optimization in Industry Present Practices and Future Scopes (pp. 1–11). Cham, Switzerland : Springer.

Denuit M., Maréchal X., Pitrebois S. and Walhin J.-F. (2007) *Actuarial Modelling of Claim Counts: Risk Classification, Credibility and Bonus-Malus Systems*. New York: Wiley.

Denuit, D and Dhaene J. (2001) Bonus-Malus scales using exponential loss functions. *Blätter der DGVFM*, **25**(1), 13-27.

De Prill, N. (1978) The Efficiency of a Bonus-Malus System. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA,* **10**(1), 59-72.

De Prill, N. (1979) Optimal Claim Decisions for a Bonus-Malus System: a Continuous Approach. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA,* **10**(2), 215-222.

Eppen, G. and Fama, E. (1968) Solutions for Cash-Balance and Simple Dynamic-Portfolio Problems. *The Journal of Business*, **41**(1), 94-112.

Frangos, N. E. and Vrontos, S. D. (2001) Design of Optimal Bonus-Malus Systems With a Frequency and a Severity Component On an Individual Basis in Automobile Insurance. *ASTIN Bulletin*, **31**(01), 1–22.

Giancaterino, C. G. (2016) GLM, GNM and GAM Approaches on MTPL Pricing *Journal of Mathematics and Statistical Science*, **2**(8), 427-481.

Gonçalves, J. F. and Resende, M. G. C. (2010) Biased random-key genetic algorithms for combinatorial optimization. *Journal of Heuristics*, **17**(5), 487–525.

Heras, A. T., Vilar, J. L., and Gil, J. A. (2002) Asymptotic Fairness of Bonus-Malus Systems and Optimal Scales of Premiums. *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, **27**(1), 61-82.

Heras, A. T., Gil, J. A, García-Pineda, P. and Vilar, J. L. (2004) An Application of Linear Programming to Bonus Malus System Design. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, **34**(2), 435-456.

Holton, J. (2001) Optimal Insurance Coverage under Bonus-Malus Contracts. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, **31**(1), 175-186.

Kafkova, S. (2015). Comparison of Several Bonus Malus Systems. Procedia Economics and Finance, Vol(26): 188–193.

Kemeny, J. G. and Snell, J. L. (1976) *Finite Markov Chains*. Springer-Verlag New York.

Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D. and Vecchi, M. P. (1983). Optimization by simulated annealing. Science, Vol(220(4598)): 671-680.

Lemaire, J. (1995) *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*. Boston: Kluwer Academic Publisher.

Loimaranta, K. (1972) Some asymptotic properties of bonus systems. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, **6**(3), 233-245.

Lourenço, H. R., Martin O.C. and Stützle T. (2010) Iterated Local Search: Framework and Applications. In: *Handbook of Metaheuristics. International Series in Operations Research & Management Science* (ed. Gendreau, M. and Potvin, JY.), pp. 363-397. Boston: Springer.

Molnar, D. E. and Rockwell, T. H. (1966) Analysis of Policy Movement in a Merit-Rating Program: An Application of Markov Processes. *The Journal of Risk and Insurance*, **33**(2), 265-276.

Payandeh, A. T. and Sakizadeh, M. (2017) *Designing an Optimal Bonus-Malus System Using the Number of Reported Claims, Steady-State Distribution, and Mixture Claim Size Distribution.*, Working Paper *arXiv:1701.05441*, 1-29.

Niemiec, M. (2007) Bonus-malus Systems as Markov Set-chains. *ASTIN Bulletin*, **37**(1), 53-65.

Norberg, R. (1976) A credibility theory for automobile bonus systems. *Scandinavian Actuarial Journal*, **1976**(2), 92-10.

Pinquet, J. (1997) Allowance for Cost of Claims in Bonus-Malus Systems. *ASTIN Bulletin*, **27**(01), 33–57.

Puelz, R. and Snow, A. (1994) Evidence on Adverse Selection: Equilibrium Signaling and Cross Subsidization in the Insurance Market. *Journal of Public Economics*, **102**(2), 236-257.

Rothschild, M. and Stiglitz, J.(1976) Equilibrium in Competitive Insurance Markets: An Essay on the Economics of Imperfect Information. *The Quarterly Journal of Economics*, **90**(4), 629-649.

Shavell, S. (1979) On moral hazard and insurance. *The Quarterly Journal of Economics*, **93**, 541-562.

Sundt, B. (1989) Bonus hunger and credibility estimators with geometric weights. *Insurance: Mathematics and Economics*, **8**(2), 119-126.

Tan, C. I., Li, J., Li, J. S and Balasooriya, U. (2015) Optimal relativities and transition rules of a bonus–malus system. *Insurance: Mathematics and Economics*, **61**, 255-263.

Vanderbroek, M. (1993) Bonus-malus system or partial coverage to oppose moral hazard problems? *Insurance: Mathematics and Economics*, **13**, l-5.