Általános és Kvantitatív Közgazdaságtan
Doktori Iskola

TÉZISGYŰJTEMÉNY

Poesz Attila

Inkonzisztencia a döntéshozatalban

című Ph.D. értekezéshez

Témavezető:

Dr. Temesi József CSc
egyetemi tanár

Budapest, 2019.

Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék

TÉZISGYŰJTEMÉNY

Poesz Attila

Inkonzisztencia a döntéshozatalban

című Ph.D. értekezéshez

Témavezető:
Dr. Temesi József CSc
egyetemi tanár

Tartalomjegyzék

Táblázatok jegyzéke

I. Kutatási előzmények

Egy felnőtt ember számára természetes dolog nap, mint nap döntéseket hozni, bízva a döntés helyességében. Azonban vannak olyan döntési problémák, melyek méretük, komplexitásuk, bonyolult szempontrendszerük, vagy más tulajdonságuk miatt, nagyon pontosan előkészített és indokolható döntési eljárást igényelnek. A cél megfogalmazásától, a végső döntésig mindennek indokolhatónak és átláthatónak kell lennie. A különféle módszerek egyik kritikus pontja az emberi következetlenség, melynek okai lehetnek például a megfelelő szaktudás hiánya, vagy a szubjektív adatok jelenléte. Ezt a nem kívánt tulajdonságot nevezik inkonzisztenciának. Általában a valós problémáknál létezik valamilyen fokú inkonzisztencia, tehát ezt kizárni, semmisnek tekinteni nem lehet.

A disszertáció célja az, hogy jellemezze a páros összehasonlítás mátrixokban fellépő inkonzisztenciát, és definiáljon lehetséges inkonzisztencia csökkentő eljárásokat. A bemutatott módszerek lehetőséget teremtenek a "hiba helyének" meghatározására, ami a döntéshozóval való konzultációt követően lehetővé teszi a javítást.

A szükséges vizsgálatokhoz elengedhetetlen volt olyan adatbázisok létrehozása, amelyek az eddig széles körben elfogadott generált véletlen mátrixokkal szemben valódi mátrixokat tartalmaznak. A kutatáshoz összegyűjtöttem és felhasználtam valódi problémákból származó páros összehasonlítás mátrixokat, amelyek rámutatnak a véletlen generált és a valódi mátrixok közötti eltérésre. Az eredmények hatására egyértelművé vált, hogy az inkonzisztencia további vizsgálatát kontrollált kísérleti körülmények között kitöltött mátrixokon szükséges elvégezni. A Budapesti Corvinus Egyetem hallgatóival végzett kísérleten számos inkonzisztenciára ható tényező vizsgálatát végeztem el.

II. Az értekezés felépítése és módszertana

1. Az értekezés felépítése

Az 1. fejezetben bemutatásra kerülnek a többszempontú döntési problémák és a megoldásukhoz használt, páros összehasonlítások módszere. A dolgozat nagy mértékben épít a valódi esetekre, ezért itt egy publikált valós probléma is szerepel szemléltetés céljából.

A disszertáció 2. fejezetében vizsgálom a tapasztalati páros összehasonlítás mátrixokat. Valós alkalmazások során felmerülő nehézségek kezelésére tapasztalati úton létrehozott mátrixok analizálása nem volt eddig jellemző az irodalomban. Leginkább véletlen módon generált mátrixok használata terjedt el a könnyű és gyors előállítás miatt. Az ilyen mintákban azonban pusztán matematikai tulajdonságokat lehet keresni, illetve felfedezni. Bármely döntéshozó akarva, akaratlanul is képez a rendszerben némi inkonzisztenciát. Nagyon fontos a tapasztalatiság a vizsgálat szempontjából, ezért létrehoztam egy adatbázist a tapasztalati mátrixoknak egy csoportjából, ami mindenki számára elérhető az interneten. A létrehozott valós minta további vizsgálatokhoz kínál kiváló kiindulási alapot, amelyre az első példa Moshkovich és Mechitov [P13.1] szerzőpáros kutatása.

A 3. fejezet a Budapesti Corvinus Egyetem hallgatóival végzett kísérleten alapszik és rámutat, hogy milyen tényezők befolyásolják a páros összehasonlítás mátrix inkonzisztenciájának szintjét. A kutatás ezen részének fő célja, hogy feltárja a tapasztalati páros összehasonlítás mátrixok karakterisztikáját és az inkonzisztenciával való kapcsolatát. A vizsgálat kiterjedt a mátrixok kitöltése során tapasztalt inkonzisztencia elemzésére, így indirekt módon a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokra is.

Az előző fejezet széles körben elemezte az inkonzisztenciára ható tényezőket, azonban van egy fontos dolog, amit nem vizsgált, pedig szinte minden esetben növeli a páros összehasonlítás mátrix inkonzisztenciáját: a téves adat. A tévedés származhat például adatrögzítési hibából, véletlen elírásból, fáradtság vagy leterheltség okozta figyelmetlenségből. Egy ilyen apró tévedés képes jelentősen (szélsőséges esetben az elfogadási szint fölé) növelni egy gondosan megalkotott mátrix inkonzisztenciáját. A 4. fejezetben kapott eredmények lehetőséget biztosítanak a tévesen megadott páros összehasonlítás mátrixelemek detektálására, illetve azok optimális értékének kiszámítására (lehetséges javítási irány). A fejezetben kétféle megközelítés kerül bemutatásra az 1-3 elem megváltoztatásával konzisztenssé alakítható mátrixok vizsgálatára. Az első eljárás egy vegyes 0-1 lineáris programozási feladat, amelynek optimális megoldása megadja a módosítandó elemek számát. A második megoldásnál gráfelméleti alapon kerül jellemzésre az 1-3 elemmel konzisztenssé alakítható mátrix.

Az 5. fejezetben a néhány elem megváltoztatásával elfogadható inkonzisztenciájúvá alakítható mátrixokat mutatom be. A vizsgált mátrixosztály fontosságát az adja, hogy a valódi döntési problémáknál már a mátrixok inkonzisztenciájának alacsony szintje elegendő (nem szükséges a konzisztencia) a döntési modellben történő alkalmazáshoz. A fejezetben bemutatásra kerülő nemlineáris vegyes 0-1-es optimalizálási feladatok megoldásai választ adnak arra a kérdésre, hogy adott páros összehasonlítás mátrix, inkonzisztencia index, valamint elfogadási szint esetén mi a mátrix azon elemeinek a minimális száma, amelyek megváltoztatásával a mátrix elfogadható inkonzisztenciájúvá alakítható.

A 6. fejezet a súlyozási módszerek számára előírt rangsor megtartási (COP) feltétel szükségességét vizsgálja. A kutatás alapját Bana e Costa és Vasnick által 2008-ban [2] bevezetett COP feltétel adja, amelynek teljesülését minden súlyozási módszertől elvárták.

2. Módszertan

2.1. Kontrollált kísérlet felépítése

A kísérlet a Budapesti Corvinus Egyetem 227 hallgatójának bevonásával zajlott, akiknek az átlagos életkor 22 év volt. A diákok között 39%-a férfi és 61%-a nő volt, ez az arány megfelel a Corvinus egyetem teljes hallgatóinál tapasztalt aránynak.

Minden kísérlet az egyetem termeiben zajlott, az előadóval történt előzetes egyeztetést követően. A kísérlet során az előadó bemutatta a kísérletvezetőket és kiemelte, hogy a részvétel önkéntes alapon történik, így bármikor megszakítható. Fontos kiemelni, hogy a kísérletsorozat során senki sem utasította el a részvételt. A kísérletsorozatban való közreműködés egy résztvevő számára átlagosan 25 percet vett igénybe.

A teszt kialakítása és a kísérleti körülmények a következő négy, inkonzisztenciára ható tényező vizsgálata köré épültek:

- probléma típusa (szubjektív, objektív),
- páros összehasonlítás mátrix mérete (4×4, 6×6, 8×8),
- kérdezési sorrend (szekvenciális, véletlen, Ross, amelyet az 1. táblázat szemléltet),
- kitöltési folyamat (nem teljes kitöltés) elemzése.

Sorszám / Kitöltés	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
szekvenciális	A-B	A-C	A-D	A-E	A-F	B-C	B-D	B-E	B-F	C-D	C-E	C-F	D-E	D-F	E-F
véletlen	A-F	B-E	A-C	F-E	C-D	B-D	B-F	A-E	C-E	A-D	E-D	C-F	B-C	A-D	B-A
Ross	A-B	F-D	E-A	C-B	E-F	A-C	B-D	F-A	D-C	E-B	A-D	C-E	B-F	D-E	C-F

1. táblázat. A kitöltési sorrendek szemléltetése

A kísérlet felépítése 18-féle (alcsoportok szerinti megbontásban: 2[típus]$\times$ 3 [méret]$\times$3[kitöltési sorrend]) eltérő karakterisztikájú páros összehasonlítás mátrixcsoport vizsgálatát tette lehetővé. Összesen 9 alkalommal végeztünk kísérletet, egyenként átlagosan 25 résztvevővel, ahol mindenki egy objektív és egy szubjektív típusú feladatot kapott. A kísérletsorozat végére összesen 454 darab teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix született.

2.2. Gráf reprezentáció

Egy A $n \times n$-es pozitív mátrix esetén legyen $\bar{A} = \log A$ az az $n \times n$-es mátrix, amelynek elemeire

$$\bar{a}_{ij} = \log a_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

teljesül. Ekkor a konzisztenciát leíró tranzitivitási egyenlete alapján az A páros összehasonlítás mátrix pontosan akkor konzisztens, ha

$$\bar{a}_{ij} + \bar{a}_{jk} + \bar{a}_{ki} = 0, \ \forall\, i, j, k = 1, \ldots, n. \tag{II.1}$$

Jelölje $G = \{\mathcal{N}, \mathcal{A}\}$ azt az irányított gráfot, aminek csúcsait $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$, valamint irányított éleit $\mathcal{A} = \{(i, j) \mid i, j \in \mathcal{N}, i \neq j\}$ halmaz tartalmazza. A G irányított gráf i csúcsából j csúcsába vezető (i,j) éléhez rendelt súlyt jelölje $\bar{a}_{ij}$.

Legyen az $(i,j),(j,k),(k,i)$ a G irányított gráf három különböző csúcsa és jelöljük (i,j,k)-val ezen csúcsok egymáshoz kapcsolódó éleiből kialakult körhármast. Az A páros összehasonlítás mátrixhoz tartozó G irányított gráf körhármasaihoz egyértelműen megfeleltethetők a triádoknak, ezért továbbiakban a körhármasra is a triád kifejezést használjuk.

Az (i,j,k) triád $w(i,j,k)$ súlya az egyes élek súlyainak összegeként adódik:

$$w(i,j,k) = \bar{a}_{ij} + \bar{a}_{jk} + \bar{a}_{ki}. \tag{II.2}$$

A triád súlyának (II.2)-es definíciójából következik, hogy a G irányított gráfban egy triád súlya függ a csúcsok bejárásának sorrendjétől, tehát

$$w(i,j,k) = w(j,k,i) = w(k,i,j) = -w(k,j,i) = -w(j,i,k) = -w(i,k,j), \tag{II.3}$$

teljesül. Továbbá egy A mátrix pontosan akkor konzisztens, ha minden triádja konzisztens, vagyis az (II.1) összefüggés alapján az A-hoz tartozó G irányított gráf minden körhármasánál az élek összsúlya nulla.

2.3. Mátrixok logaritmizált térben

A ϕ_n inkonzisztencia index által elfogadható, A-hoz legközelebb eső (eltérő elemek száma alapján) mátrixot megadó feladat matematikai alakja logaritmizált térben:

$$\begin{aligned} \min \quad & d(\log A, X) \\ \text{f.h.} \quad & X \in \log \mathcal{P}_n \cap [-\bar{M}, \bar{M}]^{n\times n}, \\ & \phi_n(\exp X) \leq \alpha_n, \end{aligned} \tag{II.4}$$

ahol $\bar{M} = \log M$ a mátrixelemek maximumának logaritmusát, α_n a ϕ_n elfogadási küszöbértékét, $\mathcal{P}_n$ az $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrixok halmazát jelöli.

Az A mátrix legfeljebb K számú elemének megváltoztatásával nyerhető minimális inkonzisztencia szintet megadó feladat matematikai alakja

$$\begin{array}{ll} \min & \alpha \\ \text{f.h.} & d(\log A, X) \leq K, \\ & X \in \log \mathcal{P}_n \cap [-\bar{M}, \bar{M}]^{n\times n}, \\ & \phi_n(\exp X) \leq \alpha. \end{array} \tag{II.5}$$

Legyen $\bar{A} = \log A$ a páros összehasonlítás mátrix logaritmusa, és bevezetve az $y_{ij} \in \{0, 1\},\ 1 \leq i < j \leq n$, bináris változókat, valamint felhasználva $\bar{M}$ felső korlátot, $\bar{A} \in [-\bar{M}, \bar{M}]^{n\times n}$ felírható a következő vegyes 0-1 programozási feladat:

$$\min \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} y_{ij} \tag{II.6}$$

$$\begin{array}{lrl} \text{f.h.} & \phi_n(\exp X) \leq \alpha_n, & \\ & x_{ij} = -x_{ji}, & 1 \leq i \leq j \leq n, \\ & -\bar{M} \leq x_{ij} \leq \bar{M}, & 1 \leq i < j \leq n, \\ & -2\bar{M}y_{ij} \leq x_{ij} - \bar{a}_{ij} \leq 2\bar{M}y_{ij}, & 1 \leq i < j \leq n, \\ & y_{ij} \in \{0, 1\}, & 1 \leq i < j \leq n. \end{array}$$

Az (II.6) optimumértéke megadja, hogy legalább hány elemet kell megváltoztatni az A $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrix felső (és alsó) háromszög pozícióiban úgy, hogy a módosított páros összehasonlítás mátrix ϕ_n inkonzisztenciája ne haladja meg az α_n elfogadási szintet. Az optimális megoldás $y_{ij} = 1$ értékei kijelölik a módosítandó elemeket, az $\exp x_{ij}$ értékek pedig egy módosítási lehetőséget mutatnak be.

Feltehetjük azt a kérdést is, hogy mi az a minimális inkonzisztencia szint, amit az A mátrix legfeljebb K számú elemének (és azok reciprokainak) megváltoztatásával elérhetünk. Ez a feladat matematikai alakban:

$$
\begin{aligned}
& & \min \quad & \alpha & \text{(II.7)}\\
\text{f.h.} & & \phi_n(\exp X) & \le \alpha, & \\
& & \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} y_{ij} & \le K, & \\
& & x_{ij} & = -x_{ji}, & 1 \le i \le j \le n,\\
& & -\bar{M} \le x_{ij} & \le \bar{M}, & 1 \le i < j \le n,\\
& & -2\bar{M}y_{ij} \le x_{ij} - \bar{a}_{ij} & \le 2\bar{M}y_{ij}, & 1 \le i < j \le n,\\
& & y_{ij} & \in \{0,1\}, & 1 \le i < j \le n.
\end{aligned}
$$

Ha $\phi_n(\exp X)$ az X mátrix elemeinek konvex függvénye, az (II.6) és az (II.7) feladat relaxáltjai konvex optimalizálási feladatok, így (II.6), illetve (II.7) vegyes 0-1-es konvex programozási feladat.

2.4. Condition of Order Preservation (COP) feltétel

Bana e Costa és Vasnick 2008-ban [2] bevezették a Condition of Order Preservation (COP) feltételt, amit véleményük szerint egy rangsoroló eljárásból kapott súlyvektornak feltétlenül teljesítenie kell. A COP feltétel pontos definíciója a következő.

2.1. Definíció *Legyen $A \in R^{n\times n}$ páros összehasonlítás mátrix, ekkor az A-ból számított w súlyvektor teljesíti a COP feltételt, ha $\frac{w_i}{w_j} > \frac{w_k}{w_l}$ teljesül minden i,j,k,l esetén ahol $a_{ij} > a_{kl}$.*

III. Az értékezés fontosabb eredményei

A doktori értekezés fontosabb eredményeit a disszertáció tagolásának megfelelően mutatom be.

1. Kutatási terület bemutatása

A fejezetben bemutatásra kerülnek a többszempontú döntési problémák és a megoldásukhoz használt, páros összehasonlítások módszere. Lényeges saját hozzájárulást nem tartalmaz.

2. Tapasztalati páros összehasonlítás mátrix

Az inkonzisztencia vizsgálata szempontjából nagyon fontos a tapasztalatiság, ezért valódi problémákból származó mátrixokat gyűjtöttem össze. Az összesen 153 tapasztalati páros összehasonlítás mátrixból álló minta, minden eleme többszempontú döntési problémából származik. A valós mintában szereplő mátrixokon végzett elemzések alátámasztották, hogy fontos különbségek vannak a generált véletlen mátrixok és a valódi mátrixok között (elemek eloszlása, azonosan értékelt alternatívák).
Fontos eredmény, hogy a fenti mátrixokat elérhetővé tettem az interneten, további kutatások céljára, amelyet Moshkovich és Mechitov [P13.1] szerzőpáros már sikeresen fel is használt.

3. Inkonzisztencia szintjét befolyásoló tényezők

A kísérlet lebonyolítását és a kutatómunkát Temesi József témavezetőmmel, Bozóki Sándorral, illetve Dezső Lindával közösen végeztük. A kapott eredményeket az Annals of Operations Research-ben [3] publikáltuk és a megjelenés óta 8 darab cikkben hivatkoztak rá [P2.1] – [P2.8]. Saját hozzájárulásom a közös kutatáshoz,

- a 454 darab páros összehasonlítás mátrix elemeinek és azok sorrendjének rögzítése olyan strukturált formába, amely minél szélesebb elemzéseket tesz lehetővé (MATLAB és SPSS formátum),
- a digitalizált adathalmaz tisztítása, elírások kiszűrése,

- a számításokhoz szükséges programok elkészítése, tesztelése, illetve a bemutatott eredmények kiszámítása,
- a statisztikai elemzések tervezésében, elkészítésében és az eredmények kiértékelésében meghatározó szerep (Dezső Lindával közösen),
- a kitöltési folyamat során megfigyelhető rangsorváltozások vizsgálatára szolgáló rangsor mátrix definiálása, kivitelezése és elemezése.

A várakozásokat teljes mértékben alátámasztották a 2. táblázatban látható CR inkonzisztencia indexeknél kapott eredmények, amelyeknél minden egyes mező értéke 22-27 mátrix átlagos inkonzisztenciája alapján adódott.

	nyaraló			térkép		
	4×4	6×6	8×8	4×4	6×6	8×8
szekvenciális	8,10	10,75	12,46	0,67	0,81	1,31
véletlen	10,38	9,47	13,10	0,78	0,86	2,51
Ross	8,75	10,63	13,31	0,70	0,94	1,73
Összes	9,06	10,28	12,96	0,71	0,87	1,86

2. táblázat. Teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok átlagos CR inkonzisztenciája %-ban mérve

3.1. Állítás *Az inkonzisztencia szintje szignifikánsan magasabb a szubjektív feladatoknál, mint az objektíveknél.*

3.2. Állítás *Az összehasonlítandó elemek növekedése szignifikánsan emeli páros összehasonlítás mátrixok inkonzisztenciájának szintjét.*

3.3. Állítás *A kitöltési sorrendnek nincs szignifikáns hatása a páros összehasonlítás mátrix inkonzisztenciájára.*

3.4. Állítás *A nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok használhatóak a végső alternatíva rangsor becslésére.*

4. Konzisztenssé alakítható mátrixok

Az értekezés ezen fejezetében tárgyalt kutatáson Bozóki Sándorral és Fülöp Jánossal közösen dolgoztunk és a kapott eredményeket angol nyelven publikáltuk [5]. A megjelenés óta 19 cikkben [P1.1] – [P1.19] hivatkozták a közös eredményeinket.

Egyéni hozzájárulásaim a közös kutatási eredmények eléréséhez:

- páros összehasonlítás mátrix inkonzisztenciájának vizsgálata logaritmizált térben
- gráf reprezentáció ötlete és kialakítása
- inkonzisztens triádok számának meghatározása.

4.1. Állítás *Legyen (i, j, k) egy inkonzisztens triád a $G = \{\mathcal{N}, \mathcal{A}\}$ $|\mathcal{N}| > 3$ irányított gráfban. Ekkor tetszőleges $\ell \in \mathcal{N} \setminus \{i, j, k\}$ csúcs esetén az (ℓ, i, j), (ℓ, j, k) és (ℓ, k, i) triádok közül legalább az egyik inkonzisztens.*

4.1. Következmény *Ha az A páros összehasonlítás mátrix inkonzisztens, akkor a hozzá tartozó G irányított gráfban legalább $n-2$ darab inkonzisztens triád van.* $\square$

4.2. Következmény *Ha az A páros összehasonlítás mátrix inkonzisztens, akkor a hozzá tartozó G irányított gráfban tetszőleges $i \in \mathcal{N}$ esetén létezik (i, j, k) inkonzisztens triád.* $\square$

Jelölje $\bar{M} = \log M$ az eredeti és a módosított mátrixelemekhez rendelt felső korlát logaritmusát, aminek segítségével felírható a következő optimalizálási feladat:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} y_{ij} \tag{III.1}$$

$$\begin{aligned}
\text{f.h.} \qquad x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} &= 0, & \forall \{i, j, k\} \subset \mathcal{N},\ |\{i, j, k\}| = 3 \\
x_{ij} &= -x_{ji}, & 1 \le i < j \le n, \\
-\bar{M} \le x_{ij} &\le \bar{M}, & 1 \le i < j \le n, \\
-2\bar{M} y_{ij} \le x_{ij} - \bar{a}_{ij} &\le 2\bar{M} y_{ij}, & 1 \le i < j \le n, \\
y_{ij} &\in \{0, 1\}, & 1 \le i < j \le n,
\end{aligned}$$

ahol $x_{ij},\ i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j$, folytonos változók és a módosítandó mátrixelemeinek a logaritmusát jelölik, $y_{ij},\ i = 1, \ldots, n-1,\ j = i+1, \ldots, n$, bináris változók, amelyek megadják az optimumban módosítandó (i, j) elemeket (ha $y_{ij} = 1$), illetve a változatlan mátrixelemeket (ha $y_{ij} = 0$).

4.2. Állítás *Az (III.1) optimumértéke megadja, hogy legalább hány elemet kell megváltoztatni az A $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrix felső (és alsó)* *háromszög pozícióiban úgy, hogy a módosított páros összehasonlítás mátrix konzisztens legyen feltéve, hogy az eredeti és a módosított mátrix elemeire egyaránt teljesül $a_{ij} \leq M$ feltétel.*

4.3. Állítás *Egy $A \in R^{n \times n}$ inkonzisztens páros összehasonlítás mátrix pontosan akkor tehető konzisztenssé egy elem megváltoztatásával, ha a hozzá tartozó G irányított gráf pontosan $n-2$ darab inkonzisztens triádot tartalmaz. Ha $n \geq 4$, akkor ez a módosítás egyértelmű.*

4.4. Állítás *Legyen az $A \in R^{n \times n}$ egy inkonzisztens mátrix, amely egy konzisztens mátrix K darab elemének (és reciprokának) megváltoztatásával kapható. Ekkor az A-hoz tartozó G irányított gráf legfeljebb $K(n-2)$ darab inkonzisztens triádot tartalmaz.*

4.5. Állítás *Egy A inkonzisztens páros összehasonlítás mátrix egy elem módosításával pontosan akkor tehető konzisztenssé, ha a mátrixhoz tartozó G irányított gráfban létezik olyan (i, j) irányított él, amelyre minden (ℓ, i, j), $\ell \in \mathcal{N} \setminus \{i, j\}$ triád súlya azonos, nullától különböző, valamint minden más triád konzisztens. Az ilyen tulajdonságú (i, j) irányított éleknél a módosítás iránya és mértéke egyértelmű. Az $n \geq 4$ esetben legfeljebb egy ilyen (i, j) él létezik.*

4.6. Állítás *Egy A inkonzisztens páros összehasonlítás mátrix pontosan akkor tehető két elemének megváltoztatásával konzisztenssé, ha a megfelelő G irányított gráfban az alábbi két eset valamelyike teljesül:*

1. *$\exists$ (i_1, j_1) és (i_2, j_2) független élek, valamint nem nulla α_1 és α_2, hogy minden (ℓ, i_1, j_1), $\ell \in \mathcal{V} \setminus \{i_1, j_1\}$ triád súlya α_1 és minden (ℓ, i_2, j_2), $\ell \in \mathcal{V} \setminus \{i_2, j_2\}$ triád súlya α_2, valamint az összes többi triádra teljesül a konzisztencia feltétel.*

2. *Léteznek az (i, j) és (j, k) csatlakozó élek, valamint nem nulla α_1 és α_2, hogy minden (ℓ, i, j), $\ell \in \mathcal{V} \setminus \{i, j, k\}$ triád súlya α_1, minden (ℓ, j, k), $\ell \in \mathcal{V} \setminus \{i, j, k\}$ triád súlya α_2, továbbá az (i, j, k) triád súlya $\alpha_1 + \alpha_2$, és az összes többi triádra teljesül a konzisztencia feltétel.*

4.7. Állítás *Egy A inkonzisztens páros összehasonlítás mátrix pontosan akkor tehető három elemének megváltoztatásával konzisztenssé, ha a megfelelő G irányított gráfban az alábbi öt eset valamelyike teljesül:*

1. *Léteznek az (i_t, j_t) független élek és nem nulla α_t, $t = 1, 2, 3$, amelyekre fennáll a $w(\ell, i_t, j_t) = \alpha_t$ minden $\ell \in \mathcal{N} \setminus \{i_t, j_t\}$, $t = 1, 2, 3$ esetén, valamint az összes többi triád konzisztens.*

2. *Léteznek az $(i_1, j_1), (i_2, j_2), (j_2, k_2)$ élek, ahol $|\{i_1, j_1, i_2, j_2, k_2\}| = 5$, és nem nulla α_1, α_2, α_3, amelyekre fennáll a $w(\ell, i_1, j_1) = \alpha_1$ minden $\ell \in \mathcal{N} \setminus \{i_1, j_1\}$ mellett, $w(\ell, i_2, j_2) = \alpha_2$ és $w(\ell, j_2, k_2) = \alpha_3$ minden $\ell \in \mathcal{N} \setminus \{i_2, j_2, k_2\}$ esetén, $w(i_2, j_2, k_2) = \alpha_2 + \alpha_3$, valamint az összes többi triád konzisztens.*

3. *Léteznek az $(i, j), (j, k), (k, s)$ élek, ahol $|\{i, j, k, s\}| = 4$, és nem nulla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, amelyekre fennáll a $w(\ell, i, j) = \alpha_1$ minden $\ell \in \mathcal{N} \setminus \{i, j, k\}$ mellett, $w(\ell, j, k) = \alpha_2$ minden $\ell \in \mathcal{N} \setminus \{i, j, k, s\}$ esetén, $w(\ell, k, s) = \alpha_3$ minden $\ell \in \mathcal{N} \setminus \{j, k, s\}$ mellett, $w(i, j, k) = \alpha_1 + \alpha_2$, $w(j, k, s) = \alpha_2 + \alpha_3$, valamint az összes többi triád konzisztens.*

4. *Létezik az (i, j, k) triád és nem nulla α_1, α_2, α_3, amelyekre fennáll a $w(\ell, i, j) = \alpha_1$, $w(\ell, j, k) = \alpha_2$ és $w(\ell, k, i) = \alpha_3$ minden $\ell \in \mathcal{N} \setminus \{i, j, k\}$ mellett, $w(i, j, k) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, valamint az összes többi triád konzisztens.*

5. *Léteznek az $(i, j), (i, k), (i, s)$ egymástól különböző élek és nem nulla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, amelyekre fennáll a $w(\ell, i, j) = \alpha_1$, $w(\ell, i, k) = \alpha_2$, valamint $w(\ell, i, s) = \alpha_3$ minden $\ell \in \mathcal{N} \setminus \{i, j, k, s\}$ mellett, $w(i, j, k) = \alpha_1 - \alpha_2$, $w(i, k, s) = \alpha_2 - \alpha_3$, $w(i, s, j) = \alpha_3 - \alpha_1$, valamint az összes többi triád konzisztens.*

A G irányított gráfot konzisztenssé alakító élek súlyai egyértelműek minden olyan élhármasnál, amely az 1.-5. feltételek közül egyet teljesít, kivéve $n = 3$ esetén a 4. feltételt, illetve $n = 4$ mellett az 5. feltételt, ahol véges számú lehetséges módosítás létezik.

5. Inkonzisztencia csökkentése

A következőkben bemutatásra kerülő eredmények egy részét Bozóki Sándorral és Fülöp Jánossal közösen együttműködve dolgoztuk ki, illetve publikáltuk a Central European Journal of Operations Research [6] folyóiratban. A megjelenés óta Siraj, Mikhailov és Keane [P3.1] hivatkozták a közölt állításokat. Saját hozzájárulásom a közös munkához:

- a logaritmizált alak bevezetése,
- a Saaty-féle CR indexhez kapcsolódó NLP feladat felírásában meghatározó szerep,
- a Peláez és Lamata-féle CI index kapcsolódó NLP feladat felírása,
- az Aguarón és Moreno-Jiménez-féle GCI NLP feladatainak és a hozzájuk kapcsolódó állítások felírása,
- a c_3 és a ρ inkonzisztencia mutatókhoz kapcsolódó összefüggések bemutatása,
- a konvex nemlineáris vegyes 0-1-es optimalizálási feladatok MATLAB-ban történő implementálása és megoldása.

A fejezetben bemutatásra került nemlineáris vegyes 0-1-es optimalizálási feladatok választ adnak arra a kérdésre, hogy adott páros összehasonlítás mátrix, inkonzisztencia index (ϕ_n), valamint elfogadási szint esetén (α_n) mi az A mátrix azon elemeinek a minimális száma, amelyek (és reciprokaik) megváltoztatásával az A mátrix elfogadható inkonzisztenciájúvá alakítható.

Saaty-féle CR [12]

$$
\begin{aligned}
& \min \quad \lambda && && \text{(III.2)}\\
\text{f.h.} \quad & \sum_{j=1}^{n} e^{x_{ij}+z_j-z_i} \le \lambda, && i = 1, \ldots, n, \\
& \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} y_{ij} \le K, && \\
& x_{ij} = -x_{ji}, && 1 \le i \le j \le n, \\
& -\bar{M} \le x_{ij} \le \bar{M}, && 1 \le i < j \le n, \\
& -2\bar{M}y_{ij} \le x_{ij} - \bar{a}_{ij} \le 2\bar{M}y_{ij}, && 1 \le i < j \le n, \\
& y_{ij} \in \{0, 1\}, && 1 \le i < j \le n.
\end{aligned}
$$

5.1. Állítás *Jelölje λ^* az (III.2) optimumértékét, és legyen $\alpha^* = \frac{\lambda^* - n}{RI_n(n-1)}$. Ekkor α^* a CR_n inkonzisztencia index minimálisan elérhető szintje olyan páros összehasonlítás mátrixok esetén, amelyeket úgy kapunk, hogy az A $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrix felső (és alsó) háromszög pozícióiban legfeljebb K elemet változtatunk meg.*

Koczkodaj-féle CM [8]

$$
\begin{aligned}
& & \min \quad z & & \text{(III.3)}\\
\text{f.h.} \quad & & x_{ij}+x_{jk}+x_{ki} \le z, & \quad 1 \le i < j < k \le n,\\
& & -(x_{ij}+x_{jk}+x_{ki}) \le z, & \quad 1 \le i < j < k \le n,\\
& & \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} y_{ij} \le K, & \\
& & x_{ij} = -x_{ji}, & \quad 1 \le i \le j \le n,\\
& & -\bar{M} \le x_{ij} \le \bar{M}, & \quad 1 \le i < j \le n,\\
& & -2\bar{M}y_{ij} \le x_{ij} - \bar{a}_{ij} \le 2\bar{M}y_{ij}, & \quad 1 \le i < j \le n,\\
& & y_{ij} \in \{0,1\}, & \quad 1 \le i < j \le n.
\end{aligned}
$$

5.2. Állítás *Jelölje z_{opt} az (III.3) optimumértékét. Ekkor $1-\frac{1}{exp(z_{opt})}$ a CM inkonzisztencia index minimálisan elérhető szintje olyan páros összehasonlítás mátrixok esetén, amelyeket úgy kapunk, hogy az A $n\times n$-es páros összehasonlítás mátrix felső (és alsó) háromszög pozícióiban legfeljebb K elemet változtatunk meg.*

Peláez és Lamata-féle CI index [9]

A többi inkonzisztencia indexhez hasonlóan, tekintsük a következő vegyes 0-1 konvex optimalizálási feladatot:

$$
\begin{aligned}
& \min \quad \alpha & \text{(III.4)}\\
\text{f.h.} \quad & \sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}\left(e^{x_{ik}-x_{ij}-x_{jk}}+e^{x_{ij}+x_{jk}-x_{ik}}\right) \le \alpha, & \\
& x_{ij} = -x_{ji}, & 1 \le i < j \le n,\\
& -\bar{M} \le x_{ij} \le \bar{M}, & 1 \le i < j \le n,\\
& -2\bar{M}y_{ij} \le x_{ij} - \bar{a}_{ij} \le 2\bar{M}y_{ij}, & 1 \le i < j \le n,\\
& y_{ij} \in \{0,1\}, & 1 \le i < j \le n,\\
& \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} y_{ij} \le K. &
\end{aligned}
$$

5.3. Állítás *Jelölje α_{opt} az (III.4) optimumértékét. Ekkor $\frac{\alpha_{\mathrm{opt}}}{\binom{n}{3}}-2$ a CI inkonzisztencia index minimálisan elérhető szintje olyan páros összehasonlítás mátrixok esetén, amelyeket úgy kapunk, hogy az A $n\times n$-es páros összehasonlítás mátrix felső (és alsó) háromszög pozícióiban legfeljebb K elemet változtatunk meg.*

Aguarón és Moreno-Jiménez GCI indexe [1]

Az (II.7) feladatot is specializálhatjuk a $\phi_n = GCI_n$ inkonzisztencia index esetére.

$$\begin{aligned}
\min \quad & \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (x_{ij} + z_j - z_i)^2 && \text{(III.5)} \\
\text{f.h.} \quad & \sum_{j=1}^{n} e^{x_{ij}+z_j-z_i} = \lambda, && 1 \le i \le n, \\
& x_{ij} = -x_{ji}, && 1 \le i < j \le n, \\
& -\bar{M} \le x_{ij} \le \bar{M}, && 1 \le i < j \le n, \\
& -2\bar{M}y_{ij} \le x_{ij} - \bar{a}_{ij} \le 2\bar{M}y_{ij}, && 1 \le i < j \le n, \\
& y_{ij} \in \{0,1\}, && 1 \le i < j \le n, \\
& \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} y_{ij} \le K, && \\
& z_1 = 0, \quad \lambda > 0 &&
\end{aligned}$$

5.4. Állítás *Jelölje α_{opt} az (III.5) optimumértékét. Ekkor α_{opt} a sajátvektor módszerrel kapott súlyvektorral számított GCI_n inkonzisztencia index minimálisan elérhető szintje olyan páros összehasonlítás mátrixok esetén, amelyeket úgy kapunk, hogy az A $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrix felső (és alsó) háromszög pozícióiban legfeljebb K elemet változtatunk meg.*

6. Condition of Order Preservation (COP) [2]

A disszertáció ezen részében bemutatott újdonságokat Pekka Korhonen professzor vezetésével dolgoztam ki, aki a finnországi tanulmányutam során témavezetőmként segítette kutatómunkámat.
Bana e Costa és Vasnick 2008-ban [2] bevezették a Condition of Order Preservation (COP) feltételt, amit véleményük szerint egy rangsoroló eljárásból kapott súlyvektornak feltétlenül teljesítenie kell. A szerzők nem adtak módszert, amely elő tud állítani COP-t teljesítő súlyvektort, ezért első lépésben a 3 alap súlyozási eljárás (EM, LLS, LLAE) módosítását dolgoztam ki. Az eredeti és a módosított súlyozási eljárásokból nyert súlyvektorokat vetettem össze és tettem a következő megállapítást.

Az eltérések normáját (3. táblázat) és a rangsorfordulások számát (4. táblázat) tekintve a COP feltétel megkövetelése nem eredményez jobb eredményt. Éppen ellenkezőleg: a módosított módszerek az alap súlyozási módszereknél gyengébb eredményt szolgáltattak. Ezeket figyelembe véve megállapítható, hogy a COP feltétel nem tekinthető szükséges feltételnek egy rangsoroló eljárásnál.

3×3	EM	LLS	LLAE	EM+COP	LLS+COP	LLAE+COP
$\sigma = 0.2$	0.0369	0.0369	0.0369	0.0387	0.0387	0.0408
$\sigma = 0.4$	0.0814	0.0814	0.0814	0.0856	0.0845	0.0893
$\sigma = 0.6$	0.1208	0.1208	0.1208	0.1304	0.1293	0.1425
$\sigma = 0.8$	0.1505	0.1505	0.1505	0.1563	0.1564	0.1728

5×5	EM	LLS	LLAE	EM+COP	LLS+COP	LLAE+COP
$\sigma = 0.2$	0.0328	0.0327	0.0350	0.0594	0.1040	0.0570
$\sigma = 0.4$	0.0650	0.0654	0.0703	0.1050	0.1368	0.1067
$\sigma = 0.6$	0.0971	0.0953	0.0992	0.1362	0.1574	0.1476
$\sigma = 0.8$	0.1440	0.1418	0.1391	0.1618	0.1848	0.1748

7×7	EM	LLS	LLAE	EM+COP	LLS+COP	LLAE+COP
$\sigma = 0.2$	0.0258	0.0254	0.0266	0.1010	0.1265	0.0874
$\sigma = 0.4$	0.0680	0.0704	0.0775	0.1161	0.1343	0.1295
$\sigma = 0.6$	0.1232	0.1226	0.1327	0.1150	0.1622	0.1930
$\sigma = 0.8$	0.1864	0.1968	0.2419	0.1356	0.3183	0.2177

3. táblázat. Eltérés normák átlaga a 3 alap- és a 3 módosított módszer esetében

3×3	EM	LLS	LLAE	EM+COP	LLS+COP	LLAE+COP
$\sigma = 0.2$	0.0120	0.0120	0.0120	0.0480	0.0480	0.0480
$\sigma = 0.4$	0.0850	0.0850	0.0850	0.1660	0.1660	0.1660
$\sigma = 0.6$	0.1624	0.1624	0.1624	0.2906	0.2906	0.2906
$\sigma = 0.8$	0.2133	0.2133	0.2133	0.3200	0.3200	0.3200

5×5	EM	LLS	LLAE	EM+COP	LLS+COP	LLAE+COP
$\sigma = 0.2$	0.0642	0.0588	0.0802	0.1551	0.7914	0.7540
$\sigma = 0.4$	0.3861	0.3663	0.4653	0.7030	1.5941	1.4158
$\sigma = 0.6$	0.9375	0.8542	0.8333	1.0417	2.2708	2.0000
$\sigma = 0.8$	0.7037	0.7778	0.7778	1.0000	2.2222	1.8519

7×7	EM	LLS	LLAE	EM+COP	LLS+COP	LLAE+COP
$\sigma = 0.2$	0.2727	0.3182	0.4091	1.3182	5.1818	0.5455
$\sigma = 0.4$	1.3750	1.3750	1.7500	2.3750	7.7500	2.0000
$\sigma = 0.6$	4.0000	4.0000	5.0000	5.0000	2.0000	10.0000
$\sigma = 0.8$	3.0000	2.0000	1.0000	2.0000	8.0000	3.0000

4. táblázat. A rangsorfordulások átlagos száma a 3 alap- és a 3 módosított módszer esetében

IV. Saját publikációk

Idegen nyelvű

Referált szakmai folyóirat

[P1] Bozóki, S., Fülöp, J., Poesz, A. (2011): On pairwise comparison matrices that can be made consistent by the modification of a few elements, *Central European Journal of Operations Research*, **19**(2): 157–175. DOI 10.1007/s10100-010-0136-9

[P2] Bozóki, S., Dezső, L., Poesz, A., Temesi, J. (2013): Analysis of pairwise comparison matrices: an empirical research, *Annals of Operations Research*, **211**(1): 511–528. DOI 10.1007/s10479-013-1328-1

[P3] Bozóki S., Fülöp J., Poesz, A. (2015): On reducing inconsistency of pairwise comparison matrices below an acceptance threshold, *Central European Journal of Operations Research*, **23**(4), 849-866. DOI 10.1007/s10100-014-0346-7

Konferencia tanulmány

[P4] Bozóki, S., Fülöp, J., Poesz, A. (2010): A new approach of reducing the inconsistency of pairwise comparison matrices, International Conference on Computational Management Science, Bécs, Ausztria

[P5] Bozóki, S., Fülöp, J., Poesz, A. (2010): The similarities and differences of inconsistency indices, Veszprém Optimization Conference: Advanced Algorithms, Veszprén, Magyarország

[P6] Bozóki, S., Dezső, L., Poesz, A., Temesi, J. (2010): Testing Some Properties of Pair-Wise Comparison Matrices, Decision Sciences Institute 2010 Annual Meeting Program, San Diego, Amerikai Egyesült Államok

[P7] Bozóki, S., Dezső, L., Temesi, J., Poesz, A. (2011): Pairwise comparison matrices: an empirical research, The International Symposium on the Analytic Hierarchy Process, Sorrento, Olaszország

[P8] Korhonen, P., Poesz, A. (2012): Analysing numerically three different methods to estimate a priority vector from inconsistent pairwise comparison matrices in AHP, The 25th European Conference on Operiational Research, Vilnius, Litvánia

[P9] Bozóki, S., Dezső, L., Temesi, J., Poesz, A. (2012): Inconsistency analysis through the completion of a pairwise comparison matrix, 76th Working Group for Multi-Criteria Decision Aiding, Portsmouth, Anglia

[P10] Bozóki, S., Fülöp, J., Poesz, A. (2014): On reducing inconsistency of pairwise comparison matrices below an acceptance threshold, 18th International Conference on Knowledge-Based and Intelligent Information & Engineering Systems, Gdynia, Lengyelország

Egyéb

[P11] Poesz, A. (2009): Empirical pairwise comparison matrices (EPCM) – an on-line collection from real decisions, version EPCM-October-2009. http: //www.sztaki.hu/∼bozoki/epcm

Magyar nyelvű

Referált szakmai folyóirat

[P12] Poesz, A. (≥2017): A bankszektor hatékonyságának vizsgálata, *Szigma*, közlésre benyújtva, bírálat alatt.

Tudományos könyvfejezet

[P13] Bozóki, S., Fülöp, J., Poesz, A. (2012): Elfogadható inkonzisztenciájú páros összehasonlítás mátrixokkal kapcsolatos konvexitási tulajdonságok és azok alkalmazásai, Solymosi T., Temesi J. (szerk.) Egyensúly és optimum: Tanulmányok Forgó Ferenc 70. születésnapjára, Aula Kiadó, 169–184.

Konferencia tanulmány

[P14] Bozóki, S., Fülöp, J., Poesz, A. (2009): A páros összehasonlítás triádjainak vizsgálata, XXVIII. Magyar Operációkutatási Konferencia, Balatonőszöd, Magyarország

TDK dolgozat

[P15] Poesz, A. (2007): Tapasztalati páros összehasonlítás mátrixok inkonzisztenciájának vizsgálata, TDK dolgozat, Budapesti Corvinus Egyetem

[P16] Poesz, A. (2008, 2009): A páros összehasonlítás mátrixok kritikus értékeinek detektálása, TDK és OTDK dolgozat, Budapesti Corvinus Egyetem

Saját publikációkra kapott hivatkozások

[P1.1] Antoniades, K.A., Spyridakos, T., Koutsogeorgis, C.N., Tseles, D. (2011): Scale Inconsistency and the Boundary Problem, International Scientific Conference eRA-6, Piraeus, Görögország

[P1.2] Černý, M., Hladík, M. (2016): Inverse optimization: towards the optimal parameter set of inverse LP with interval coefficients, *Central European Journal of Operations Research*, **24(3)**: 747–762.
DOI 10.1007/s10100-015-0402-y

[P1.3] Gastes, D., Gaul, W. (2012): The Consistency Adjustment Problem of AHP Pairwise Comparison Matrices. In Diamantopoulos, A., Fritz, W., Hildebrandt, L. (szerk.): Quantitative Marketing and Marketing Management - Marketing Models and Methods in Theory and Practice. Gabler Verlag, Springer Fachmedien Wiesbaden, 2012, 51–62.
DOI 10.1007/978-3-8349-3722-3_2

[P1.4] Gaul, W. and Gastes, D. (2012): A note on consistency improvements of AHP paired comparison data, *Advances in Data Analysis and Classification*, **6(4)**: 289–302.
DOI 10.1007/s11634-012-0119-x

[P1.5] Iványi, A. (2011): Comparison Based Ranking, *Algorithms of Informatics*, **3(25)**: 1251–1306.

[P1.6] Iványi, A., Lucz Loránd (2012): Multigráfok foksorozatai, *Alkalmazott Matematikai Lapok*, **29**: 1–54.

[P1.7] Iványi, A., Lucz, L., Móri. T., Sótér, P. (2011): On Erdős-Gallai and Havel-Hakimi algorithms, *Acta Universitatis Sapientiae, Informatica*, **3(2)**: 230–268.

[P1.8] Iványi, A., Schoenfield, J.E. (2012): Deciding football sequences, *Acta Universitatis Sapientiae, Informatica*, **4(1)**: 130–183.

[P1.9] Khatwani, G., Kar, A.K. (2016): Improving the Cosine Consistency Index for the analytic hierarchy process for solving multi-criteria decision making problems, *Applied Computing and Informatics*
DOI 10.1016/j.aci.2016.05.001

[P1.10] Komáromi, É. (2013): A Kullback-Leibler relatív entrópia függvény alkalmazása páros összehasonlítás mátrix egy prioritásvektora meghatározására, *Szigma*, **44(1-2)**: 1–19.

[P1.11] Kou, G., Ergu, D., Peng, Y. and Shi, Y. (2013): IBMM for Inconsistent Data Identification and Adjustment in the AHP/ANP, *Data Processing for the AHP/ANP ,series: Quantitative Management*, **1**: 29–64. DOI: 10.1007/978-3-642-29213-2_3

[P1.12] Lim, C.Y., and Khoo, V.K. (2013): A triad-based inconsistency detection mechanism for eliciting tacit knowledge, 3rd International Conference on Digital Information and Communication Technology and its Applications (DICTAP2013), pp. 68–73. The Society of Digital Information and Wireless Communication (SDIWC), Ostrava, Csehország.

[P1.13] Martinez, M., de Andres, D., Ruiz, J., Friginal, J. (2014): From measures to conclusions using Analytic Hierarchy Process in dependability benchmarking, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, **63(11)**: 2548–2556.
DOI: 10.1109/TIM.2014.2348632

[P1.14] Rotter, P. (2014): Extraction of relevant glass melting parameters based on the pairwise comparisons of sample images from a furnace, Glass Technology, *European Journal of Glass Science and Technology*, **A/55(2)**: 55–62.

[P1.15] Rotter, P. (2012): Multimedia information retrieval based on pairwise comparison and its application to visual search, *Multimedia Tools and Applications*, **60(3)**: 573–587.
DOI 10.1007/s11042-011-0828-8

[P1.16] Septifani, R., Effendi, U., Dewi, I.A. (2012): Penilaian kinerja departemen produksi dalam menerapkan reverse logistics dengan pendekatan Analytical Hierarchy Process dan Data Envelopment Analysis (Studi Kasus Di Pt Sinar Sosro Kantor Pabrik Mojokerto),Indonesian with English abstract; Performance assessment of production department in implementing reverse logistics with Analytical Hierarchy Process and Data Envelopment Analysis approach (Case Study at PT Sinar Sosro Mojokerto Factory Office)/, *Jurnal Industri*, **1(2)**: 94–104.

[P1.17] Siraj, S., Mikhailov, L., Keane, J.A. (2012): Preference elicitation from inconsistent judgments using multi-objective optimization, *European Journal of Operational Research*, **220(2)**: 461–471.
DOI 10.1016/j.ejor.2012.01.049

[P1.18] Temesi, J. (2011): Pairwise comparison matrices and the error-free property of the decision maker, *Central European Journal of Operations Research*, **19(2)**: 239–249.
DOI 10.1007/s10100-010-0145-8

[P1.19] Yadav, R., Khoo, V.K.T., Lim, C.Y. (2011): Automatic inconsistency detection for online responses, Proceedings of the 3rd International Conference on Computer Engineering and Technology (ICCET 2011), Kuala Lumpur, Malajzia, pp. 657–664.
DOI 10.1115/1.859735.paper100

[P2.1] Bertsch, V., Hall, M., Weinhardt, C., Fichtner, W. (2016): Public acceptance and preferences related to renewable energy and grid expansion policy: Empirical insights for Germany, *Energy*, **114(1)**: 465–477.
DOI 10.1016/j.energy.2016.08.022

[P2.2] Brunelli, M. (2016): Studying a set of properties of inconsistency indices for pairwise comparisons, *Annals of Operations Research*
DOI 10.1007/s10479-016-2166-8

[P2.3] Brunelli, M. (2015): Introduction to the Analytic Hierarchy Process, *SpringerBriefs in Operations Research*, Springer International Publishing
DOI 10.1007/978-3-319-12502-2

[P2.4] Chen, K., Kou, G., Tarn, J.M., Song, Y. (2015): Bridging the gap between missing and inconsistent values in eliciting preference from pairwise comparison matrices, *Annals of Operations Research*, **235(1)**: 155–175.

[P2.5] Kazibudzki, P.T. (2016): An examination of performance relations among selected consistency measures for simulated pairwise judgments, *Annals of Operations Research*
DOI 10.1007/s10479-016-2131-6

[P2.6] Lakicevic, M., Srdevic, B.M., Srdevic, Z.B. (2015): Multi-criteria approval for evaluating landscape management strategies (case study: Fruška

Gora National Park), *Matica Srpska Journal for Natural Sciences*, **128**: 99–107.

[P2.7] Ojala, V.M. (2015): Missing preferences in pairwise comparison matrices: a numerical study, BSc thesis, Aalto University, School of Science, Espoo. Supervisor: Hämäläinen, R.P., Advisor: Brunelli, M.

[P2.8] Rivest, R. (2016): AHP: The Signal and The Noise - A numerical experiment on the possibility of getting the solution with much less pairwise comparisons, Poster presented at ISAHP 2016, London, UK.

[P3.1] Siraj, S., Mikhailov, L., Keane, J.A. (2015): Contribution of individual judgments towards inconsistency in pairwise comparisons, *European Journal of Operational Research*, **242(2)**: 557-–567.
DOI 10.1016/j.ejor.2014.10.024

[P13.1] Moshkovich, H.M., Mechitov A.I. (2016): ORCON - a decision aid for ordinal consistency in a pairwise comparison matrix, Research
DOI 10.13140

Hivatkozások

[1] Aguarón, J., Moreno-Jiménez, J.M. (2003): The geometric consistency index: Approximated thresholds, *European Journal of Operation Research*, **147**: 137–145.

[2] Bana e Costa, C.A., Vansnick, J.-C. (2008): A critical analysis of the eigenvalue method used to derive priorities in AHP, *European Journal Of Operational Research*, **187**(3): 1422–1428.

[3] Bozóki, S., Dezső, L., Poesz, A., Temesi, J. (2013): Analysis of pairwise comparison matrices: an empirical research, *Annals of Operations Research*, **211**(1): 511–528.

[4] Bozóki, S., Fülöp, J., Koczkodaj, W.W. (2011): LP-based consistency-driven supervision for incomplete pairwise comparison matrices, *Mathematical and Computer Modelling*, **54**: 789–793.

[5] Bozóki, S., Fülöp J., Poesz, A. (2011): On pairwise comparison matrices that can be made consistent by the modification of a few elements, *Central European Journal of Operations Research*, **19**(2): 157–175.

[6] Bozóki, S., Fülöp, J., Poesz, A. (>=2015): On reducing inconsistency of pairwise comparison matrices below an acceptance threshold, *Central European Journal of Operations Research*, DOI 10.1007/s10100-014-0346-7

[7] Gass, S.I., Standard, S.M. (2002): Characteristics of positive reciprocal matrices in the analytic hierarchy process, *Journal of Operational Research Society*, **53**: 1385–1389.

[8] Koczkodaj, W.W. (1993): A new definition of consistency of pairwise comparisons, *Mathematical and Computer Modelling*, **18**(7): 79–84.

[9] Peláez, J.I., Lamata, M.T. (2003): A new measure of inconsistency for positive reciprocal matrices, *Computer and Mathematics with Applications*, **46**: 1839–1845.

[10] Poesz, A. (2008): Analysis of the inconsistency of empirical pairwise comparison matrices, Master's Thesis, Department of Decisions in Economics, Corvinus University of Budapest.

[11] Poesz, A. (2009): Empirical pairwise comparison matrices (EPCM) – an on-line collection from real decisions, version EPCM-October-2009. http: //www.sztaki.hu/∼bozoki/epcm

[12] Saaty, T.L., The Analytic Hierarchy Process, McGraw-Hill, New York, 1980.