Hevér Judit

PÉNZÜGYI KÖZVETÍTÉS LIKVIDITÁSI ÉS SZABÁLYOZÁSI KORLÁTOK MELLETT

Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék

Témavezető:

Dr. Csóka Péter Ph.D.

Budapesti Corvinus Egyetem

Közgazdasági és Gazdaságinformatikai Doktori Iskola

Pénzügyi közvetítés likviditási és szabályozási korlátok mellett

Doktori értekezés

Hevér Judit

Budapest, 2021

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke

Táblázatok jegyzéke

Emmának, Barkának és Simonnak.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőm, Csóka Péter szakmai iránymutatását és tanácsait, amelyekkel végig támogatta az értekezés és az ahhoz vezető publikációk elkészülését és színvonaluk emelését.

Az értekezés részletkérdéseinek kidolgozásában építő jellegű javaslatok megfogalmazásával segítséget nyújtottak konferencia-előadásaim felkért hozzászólói: Pintér Miklós Péter (MKE-PTE doktorandusz nyári műhely, 2016 és BCE Közgazdaságtani Doktori Iskola éves konferenciája, 2016), Zawadowski Ádám (BCE Közgazdaságtani Doktori Iskola éves konferenciája, 2019) és Neszveda Gábor (MKE éves konferencia 2019). Emellett a Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék kutatási fórumain, az Annual Financial Market Liquidity konferenciákon és más szakmai rendezvényeken hasznos és előremutató észrevételeket kaptam Carlo Acerbitől, Niklas F. Wagnertől, Berlinger Edinától, Bihary Zsolttól, Badics Milántól, Kerényi Pétertől, Bátyi Tamás Lászlótól és Vadász Tamástól.

A tudományos kutatás iránti érdeklődésem felkeltésért köszönettel tartozom tanáraimnak, Gömöri Andrásnak, Szabó Katalinnak, Zalai Ernőnek, Berde Évának, Csekő Imrének, Medvegyev Péternek, Tulassay Zsoltnak és Vincze Jánosnak.

Végül, de korántsem utolsósorban köszönöm gyermekeim türelmét és családom feltétel nélküli támogatását.

A dolgozatban maradt hibákért természetesen kizárólag én vagyok felelős.

A kutatásaimat a Pallas Athéné Domus Scientiae Ösztöndíjprogram és az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-19-3-IV kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának szakmai és pénzügyi támogatásával végeztem.

1. fejezet

Bevezetés

A likviditás pénzügyi piacokon betöltött kulcsszerepét bizonyítják az elmúlt évtizedek likviditási válságai, a Fekete Hétfő 1987-ben, az Egyesült Államok és Irak közötti háború 1990-ben, az LTCM összeomlása 1998-ban, vagy a 2007-es amerikai jelzáloghitel-válság (Brunnermeier és Pedersen, 2008). A likviditási válságok és a válságokat elemző tanulmányok felhívták a szabályozó szervek figyelmét a likviditás vizsgálatának fontosságára, így napjainkban a likviditás és a likviditási kockázat kezelése a szabályozási gyakorlatban és az elméleti modellekben egyaránt fellelhető probléma.

Az értekezés elméleti modellkeretben vizsgálja az optimalizáló piaci szereplők döntésének megváltozását likviditási és szabályozási korlátok bevezetésekor. A 2. fejezetben a likviditási elvárás melletti portfólió-értékelés elméletét (Acerbi és Scandolo, 2008) permanens árhatás bevezetésével módosítjuk a piacot befolyásoló intézményi szereplők portfólió-allokálási döntésének pontosabb kezelése érdekében. A 3. és 4. fejezetekben tranzakciós költséggel (marginális keresleti-kínálati görbével, illetve árréssel) bővített általános egyensúlyelméleti modellt vezetünk be a különböző eszközök likviditása és a bevezetett szabályozói előírás közötti kapcsolat vizsgálatához. Eredményünk, hogy a szabályozói előírás visszafogja a kockázatmegosztást, csökkenti a piaci likviditást és a piaci szereplők hasznosságát. Az 5. fejezetben a modellt az intézmények és a gazdasági növekedés kontextusába ágyazva alkalmazzuk, a tranzakciós költség és a munkamegosztás közötti kapcsolatot vizsgáljuk.

A kutatási terület relevanciáját a szabályozási gyakorlat igazolja. 2013 januárjában a Bázeli Bizottság (*Basel Committee on Banking Supervision, BCBS*) a bankokra vonatkozó Bázel III. szabályozás elemeként két új likviditási mértéket, likviditás fedezeti mutatót és nettó stabil forrás mutatót vezetett be (BCBS, 2013). A bankrendszer sokktűrő képességét növelő szabályozás előírja, hogy a bankok kötelesek elegendő mennyiségű, a pénzpiacon könnyen és azonnal likvidálható eszközt tartani, illetve a kitettségeiket stabil forrással fedezni. A bankrendszer szabályozásával párhuzamosan folyamatosan megújulnak az IOSCO (*International Organisation of Securities*

Commissions) pénzügyi alapok kezelésével kapcsolatos ajánlásai. Az IOSCO (2018) ajánlás célja, hogy javítsa a nyíltvégű befektetési alapok likviditási kockázatának kezelését azért, hogy védje a befektetőket, javuljon a pénzügyi piacok hatékonysága és csökkenjen a szisztematikus kockázat. 2016-ban a SEC (*Securities and Exchange Commission*) elfogadta a 22e-4 kódszámú Új Szabályt (*New Rule 22e-4*), melyben a regisztrált nyíltvégű alapok likviditási kockázatát szabályozza[1]. A bevezetett előírás négy különböző kategóriába sorolja be az eszközöket készpénzre történő átválthatóság (konvertibilitás) alapján. A szabályozás magas, közepes és alacsony likviditású, illetve illikvid kategóriákat alkalmaz. A SEC[2] célkitűzései között fontos szerepet kap a pénzügyi piacokon befektető vagy hitelfelvevő háztartások védelme. Ugyanakkor a pénzügyi intézményi oldal szabályozása mellett ehhez a háztartások pénzügyi kultúrájának fejlesztése, a túlzott kockázatvállalás és eladósodottság visszaszorítása is kulcsfontosságú.

A szabályozási gyakorlat mellett elméleti modellek is foglalkoznak a kérdéskörrel. Az eszközök és piacok likviditása – az eszköz értékéről rendelkezésre álló információ transzparenciája, a likviditást biztosító piaci szereplők száma és tőkeellátottsága, illetve a növekvő bizonytalanság miatt – időben jelentősen ingadozhat, így a likviditási kockázat beemelése a modellekbe fontos feladat (Amihud, Mendelson és Pedersen, 2013). Acerbi és Scandolo (2008) alapján a modellezés során a likviditási kockázat (*liquidity risk*) jelentheti egy portfólió (tágabban: egy vállalat) cash flow-kockázatát (Acerbi és Scandolo, 2008), illikvid piacon való kereskedés, azaz az árhatás kockázatát (Almgren és Chriss, 2001; Amihud, 2002; Acharya és Pedersen, 2005), és a pénzügyi rendszerben keringő likviditás kiszáradásának kockázatát (elsők között Amihud, Mendelson és Wood (1990), Brunnermeier és Pedersen (2008), Mitchell, Pedersen és Pulvino (2007) foglalkozik a területtel). Az elméleti irodalom ennek megfelelően szerteágazó.

Acerbi és Scandolo (2008) likviditási elvárás melletti portfólióértéket definiál, amely a portfóliók legjobb vételi és eladási árakon történő értékelése helyett figyelembe veszi, hogy a jövőbeli tervek megvalósítása az eszközök egy részének likvidálását követeli meg. Bigio (2015) modelljében a vállalatok szembesülnek az eszközök azonnali likvidálásának, illetve hitelbiztosítékként történő használatának problémájával a szerződések korlátozott kikényszeríthetőségéből következő bizonytalanság miatt. Kiyotaki és Moore (2019) korlátozza a vállalkozók hitelfelvételét, így a befektetéshez likvidálniuk kell illikvid eszközeik egy részét. Csóka (2017) pénzügyi korlátok mellett

[1] Securities and Exchange Commission, Investment Company Liquidity Risk Management Programs, 17 CFR Parts 210, 270, 274, 90. és 195. oldal https://www.sec.gov/rules/final/2016/33-10233.pdf.

[2] *"The SEC enforces the securities laws to protect the more than 66 million American households that have turned to the securities markets to invest in their futures – whether it's starting a family, sending kids to college, saving for retirement or attaining other financial goals."* https://www.sec.gov/

modellezi egy eladósodott vállalat divíziói közötti kockázatmegosztás lehetőségét. Gromb és Vayanos (2010) a pénzügyi közvetítők tőkéje és a piaci likviditás közötti összefüggést modellezi.

Számos tanulmány vizsgálja a szabályozási előírások sikerességét és lehetséges költségeit. De Nicolò, Gamba és Lucchetta (2014) részpiaci egyensúlyi modell keretében megmutatja, hogy a Bázel III. keretében bevezetett likviditás fedezeti mutató alkalmazása visszafogja a hitelezést, csökken a hatékonyság és a jólét szintje. Begenau (2019) dinamikus általános egyensúlyelméleti modell segítségével vizsgálja a tőkekövetelmény optimális szintjét. A bevezetett tőkekövetelmény csökkenti a megengedett tőkeáttétel nagyságát, ezért csökken a bank kereslete a betétek iránt és az azokra fizetendő kamat, amin keresztül mérséklődik a bankok tőkeköltsége. Ez végsősoron növeli a bank hitelezési tevékenységét. Emellett a magasabb tőkekövetelmény ösztönzi a bankok monitoring tevékenységét, növelve a banki működés hatékonyságát. Ezzel szemben a IOSCO (2019a) jelentés hangsúlyozza, hogy a vállalati kötvények másodpiacának válság utáni szabályozása korlátozza a pénzügyi közvetítőket a likviditás biztosításában, így a stressztesztek alapján a piaci nyomás a korábbiaknál súlyosabb hozamelmozdulást eredményezhet. Sommer és Sullivan (2018) modellje alapján a jelzáloghitelek adókedvezményének eltörlése az ingatlanárak és a jelzáloghitelállomány csökkenését és a jólét emelkedését eredményezné.

Az értekezés minden fejezete optimalizáló piaci szereplők döntésének megváltozását vizsgálja likviditási és szabályozási korlátok bevezetésekor.[3] Míg az értekezés 2. fejezetében portfólió-optimalizálási problémát vizsgálunk, addig a 3., a 4. és az 5. fejezetben általános egyensúlyelméleti modellkeretben vizsgáljuk a piaci szereplők fogyasztási és portfólió-allokálási döntését és az árjegyző profitmaximalizálási feladatát. Az optimalizálási feladatokban fontos a szerepe a likviditásnak és a szabályozásnak is. A modellekben csak tranzakciós költség figyelembevétele mellett lehetséges a vásárlás és a likvidálás, ezért a piac pillanatnyi likviditását megragadó marginális keresleti-kínálati görbe mellett határozzuk meg az árakat és a portfóliók értékét. Acerbi és Scandolo (2008) megközelítését követve a portfólióértéket a jövőben elfogadható portfóliók halmazát megadó likviditási elvárás mellett határozzuk meg. A portfólió értéke az eredetiből (egy részportfólió likvidálásán keresztül) elérhető olyan portfóliók piaci áras értékének maximuma lesz, melyek teljesítik a megadott likviditási elvárást. A likviditási elvárás rögzítheti a portfólióval kapcsolatos befektetői célokat, intézményi szereplők esetén az alapok előre lefektetett befektetési politikájának elemeit, vagy

[3]Már a XIX. század végén a marginalista forradalom nyomán kialakuló neoklasszikus közgazdaságtan elméleti modelljeiben optimalizálnak a piaci szereplők. *"A közgazdaságtan átalakult olyan tudománnyá, amelyben a fő vizsgálati tárgy az, hogy a gazdálkodó egység adott korlátos erőforrásokkal, adott céljai legjobb kielégítésére hogyan alkalmaz alternatív megoldásokat."* [211. o.](Bekker, 2002). Napjaink specifikus, egy-egy stilizált tényt reprodukáló elméleti modelljei gyakran még mindig optimalizáló piaci szereplőkből indulnak ki. De a valóság pontosabb megragadása érdekében a piaci szereplők explicit és implicit korlátok mellett döntenek.

szabályozási előírásokat. Míg a fogyasztási és portfólió-allokálási döntést az *Expected Shortfall* függvényében bevezetett szabályozói előírás mellett oldjuk meg.

Illikvid portfóliók értékelésekor Acerbi és Scandolo (2008) felteszi, hogy a részportfólió likvidálásának nincs permanens árhatása, így a végső optimális portfólió, amely már teljesíti a likviditási elvárást, az eredeti marginális keresleti-kínálati görbe mellett értékelhető. Kisebb tranzakciós volumen, hosszabb időintervallum, vagy biztosabb kifizetést biztosító eszközök (kötvények) mellett a feltevés ésszerű. Ugyanakkor intézményi befektetők kereskedésének permanens árhatása jelentős lehet. A 2. fejezetben permanens árhatás bevezetésével (Almgren és Chriss, 2001) módosítjuk a likviditási elvárás melletti portfólióértéket (Acerbi és Scandolo, 2008) az intézményi befektetők speciális problémájának pontosabb kezelése érdekében. Az illusztrációként használt példában lineáris permanens árhatás, minimális készpénzmennyiséget előíró likviditási elvárás és exponenciális függvénnyel közelített marginális keresleti-kínálati görbe mellett már mérsékelt permanens árhatás is teljesen megváltoztatja az elérhető portfóliót, miközben enyhén módosította a portfólió értékét. A permanens árhatás szerepeltetése a készletezési hatás miatt az árelfogadás feltételének sérülésével jár együtt, hiszen a piaci szereplő kereskedéssel eltolhatja, akár manipulálhatja is az árakat. A definiált portfólióértéket használhatnánk kockázati mértékek számszerűsítésekor, tőkekövetelmények meghatározásakor, illetve portfóliókezelők teljesítményének vizsgálata során.

A 3., 4. és a 5. fejezeteket szorosan összekapcsolja az alkalmazott általános egyensúlyelméleti modellkeret. Az értekezés a modell felépítésében alapvetőn Le Roy és Werner (2001) könyvére támaszkodik. Újítás ugyanakkor a várható veszteség függvényeként bevezetett szabályozói előírás, az árjegyző endogén marginális keresleti-kínálati görbéjének, illetve árrésének használata és a készpénz kiemelése az eszközök közül, ami lehetővé teszi a kockázatmentes eszközben történő megtakarítást akár minden szereplő számára egyszerre is.

A 3. és a 4. fejezet a piaci likviditás és a szabályozási előírás bevezetése közötti kapcsolatot vizsgálja. Fontos különbség ugyanakkor, hogy míg a 3. fejezetben marginális keresleti-kínálati görbe, addig a 4. fejezetben árrés változása ragadja meg a piaci likviditás változását. A modellek megoldását és eredményeit N szereplő és két szereplő mellett egyaránt vizsgáljuk. A szabályozói előírás bevezetése plusz korlátozó feltétellel módosítja a piaci szereplők optimalizálási döntését, így a korábban optimális portfóliójuk nem biztos, hogy elérhető marad, hasznosságuk adott MSDC és árrés mellett nem nőhet. Ha a piaci szereplő az optimális döntés során beleütközik a szabályozói előírásba, akkor az árjegyzőnek megéri növelni a tranzakciós költséget arra a szintre, amely mellett a szabályozói előírás mellett keresett portfólió a piaci szereplő legjobb válasza. Eredményeink alapján a szabályozás hatására csökken a piaci likviditás, ami visszafogja a piaci szereplők közötti kereskedést és kockázatmegosztást. Egyensúlyban a piaci szereplők fogyasztási profilja kockázatosabb marad, alacsonyabb hasznossági szintet érnek el. Természetesen a gyakorlatban a szabályozás kérdése sokkal összetettebb, és a beavatkozást a piaci tökéletlenségek indokolttá teszik. Az értekezés ugyanakkor megerősíti, hogy a beavatkozás költségekkel jár, a szabályozási előírás bevezetése visszahat a piaci likviditásra. A szabályozási mechanizmusok tervezésekor ezt a szempontot is mérlegelni kell.

Az 5. fejezet a bevezetett modellt az intézmények és a gazdasági növekedés irodalmába ágyazva alkalmazza, a tranzakciós költség bevezetése és a kockázatmegosztás közötti kapcsolatot vizsgálja. Megmutatjuk, hogy a munkamegosztásból fakadó természetes kitettségek tökéletes fedezése csak szabad tranzakciós környezet esetén valósulhatna meg. A tranzakciós költség visszafogja a kockázatmegosztást, ami szélsőséges esetben a piaci szereplők önellátás melletti döntését eredményezheti. Az állam tranzakciós költség szintjéről meghozott döntését korlátozza annak biztosítása, hogy egyensúlyban a gazdasági növekedést ellehetetlenítő önellátás helyett a munkamegosztást válasszák a piaci szereplők.

Az értekezés felépítése a következő: a 2. fejezet a 2.1. bevezetés után a kapcsolódó irodalom összefoglalásával kezdődik. A 2.2. fejezet vázolja a piaci mikrostruktúra irodalom alapjait, kitér a kereskedési rendszerek működésére, bevezeti az árhatás, a likviditás és a likviditási kockázat fogalmát, és ismerteti Almgren és Chriss (2001) és Almgren (2003) alapján az optimális végrehajtási stratégiát meghatározó modelleket. A 2.3. alfejezetben Acerbi és Scandolo (2008) és Csóka és Herings (2014) alapján bevezetjük a jelöléseket és Acerbi és Scandolo (2008) likviditási elvárás melletti portfólióértékelésének keretrendszerét. A definíciókat példákkal illusztráljuk. A 2.4. alfejezetben lineáris permanens árhatás mellett módosítjuk a likviditási elvárás melletti portfólióértéket, míg a 2.5. alfejezet speciális feltevések (készpénzlikviditási elvárás és exponenciális marginális keresleti-kínálati görbe) mellett mutatja be a portfólió-optimalizálási problémát. Végül a legfontosabb megállapítások összefoglalása mellett lehetséges felhasználási területeket említünk.

A 3. fejezetben a 3.1. bevezetés után a 3.2. alfejezetben a piaci likviditás és a szabályozás gyakorlatának és elméletének irodalmából válogatunk releváns tanulmányokat. A 3.3. szakaszban Csóka és Herings (2014) és Le Roy és Werner (2001) alapján a jelölések és az általános egyensúlyelméleti keret bevezetése kap helyet, amely leírja a piaci szereplők fogyasztási és portfólió-allokálási döntését szabályozói lépések bevezetése mellett is, vázolja az árjegyző döntési problémáját és megadja a piaci egyensúly feltételeit. A 3.4. alfejezet bemutatja a speciális modellváltozatokat, megold egy kétszereplős modellt és példák segítségével illusztrálja az eredményeket.

A 4. fejezetben a vázolt általános modellkeret speciális eseteként a piaci likviditást az árrés, azaz a vételi és az eladási árak közötti különbség nagyságával mérjük. A fejezet bevezetése után árrést alkalmazó tanulmányokat mutatunk be tömören.

A 4.3. alfejezet az árrés alkalmazásához szükséges új jelölések bevezetésével és a leegyszerűsödött általános egyensúlyelméleti keret bemutatásával kezdődik, majd a modell segítségével feltárható összefüggéseket általánosan, N szereplő esetére fogalmazzuk meg. A 4.4. alfejezetben a kétszereplős modell analitikus megoldása és az eredmények példákon keresztül történő illusztrálása kap helyet.

Az 5. fejezetben a modellt az intézmények és a gazdasági növekedés kapcsolatát feltáró irodalom összefoglalása után közöljük, elhelyezve ezzel a vizsgált speciális problémánkat a kérdéskörben. A bevezetés után következő 5.2.1. alfejezet az intézmény definíciójával foglalkozik, majd az 5.2.2. alfejezetben a történeti példákat felsorakoztató tanulmányok és empirikus elemzések összefoglalása következik. Az 5.2.3. pontban az elméleti eredmények segítségével vizsgáljuk a gazdasági növekedést támogató intézményeket, az intézmények kialakulását és az országok intézményrendszerében megfigyelhető különbségek okait. Az 5.3. alfejezet a kulcsprobléma a tranzakciós költség, a munkamegosztás és a piaci szereplők közötti kockázatmegosztás kapcsolatát modellezi. Végül a legfontosabb megállapítások összefoglalásával zárjuk a fejezetet.

Az értekezés minden fejezete önálló tanulmányként is olvasható, ugyanakkor az alkalmazott módszertan, az egységes jelölésrendszer és a kutatási kérdések szervesen összekapcsolják a fejezeteket. Minden egység a szakirodalom átfogó összefoglalásával és értékelésével kezdődik, amely bevezeti és megalapozza a kutatási kérdések vizsgálatát. Majd a módszertan ismertetése után saját hozzájárulással bővítjük az irodalmat, új modellváltozatokat és önálló eredményeket mutatunk be. A 2. és a 4. fejezetekben közölt eredmények publikálása már megtörtént (Hevér, 2017; Csóka és Hevér, 2018; Hevér, 2020), míg a 3. és az 5. fejezetek publikálása folyamatban van. Az egyes szakaszok tartalmát a fejezetek végén összegezzük, így az értekezés összefoglalásában csak röviden ismételjük meg a főbb eredményeket, és vázolunk néhány lehetséges kutatási irányt.

2. fejezet

A likviditás és az árhatás szerepe a portfólió-értékelésben

Acerbi és Scandolo (2008) likviditási elvárások mellett határozza meg a portfóliók értékét. Ezen portfólióérték a likviditási kockázat mérésének eszközeként intézményi befektetők esetében kiemelt jelentőségű. Ugyanakkor meghatározó piaci erővel rendelkező szereplők portfólió-allokációról szóló döntéseiben saját kereskedésük árhatása fontos szerepet játszik (Almgren és Chriss, 2001). A fejezetben permanens árhatás bevezetésével módosítjuk a likviditási elvárás melletti portfólióértéket az intézményi befektetők speciális problémájának pontosabb kezelése érdekében. Az így definiált portfólióértéket használhatnánk kockázati mértékek számszerűsítésekor, tőkekövetelmények meghatározásakor, illetve portfóliókezelők teljesítményének vizsgálata során. A fejezet a Hevér (2017) és a Csóka és Hevér (2018) tanulmányok alapján készült.

2.1. Bevezetés

Célunk lineáris permanens árhatás bevezetésével módosítani a likviditási elvárás melletti portfólió-értékelést. A kutatási kérdés Almgren és Chriss (2001) árhatást komponensekre bontó optimális végrehajtási stratégiát meghatározó modelljéhez és Acerbi és Scandolo (2008) likviditási kockázatot formalizáló elméletéhez kapcsolódik. Mivel intézményi szereplők kereskedésének árhatása nem csak ideiglenesen figyelhető meg, ezért kereskedésük következtében permanensen megváltoznak az eszközök ajánlati könyvét megragadó marginális keresleti-kínálati görbék. A likviditási elvárás melletti portfólióérték piaci erővel rendelkező szereplők döntésének modellezésére abban az esetben alkalmazható, ha figyelembe vesszük, hogy a likviditási elvárás teljesítéséhez szükséges kereskedés módosítja a piaci árakat, és az elért végső portfóliót már az új árakon értékeljük. Jelen bevezetés az árhatás jelentőségét és a likviditási elvárás melletti portfólió-értékelés alapötletét vázolva indokolja a kutatási kérdés relevanciáját.

Kereskedés hatására a valós piacokon megfigyelhető ár elmozdulhat. Az árelmozdulást a klasszikus megközelítés a fundamentumokkal magyarázza. Ugyanakkor probléma forrása, hogy a csatornaként funkcionáló kereskedési mechanizmusból fakadó piaci súrlódások is befolyásolják az árváltozást, folyamatosan torzítva az egyensúlyi árat. Az árhatás, azaz a kereskedés következtében jelentkező árelmozdulás vizsgálata így összetett feladat.

Az árhatás figyelembevételével több gyakorlati probléma magasabb szintű kezelése lehetségessé válik. Képzeljük el, hogy megbíznak minket azzal a feladattal, hogy adjunk el vagy vásároljunk a piacon egy értékpapírt olyan mennyiségben, melyet ha egyben a piacra vinnénk, az azonnali árelmozdulás miatt jelentős tranzakciós költségekkel kellene szembenéznünk. A megoldás felaprózva, több kisebb ajánlatra bontva teljesíteni a likvidálást/vásárlást. Az optimális végrehajtási stratégia meghatározásakor a tranzakciós költségek minimalizálása az egyik cél (Almgren és Chriss, 2001). Míg a direkt költségek (pl. díjak) egyértelműen mérhetők, addig az indirekt költségek számszerűsítése problematikus[4]. Intézményi befektetők esetén saját kereskedésük árhatása az az indirekt tranzakciós költség, amely kulcsszerepet játszik az optimális stratégia meghatározásában. Az árhatás beemelése a modellezésbe közelebb hozza a portfólió-optimalizálás problémáját a gyakorlathoz, hiszen olyan piaci súrlódást vesz figyelembe, melynek jelentőségét a piaci szereplők saját bőrükön tapasztalhatták a pénzügyi válság során.

Az árhatás jelentőségének ismerete portfólió-értékelési és kockázatmérési módszerek hiányosságaira is felhívja a figyelmet. Nem mindegy, hogy az eszközeinket mikor és hogyan szeretnénk likvidálni, hogy mennyi készpénzre lesz szükségünk a közeljövőben, és mennyire tervezhetőek a kiadásaink. A két szélsőséges eset közül az egyik, ha azonnal szükségünk van a teljes befektetett összegre. Egy portfólió azonnali likvidálásakor realizálható összeg a *likvidációs érték*. A likvidációs érték meghatározásakor a piac likviditásától függően az árhatás jelentős lehet, ami alacsonyabb portfólióértéket eredményez, mint a hagyományos, piaci áras értékelés. Hiszen a piaci áras (*mark-to-market*) értékelés az eszközöket a legjobb eladási és vételi árfolyamon veszi számításba, figyelmen kívül hagyva az ajánlati könyv mélységét[5] és rugalmasságát[6], alulbecsülve ezzel, már akár csak egy részportfólió likvidálásának költségét is. A fejezet középutas megoldást keres, a likvidációs és piaci értékelés helyett alternatív portfólió-értékelési módszert mutat be.

[4]Amihud, Mendelson és Pedersen (2013) részletezi a tranzakciós költségek fajtáit, a direkt és az indirekt tranzakciós költséget.

[5]BIS (1999) alapján az ajánlati könyv mélysége a legjobb vételi és eladási árakhoz tartozó mennyiséget, vagy az ajánlati könyvbe beadott összes ajánlat mennyiségét jelenti.

[6]Az ajánlati könyv rugalmas, ha a tranzakció után az ár gyorsan visszatér az eredeti szintre (BIS, 1999).

A portfólióérték meghatározása történhet Acerbi és Scandolo (2008) alapötlete alapján a likviditási elvárás és az eszközök marginális keresleti és kínálati görbéjének figyelembevételével. A marginális keresleti-kínálati görbe az ajánlati könyvben egy adott pillanatban megüthető limitáras ajánlatokból határozható meg, megadja, hogy egy adott értékpapír $j \in J$ egységét milyen áron tudjuk megvenni/eladni. A likviditási elvárás halmaz pedig a jövőbeli terveket formalizáló feltételrendszernek (likviditási elvárásnak) eleget tevő portfóliók halmaza. A tökéletesen likvid piacot feltételező hagyományos megközelítés értelmében a portfólió és értéke között lineáris a kapcsolat, hiszen ilyenkor az érték az eszközök árakkal súlyozott összege. Acerbi és Scandolo (2008) alapján ez a kapcsolat nem lesz feltétlenül lineáris, hiszen a portfólió értékelésekor azt is figyelembe kell vennünk, hogy mik a későbbi terveink a portfólióval. Megközelítésükben csak a likviditási elvárást teljesítő portfóliókat tekinthetjük elfogadható portfólióknak, ezért a portfólió értéke az eredetiből (egy részének likvidálásán keresztül) elérhető olyan portfóliók piaci áras értékének maximuma lesz, melyek teljesítik a megadott likviditási elvárást. Az értékelés így egy konvex optimalizálási feladattal viszonylag könnyen és gyorsan elvégezhető.

Illikvid portfóliók értékelésekor Acerbi és Scandolo (2008) felteszi, hogy a részportfólió likvidálásának nincs permanens árhatása, így a végső optimális portfólió, amely már teljesíti a likviditási elvárást, az eredeti marginális keresleti-kínálati görbe mellett értékelhető. Kisebb tranzakciós volumen, hosszabb időintervallum, vagy biztosabb kifizetést biztosító eszközök (kötvények) mellett a feltevés ésszerű. Ugyanakkor intézményi befektetők kereskedésének permanens árhatása jelentős lehet.

Az intézményi befektetők portfóliójának pontosabb értékelése érdekében a fejezetben a likviditási elvárás melletti portfólió-értékelést (Acerbi és Scandolo, 2008) permanens árhatás (Almgren és Chriss, 2001) bevezetésével módosítjuk. Feltesszük, hogy a likviditási elvárás teljesítéséhez szükséges kereskedés ideiglenes árhatása már nem érzékelhető a piacon, a permanens árhatás viszont megváltoztatja a marginális keresleti-kínálati görbéket. A tranzakciós költség hatása mellett az optimalizáláskor készletezési hatást figyelünk meg, hiszen egy eszköz likvidálásának permanens árhatása befolyásolja azt az árat, amin az adott eszközből az optimális portfólióban maradó készletet értékeljük. A permanens árhatás szerepeltetése az árelfogadás feltételének sérülésével jár együtt, a piaci szereplő kereskedéssel eltolhatja, akár manipulálhatja is az árakat.

A permanens árhatásfüggvény alakjának meghatározásához Huberman és Stanzl (2004) és Almgren és szerzőtársai (2005) adnak iránymutatást. Huberman és Stanzl (2004) az arbitrázsmentesség feltételének biztosításához lineáris függvénnyel (*price update function*) írja le a kereskedett mennyiség jövőbeli árra gyakorolt hatását. Almgren és szerzőtársai (2005) empirikusan teszteli és nem tudja elvetni a lineáris permanens árhatás hipotézist. Az irodalom eredményeivel összhangban az értekezésben a modellezés során feltesszük, hogy a permanens árhatás függvényformája lineáris. Így a portfólió-optimalizálási problémát lineáris permanens árhatás és minimális készpénzmennyiséget meghatározó likviditási elvárás mellett vizsgáljuk. A probléma megoldása numerikus módszerrel vagy exponenciális marginális keresleti-kínálati görbe feltételezésével határozható meg. A szimulációs példában exponenciális MSDC és készpénzlikviditási elvárás mellett már mérsékelt permanens árhatás is teljesen megváltoztatja az elérhető portfóliót, miközben enyhén módosítja a portfólió értékét.

Jelen bevezetés után az irodalmi összefoglaló következik, amely a piaci mikrostruktúra irodalom alapjait vázolja, kitér a kereskedési rendszerek működésére, bevezeti az árhatás, illetve a likviditási kockázat fogalmát, és ismerteti Almgren és Chriss (2001) és Almgren (2003) alapján az optimális végrehajtási stratégiát meghatározó modelleket. A 2.3 alfejezetben bevezetjük a jelöléseket és Acerbi és Scandolo (2008) likviditási elvárás melletti portfólióértékelésének keretrendszerét, majd példákkal illusztráljuk a definíciókat. A 2.4 alfejezetben lineáris permanens árhatás mellett módosítjuk a likviditási elvárás melletti portfólióértéket, míg a 2.5 alfejezet speciális feltevések (készpénzlikviditási elvárás és exponenciális marginális keresleti-kínálati görbe mellett) mutatja be a portfólió-optimalizálási problémát. Végül a legfontosabb megállapítások összefoglalása mellett lehetséges felhasználási területek vázolásával zárjuk a fejezetet.

2.2. Piaci mikrostruktúra megközelítés

A piaci mikrostruktúra irodalom központi kérdése az áralakulás folyamatának elemzése a különböző pénzügyi piacok kereskedési mechanizmusának és a piaci tökéletlenségek (például tranzakciós költségek, aszimmetrikus információ és változó likviditás) figyelembevételével (O'Hara, 1995; Madhavan, 2000; de Jong és Rindi, 2009). A piaci mikrostruktúra fogalmat 1976-ban Garman vezeti be, hangsúlyozva a kereskedési tevékenység időbeliségének fontosságát.[7] O'Hara (1995) definíciója alapján a piaci mikrostruktúra a kereskedés folyamatának és eredményének tanulmányozása a szabályok meghatározott halmaza mellett. Madhavan (2000) megközelítésében a pénzügyek ezen területe annak a folyamatnak a modellezésével foglalkozik, amely során a befektetők látens kereslete tranzakciókká alakul.[8] A fejezet célja körülhatárolni

[7] *„we depart from the usual approaches of the theory of exchange by (1) making the assumption of asynchronous, temporally discrete market activities on the part of market agents and (2) adopting a viewpoint which treats the temporal microstructure, i.e. moment-to-moment aggregate exchange behavior, as an important descriptive aspect of such markets.”* Az idézet forrása Garman (1976) 257. oldal, 1. bekezdés. A definíciót idézi többek között Mantegna és Kertész (2011).

[8] Madhavan (2000) összefoglaló munkája kategorizálásában az irodalom fő témái

- az áralakulás folyamatának modellezése, amely során a látens kereslet meghatározza a piaci árat és a kereskedett mennyiséget,
- annak vizsgálata, hogy a piac kereskedési rendszere hogyan befolyásolja a piac likviditását

a piaci mikrostruktúra megközelítést, vázolni az ajánlatvezérelt piacok működését és bevezetni az árhatás fogalmát.

2.2.1. Kezdetektől napjainkig

Az 1602-ben alapított Németalföldi Kelet-indiai Társaság és a megszerzett gyarmatok Hollandiát az akkori Európa pénzügyi központjává tették. Így nem véletlen, hogy 1611-ben Amszterdamban alapították a világ első tőzsdéjét. 1688-ban az amszterdami tőzsde működéséről De La Vega, aki maga is előszeretettel kereskedett - *Confusion of Confusions* címmel - könyvet írt, melyet az első, egy kereskedési rendszer működésének ismertetését is tartalmazó forrásnak tekinthetünk. Munkájában a kereskedéssel kapcsolatos tanácsok mellett bennfentes kereskedés, manipuláció, egzotikus eszközök (határidős ügyletek és opciók) bemutatása is helyet kapott (Madhavan, 2000). Ugyanakkor a piaci mikrostruktúrát középpontba helyező, precízen formalizált vagy empirikusan tesztelhető elméletek születése csak az 1980-as évekre tehető. Ekkor vizsgálja Amihud és Mendelson (1987) a nyitó- és záróárfolyamok varianciájának különbségét a New York-i Tőzsde száz leglikvidebb részvényének mozgása alapján. Kyle (1985) az irodalom első meghatározó elméleti modelljében azt a folyamatot modellezi, amely során az egyéni információ az áralakulás piaci mechanizmusán keresztül beépül az árakba és köztudottá válik. Cohen és szerzőtársai (1986) a részvénypiacok kereskedési rendszereinek alapos összevetése mellett, a korai eredmények részletes összefoglalását tartalmazza. Kifejti, hogy a fragmentált piacok helyett egy konszolidált pénzpiac a kívánatos, mérethatékonysági megfontolások alapján. A legjobb eladási és vételi ajánlat közötti árrés (*bid-ask spread*) létét azzal magyarázza, hogy a jobb árszint a nemteljesülés lehetőségét kompenzálja. A terület, bár a 90-es évektől egyre nagyobb népszerűségnek örvend, relevanciáját és szükségességét leginkább a 2007-es gazdasági válság mutatta meg.

A 2000-es évekre a mikrostruktúra megközelítés a valós piacok kereskedési struktúrájából kiindulva egy új modellezési keretrendszert kínál. Az elméletben a tranzakciós költségek megjelenésének és a kereskedési mechanizmus relevanciájának hátterében a piaci szereplők közötti aszimmetrikus információ, illetve az ajánlatok különböző időpontokban történő beadása állhat. Attól függően, hogy a kettő közül melyik okot fogadjuk el, az irodalom megkülönbözteti az információs (*information-based*) és a készletezési (*inventory-based*) modelleket (de Jong és Rindi, 2009). Amihud, Mendelson és Pedersen (2013) a készletezési kockázat és az aszimmetrikus információ oldaláról egyaránt magyarázza az indirekt tranzakciós költségek létét. A valós piacok

és minőségét,

– illetve annak megértése, hogy a kereskedési rendszer működése, hogyan befolyásolja a kereskedők stratégiáját és viselkedését.

elemzéséből kiindulva nyilvánvaló, hogy az információnak és a likviditásnak is szerep jut, ennek megfelelően a szétválasztás ma már kevésbé hangsúlyos.

A modellek másik csoportosításának alapja a kereskedési mechanizmus, mely determinálja a piac működését meghatározó szabályokat. A pénzügyi piacok két típusba sorolhatók, árjegyzői (*quote-driven*) és ajánlatvezérelt (*order-driven*) piacokat különböztethetünk meg (de Jong és Rindi, 2009). Az árjegyzői piacok közé tartozik például a NASDAQ és az LSE SEAQ, míg ajánlatvezérelt a NYSE, a Paris Bourse és a BÉT azonnali piaca. Az árjegyzői piacokon a kereskedők kizárólag a kijelölt árjegyzőkön (*market maker*) keresztül kereskedhetnek, akik kétoldali árjegyzéssel biztosítják a piac likviditását. Az ajánlatvezérelt piacok esetében nincs kijelölt árjegyző, az ajánlatok nyilvántartása és párosítása elektronikus kereskedési rendszerekben történik, melyek többsége a folytonosan zajló kétoldali aukciós mechanizmus elvén működik.[9] A másodlagos pénzügyi piacok mikrostruktúrájáról és a különböző piacokat jellemző súrlódásokról Erb és Havran (2015) részletes összefoglalást nyújt. Amihud, Mendelson és Pedersen (2013) szintén kitér a közvetítők szerepére és a tranzakciós költségek kereskedési rendszertől való függőségére.

2.2.2. Az árhatás fogalma

Az árhatás a piaci mikrostruktúra irodalom központi fogalma. Érdekessége, hogy egyszerre következménye és befolyásoló tényezője a piaci szereplők viselkedésének. Következmény, hiszen ajánlatbeadás, esetleg ajánlattörlés eredményeként tapasztaljuk. Mint következmény, azzal, hogy megmutatja, mennyivel mozdul el az árfolyam egy adott nagyságú piaci művelet után, a piacot és a piaci szereplők viselkedését jellemzi. Ugyanakkor befolyásoló tényező, mert a piaci szereplők az árhatás létével számolva döntenek stratégiájukról, tovább alakítva ezzel a piaci dinamikát. Így az árhatás segítségével egyrészt feltárhatjuk a piac összefüggéseit, és megpróbálhatjuk

[9] A mechanizmust Farmer és szerzőtársai (2004) és de Jong és Rindi (2009) alapján ismertetjük röviden. A piaci szereplők két különböző típusba sorolható anonim ajánlattal kereskedhetnek. Limitáras (*limit order*) kizárólag egy adott vételi árszint alatt, illetve egy adott eladási árszint felett teljesülő ajánlatot adhatnak be. Illetve piaci áras (*market order*) az azonnal elérhető legjobb árszinten teljesülő ajánlatokon keresztül kereskedhetnek. A különböző oldali különböző ajánlatok angol elnevezései széles körben elterjedtek, ezek a *bid* – vételi limitáras, az *ask* – eladási limitáras, a *take* – piaci áras vételi, és a *hit* – piaci áras eladási. A limitáras ajánlatbeadás egy mennyiség és egy árszint meghatározását jelenti, míg a piaci áras ajánlatbeadáskor csak a keresett mennyiség determinált, hiszen az ajánlat a legjobb árszinten beadott vételi vagy eladási limitáras ajánlatokat üti meg. A limitáras ajánlatok rögzítésére szolgál az ajánlati könyv (*order book*), melyben a hozzátartozó ajánlati árral együtt szerepel a kínált és a keresett mennyiség. A legjobb vételi ajánlat az a limitáras vételi ajánlat, melyhez a legmagasabb ár tartozik, míg a legjobb eladási ajánlat a legalacsonyabb áron kínált eladási mennyiség. Az éppen aktuális középárfolyam ezek átlagaként számítható. Ha a beadott piaci áras ajánlat legalább akkora, mint az ajánlati könyvben az ellenoldali legjobb árszinten található menynyiség, akkor a középárfolyam a kötés hatására elmozdul. Ha a legjobb vételi/eladási limitáras mennyiségeknél nagyobb a piaci áras ajánlat érkezik, akkor értelemszerűen a kimaradt mennyiség a második legmagasabb/legalacsonyabb árú ajánlattal kerül összepárosításra.

megmagyarázni azokat a piaci szereplők viselkedésével, másrészt megvizsgálhatjuk, hogy az árhatás léte milyen piaci reakciókat implikál.

Bár az árhatás (*price impact, market impact*) és az árhatásfüggvény pontos definíciója szerzőnként és modellenként eltér, a cél az árhatással mindig a kereskedés következtében történő árelmozdulás számszerűsítése, az árhatásfüggvénnyel pedig egy, az árhatást magyarázó összefüggés felírása. A definíciók közötti különbségek két fő dimenzió mentén adódnak. Az egyik fő kérdés, hogy az árhatást és az árhatásfüggvényt árjegyzői vagy ajánlatvezérelt piacon értelmezzük. Árjegyzői piacon az árhatásfüggvény a piacvezető ármeghatározáskor használt döntési szabálya (Farmer, 2002; Kyle, 1985; Evans és Lyons, 2002). Míg ajánlatvezérelt piacon az árhatásfüggvény célja az ajánlatbeadások és ajánlattörlések (aggregálva vagy egyedi eseményekként vizsgálva) és az árelmozdulás közötti statisztikai kapcsolat megjelenítése (Weber és Rosenow, 2006; Gerig, 2007; Daníelsson és Payne, 2002; Farmer és szerzőtársai, 2004; Farmer és Lillo, 2005; Váradi, Gyarmati és Lublóy, 2012). A másik dimenzió a vizsgálat egységének meghatározása: vizsgálhatjuk bizonyos időintervallum alatti aggregált tranzakciók, egyedi tranzakciók, esetleg egyedi események (ajánlatbeadások, ajánlattörlések) árhatását.

A klasszikus megközelítés az árhatásfüggvényt az ajánlatfolyam (*order flow*) és az árfolyamváltozás közötti kapcsolat leírására használja (Farmer, 2002; Evans és Lyons, 2002; Kyle, 1985; Weber és Rosenow, 2006; Gerig, 2007). Az order flow egy adott intervallum (időintervallum vagy kereskedési egység) alatt a vevők által kezdeményezett és az eladók által kezdeményezett tranzakciók méretének előjeles különbsége. Időintervallumonként aggregált tranzakciók árhatásának vizsgálatakor az order flow lehet a napi nettó keresett mennyiség (Evans és Lyons, 2002), vagy akár vizsgálhatunk egészen rövid, például 5 perces időintervallumok alatt történt tranzakciókat is (Weber és Rosenow, 2006). Ugyanakkor az intervallumot a kereskedési mechanizmus valamely egysége is megadhatja. Kyle (1985) az order flow fogalmát arra a beadott nettó keresett mennyiségre használja, melyet az árjegyző (piacvezető) egy kereskedési szakaszban megfigyel, míg Gerig (2007) a tranzakciók árhatását vizsgálja, így az order flow az egyes tranzakciókkor a kezdeményező fél szempontjából kereskedett mennyiség.

Daníelsson és Payne (2002), Farmer és szerzőtársai (2004) és Farmer és Lillo (2005) ajánlatvezérelt piac egyedi eseményeinek vizsgálatához definiálja a fogalmakat. Ebben a megközelítésben az árhatás ajánlatbeadás vagy ajánlattörlés következtében megfigyelhető árváltozást jelent.[10]

[10]Három esemény okozhatja a középárfolyam elmozdulását

- olyan piaci áras ajánlatbeadás, mely legalább akkora, mint az ellenoldali legjobb árszinten kínált vagy keresett mennyiség;
- a legjobb vételi és eladási árszint közé eső limitáras ajánlatbeadások;

2.2.3. Az informált intézményi befektetők és a permanens árhatás

A piaci mikrostruktúra irodalomban az információ áramlásának modellezése sokat változott a neoklasszikus megközelítéshez képest. Az áralakulást befolyásoló egyik tényező továbbra is a piaci szereplők által birtokolt információ, ugyanakkor a modellekben – a megfigyelhető gyakorlathoz hasonlóan – az információt a piac kereskedési rendszere továbbítja. Középpontba került a kereskedési mechanizmus vizsgálata, amely során a piaci szereplők magáninformációiból az árakban tükröződő közös tudás lesz.

Kyle (1985) letisztult, a piac működését nagymértékben leegyszerűsítő elméleti modellt vezet be, amely meghatározza egy informált szereplő optimális stratégiáját, és leképezi azt a folyamatot, ahogy az egyes egyének által birtokolt magáninformáció az áralakulás piaci mechanizmusán keresztül beépül az árba. Egy kockázatsemleges, magáninformációval rendelkező piaci szereplő (*insider*) és kockázatsemleges árjegyzők (*market maker*) közötti stratégiai interakciót vizsgálja a piaci zajt biztosító véletlen keresett vagy kínált mennyiséget beadó szereplők (*random noise traders*) mellett. Az árjegyzők csak az aggregált nettó keresletet tudják megfigyelni, mely az informált szereplő valós eszközértéktől függő keresett vagy kínált mennyiségének és a likviditást biztosító szereplők véletlen nettó keresletének az összege. Az árjegyzők az aggregált nettó kereslet függvényében úgy határozzák meg az árat, hogy a várható profitjuk 0 legyen, míg az informált szereplő az árjegyzők árfüggvényét felhasználva maximalizálja a profitot. A szerző a vázolt keretben vizsgálja azt a folyamatot, ahogy többszöri kereskedés után a magáninformáció a nettó keresett mennyiségen (*order flow*) keresztül beépül az árba, és az informált szereplő várható profitja 0-ra csökken.

Hasonló az alapgondolata Almgren és Chriss (2001) és Almgren (2003) modelljeinek, melyek intézményi szereplők értékpapír-tranzakcióinak végrehajtásához határoznak meg optimális stratégiát. Abból a gyakorlati problémából indulnak ki, hogy nagy mennyiségű eszköz gyors likvidálása magas tranzakciós költségekkel jár együtt, míg ha szétaprózva értékesítünk, akkor a kereskedés következtében napvilágra kerülő információ és a hosszabb időtáv miatt nagyobb az árfolyam változásának kockázata. Az árfolyam változásának modellezéséhez Almgren és Chriss (2001) és Almgren (2003) *permanens és ideiglenes árhatás* bevezetésével két különböző árat definiál. Az elméleti ár tökéletes likviditás mellett lenne tapasztalható a piacon, míg a tranzakciós költséggel korrigált ár a piac mélysége miatt figyelhető meg egy tranzakció teljesülésekor. A permanens hatás az egyensúlyi árban a kereskedés hatására bekövetkező olyan változás, amely a likvidálás teljes időtartama alatt fennmarad. Az

– illetve a valamely oldali legjobb ajánlat törlése.

ideiglenes árhatás oka a kereslet és kínálat közti egyensúlytalanság, amely az ajánlat teljesülése (a likviditás kiszívása) következtében jelentkezik, és likvid piacon rövid idő elteltével megszűnik. A modellben a piacon megfigyelhető viselkedés megragadásához a szereplők a volatilitásból fakadó kockázat és az árhatás miatt felmerülő költségek kombinációját minimalizálják kockázatkerülésük függvényében súlyozva. Az árfolyamváltozás kockázatának modellezése nélkül likvidebb értékpapírral kereskedve sem adnánk el rövidebb idő alatt az összes értékpapírt, míg tökéletes likviditás mellett, azaz ideiglenes árhatás hiányában, azonnal piacra vinnénk a teljes mennyiséget.

Az informált piaci szereplők speciális problémájával számos empirikus tanulmány foglalkozik. Az optimális végrehajtási stratégiát meghatározó elméleti modellek alapján Almgren és szerzőtársai (2005) egyszerűsített modellt kalibrál a Citigroup részvénykereskedőin keresztül beadott, amerikai intézményi befektetők ajánlatait tartalmazó adatbázis segítségével. A modell eredményeit a Citigroup's Best Execution Consulting Services (BECS) szoftver kifejlesztésekor használták.[11] Han és szerzőtársai (2016) és Kitamura (2016) ajánlatvezérelt piacon vizsgálja az informált piaci szereplők kereskedésének árhatását. Han és szerzőtársai (2016) megerősíti az informált kereskedők jelenlétét, kimutatva, hogy a megfigyelhető árhatás jelentős része perzisztensen fennmarad. Továbbá a szerzők összevetik a kis és nagy tranzakciók árhatását, megmutatják, hogy az intézményi befektetők árhatása meghaladja a magánbefektetők árhatását, és megerősítik a szétaprózás stratégiájának jelenlétét. Kitamura (2016) az informált kereskedés után szintén jelentős árhatást figyel meg. A Szaudi Tőzsdén Alzahrani, Gregoriou és Hudson (2012) aszimmetriát mutat ki az eladási és vételi oldal blokktranzakcióira számszerűsített árhatás vizsgálatakor. A magyar tőzsdén a permanens árhatást az azonnali árhatás felhasználásával becsli Havran és Váradi (2015).

Összességében kijelenthető, hogy az informált intézményi befektetők jelenléte – és a felaprózás stratégia létezése – igazolt, kereskedésük árhatásán keresztül befolyásolni, sőt akár manipulálni is tudják az árakat és ezzel az eszközök értékét.

2.2.4. A likviditás és dimenziói

A likviditás és a likviditási kockázat kérdéskörének gyakorlati relevanciáját bizonyítja a likviditás hiányának a 2007-2009 közötti pénzügyi válságban betöltött szerepe, így a problémakört a válság óta kitüntetett figyelem övezi (Amihud, Mendelson és Pedersen, 2013). A téma irodalma fragmentált, a definíciók, a hangsúlyok és a formalizmus számos ponton eltér.

[11] A permanens árhatás becslése kihívást jelent, publikus adatok alkalmazásával megoldhatatlan, mivel a felaprózás miatt összetartozó résztranzakciók és a tranzakciót kezdeményező oldal ismerete nélkülözhetetlen.

Amihud, Mendelson és Pedersen (2013) tudományos cikkeket összefűző és magyarázó könyve[12] már a második bekezdésben hangsúlyozza, hogy a likviditás definiálása nehézkes, *„Liquidity and its converse, illiquidity, are elusive concepts: You know it when you see it, but it is hard to define.”* (Amihud, Mendelson és Pedersen, 2013, ix. o.). BIS (1999) olyan piacként definiálja a likvid piacot, ahol nagy volumenű tranzakciók hajthatók végre azonnal, vagy rövid időn belül úgy, hogy azok minimális hatást gyakoroljanak a piaci árakra[13]. Kyle (1985) a likvid piacot három dimenzió,

- a feszesség (*tightness*) – egy tranzakció és a hozzá tartozó ellenoldali tranzakció rövid idő alatt történő teljesítésének költsége;
- a mélység (*depth*) – annak az ajánlatnak a mérete, amely egy adott nagyságú árváltozást eredményezne;
- a rugalmasság (*resiliency*) – annak sebessége, ahogy az árak visszatérnek egy véletlen sokk után;

mentén vizsgálja. BIS (1999) hasonló definíciókat ad.[14]

Ajánlatvezérelt piacon a *feszesség* meghatározása egyszerű, ha mindkét irányú tranzakciót az éppen aktuálisan legjobb árszinten tudjuk végrehajtani, azaz ha a beadott piaci áras ajánlatoknál nagyobb az ajánlati könyvben a legjobb árszinteken található limitáras ajánlatmennyiség. Ekkor a feszesség a legjobb vételi és eladási ajánlat árszintje közötti különbség (*árrés*, *spread*) lenne. Ha legalább az egyik oldali tranzakció esetén a beadott piaci áras ajánlat több árszinten teljesül, akkor már az árszintek közötti különbség is szerepet játszik. Így a feszesség az ajánlati könyv töredezettségével jellemezhető, azaz a beadott ajánlatok árszintjei közötti különbség (*gap*) – különös tekintettel a legjobb és a következő árszint közötti különbségre – eloszlásának elemzésével (Farmer és szerzőtársai, 2004; Farmer és Lillo, 2005). Töredezettség, azaz "lyukas" ajánlati könyv – egymástól távoli árszinteken helyezkednek el a limitáras ajánlatok – esetén nagy árelmozdulás lehet a tranzakció következménye. Empirikus kutatások igazolták, hogy árelmozdulások, különös tekintettel a nagy árelmozdulások vizsgálatakor a beadott ajánlat mérete mellett az ajánlati könyv feszessége játsza a főszerepet (Farmer és szerzőtársai, 2004; Weber és Rosenow, 2006; Farmer és Lillo, 2005).

[12] Amihud, Mendelson és Pedersen (2013) kulcskérdései, hogy hogyan hat a likviditás az eszközárakra, miért változik időben a likviditás, hogyan vezet a likviditás visszaesése az árak csökkenéséhez, és miért gyűrűzik tovább egy likviditási válság hatása. (Amihud, Mendelson és Pedersen, 2013, ix. o.)

[13] *„A liquid market is a market where participants can rapidly execute large-volume transactions with a small impact on prices.”* (BIS, 1999, 5. o.)

[14] *„Tightness is how far transaction prices diverge from mid-market prices, and can generally be measured by the bid-ask spread. Depth denotes either the volume of trades possible without affecting prevailing market prices, or the amount of orders on the order-books of market-makers at a given time. Resiliency refers to the speed with which price fluctuations resulting from trades are dissipated, or the speed with which imbalances in order flows are adjusted.”* (BIS, 1999, 5. o.)

A *mélység* formalizáláshoz a Cetin, Jarrow, és Protter (2004), Jarrow és Protter (2005) és Acerbi és Scandolo (2008) tanulmányokban bevezetett marginális keresleti-kínálati görbe inverze alkalmazható, vagy kiindulhatunk Weber és Rosenow (2006) megközelítéséből. Az empirikus irodalom sokszor nagymértékben leegyszerűsíti a mélység definícióját. Daníelsson és Payne (2002) a BIS (1999) jelentéshez hasonlóan a mélységet egyrészt a legjobb árszinteken beadott ajánlati mennyiséggel, másrészt a legjobb ajánlati szinttől legfeljebb az előre meghatározott távolságban elhelyezett ajánlati mennyiségek összegeként méri.

Az ajánlati könyv *rugalmasságának* formalizálásakor és tesztelésekor a tanulmányok azt vizsgálják, hogy egy nagy tranzakció után megfelelően rövid idő alatt és magas valószínűséggel épül-e vissza a likviditás a tranzakció előtti árszint közelébe (Large, 2007; Wanzalaa, Muturib és Olwenyb, 2018; Gabrielsen, Marzo és Zagaglia, 2011; Dong, Kempf és Pradeep, 2007). A tranzakciók hatásának vizsgálatához Large (2007) folytonos idejű impulzusválasz-függvényeket (*impulse response function*) definiál.

Amihud, Mendelson és Pedersen (2013) fejezeteken keresztül az illikviditást egyszerűen a magas tranzakciós költség melletti kereskedéssel azonosítja a likviditási költség eszközárakra és hozamokra gyakorolt hatásának vizsgálatakor. A kiinduló gondolat triviális, a kevésbé likvid, azaz magasabb tranzakciós költség mellett kereskedett eszközért egy racionális befektető kevesebbet hajlandó fizetni, mint az azonos pénzáramlást biztosító, de likvidebb eszközért.

2.2.5. Likviditási kockázat

A likviditási kockázat kezelése a szabályozási gyakorlatban és a közgazdasági elméletben egyaránt fellelhető probléma. 2016-ban a SEC (*Securities and Exchange Commission*) elfogadta a 22e-4 kódszámú Új Szabályt (*New Rule 22e-4*), melyben a regisztrált nyíltvégű alapok likviditási kockázatát szabályozza[15]. A bevezetett előírás négy különböző kategóriába sorolja be az eszközöket készpénzre történő átválthatóság (konvertibilitás) alapján. A szabályozás magas, közepes és alacsony likviditású, illetve illikvid kategóriákat alkalmaz.

Amihud, Mendelson és Pedersen (2013) hangsúlyozza, hogy az eszközök és piacok likviditása időben jelentősen ingadozhat, így a likviditási kockázat beemelése a modellekbe fontos feladat. A likviditás időbeli változásának okaként az eszköz értékéről rendelkezésre álló információ transzparenciáját, a likviditást biztosító piaci szereplők számát és tőkeellátottságát, illetve a növekvő bizonytalanságot említik a szerzők.

A likviditási kockázat (*liquidity risk*) fogalmát Acerbi és Scandolo (2008) alapján

[15]Securities and Exchange Commission, Investment Company Liquidity Risk Management Programs, 17 CFR Parts 210, 270, 274, 90. és 195. oldal `https://www.sec.gov/rules/final/2016/33-10233.pdf`.

három irányból közelíthetjük meg. Egyrészt jelentheti egy portfólió (tágabban: egy vállalat) cash flow-kockázatát (Acerbi és Scandolo, 2008). Másrészt gondolhatunk az illikvid piacon való kereskedés kockázatára, azaz az árhatás kockázatára (Almgren és Chriss, 2001; Amihud, 2002; Acharya és Pedersen, 2005). Végül a pénzügyi rendszerben keringő likviditás kiszáradásának kockázata is ide tartozik (elsők között Amihud, Mendelson és Wood (1990), Brunnermeier és Pedersen (2008), Mitchell, Pedersen és Pulvino (2007) foglalkozik a területtel).

Jelen fejezet az első és a második meghatározáshoz kapcsolódik szorosan. Almgren és Chriss (2001) intézményi szereplők optimális végrehajtási stratégiájának meghatározásakor figyelembe veszi az árhatást. Amihud és Mendelson (1986) és Amihud és Mendelson (1991) cikkéből kiindulva Amihud (2002) vázolja a likviditási sokkok és eszközárak közötti kapcsolatot, majd egy likviditási mérték bevezetésének segítségével teszteli elméletét. Acharya és Pedersen (2005) a CAPM keretrendszerét a likviditási kockázat beemelésével módosítja. Míg a kulcsprobléma, amelyre Acerbi és Scandolo (2008) megoldási lehetőséget fogalmaz meg, a koherens kockázati mértékek (Artzner és szerzőtársai, 1999; Csóka, 2003) és a likviditás kapcsolata.

Az értekezésben Acerbi és Scandolo (2008) megközelítését alkalmazzuk. Balog, Csóka és Pintér (2010) jelöléseit követve, induljunk ki Artzner és szerzőtársai (1999) definíciójából. Legyen a portfóliónk kifizetése egy jövőbeli időpontban bizonytalan. Jelölje S a lehetséges jövőbeli világállapotok számát, $\mathbb{R}^S$ a realizációs vektorok halmazát. $Y \in \mathbb{R}^S$ eleme megadja egy portfólió kifizetéseit a lehetséges világállapotokban. Annak valószínűsége, hogy $s \in \{1, \cdots, S\}$ világállapot realizálódik legyen $\pi_s > 0$ és teljesüljön, hogy $\sum_{s \in S} \pi_s = 1$.

2.1. Definíció. *Koherens kockázati mérték* (Artzner és szerzőtársai, 1999): Legyen $Y, Z \in \mathbb{R}^S$ két realizációs vektor. Legyen $\lambda \in \mathbb{R}^+$ és $a \in \mathbb{R}$. A $\rho : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}$ függvény koherens kockázati mérték, ha teljesülnek rá a következő axiómák:

– monotonitás: ha $Y \geq Z$, akkor $\rho(Y) \leq \rho(Z)$,

– pozitív homogenitás: $\rho(\lambda Y) = \lambda \rho(Z)$,

– szubadditivitás: $\rho(Y + Z) \leq \rho(Y) + \rho(Z)$,

– transzláció-invariancia: $\rho\left(Y + a1^S\right) = \rho(Y) - a$.

A probléma forrása, hogy illikvid piacokra a koherens kockázati mérték definíciója nem értelmezhető, hiszen ilyenkor kétszer akkora illikvid portfólió kockázata több, mint kétszerese. Acerbi és Scandolo (2008) alapján egyszerűen feloldható az ellentmondás, hiszen Y és Z portfólióértékek, azaz valószínűségi változók, nem pedig maguk a portfóliók. Ilyenkor λY λ-szoros értékű portfóliót jelent, nem λ-szoros méretűt. Így értelmezve a portfóliómértéket, a likviditási megfontolások már nem érintik a koherencia-axiómákat. Acerbi és Scandolo (2008) a likviditási kockázat formalizálásával újradefiniálja a portfólióértéket, és ezzel olyan új, koherens kockázati mértéket kap, amely a portfólió likviditás miatti kockázatát is képes megragadni.

Tian, Rood és Oosterlee (2013) Acerbi és Scandolo (2008) elméleti keretrendszerét a gyakorlati alkalmazhatóság szempontjából vizsgálja. Tian, Rood és Oosterlee (2013) portfólió-értékelési algoritmusokat dolgoz ki különböző marginális keresleti-kínálati görbék feltételezése mellett. Lépcsős marginális keresleti-kínálati görbét feltételez az aktívan kereskedett termékek ajánlati könyvének leírására, míg exponenciális függvényt használ a kevésbé likvid OTC piacok árainak megragadására. A jövőbeli alkalmazások szempontjából különösen fontos eredménye, hogy a nemnegatív lépcsős marginális keresleti-kínálati görbe kellő pontossággal közelíthető exponenciális függvénnyel. Azért, hogy ez az új portfólió-értékelési módszertan a portfólióválasztás és kockázatkezelés terén a gyakorlatban is érvényesülhessen, az elméletet érdemes továbbfejleszteni és adaptálni az iparági sajátosságokra. A fejezet ilyen továbbfejlesztési irányt javasol.

2.3. Portfólió-értékelés likviditási elvárás mellett

A jelölések és definíciók bevezetése Acerbi és Scandolo (2008) és Csóka és Herings (2014) alapján történik. Egy piaci szereplő kockázatmentes eszközt/készpénzt és J kockázatos eszközt tarthat. Jelölje $\mathbf{\Theta} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^J$ a portfóliók terét. Egy $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R} \times \times \mathbb{R}^J$ portfólió $\boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \theta)$ vektorral adható meg, ahol θ_0 a készpénz mennyisége, $\theta \in \mathbb{R}^J$ a kockázatos eszközpozíció. A θ vektor θ_j eleme a $j \in J$ kockázatos eszköz keresett/kínált mennyisége. Jelölje $\boldsymbol{\theta} \oplus a$ $a \in \mathbb{R}$ egység készpénz hozzáadását a $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{\Theta}$ portfólióhoz, azaz azt a $\boldsymbol{\nu} \in \mathbf{\Theta}$ portfóliót, amelyre $\nu_0 = \theta_0 + a$ és $\nu_j = \theta_j$ $\forall j \in J$ esetén.

A portfólióérték meghatározásához a kockázatos eszközök ajánlati könyvét is figyelembe vesszük. Az ajánlati könyv modellezéséhez Cetin, Jarrow, és Protter (2004), Jarrow és Protter (2005) és Acerbi és Scandolo (2008) alapján $\forall j \in J$ eszközre m_j marginális keresleti-kínálati görbét (*marginal supply-demand curve*, MSDC) definiálunk.

2.2. Definíció. A $j \in J$ eszköz árát a *marginális keresleti kínálati görbe* írja le, amely megadható $m_j : \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$ alakban, ahol

1. $m_j(h) \geq m_j(\overline{h})$ ha $h < \overline{h}$;
2. $m_j(h)$ jobbról folytonos $h < 0$ esetén, míg balról folytonos $h > 0$ esetén.

Ha $h > 0$, akkor $m_j(h)$ a $j \in J$ eszköz marginális vételi (*bid*) ajánlatához tartozó árat jelenti, azaz megmutatja, hogy a $j \in J$ eszközből a h-adik egységet milyen áron tudjuk likvidálni. Míg $h < 0$ esetén $m_j(h)$ a marginális eladási (*ask*) ajánlatokhoz tartozó ár, azaz $m_j(h)$ összegért tudjuk megvenni a $j \in J$ eszköz h-adik egységét. Jelölje $m_j(0^+)$ a legmagasabb vételi ajánlathoz tartozó árat, míg $m_j(0^-)$ a legalacsonyabb eladási ajánlathoz tartozó árat. Értékpapírok esetén a marginális keresleti-kínálati görbe természetesen csak pozitív értékeket vehet fel. Ha a marginális keresleti-kínálati görbe változása endogén a modellben, akkor az értékpapír-árak pozitivitásának megőrzését csak külön feltevéssel tudjuk biztosítani.

A marginális keresleti-kínálati görbe alkalmazásával meghatározhatjuk egy portfólió likvidációs értékét (*liquidation mark-to-market value*) (Acerbi és Scandolo, 2008).

2.3. Definíció. Egy $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ portfólió *likvidációs értéke* megadható a következő alakban

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \theta_0 + \sum_{j \in J} \int_0^{\theta_j} m_j(h) dh.$$

A $L(\boldsymbol{\theta})$ likvidációs érték a kezdeti készpénzmennyiség korrigálva azzal az összeggel, amit a hosszú pozíció likvidálásakor kapunk és a rövid pozíció zárásához felhasználunk egy adott időpillanatban a piacon. Tökéletesen likvid piacon a legjobb árakon adhatnánk el és értékelhetnénk eszközeinket.

2.4. Definíció. Egy $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ *portfólió értéke legjobb árakon értékelve* megadható mint

$$U(\boldsymbol{\theta}) = \theta_0 + \sum_{j \in J} \left[m_j(0^+) \max(\theta_j, 0) + m_j(0^-) \min(\theta_j, 0) \right].$$

Ezzel szemben a valóságban az ajánlati könyv pillanatnyi limitáras ajánlatainak függvényében a likvidációs és a legjobb árakon meghatározott portfólióérték (*uppermost mark-to-market value*) közötti különbség jelentős lehet. Acerbi és Scandolo (2008) likviditási elvárás (*liquidity policy*) halmazt definiálva középutas megoldást kínál.

2.5. Definíció. Egy $\mathcal{L}$ *likviditási elvárás* zárt és konvex $\mathcal{L} \subseteq \boldsymbol{\Theta}$ részhalmaza a portfóliók $\boldsymbol{\Theta}$ terének, amely teljesíti, hogy

1. ha $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{L}$ és $a \geq 0$, akkor $\boldsymbol{\theta} \oplus a \in \mathcal{L}$,
2. ha $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{L}$, akkor $(\theta_0, 0^J) \in \mathcal{L}$.

Ha egy portfólió eleme a likviditási elvárás halmaznak, akkor minden olyan portfólió, amelyben ceteris paribus több készpénz van, szintén eleme a likviditási elvárás halmaznak (1. feltétel), illetve bármely portfólió eleme marad a likviditási elvárás halmaznak, ha csak a készpénzmennyiséget vesszük figyelembe és a kockázatos eszközök pozíciója 0 (2. feltétel). A likviditási halmaz definiálása lehetővé teszi, hogy a portfólió értékét konvex optimalizálási feladat megoldásaként határozzuk meg. Negatív kezdeti készpénzállomány esetén a második feltevés nem értelmezhető, ugyanakkor ezen feltételezés nélkül is definiálható a likviditási elvárás halmaz (Csóka és Herings, 2014).

2.6. Definíció. Adott $c \in \mathbb{R}$ mellett jelölje $\mathcal{L}(c)$ *készpénzlikviditási elvárás* azt a likviditási elvárás halmazt, amelyre

$$\mathcal{L}(c) = \{(\theta_0, \theta) \in \mathbf{\Theta} | \theta_0 \geq c\} \;\; c \in \mathbb{R}.$$

Portfóliókezelők szempontjából likvid eszközök (esetleg készpénz) tartásának kikötése indokolt lehet, ha valószínűsíthető a tőkekivonás, és el szeretnék kerülni a kényszerlikvidálást. A készpénzlikviditási elvárás speciális esete, amikor a kockázatos eszközök esetén rövid pozíciót nem engedélyezünk (Csóka, 2017), az elvárt c készpénzmennyiség azonban lehet negatív is.

2.7. Definíció. Adott $c \in \mathbb{R}$ mellett az $\mathcal{L}^{+}(c)$ *készpénzlikviditási elvárás rövid pozíció nélkül* megadható mint

$$\mathcal{L}^{+}(c) = \left\{(\theta_0, \theta) \in \mathbf{\Theta} | \theta_0 \geq c \text{ és } \theta \geq 0^J\right\}.$$

A továbbiakban jelen értekezésben az egyszerűség kedvéért az elvárt minimális készpénzállomány szintjét meghatározó $\mathcal{L}(c)$ vagy $\mathcal{L}^{+}(c)$ likviditási elvárást feltételezünk, ahol a rövid pozíció nem engedélyezett.

2.8. Definíció. Egy $\boldsymbol{\nu} \in \mathbf{\Theta}$ portfólió *elérhető* egy adott $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{\Theta}$ portfólióból, ha $\exists$ $\boldsymbol{\rho} \in \mathbf{\Theta}$, amelyre

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\rho} \oplus L(\boldsymbol{\rho}).$$

Az elérhető portfóliók halmazát jelölje $Att(\boldsymbol{\theta})$.

Tehát azok a portfóliók lesznek elérhetőek (*attainable*), amelyek a kezdeti portfólió egy részének likvidálásán keresztül előállíthatóak. A portfólió likvidált részében, a $\boldsymbol{\rho}$ portfólióban rövid pozíció ($\rho_j < 0$) is lehetséges. Ilyenkor a $j \in J$ eszközből többet tartalmaz az új portfólió, amelyet készpénzzel vagy a többi eszköz likvidálásával fedezhetünk. Acerbi és Scandolo (2008) likviditási elvárás melletti portfólióértéket (*mark-to-market value*) definiál. Keretrendszerében egy portfólió értéke attól függ, hogyan tudjuk teljesíteni a likviditási elvárást az adott portfólióból kiindulva.

2.9. Definíció (Acerbi és Scandolo (2008))**.** Egy $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{\Theta}$ portfólió *likviditási elvárás melletti értéke* egy adott $\mathcal{L}$ likviditási elvárás figyelembevétele mellett a $V^{\mathcal{L}} : \mathbf{\Theta} \mapsto \mathbb{R}$ függvény, ahol

$$V^{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta}) = \sup \{U(\boldsymbol{\nu}) | \boldsymbol{\nu} \in Att(\boldsymbol{\theta}) \cap \mathcal{L}\}. \tag{2.1}$$

A likviditási elvárás beemelésével a portfólió-értékeléskor a portfólióval kapcsolatos jövőbeli terveinket is figyelembe vehetjük. Azt a legértékesebb portfóliót határozzuk meg, amely elérhető a kiindulási portfólióból, és teljesíti a likviditási elvárásunkat. Acerbi és Scandolo (2008) a következő állítás bizonyításában megmutatja, hogy a keresett portfólió megadható egy konvex optimalizációs feladat megoldásaként. Ez az eredmény alapvető jelentőségű, hiszen a gyors és viszonylag egyszerű megoldás nélkülözhetetlen a gyakorlati alkalmazhatósághoz.

2.1. Állítás (Acerbi és Scandolo (2008))**.** *A* (2.1) *optimalizációs probléma* $\boldsymbol{\nu}$ *szerint ekvivalens egy* $\boldsymbol{\rho}$ *szerinti konvex optimalizációs feladattal, amit*

$$V^{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta}) = sup\,\{U(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\rho}) + L(\boldsymbol{\rho})|\boldsymbol{\rho} \in C_{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta})\} \tag{2.2}$$

alakban adhatunk meg, ahol

$$C_{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta}) = \{\boldsymbol{\rho}|\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\rho} \oplus L(\boldsymbol{\rho}) \in \mathcal{L}\}\,.$$

Ha $C_{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta})$ *üres halmaz, akkor* $V^{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta}) = -\infty$*, különben a szuprémum* $V^{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}$*.*

A bevezetett definíciók illusztrálásához és az alapötlet bemutatásához nézzük a következő példát.

2.1. Példa. Legyen portfólióterünk $\boldsymbol{\Theta} = \mathbb{R}^2$, azaz adott egy piac egy kockázatmentes és egy kockázatos eszközzel. Kezdeti portfóliónk $\boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \theta_1) = (4{,}4)$, azaz 4 egység készpénzzel és 4 egységnyi illikvid eszközzel rendelkezünk. A kockázatos eszköz marginális keresleti-kínálati görbéje megadható mint

$$m_1(h) = \begin{cases} 5 & \text{ha } h < 0, \\ 4 & \text{ha } 0 < h \leq 1, \\ 2 & \text{ha } 1 < h \leq 3, \\ 1 & \text{ha } 3 < h. \end{cases}$$

Számoljuk ki a $\boldsymbol{\theta}$ portfólió likvidációs és legjobb árakon meghatározott értékét

$$L(\boldsymbol{\theta}) = 4 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 13$$
$$U(\boldsymbol{\theta}) = 4 + 4 \cdot 4 = 20.$$

Feltételezzük, hogy a portfólióban legalább 10 egység készpénzt kell tartanunk ($c = = 10$) és nem tarthatunk rövid pozíciót ($\nu \geq 0^J$), azaz $\mathcal{L}^+(10)$ likviditási elvárásunk a minimális készpénzmennyiséget rögzíti. A kezdeti portfólióban ugyanakkor csak 4 egység készpénz van, ezért el kell adnunk az illikvid értékpapírból 6 pénzegység értékben. Azért, hogy megfeleljünk a likviditási elvárásnak $\boldsymbol{\rho} = (0{,}2)$, azaz 2 egységet likvidálunk: egyet a legmagasabb áron 4 pénzegységért, egyet pedig a második legmagasabb áron 2 egység készpénzért, így $L(\boldsymbol{\rho}) = 6$. A bevezetett jelöléseket alkalmazva $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\rho} + L(\boldsymbol{\rho}) = (10{,}2) \in Att(\boldsymbol{\theta}) \cap \mathcal{L}^+(10)$.

Határozzuk meg a $\boldsymbol{\theta}$ portfólió likviditási elvárás melletti $V^{\mathcal{L}^+(10)}(\boldsymbol{\theta})$ értékét, amely a $\boldsymbol{\nu}$ likviditási elvárást teljesítő elérhető portfólió legjobb piaci árakon meghatározott értéke $U(\boldsymbol{\nu})$

$$V^{\mathcal{L}^+(10)}(\boldsymbol{\theta}) = U(\boldsymbol{\nu}) = 10 + 4 \cdot 2 = 18.$$

A 2.1 állítás alapján a portfólióérték meghatározható $U(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\rho}) + L(\boldsymbol{\rho}) = 4 + 4 \cdot 2 + + 6 = 18$ számítással is. Vegyük észre, hogy annak ellenére, hogy eladtunk 2 egység kockázatos eszközt, a maradék $\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\rho}$ portfóliót az eredeti MSDC alapján értékeltük. Az implicit feltevés tehát, hogy a beadott új limitáras ajánlatok következtében a likviditás visszaépül, kereskedésünknek nincs permanens árhatása.

Ha a teljes megfigyelhető árhatás permanens, azaz nem kerül új limitáras ajánlat a legjobb vételi és eladási ajánlat közé, akkor a kockázatos eszköz MSDC-je megváltozik. Jelölje $\hat{m}_1$ ezt az új MSDC függvényt, amely megadható

$$\hat{m}_1(h) = \begin{cases} 5 & \text{ha } h < 0, \\ 2 & \text{ha } 0 < h \leq 1, \\ 1 & \text{ha } 1 < h \end{cases}$$

alakban. A $\boldsymbol{\nu}$ portfólió $\hat{m}_1$ marginális keresleti-kínálati görbe alapján számított, legjobb árakon vett értéke is módosul

$$\hat{U}(\boldsymbol{\nu}) = \hat{U}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\rho}) + L(\boldsymbol{\rho}) = 4 + 2 \cdot 2 + 6 = 14,$$

természetesen alacsonyabb lesz.

A likviditási kockázat elméletében a likviditási elvárást teljesítő legjobb elérhető portfóliót a kezdeti portfólióból kereskedés útján érjük el, így a tranzakció az árhatás miatt befolyásolhatja a piaci árakat. Ha a hatás ideiglenes, a likviditás teljes visszaépülése után portfóliónkat az eredeti marginális keresleti-kínálati görbe mellett értékelhetjük. Az eredeti elméletben Acerbi és Scandolo (2008) ezzel a feltevéssel él. Ugyanakkor, ha a piaci szereplő az árakat befolyásoló intézményi befektető, akkor permanens árhatása miatt a kereskedett eszköz MSDC-je megváltozik. A 2.1 példában felvetett ötletnek megfelelően a következő szakaszban permanens árhatással bővítjük a likviditási elvárás mellett meghatározott portfólióértéket.

2.4. Portfólió-értékelés likviditási elvárás és permanens árhatás mellett

Használjuk fel Almgren és Chriss (2001), Almgren (2003) és Almgren és szerzőtársai (2005) alapján megismert optimális végrehajtási stratégiák alapötletét Acerbi és Scandolo (2008) elméletének módosításához. Ahhoz, hogy a legmagasabb értékű (legjobb piaci árakon értékelve) elérhető portfóliót birtokolhassuk, kereskednünk kell a piacon. De vételkor vagy eladáskor limitáras ajánlatok kerülhetnek ki az ajánlati könyvből, ami a marginális keresleti-kínálati görbe változását eredményezi. Tekintsük a problémát egy intézményi, a piac mozgását befolyásoló szereplő szempontjából. Ezért feltételezzük, hogy az ideiglenes, pillanatnyi illikviditás miatt jelentkező hatások már elmúlnak, mire meg kell felelnünk a likviditási elvárásnak. Ugyanakkor tegyük fel, hogy kereskedésünk permanens árhatása beépül a piaci árakba. Azaz módosítsuk a marginális keresleti-kínálati görbét kereskedésünk várható permanens árhatásával a legjobb elérhető portfólió értékeléséhez.

2.4.1. Portfólió-értékelés permanens árhatás mellett

Vizsgáljuk a likviditási elvárás melletti portfólióérték megváltozását, ha a kereskedett $\boldsymbol{\rho} \in \boldsymbol{\Theta}$ részportfólió likvidálásának permanens árhatását is figyelembe vesszük.

2.10. Definíció. Adott a $j \in J$ eszközhöz tartozó $m_j : \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$ MSDC a piacon. A $j \in J$ eszközből $\rho_j \in \mathbb{R}$ mennyiség likvidálása után a $j \in J$ eszköz *permanens árhatással módosított marginális keresleti-kínálati görbéje* $\overline{m_j} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$ függvénnyel adható meg.

A 2.4 definícióval analóg módon legyen $\overline{U}$ az $\overline{m}_j$ permanens árhatással módosított marginális keresleti-görbe mellett a legjobb árakon meghatározott portfólióérték. Definiáljuk permanens árhatás mellett a likviditási elvárás melletti portfólióértéket.

2.11. Definíció. A $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ portfólió *permanens árhatással módosított likviditási elvárás melletti portfólióértéke* $\mathcal{L}$ likviditási elvárás mellett megadható $\overline{V}^{\mathcal{L}} : \boldsymbol{\Theta} \to \mathbb{R}$ függvénnyel a következő alakban

$$\overline{V}^{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta}) = \sup \left\{ \overline{U}(\boldsymbol{\nu}) | \boldsymbol{\nu} \in Att(\boldsymbol{\theta}) \cap \mathcal{L} \right\}. \tag{2.3}$$

Fogalmazzuk át a piaci szereplő optimalizálási problémáját megadó 2.1 állítást a permanens árhatás miatt módosított marginális keresleti-kínálati görbe mellett. A bizonyítás a 2.1 állítás bizonyításának lépéseit követi.

2.2. Állítás. *Az (2.3) egyenlettel megadott optimalizációs probléma $\boldsymbol{\nu}$ szerint ekvivalens egy $\boldsymbol{\rho}$ szerinti optimalizációs feladattal, amit*

$$\overline{V}^{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta}) = \sup\left\{\overline{U}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\rho}) + L(\boldsymbol{\rho}) | \boldsymbol{\rho} \in C_{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta})\right\}, \tag{2.4}$$

alakban adhatunk meg, ahol $C_{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta})$ konvex halmaz

$$C_{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta}) = \{\boldsymbol{\rho} | \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\rho} \oplus L(\boldsymbol{\rho}) \in \mathcal{L}\}.$$

Ha $C_{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta})$ üres halmaz, akkor $V^{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta}) = -\infty$, különben a szuprémum $V^{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}$.

Fontos megjegyzés, hogy a 2.2 állításban megadott $\boldsymbol{\rho}$ szerinti optimalizálási probléma konvexitása $\overline{U}$ alkalmazása miatt nem egyértelmű. A jövőben (2.4) konvexitásának vizsgálata megkerülhetetlen feladat, hiszen a széleskörű alkalmazhatóság feltétele.

2.4.2. Portfólió-értékelés lineáris permanens árhatás mellett

Huberman és Stanzl (2004) megmutatja, hogy a kereskedett mennyiség jövőbeli árra gyakorolt hatását leíró függvény linearitása az arbitrázsmentesség feltétele. Almgren és szerzőtársai (2005) az intézményi szereplők felaprózott tranzakcióinak empirikus vizsgálata során megerősíti a lineáris permanens árhatás hipotézist. Huberman és Stanzl (2004) és Almgren és szerzőtársai (2005) eredményeit felhasználva feltesszük, hogy a permanens árhatás a kereskedett mennyiség lineáris függvénye. Lineáris permanens árhatás esetén a marginális keresleti-kínálati görbe a kereskedett mennyiség függvényében lineárisan mozdul el. Definiáljuk formálisan a lineáris permanens árhatással módosított MSDC-t.

2.12. Definíció. Adott a $j \in J$ eszközhöz tartozó $m_j : \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$ MSDC és a $\beta_j \in \mathbb{R}^+$ paraméter. A $j \in J$ eszközből $\rho_j \in \mathbb{R}$ mennyiség likvidálása után a $j \in J$ eszköz *lineáris permanens árhatással módosított marginális keresleti-kínálati görbéje* $\overline{m}_j^{\beta_j}(h)$ megadható mint

$$\overline{m}_j^{\beta_j}(h) = m_j(h) - \beta_j \rho_j.$$

Ha $\boldsymbol{\rho} \in \boldsymbol{\Theta}$ likvidálandó portfólióban $\rho_j > 0$, akkor eladjuk a $j \in J$ eszközt, míg $\rho_j < 0$ esetén vásárolunk belőle. Ennek megfelelően az eladás lefelé (csökken minden ajánlathoz beadott árszint), a vétel pedig felfelé tolja (emelkedik minden beadott árszint) a kereskedett eszköz marginális keresleti és kínálat görbéjét. Az ajánlati könyv minden limitáras ajánlatának árszintjét ugyanannyival módosítják, azaz a piacra került új információ következményeként mindenki ugyanolyan mértékben emeli vagy csökkenti az árszintet.

Ha az eszközeink értékpapírok, ekkor az árakat leíró kezdeti és módosított marginális keresleti és kínálati görbe pozitív. Szükséges feltétel, hogy $\forall j \in J$ kockázatos eszközre

$$\overline{m}_j^{\beta_j}(h) = m_j(h) - \beta_j \rho_j \geq 0,$$

amely biztosítja, hogy $\forall j \in J$ eszközre az az egységár amin a végső portfólió likvidálható, nemnegatív. Ha megengedjük a végső portfólióban a rövid pozíciót, akkor a feltétel alkalmazásával biztosítható csak a probléma korlátossága.

Határozzuk meg a 2.1 példában megadott adatok alkalmazásával a lineáris permanens árhatás mellett a portfólióértéket.

2.2. Példa (A 2.1 példa folytatása)**.** Tegyük fel, hogy a permanens árhatás kisebb, mint kereskedésünk azonnali árhatása, azaz a likviditás részben épül vissza. Legyen a lineáris permanens árhatásfüggvény együtthatója $\beta_1 = 0{,}2$. Ha lineáris a permanens árhatás, akkor az eredeti MSDC a kereskedés hatására párhuzamosan tolódik el. A likviditási elvárás teljesítéséhez 2 egység kockázatos értékpapírt értékesítünk, ezért a kezdeti marginális keresleti-kínálati görbénk 0,4 egységgel csökken. Az $\overline{m}_1^{0,2}$ módosított marginális keresleti kínálati görbe megadható mint

$$\overline{m}_1^{0,2}(h) = \begin{cases} 4{,}6 & \text{ha } h < 0, \\ 3{,}6 & \text{ha } 0 < h \leq 1, \\ 1{,}6 & \text{ha } 1 < h \leq 3, \\ 0{,}6 & \text{ha } 3 < h. \end{cases}$$

A $\overline{m}_1^{0,2}$ módosított MSDC mellett számoljuk ki a $\boldsymbol{\theta}$ portfólió likviditási elvárás melletti értékét, amely a $\boldsymbol{\nu}$ portfólió legjobb árakon meghatározott értékével egyezik meg

$$\overline{U}(\boldsymbol{\nu}) = \overline{U}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\rho}) + L(\boldsymbol{\rho}) = 10 + 3{,}6 \cdot 2 = 17{,}2.$$

A példában a likviditás részben visszaépült, a meghatározott portfólióérték 2.1 példában bemutatott két szélsőséges eset között helyezkedik el.

Jelölje a $j \in J$ eszközre $\beta_j \in \mathbb{R}^+$ a lineáris permanens árhatás együtthatóját. A 2.4 definícióval analóg módon legyen $\overline{U}$ az $\overline{m}_j^{\beta_j}$ lineáris permanens árhatással módosított marginális keresleti-kínálati görbe mellett a legjobb árakon meghatározott portfólióérték. Definiáljuk lineáris permanens árhatás mellett a likviditási elvárás melletti portólióértéket.

2.13. Definíció. Jelölje $\beta_j \in \mathbb{R}^+$ a $j \in J$ eszközre vonatkozó lineáris permanens árhatás együtthatóját. A $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ portfólió *lineáris permanens árhatással módosított likviditási elvárás melletti portfólióértéke* $\mathcal{L}$ likviditási elvárás mellett megadható

$\overline{V}^{\mathcal{L}} : \boldsymbol{\Theta} \to \mathbb{R}$ függvénnyel a következő alakban

$$\overline{V}^{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta}) = \sup\left\{\overline{U}(\boldsymbol{\nu})|\boldsymbol{\nu} \in Att(\boldsymbol{\theta}) \cap \mathcal{L}\right\}. \tag{2.5}$$

A 2.1 állítás lineáris permanens árhatással módosított MSDC mellett szintén megfogalmazható. A bizonyítás a 2.1 állítás bizonyításának lépéseit követi.

2.3. Állítás. *Jelölje $\beta_j \in \mathbb{R}^+$ a $j \in J$ eszközre vonatkozó lineáris permanens árhatás együtthatóját. Az (2.5) egyenlettel megadott optimalizációs probléma $\boldsymbol{\nu}$ szerint ekvivalens egy $\boldsymbol{\rho}$ szerinti optimalizációs feladattal, amit*

$$\overline{V}^{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta}) = \sup\left\{\overline{U}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\rho}) + L(\boldsymbol{\rho})|\boldsymbol{\rho} \in C_{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta})\right\}, \tag{2.6}$$

alakban adhatunk meg, ahol $C_{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta})$ konvex halmaz

$$C_{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta}) = \{\boldsymbol{\rho}|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\rho} \oplus L(\boldsymbol{\rho}) \in \mathcal{L}\}.$$

Ha $C_{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta})$ üres halmaz, akkor $V^{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta}) = -\infty$, különben a szuprémum $V^{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}$.

Vizsgáljuk a permanens árhatás bevezetésének hatására megváltozó portfólió-allokálási döntést.

2.3. Példa (A 2.1 és 2.2 példa folytatása)**.** A piacon most két kockázatos eszköz érhető el, így a portfóliók tere $\boldsymbol{\Theta} = \mathbb{R}^3$ alakban adható meg. A kezdeti portfólióban legyen a második kockázatos eszköz mennyisége 4 egység, azaz $\boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \theta_2) = (4{,}4{,}4)$. A új eszköz pillanatnyi ajánlati könyvét az

$$m_2(h) = \begin{cases} 2 & \text{ha } h < 0 \\ 1 & \text{ha } 0 < h \leq 1 \\ 0{,}6 & \text{ha } 1 < h. \end{cases}$$

marginális keresleti-kínálati görbével adhatjuk meg. Tegyük fel, hogy a második eszköz lineáris permanens árhatásának együtthatója szintén 0,2, azaz $\beta_1 = \beta_2 = 0{,}2$. A likviditási elvárás halmaz legyen továbbra is $\mathcal{L}^+(10)$ készpénzlikviditási elvárás rövid pozíció nélkül.

A likviditási elvárás teljesítéséhez $L(\boldsymbol{\rho}^*) = 6$ egység pótlólagos kockázatmentes eszközre van szükség. Ha a likviditás visszaépül (a kereskedésnek nincs permanens árhatása), akkor a 2.1 állítás alapján a $\boldsymbol{\rho}^* = (0{,}1, \frac{8}{3})$ portfóliórész likvidálása lesz optimális, ami a $\boldsymbol{\nu}^* = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\rho}^* = (10{,}3, \frac{4}{3})$ portfóliót eredményezi. A $\boldsymbol{\theta}$ portfólió likviditási elvárás mellett meghatározott portfólióértéke

$$V^{\mathcal{L}^+(10)}(\boldsymbol{\theta}) = U(\boldsymbol{\nu}^*) = 10 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{70}{3} \approx 23{,}33.$$

Lineáris permanens árhatás mellett a (2.4) optimalizálási feladat megoldása új egyensúlyi portfóliót eredményez. Az új optimumhoz $\boldsymbol{\rho}^{**} = (0,\ 0{,}8,\ 4)$ portfóliórészt likvidáljuk a pótlólagos $L(\boldsymbol{\rho}^{**}) = 6$ készpénz megszerzéséhez, így a $\boldsymbol{\nu}^{**} = (10,\ 3{,}2,\ 0)$ végső optimális portfóliót érjük el. A kereskedés után az első kockázatos eszközre vonatkozó legjobb vételi ár (*bid*) $4 - 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 3{,}84$ és a $\boldsymbol{\theta}$ portfólió likviditási elvárás melletti lineáris permanens árhatással módosított értéke

$$\overline{V}^{\mathcal{L}^{+}(10)}(\boldsymbol{\theta}) = \overline{U}(\boldsymbol{\nu}^{**}) = 10 + 3{,}84 \cdot 3{,}2 = 22{,}288.$$

Vegyük észre, hogy a permanens árhatás nélkül meghatározott optimális kereskedés $\boldsymbol{\rho}^{*} = (0{,}1, \frac{8}{3})$ a $\boldsymbol{\nu}^{*} = (10{,}3, \frac{4}{3})$ optimális végső portfóliót eredményezte, ami a permanens árhatással módosított legjobb árak mellett ($m_1^{+}(0) = 4 - 1 \cdot 0{,}2 = 3{,}8$ és $m_2^{+}(0) = 1 - \frac{8}{3} \cdot 0{,}2 = \frac{7}{15}$) nem optimális választás

$$\overline{U}(\boldsymbol{\nu}^{*}) = 10 + 3{,}8 \cdot 3 + \frac{7}{15} \cdot \frac{4}{3} = \frac{991}{45} \approx 22{,}02 < 22{,}228 = \overline{U}(\boldsymbol{\nu}^{**}).$$

Két illikvid értékpapír esetén a permanens árhatás jelentősen módosította az optimális elérhető portfóliót és a legmagasabb, likviditási elvárás melletti portfólióértéket.

Az optimális portfólió megváltozására intuitív magyarázatot is adhatunk. A permanens árhatás bevezetésekor egyfajta *készlethatás* jelenik meg a *tranzakciós költség hatása* mellett. A kereskedésen keresztül az optimalizáló befektető maga is befolyásolja azt az árat, amelyen a végső portfóliója értékelésre kerül. Ezért az optimalizáláskor a tranzakciós költség minimalizálása mellett a megmaradó készlet permanens árhatás miatt megváltozó értékét is figyelembe veszi. Például, ha kereskedése permanensen csökkenti a legjobb eladási ajánlatot a $j \in J$ eszköz esetén, akkor az eszköz értéke a végső portfólióban is alacsonyabb lesz. A befektető befolyásolja az árakat, így a piac esetleges manipulációja is lehetséges.

2.5. Az optimalizálási probléma megoldása

A 2.4 fejezetben példán keresztül mutattuk be a permanens árhatás bevezetésének hatására megváltozó optimális portfóliót. Jelen fejezetben a 2.2 és 2.6 optimalizálási probléma megoldását és eredményeit vetjük össze folytonos, majd exponenciális MSDC mellett.

2.5.1. Az optimalizálási probléma megoldása folytonos MSDC és $\mathcal{L}^+(c)$ készpénzlikviditási elvárás mellett

Első lépésként a (2.2) optimalizálási problémát folytonos marginális keresleti-kínálati görbe mellett vizsgáljuk. Így az m_j függvényt 0-ban is értelmezzük, $\forall j \in J$ eszköz esetén $m_j(0) = m_j(0^+) = m_j(0^-)$. $\mathcal{L}^+(c)$ készpénzlikviditási elvárást feltételezünk és nem engedélyezzük a végső portfólióban a rövid pozíció tartását. Feltehető, hogy mindig pontosan annyi készpénzt tartalmaz a végső portfólió, amennyit a likviditási elvárás előír. A probléma a következő alakban adható meg.

2.4. Állítás. *Legyen $\forall j \in J$ eszközre m_j folytonos MSDC. $\mathcal{L}^+(c)$ készpénzlikviditási elvárás mellett az* (2.2) *optimalizációs probléma ekvivalens a következő $\boldsymbol{\rho}$ szerinti optimalizációs feladattal*

$$V^{\mathcal{L}^+(c)}(\boldsymbol{\theta}) = \max\left\{U(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\rho}) + L(\boldsymbol{\rho})\right\} \tag{2.7}$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} \theta_0 - \rho_0 + L(\boldsymbol{\rho}) &= c, \ \textit{és} \\ \theta_j - \rho_j &\geq 0 \ \forall j \in J \ \textit{esetén.} \end{aligned}$$

Folytonos MSDC mellett egy portfólió U legjobb árakon meghatározott értéke megadható mint

$$U(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\rho}) = \theta_0 - \rho_0 + \sum_{j \in J} m_j(0)(\theta_j - \rho_j). \tag{2.8}$$

Boyd és Vandenberghe (2004) alapján Karush-Kuhn-Tucker feltételek alkalmazásával keressük a feltételes optimalizálási feladat megoldását. Írjuk fel a Lagrange függvényt

$$G(\boldsymbol{\rho}, \lambda, \mu) = -U(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\rho}) - L(\boldsymbol{\rho}) - \lambda\left[\theta_0 - \rho_0 + L(\boldsymbol{\rho}) - c\right] - \sum_{j \in J} \mu_j \left[\theta_j - \rho_j\right],$$

majd használjuk az (2.8) összefüggést és a likvidációs érték definícióját

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{\rho}, \lambda, \mu) = &-\theta_0 - \sum_{j \in J} m_j(0)(\theta_j - \rho_j) - \sum_{j \in J} \int_0^{\rho_j} m_j(h)dh \\ &-\lambda\left[\sum_{j \in J} \int_0^{\rho_j} m_j(h)dh + \theta_0 - c\right] - \sum_{j \in J} \mu_j \left[\theta_j - \rho_j\right]. \end{aligned}$$

Jelölje ρ_j^* az optimális ρ_j pozíciót a $j \in J$ eszköz esetén. Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy $\rho_0^* = 0$, mivel az optimalizálási probléma nem függ ρ_0 készpénzmennyiségtől. A Karush-Kuhn-Tucker feltételek a következő formában adhatóak meg

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G(\boldsymbol{\rho}, \lambda, \mu)}{\partial \rho_j} &= m_j(0) - (1+\lambda) m_j(\rho_j^*) + \mu_j = 0 \; \forall j \in J, \\
\frac{\partial G(\boldsymbol{\rho}, \lambda, \mu)}{\partial \lambda} &= \sum_{j \in J} \int_0^{\rho_j^*} m_j(h) dh + \theta_0 - c = 0, \\
\frac{\partial G(\boldsymbol{\rho}, \lambda, \mu)}{\partial \mu_j} &= \theta_j - \rho_j^* \geq 0 \; \forall j \in J.
\end{aligned}
$$

A komplementaritási feltétel és a Lagrange szorzó nemnegativitása miatt $\forall j \in J$ esetén

$$
\begin{aligned}
\mu_j \left[\theta_j - \rho_j^*\right] &= 0 \\
\mu_j &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Hasonló feltevések mellett a (2.6) optimalizálási probléma a következő alakban adható meg.

2.5. Állítás. *Legyen $\forall j \in J$ eszközre adott a $\beta_j \in \mathbb{R}^+$ együttható és m_j folytonos MSDC. $\mathcal{L}^+(c)$ készpénzlikviditási elvárás mellett az (2.6) optimalizációs probléma ekvivalens a következő $\boldsymbol{\rho}$ szerinti optimalizációs feladattal*

$$
\overline{V}^{\mathcal{L}^+(c)}(\boldsymbol{\theta}) = \max \left\{ \overline{U}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\rho}) + L(\boldsymbol{\rho}) \right\} \tag{2.9}
$$

feltéve, hogy

$$
\begin{aligned}
\theta_0 - \rho_0 + L(\boldsymbol{\rho}) &= c, \text{ és} \\
\theta_j - \rho_j &\geq 0 \; \forall j \in J \text{ esetén.}
\end{aligned}
$$

Egy portfólió $\overline{U}$ permanens árhatással módosított legjobb árakon meghatározott értéke folytonos MSDC mellett megadható mint

$$
\overline{U}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\rho}) = \theta_0 - \rho_0 + \sum_{j \in J} \left[m_j(0) - \beta_j \rho_j\right] (\theta_j - \rho_j). \tag{2.10}
$$

A Lagrange függvényben a permanens árhatással módosított MSDC szerint értékeljük a $\boldsymbol{\rho}$ likvidálása után megmaradó $\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\rho}$ portfóliót, ezért

$$
G(\boldsymbol{\rho}, \lambda, \mu) = -\overline{U}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\rho}) - L(\boldsymbol{\rho}) - \lambda \left[\theta_0 - \rho_0 + L(\boldsymbol{\rho}) - c\right] - \sum_{j \in J} \mu_j \left[\theta_j - \rho_j\right],
$$

és az (2.10) összefüggés és a likvidációs érték definíció használata után

$$
\begin{aligned}
G(\boldsymbol{\rho}, \lambda, \mu) = -\theta_0 - \sum_{j \in J} \left[m_j(0) - \beta_j \rho_j\right](\theta_j - \rho_j) - \sum_{j \in J} \int_0^{\rho_j} m_j(h)dh \\
-\lambda \left[\sum_{j \in J} \int_0^{\rho_j} m_j(h)dh + \theta_0 - c\right] - \sum_{j \in J} \mu_j \left[\theta_j - \rho_j\right].
\end{aligned}
$$

Jelölje ρ_j^{**} az optimális ρ_j pozíciót a $j \in J$ eszköz esetén. Az általánosság megsértése nélkül ismét feltehetjük, hogy $\rho_0^{**} = 0$. A Karush-Kuhn-Tucker feltételek közül ρ_j szerinti parciális derivált változik meg

$$
\frac{\partial G(\boldsymbol{\rho}, \lambda, \mu)}{\partial \rho_j} = m_j(0) - 2\beta_j \rho_j^{**} + \beta_j \theta_j - (1+\lambda) m_j(\rho_j^{**}) + \mu_j = 0 \ \forall j \in J.
$$

A 2.3 példa intuitív eredménye az elsőrendű feltételek összevetésével formálisan is vizsgálható. Tegyük fel, hogy $\theta_j - \rho_j^{**} > 0$. Ekkor a permanens árhatás bevezetésének következtében $-2\beta_j \rho_j^{**} + \beta_j \theta_j$ tagok jelennek meg a Lagrange függvény ρ_j-szerinti deriváltjában. A $\boldsymbol{\rho}$ portfólió a kezdeti $\boldsymbol{\theta}$ portfólió és a permanens árhatás együtthatójának függvénye lesz, és $\rho_j^{**} > 0$ ($\rho_j^{**} < 0$) marginális bevétele (költsége) a készlethatást és a tranzakciós költség hatását egyaránt tartalmazza.

A probléma megoldásához további egyszerűsítő feltevések vagy numerikus módszerek alkalmazása szükséges. Analitikus megoldáshoz Tian, Rood és Oosterlee (2013) alapján a marginális keresleti-kínálati görbék exponenciális függvénnyel közelíthetőek.

2.5.2. Az optimalizálási probléma megoldása exponenciális MSDC mellett

Közelítsük a nemnövekvő lépcsős MSDC-ket exponenciális függvényekkel, és adjunk analitikus megoldást a 2.2 problémára[16]. A $j \in J$ eszköz marginális keresleti-kínálati görbéjét az exponenciális $m_j(h) = A_j \exp^{-k_j h}$ függvénnyel adjuk meg. Folytonos, a nulla pontban is definiált függvényt használunk a marginális keresleti-kínálati görbe helyett, ezért az elérhető portfólió értékelésekor $m_j(0) = A_j$ legjobb árakon értékelünk. A ρ_j és λ szerinti deriválás eredményeként kapott elsőrendű feltételek

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G(\boldsymbol{\rho}, \lambda, \mu)}{\partial \rho_j} &= A_j - (1+\lambda) A_j \exp^{-k_j \rho_j^*} + \mu_j = 0 \ \forall j \in J, \\
\frac{\partial G(\boldsymbol{\rho}, \lambda, \mu)}{\partial \lambda} &= \sum_{j \in J} \frac{A_j}{k_j} \left(1 - e^{-k_j \rho_j^*}\right) + \theta_0 - c = 0.
\end{aligned}
$$

[16]Permanens árhatás nélkül a levezetés eredményét Acerbi és Scandolo (2008) szintén megadja, ugyanakkor a problémát permanens árhatással is bővítjük, és így a két eset összevetése egyszerűbben elvégezhető majd.

alakúra egyszerűsödnek.

Permanens árhatás bevezetésekor

$$\overline{m}_j(0) = A_j - \beta_j \rho_j$$

legjobb áron értékelünk, így a probléma analitikus megoldása megkapható a

$$\begin{aligned}\frac{\partial G(\boldsymbol{\rho}, \lambda, \mu)}{\partial \rho_j} &= A_j - \beta_j \rho_j^{**} + \beta_j \theta_j - (1+\lambda) A_j e^{-k_j \rho_j^{**}} + \mu_j = 0 \ \forall j \in J \\ \frac{\partial G(\boldsymbol{\rho}, \lambda, \mu)}{\partial \lambda} &= \sum_{j \in J} \frac{A_j}{k_j} \left(1 - e^{-k_j \rho_j^{**}}\right) + \theta_0 - c = 0\end{aligned}$$

egyenletek megoldásával. Az eredményt példák segítségével illusztrálhatjuk.

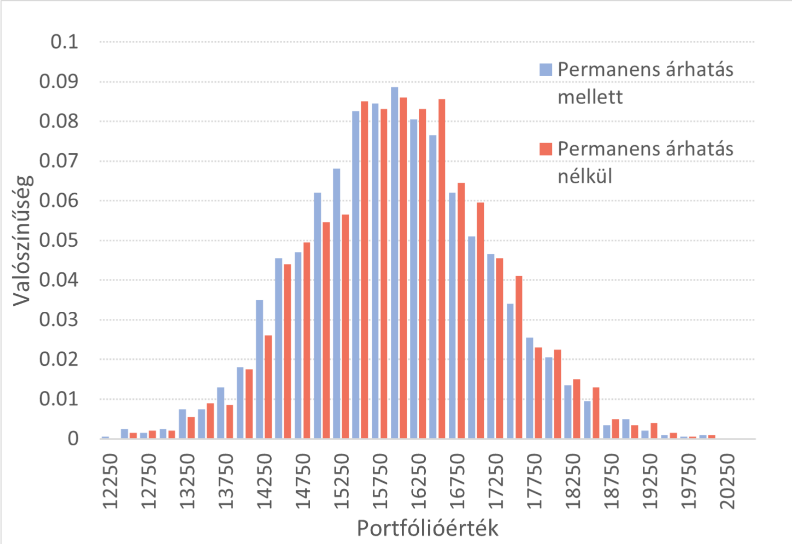
2.4. Példa. Legyen egy két kockázatos eszközből álló $\boldsymbol{\theta} = (0, 600, 1000)$ kezdeti portfóliónk. Közelítsük az eszközök marginális keresleti és kínálati görbéjét $m_1(h) = 10e^{-0{,}0001h}$ és $m_2(h) = 10e^{-0{,}00005h}$ exponenciális alakú függvényekkel. Az $\mathcal{L}^+(6000)$ likviditási elvárás a minimális készpénzmennyiséget határozza meg, amely legyen 6000. Lináris permanens árhatásfüggvényt feltételezünk $\beta_1 = 0{,}00003$ és $\beta_2 = 0{,}0004$ paraméterrel.

Permanens árhatás feltételezése nélkül (a likviditás teljes visszaépülése esetén) analitikus megoldást számolva az optimális kereskedett részportfólió $(\rho_1, \rho_2) = (202{,}03,\ 404{,}05)$, míg permanens árhatást feltételezve és numerikus módszert alkalmazva (310,32, 296,63) egységet likvidálunk a kezdeti portfóliónkból a likviditási elvárás teljesítéséhez. Meghatározhatjuk a korábban definiált, különböző feltevések melletti portfólióértékeket:

$$\begin{aligned}U(\boldsymbol{\theta}) &= 16000 \\ V^{\mathcal{L}^+}(\boldsymbol{\theta}) &= 15988 \\ \overline{V}^{\mathcal{L}^+}(\boldsymbol{\theta}) &= 15889 \\ L(\boldsymbol{\theta}) &= 15773.\end{aligned}$$

A legjobb árakon az eredeti marginális keresleti-kínálati görbe mellett a portfóliónk $U(\boldsymbol{\theta})$ értéke 16000. A likviditás visszaépülése mellett a portfólió $V^{\mathcal{L}^+}(\boldsymbol{\theta})$ likviditási elvárás melletti értéke 15988, míg lineáris permanens árhatás feltételezésekor $\overline{V}^{\mathcal{L}^+}(\boldsymbol{\theta}) = 15889$. A legalacsonyabb a $L(\boldsymbol{\theta})$ likvidációs érték, amely 15773.

2.5. Példa (A 2.4 példa folytatása)**.** Monte Carlo szimulációval összevethetjük a likviditási elvárás melletti portfólió-értéket permanens árhatás bevezetésével és anélkül. Használjuk a 2.4 példában megadott adatokat. Acerbi és Scandolo (2008) részletezi az (A, k) paraméterek eloszlásának lehetséges feltevéseit, amelyek közül egyfaktoros likviditási kockázat modellt választunk. A_1-et és A_2-t 10 várható értékű



2.1. ábra. Portfólió-értékelés likviditási elvárás figyelembevételével: A szimuláció során milyen valószínűséggel esett a portfólióérték a különböző sávokba

és 1 szórású normális eloszlásból szimuláljuk, míg k rögzített. Az összehasonlíthatóság érdekében minden realizációhoz kiszámítjuk a portfólióértéket mindkét módon. Az eredmények a várakozásaink szerint alakulnak, hiszen a portfólióérték hisztogramja enyhén balra tolódik, ha figyelembe vesszük a permanens árhatást.

A marginális keresleti-kínálati görbe modellezése és becslése releváns feladat, így az exponenciális MSDC vizsgálata nem csak elméleti jelentőséggel bír. Tian, Rood és Oosterlee (2013) célja gyakorlati alkalmazhatóság vizsgálatával egészíteni ki Acerbi és Scandolo (2008) elméleti keretrendszerét. A tanulmány az aktívan kereskedett eszközök esetén lépcsős marginális keresleti-kínálati görbék feltételezése mellett dolgozza ki a portfólió-értékelés algoritmusát, míg a kevésbé likvid OTC piacokat exponenciális MSDC segítségével modellezi. Tian, Rood és Oosterlee (2013) legfontosabb eredménye, hogy megmutatja a nemnövekvő lépcsős marginális keresleti-kínálati görbék a gyakorlati alkalmazhatóság szempontjából kellő pontossággal közelíthetőek exponenciális függvényekkel. Nagy és közepes kapitalizációjú részvények esetén a következő exponenciális MSDC modellt becsli

$$m(h) = m^{+}(0) \cdot e^{-k\sqrt{h}}$$

az MSDC vételi oldalára, ahol $m(h)$ a vételi ár h egység eszköz kereskedése esetén, $m^{+}(0)$ a legjobb vételi ár, és $k > 0$ a likviditási kockázat faktora. Az eladási oldal modellezéséhez az

$$m(h) = m^{-}(0) \cdot e^{k\sqrt{|h|}}$$

egyenletet adja meg. Kis kapitalizációjú részvények esetén a modell megváltozik, a becslő egyenlet

$$m(h) = m^{+}(0) \cdot e^{-kh^2}$$

az MSDC vételi, és

$$m(h) = m^{-}(0) \cdot e^{k|h|^2}$$

az MSDC eladási oldalán. A modellben az $m^{+}(0)$, $m^{-}(0)$ legjobb árak és a k paraméter valós adatok alapján becsülhetők. Különböző eszközök adataira illesztve a modellt vizsgálható a becsült marginális keresleti-kínálati görbék közötti eltérés.

2.6. Összefoglalás

A piaci tökéletlenségek mértékét megragadó árhatás jelentőségének köszönhetően a pénzügyek számos területe átveszi a piaci mikrostruktúra megközelítés elemeit. Az eszközárazásban alkalmazott várható hozamok pontosabb becslését teszi lehetővé a likviditás figyelembevétele. Az újonnan kibocsátott részvények másodpiacon megfigyelhető áralakulását részben az elsődleges piaci jegyzés sikeressége határozza meg, azaz részvénykibocsátásoknál jelentős a kereskedési rendszer hatása (Madhavan, 2000). A különböző kereskedési rendszerek tulajdonságainak vizsgálata iránymutatást adhat az optimális kereskedési rendszer kialakításához, illetve a pénzügyi piacok szabályozásának fejlesztéséhez.

A likviditási kockázat problémakör gyakorlati relevanciáját legjobban a 2007-2008-ban kirobbanó pénzügyi válságban betöltött szerepe hangsúlyozza. Azóta a széleskörű alkalmazhatóságnak köszönhetően az akadémiai közönség mellett kereskedők, kockázatkezelők, központi bankokban és teljesítmény-értékelés területén dolgozók, közpolitikusok és szabályozók figyelmét is megragadják az irodalom új eredményei.

Az intézményi befektetők szempontjából a likviditási kockázat mérésének és kezelésének több okból is kiemelt jelentősége van. Egyrészt a portfóliómenedzseri teljesítmény értékelése pontosítható Acerbi és Scandolo (2008) elméletének felhasználásával. Másrészt intézményi befektetők esetén a likviditás és a kereskedés árhatása fontos szerepet játszanak a portfólió-allokációról szóló döntésekben. Nagy volumenű értékpapírtranzakciók árhatása nem hanyagolható el, ezért az optimális végrehajtási stratégiák tervezésekor az intézményi befektetők saját tranzakcióik permanens és ideiglenes árhatását is figyelembe veszik (Almgren és Chriss, 2001). Az ötletet átültetve célszerű a likviditási elvárás melletti portfólióérték meghatározásakor is számolni permanens árhatással.

A fejezetben módosítottuk a kereskedés következtében jelentkező permanens árhatással Acerbi és Scandolo (2008) likviditási elvárás melletti portfólió-értékelését, hogy nagy, a piac mozgását befolyásoló intézményi befektetők esetében is alkalmazható legyen. A megvalósításhoz eltoltuk a marginális keresleti-kínálati görbét kereskedésünk várható permanens árhatásával a legjobb elérhető portfólió értékeléséhez. Minimális készpénzmennyiséget meghatározó likviditási elvárás és exponenciális függvénnyel közelített marginális keresleti-kínálati görbe mellett már mérsékelt permanens árhatás is teljesen megváltoztathatja az elérhető portfóliót, miközben enyhén módosítja a portfólió értékét. Természetes, ugyanakkor fontos megfigyelés, hogy a permanens árhatás szerepeltetése az árelfogadás feltételének sérülésével jár együtt, hiszen a piaci szereplő kereskedéssel eltolhatja, akár manipulálhatja is az árakat.

Permanens árhatás figyelembevételével az intézményi befektetők portfóliójának likviditási elvárás melletti értéke pontosabban határozható meg. Az így definiált portfólióértéket használhatnánk kockázati mértékek számszerűsítésekor, tőkekövetelmények meghatározásakor, illetve portfóliókezelők teljesítményének vizsgálata során.

A fejezet alapján számos jövőbeli kutatási irány vázolható. A portfólió-értékelési probléma nemlineáris permanens árhatás vagy az MSDC különböző pontjaira különbözőféleképpen ható – nem párhuzamos eltolódást eredményező – árhatás mellett is vizsgálható lenne. Az alkalmazhatóság kiterjesztéséhez a minimális készpénzmennyiség előírása helyett általános likviditási elvárás mellett is felírandó a probléma. Végül a bemutatott módszer nagyfrekvenciás kereskedés esetén is releváns lehet, hiszen rövidebb időtávon szintén megfigyelhető permanens árhatás.

3. fejezet

A piaci likviditás és a szabályozás kapcsolata általános egyensúlyelméleti modellkeretben

A pénzügyi válságok következményeként az elmúlt évtizedben középpontba került a szabályozás kérdése. A gyakorlati tapasztalat és az elméleti modellek azt mutatják, hogy a likviditási kockázat és a túlzott kockázatvállalás csökkentése érdekében bevezetett szabályozói lépések hatására a piaci szereplők módosítják befektetési döntéseiket, sőt a szabályozói előírás visszahat a piaci likviditásra. Tranzakciós költséggel (marginális keresleti-kínálati görbével) bővített általános egyensúlyelméleti modellt alkalmazunk a különböző eszközök likviditása és a bevezetett szabályozói előírás közötti kapcsolat vizsgálatához. A modellben a szabályozás visszafogja a piaci szereplők közötti kereskedést és kockázatmegosztást. Egyensúlyban a piaci szereplők fogyasztási profilja kockázatosabb marad, alacsonyabb hasznossági szintet érnek el. A fejezet a Hevér (2020) tanulmányban közölt modell általános változatát mutatja be.

3.1. Bevezetés

A pénzügyi válságok tanulságait felismerve a likviditási kockázat mérséklése a szabályozás kulcskérdése lett. Ugyanakkor a magasabb tőkekövetelmény, a likvid eszközállomány előírása, illetve az alacsonyabb kockázatvállalás ösztönzése visszahat a piaci likviditásra. A fejezetben definiált általános egyensúlyelméleti modell segítségével elemezhető a szabályozói lépések és a piaci likviditás kapcsolata.

A tranzakciós költséggel bővített általános egyensúlyelméleti modellben a piaci szereplők kereskedésének célja, hogy a jövőbeli világállapottól függő kifizetésüket és (ezzel fogyasztásukat) simítsák a kockázatok megosztásán keresztül. A felírt keretrendszer számos gyakorlati probléma leírására alkalmas, hiszen a kezdeti és jövőbeli sztochasztikus készletek határozzák meg az adott piaci szereplő viselkedését és gazdaságban betöltött szerepét. Ha a jelenben a piaci szereplő jelentős pozitív készlettel rendelkezik, akkor optimumban készletének nagy részét tőketulajdonosként befektetheti. Ha a jövőben pozitív készlet realizálására számít, a jelenben viszont nem rendelkezik elegendő jövedelemmel és tőkével, akkor hitelfelvevő háztartásként/vállalatként viselkedik. Ha a jövőbeli világállapotok egy részében pozitív, egy részében negatív készletet realizál, akkor az eszközök tartásával fedezheti kockázatos pozícióját.

A modellben a legrosszabb kimenetekben várható negatív kifizetés függvényében meghatározott szabályozói előírás a piaci szereplők kockázatvállalásának csökkentése érdekében történik. Az előírás visszafogja a hitelfelvevő háztartások túlzott eladósodását, mérsékli a tőketulajdonosok kockázatvállalását a befektetési döntések meghozatalánál, emellett biztosítja a kockázatos jövőbeli pozíciókon elszenvedett veszteség kifizetését és a likvid eszközök tartását. A szabályozó a különböző eszközök tartása esetén eltérő szabályozási paramétert alkalmazhat, amellyel a preferált eszközök kereslete növelhető a kerülendő eszközök keresletének rovására. Például amennyiben az ESG (*Environmental, Social, and Governance*) kockázat alapján határozza meg a szabályozó a paramétert, a fenntartható eszközök tartásának ösztönzésére irányuló szabályozói lépést modellezhetjük.

A piaci likviditást a fejezetben a marginális keresleti-kínálati görbe (*MSDC*) segítségével vizsgáljuk. A modellben a piaci szereplők nem tudnak közvetlenül kereskedni, árjegyző párosítja az ellenoldali ajánlatokat és monopolistaként határozza meg a számára optimális marginális keresleti-kínálati görbéket. Az optimalizálás során az árjegyző minden MSDC mellett meghatározza a piaci szereplők legjobb válaszát, majd kiválasztja a számára legmagasabb profitot (tranzakciós költséget) biztosító esetet. Feltesszük, hogy árjegyző nélkül a kockázatmegosztás nem valósulhat meg a modellben, a pénzügyi közvetítés nélkülözhetetlen ahhoz, hogy a különböző jövőbeli kitettséggel rendelkező piaci szereplők egymásra találjanak. A tranzakciós költség a cserepartnerkeresés és a kapcsolatteremtés költségeként is magyarázható. A piaci szereplők azért kereskednek az árjegyzőnek kifizetett tranzakciós költség ellenére a modellben, mert kereskedés nélkül az elérhető hasznosságuk alacsonyabb.[17]

A szabályozói előírás bevezetése plusz korlátozó feltétellel módosítja a piaci szereplők optimalizálási döntését, így a korábban optimális portfóliójuk nem biztos, hogy elérhető marad, a hasznosságuk adott MSDC mellett nem nőhet. Ha a piaci szereplő az optimális döntés során beleütközik a szabályozói előírásba, akkor az árjegyzőnek megéri növelni a tranzakciós költséget arra a szintre, amely mellett a

[17] A piaci szereplők optimalizáló viselkedésének következménye, hogy a kereskedés csak akkor valósul meg, ha magasabb hasznosságot biztosít.

szabályozói előírás mellett keresett portfólió a piaci szereplő legjobb válasza. Azaz a szabályozói előírás bevezetése (amennyiben a korlátozó feltételbe beleütközik az optimalizáló szereplő) csökkenti a piaci likviditást és a piaci szereplők hasznosságát.

Természetesen a gyakorlatban a szabályozás kérdése sokkal összetettebb, és a beavatkozást a piaci tökéletlenségek indokolttá teszik. A fejezet ugyanakkor megerősíti, hogy a beavatkozás költségekkel jár, a szabályozói előírás bevezetése visszahat a piaci likviditásra. A szabályozási mechanizmusok tervezésekor ezt a szempontot is mérlegelni kell.

Jelen bevezetés után a 3.2 alfejezetben a kapcsolódó irodalom összefoglalása következik. A 3.3 szakaszban a jelölések és az általános egyensúlyelméleti keret bevezetése kap helyet, amely leírja a piaci szereplők fogyasztási és portfólió-allokálási döntését szabályozói lépések bevezetése mellett is, vázolja az árjegyző döntési problémáját és megadja a piaci egyensúly feltételeit. A 3.4 alfejezet bemutatja a kétszereplős modellt és példák segítségével illusztrálja az eredményeket.

3.2. Szabályozás gyakorlatban és elméletben

A likviditás pénzügyi piacokon betöltött kulcsszerepét bizonyítják az elmúlt évtizedek likviditási válságai, a Fekete Hétfő 1987-ben, az Egyesült Államok és Irak közötti háború 1990-ben, az LTCM összeomlása 1998-ban, vagy a 2007-es amerikai jelzáloghitel-válság (Brunnermeier és Pedersen, 2008). Számos tanulmány elemzi a válságok eredetét és dinamikáját. Brunnermeier és Pedersen (2008) a piaci (*market liquidity*) és a finanszírozási (*funding liquidity*) likviditás kétirányú interakcióját és likviditási válságok kialakulásában játszott szerepét modellezi. Megmagyarázza, hogy adott piacról hogyan terjed át a többire a válság, hogy a különböző eszközök likviditása miért korrelál egymással, hogy miért száradhat ki a piaci likviditás, illetve hogy miért kerülik a befektetők a kockázatos eszközöket finanszírozási válságok idején. Amihud, Mendelson és Wood (1990) a tőzsdék összeomlása és a likviditási válság közötti kapcsolatot vizsgálja az 1987-es csődhullám példáján keresztül, és kitér arra, hogy a központi bankok és a szabályozó szervek milyen lépéssekkel reagálhatnak egy likviditási sokkra. Mitchell, Pedersen és Pulvino (2007) az átváltható kötvények piacának 2005. évi összeomlását elemzi, és kitér az 1998-as és 1987-es likviditási spirálok kialakulására is. Végkövetkeztetésük, hogy a tőke szűkössége miatt likviditási válság esetén a piacok lassan állnak helyre, azaz az arbitrázs hosszú ideig fennmaradhat.[18]

[18] Amihud, Mendelson és Pedersen (2013) tudományos cikkeket összefűzve és magyarázva vizsgálja a likviditás árazásának problémakörét. Az utolsó szakasz a likviditási válságokkal foglalkozik, a Brunnermeier és Pedersen (2008), az Amihud, Mendelson és Wood (1990) és a Mitchell, Pedersen és Pulvino (2007) tanulmányokat mutatja be és elemzi. A tanulmányokat felvezető bevezetésben a központi fogalmak és a fejezetekben bemutatott cikkek tartalmának felvázolását a pénzügyi válságok

A kialakult válságok és a válságokat elemző tanulmányok felhívták a szabályozó szervek figyelmét a likviditás vizsgálatának fontosságára, miközben a pénzügyek számos területén középpontba került a szabályozás kérdése. 2013 januárjában a Bázeli Bizottság (*Basel Committee on Banking Supervision, BCBS*) a bankokra vonatkozó Bázel III. szabályozás elemeként két új likviditási mértéket, likviditás fedezeti mutatót (*Liquidity Coverage Ratio, LCR*)[19] és nettó stabil forrás mutatót (*Net Stable Funding Ratio, NSFR*)[20] vezetett be (BCBS, 2013). A bankrendszer sokktűrő képességét növelő szabályozás előírja, hogy a bankok kötelesek elegendő mennyiségű, a pénzpiacon könnyen és azonnal likvidálható eszközt tartani, illetve a kitettségeiket stabil forrással fedezni.

A bankrendszer szabályozásával párhuzamosan folyamatosan megújulnak az IOSCO (*International Organisation of Securities Commissions*) pénzügyi alapok kezelésével kapcsolatos ajánlásai. Az IOSCO (2018) ajánlás célja, hogy javítsa a nyíltvégű befektetési alapok likviditási kockázatának kezelését azért, hogy védje a befektetőket, javuljon a pénzügyi piacok hatékonysága és csökkenjen a szisztematikus kockázat. Érdekes szabályozási irány az IOSCO (2019b) jelentésben megfogalmazott fenntartható pénzügyek (*sustainable finance*) irányába történő elmozdulás ösztönzése. A tanulmány a fejlődő piacok szemszögéből közelíti meg a kérdést, és 11 javaslatot fogalmaz meg, amelyeket a szabályozó szerveknek célszerű figyelembe venni a fenntartható eszközök és az ESG (*Environmental, Social, and Governance*) specifikus kockázatok szabályozásakor. Az ESG szempontok befektetésekre gyakorolt hatásáról Naffa és Fain (2019) értekezik.

A SEC (*U.S. Securities and Exchange Commissions*)[21] célkitűzései között fontos szerepet kap a pénzügyi piacokon befektető vagy hitelfelvevő háztartások védelme. Ugyanakkor a pénzügyi intézményi oldal szabályozása mellett a háztartások pénzügyi kultúrájának fejlesztése, a túlzott kockázatvállalás és eladósodottság visszaszorítása is kulcsfontosságú. Király, Nagy és Szabó (2008) szerint a 2007-es amerikai jelzáloghitel-válság kirobbanásának fontos előzménye a fejlett országok esetében kialakuló fogyasztási többlet és ezzel párhuzamosan a hitelboomok kialakulása és a háztartások tőkeáttételének növekedése. A probléma megoldását nehezíti, hogy a pénzügyi tanácsadók javaslatait a háztartások csupán elenyésző hányada fogadja meg, még abban az esetben is, amikor a tanácsadók önérdeke az értékesítéstől teljesen független, azaz félrevezetéstől nem kell tartaniuk (Stolper, 2018). Stolper (2018)

eseményeit bemutató grafikonokkal egészítik ki a szerzők. (Hevér, 2015)

[19] A likviditásfedezeti mutató előírt értéke 2019 januárjától 100%, azaz a bankok legalább annyi likvid eszközt kötelesek tartani, amennyi a nettó kumulált pénzkiáramlás a következő 30 napban.

[20] Láng (2017) alapján az NSFR az elérhető stabil forrás (*available stable funding, ASF*) és a szükséges stabil forrás *required stable funding, RSF*) hányadosa, amelynek el kell érnie a 100%-ot.

[21] *"The SEC enforces the securities laws to protect the more than 66 million American households that have turned to the securities markets to invest in their futures – whether it's starting a family, sending kids to college, saving for retirement or attaining other financial goals."* https://www.sec.gov/

és Brounen, Koedijk és Pownall (2016) megállapítja, hogy a pénzügyi műveltség szignifikánsan emeli a tanácsadás követésének és a megtakarításnak a valószínűségét. Campbell (2016) olyan modellkeretben vizsgálja a háztartások pénzügyi és fogyasztási döntéseinek szabályozását, amelyben a háztartások jelentős hányada nem rendelkezik az öngondoskodáshoz szükséges ismeretanyaggal. Eredménye a beavatkozás szükségességét hangsúlyozza.

A szabályozási gyakorlat mellett elméleti modellek is vezetnek be korlátozó feltételeket a szereplők döntési problémájába. Acerbi és Scandolo (2008) likviditási elvárás melletti portfólióértéket definiál, amely a portfóliók legjobb vételi és eladási árakon történő értékelése helyett figyelembe veszi, hogy a jövőbeli tervek megvalósítása az eszközök egy részének likvidálását követeli meg. Bigio (2015) modelljében a vállalatok szembesülnek az eszközök azonnali likvidálásának, illetve hitelbiztosítékként történő használatának problémájával a szerződések korlátozott kikényszeríthetőségéből következő bizonytalanság miatt. Kiyotaki és Moore (2019) korlátozza a vállalkozók hitelfelvételét, így a befektetéshez likvidálni kell illikvid eszközeik egy részét. Csóka (2017) pénzügyi korlátok mellett modellezi egy eladósodott vállalat divíziói közötti kockázatmegosztás lehetőségét. Gromb és Vayanos (2010) a pénzügyi közvetítők tőkéje és a piaci likviditás közötti összefüggést modellezi. A modellben az alacsony likviditás miatt jelentkező arbitrázs teljes kihasználását és a piaci likviditás biztosítását akadályozzák a szofisztikált befektetők pénzügyi korlátai.

Számos tanulmány vizsgálja a szabályozói előírások sikerességét és lehetséges költségeit. De Nicolò, Gamba és Lucchetta (2014) részpiaci egyensúlyi modell keretében megmutatja, hogy a Bázel III. keretében bevezetett likviditás fedezeti mutató alkalmazása visszafogja a hitelezést, csökken a hatékonyság és a jólét szintje. Begenau (2019) dinamikus általános egyensúlyelméleti modell segítségével vizsgálja a tőkekövetelmény optimális szintjét. A bevezetett tőkekövetelmény csökkenti a megengedett tőkeáttétel nagyságát, ezért csökken a bank kereslete a betétek iránt és az azokra fizetendő kamat, amin keresztül mérséklődik a bankok tőkeköltsége. Ez végsősoron növeli a bank hitelezési tevékenységét. Emellett a magasabb tőkekövetelmény ösztönzi a bankok monitoring tevékenységét, növelve a banki működés hatékonyságát. Ezzel szemben a IOSCO (2019a) jelentés hangsúlyozza, hogy a vállalati kötvények másodpiacának válság utáni szabályozása korlátozza a pénzügyi közvetítőket a likviditás biztosításában, így a stressztesztek alapján a piaci nyomás a korábbiaknál súlyosabb hozamelmozdulást eredményezhet. Sommer és Sullivan (2018) modellje alapján a jelzáloghitelek adókedvezményének eltörlése az ingatlanárak és a jelzáloghitelállomány csökkenését, és a jólét emelkedését eredményezné.

Az alkalmazott módszertanhoz hasonlóan általános egyensúlyelméleti keretet mutat be, illetve alkalmaz Le Roy és Werner (2001), Csekő (2016), Csóka, Herings és Kóczy (2007), Faias és Luque (2018), Dehez, Drèze és Suzuki (2002), Herings és Zhou (2019), Eisfeldt (2004), Kőhegyi és Stépán (2003) és Zalai (1998), amely tanulmányok a felírt modell megoldásához nyújtanak segítséget.

3.3. Az általános egyensúlyelméleti modell

Az értekezés az általános egyensúlyelméleti modell felépítésében alapvetőn Le Roy és Werner (2001) könyvére támaszkodik. Újítás ugyanakkor a várható veszteség függvényeként bevezetett szabályozói előírás, az árjegyző endogén marginális keresleti-kínálati görbéjének használata és a készpénz kiemelése az eszközök közül, ami lehetővé teszi a kockázatmentes eszközben történő megtakarítást akár minden szereplő számára egyszerre is.

3.3.1. Jelölésrendszer

A jelölések bevezetése Csóka és Herings (2014) és Le Roy és Werner (2001) alapján történik. Kétidőszakos modellt feltételezünk: a kockázatos eszközökkel a 0. időszakban kereskednek, míg a kifizetések az első időszakban történnek. Egy piaci szereplő kockázatmentes eszközt/készpénzt és J különböző kockázatos eszközt tarthat. Tegyük fel, hogy a kockázatmentes eszköz kamatlába 0% a piacon. Az első időszakban S különböző világállapot realizálódhat, melyek közül $s \in \{1, \cdots, S\}$ világállapot $\pi_s > 0$ valószínűséggel következik be és $\sum_{s=1}^{S} \pi_s = 1$. Jelölje $x_{js} \in \mathbb{R}$ a $j \in J$ eszköz *kifizetését* az $s \in \{1, \cdots, S\}$ világállapotban. Míg $x_j = [x_{j1}, \cdots, x_{jS}] \in \mathbb{R}^{\mathbb{S}}$ vektor $j \in J$ eszköz kifizetését az összes világállapotban és $X \in \mathbb{R}^J \times \mathbb{R}^S$ mátrix az összes eszköz kifizetését tartalmazó kifizetésmátrixot jelöli[22].

Egy kockázatos portfólió J eszközből áll. Jelölje $\Theta = \mathbb{R}^J$ a kockázatos portfóliók terét, $\theta \in \Theta$ pedig egy *portfóliót*/pozíciót[23]. Az eszközök árát ismét a marginális keresleti-kínálati görbét meghatározó 2.2 definíció segítségével adjuk meg.

3.1. Definíció. A $j \in J$ eszköz árát a *marginális keresleti kínálati görbe* (MSDC) írja le, amely megadható $m_j : \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$ alakban, ahol

1. $m_j(h) \geq m_j(\overline{h})$ ha $h < \overline{h}$;
2. $m_j(h)$ jobbról folytonos $h < 0$, míg balról folytonos $h > 0$ esetén.

A marginális keresleti-kínálati görbe alkalmazásával definiáljuk a likvidációs értéket $\theta \in \Theta$ kockázatos eszközportfólió esetén. A 2.3 definícióval szemben most kockázatmentes eszközt nem tartalmaz a θ portfólió.

[22]Ha az X mátrix rangja S, akkor a piac teljes. Az értekezésben nem feltételezünk teljes piacot.

[23]A 2. fejezetben $\mathbf{\Theta} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^J$ jelölte a portfóliók terét. A különbség az, hogy a kockázatmentes eszközt/készpénzt most külön kezeljük.

3.2. Definíció. Egy $\theta \in \Theta$ kockázatos eszközportfólió *likvidációs értéke* megadható a következő alakban

$$\ell(\theta) = \sum_{j \in J} \int_0^{\theta_j} m_j(h)dh.$$

A befektető piaci szereplők halmaza I. A $\theta^i \in \mathbb{R}^J$ portfólió megmutatja, hogy az $i \in I$ befektető milyen eszközöket tart és adott el rövidre. Az $i \in I$ szereplő c_0^i-t fogyaszt a 0. időszakban és $c_1^i = [c_{11}^i, \cdots, c_{1S}^i]$-t az 1. időszakban, ahol c_{1s} az $s \in \{1, \cdots, S\}$ világállapotban választott fogyasztási szintet jelöli. Az $i \in I$ szereplő rendelkezésére álló készpénz készlete a 0. időszakban ω_0^i. Az első időszakban pedig a készlet (természetes kitettség) a világállapottól függő valószínűségi változó $\omega_1^i = [\omega_{11}^i, \cdots, \omega_{1S}^i]$. Az $i \in I$ szereplő preferenciáit a folytonos $u^i : \mathbb{R}^{S+1} \to \mathbb{R}$ hasznossági függvénnyel írjuk le.

3.3.2. A piaci szereplők fogyasztási és portfólió-allokálási döntése szabályozói előírás nélkül

Az $i \in I$ befektető az optimális fogyasztást és az optimális kockázatmentes és kockázatos eszköz portfóliót a következő hasznosság-maximalizálási feladat megoldásaként határozza meg

$$\max_{c_0^i, c_1^i, \theta^i, \theta_0^i} u^i(c_0^i, c_1^i) \tag{3.1}$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} c_0^i &\leq \omega_0^i + \ell(-\theta^i) - \theta_0^i \\ c_1^i &\leq \omega_1^i + \theta^i X + \theta_0^i 1^S. \end{aligned}$$

A szereplők hasznosságuk maximalizálásakor a c_0^i és c_1^i fogyasztásról, a 0. időszakban megvásárolt, 1. időszakban kifizetést biztosító θ^i portfólióról és a θ_0^i félretett készpénzmennyiségről döntenek. A döntést korlátozza, hogy a 0. időszaki c_0^i fogyasztás nem haladhatja meg azt az összeget, ami az ω_0^i kezdeti készletből a θ^i portfólió nyitása és θ_0^i kockázatmentes eszköz (készpénz vagy bankbetét) tartása után marad. Míg az első időszaki c_1^i sztochasztikus fogyasztás nem nagyobb, mint az ω_1^i sztochasztikus készlet, a θ^i portfólió kifizetése és a θ_0^i félretett kockázatmentes eszköz összege.

3.3.3. Szabályozói előírás bevezetése az Expected Shortfall függvényeként

Tegyük fel, hogy a modellben a szabályozó $\forall i \in I$ piaci szereplő esetén készpénzlikviditási elvárást fogalmaz meg.

3.3. Definíció. Jelölje $e : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^S \times \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}$ függvény a *szabályozási elvárásfüggvényt*. A kockázatmentes eszközből minimálisan elvárt készpénzmennyiséget a következő

$$\theta_0^i \geq e\left[\delta, \theta^i X, \omega_1^i\right] \tag{3.2}$$

egyenlőtlenség határozza meg, ahol $e\left[\delta, \theta^i X, \omega_1^i\right]$ *szabályozási elvárás* megadható a $\theta^i X$ kockázatos eszközportfólió kifizetése, a δ szabályozói paraméter és az ω_1^i természetes kitettség függvényeként.

Szabályozás esetén az $i \in I$ befektető optimális fogyasztási és portfólió-allokálási döntése a következő optimalizálási feladat megoldásaként adható meg

$$\max_{c_0^i, c_1^i, \theta^i, \theta_0^i} u^i(c_0^i, c_1^i) \tag{3.3}$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} c_0^i &\leq \omega_0^i + \ell(-\theta^i) - \theta_0^i \\ \theta_0^i &\geq e\left[\delta, \theta^i X, \omega_1^i\right] \\ c_1^i &\leq \omega_1^i + \theta^i X + \theta_0^i 1^S. \end{aligned}$$

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a piaci szereplőknek a portfólió *várható veszteségének* (*Expected Shortfall, ES*) függvényeként megadott szabályozói előírásnak kell megfelelniük. Az ES definiálásához a Csóka, Herings és Kóczy (2009) tanulmányt követjük. A $j \in J$ eszköz esetén jelölje az $x_{j1}, \cdots, x_{jS}$ kimenetek rendezett értékeit $x_{j,s:S}$, ahol $\{x_{j,1:S}, \cdots, x_{j,S:S}\} = \{x_{j1}, \cdots, x_{jS}\}$ és $x_{j,1:S} \leq x_{j,2:S} \cdots \leq x_{j,S:S}$. A különböző világállapotok bekövetkezésének a valószínűsége megegyezik, azaz tegyük fel, hogy $\pi_1 = \cdots = \pi_S = \frac{1}{S}$.

3.4. Definíció. A világállapotok bekövetkezésének valószínűsége azonos és $k \in \{1, \cdots, S\}$. A $j \in J$ eszköz esetén a kimenetek x_j realizációs vektorára a *k-Expected Shortfall* az

$$ES_k(x_j) = -\sum_{s=1}^{k} \frac{1}{k} x_{j,s:S}$$

egyenlettel definiálható.

Általános esetben tegyük fel, hogy a világállapotok bekövetkezésének a valószínűsége nem egyezik meg, és jelölje $\pi_{j,s:S}$ annak a világállapotnak a valószínűségét, ahol a j eszköz várható kimenete $x_{j,s:S}$.

3.5. Definíció. A *k-Expected Shortfall* ($k \in \{1, \cdots, S\}$) a $j \in J$ eszköz esetén a kimenetek x_j realizációs vektorára

$$ES_k(x_j) = -\sum_{s=1}^{k} \frac{\pi_{j,s:S}}{\sum_{l=1}^{k} \pi_{j,l:S}} x_{j,s:S}. \tag{3.4}$$

A definíció portfóliószinten is megadható. Ekkor a $j \in J$ eszköz x_j kifizetései helyett, az $i \in I$ piaci szereplő $\theta^i \in \Theta$ portfóliója esetén az $s \in \{1, \cdots, S\}$ világállapotokban realizálódó $\sum_{j\in J} \theta^i_j x_{js}$ portfóliókifizetések értékeit rendezzük. A $\theta^i \in \Theta$ portfólió esetén jelölje a $\sum_{j\in J} \theta^i_j x_{j1}, \cdots, \sum_{j\in J} \theta^i_j x_{jS}$ kimenetek rendezett értékeit $(\sum_{j\in J} \theta^i_j x_{js})_{s:S}$, ahol

$$\{\sum_{j\in J} \theta^i_j x_{j1}, \cdots, \sum_{j\in J} \theta^i_j x_{jS}\} = \{(\sum_{j\in J} \theta^i_j x_{j1})_{1:S}, \cdots, (\sum_{j\in J} \theta^i_j x_{js})_{S:S}\}$$

és

$$(\sum_{j\in J} \theta^i_j x_{j1})_{1:S} \leq (\sum_{j\in J} \theta^i_j x_{j1})_{2:S} \cdots \leq (\sum_{j\in J} \theta^i_j x_{jS})_{S:S}.$$

3.6. Definíció. A világállapotok bekövetkezésének valószínűsége azonos és $k \in$ $\in \{1, \cdots, S\}$. A $\theta^i \in \Theta$ portfólió esetén a kifizetés kimeneteinek $\theta^i X$ realizációs vektorára a *k-Expected Shortfall* az

$$ES_k(\theta^i X) = -\sum_{s=1}^{k} \frac{1}{k} (\sum_{j\in J} \theta^i_j x_{js})_{s:S}$$

egyenlettel definiálható.

Jelölje $\pi_{\theta^i X,s:S}$ annak a világállapotnak a valószínűségét, ahol a θ^i portfólió kifizetésének várható kimenete $(\sum_{j\in J} \theta^i_j x_{js})_{s:S}$.

3.7. Definíció. A $\theta^i \in \Theta$ portfólió esetén a kifizetés kimeneteinek $\theta^i X$ realizációs vektorára a *k-Expected Shortfall* az

$$ES_k(\theta^i X) = -\sum_{s=1}^{k} \frac{\pi_{\theta^i X,s:S}}{\sum_{l=1}^{k} \pi_{\theta^i X,l:S}} (\sum_{j\in J} \theta^i_j x_{js})_{s:S}$$

egyenlettel definiálható.

Ha a tőkepiaci portfólió kifizetését korrigáljuk a sztochasztikus készlet értékével, akkor az $s \in \{1, \cdots, S\}$ világállapotokban realizálódó $\sum_{j\in J} \theta^i_j x_{js} + \omega^i_{1s}$ korrigált portfóliókifizetéseket rendezzük az előző két esettel analóg módon.

3.8. Definíció. A világállapotok bekövetkezésének valószínűsége azonos és $k \in$ $\in \{1, \cdots, S\}$. A $\theta^i \in \Theta$ portfólió esetén a kifizetés sztochasztikus készlettel korrigált kimeneteinek $\theta^i X + \omega_1^i$ realizációs vektorára a *k-Expected Shortfall* az

$$ES_k(\theta^i X + \omega_1^i) = -\sum_{s=1}^{k} \frac{1}{k} (\sum_{j \in J} \theta_j^i x_{js} + \omega_{1s}^i)_{s:S}$$

egyenlettel definiálható.

Jelölje $\pi^{\omega}_{\theta^i X,s:S}$ annak a világállapotnak a valószínűségét, ahol a θ^i portfólió sztochasztikus készlettel korrigált kifizetésének várható kimenete $(\sum_{j \in J} \theta_j^i x_{js} + \omega_{1s}^i)_{s:S}$.

3.9. Definíció. A $\theta^i \in \Theta$ portfólió esetén a kifizetés sztochasztikus készlettel korrigált kimeneteinek $\theta^i X + \omega_1^i$ realizációs vektorára a *k-Expected Shortfall* az

$$ES_k(\theta^i X + \omega_1^i) = -\sum_{s=1}^{k} \frac{\pi^{\omega}_{\theta^i X,s:S}}{\sum_{l=1}^{k} \pi^{\omega}_{\theta^i X,l:S}} (\sum_{j \in J} \theta_j^i x_{js} + \omega_{1s}^i)_{s:S}$$

egyenlettel definiálható.

Ha a várható kifizetés a k legalacsonyabb kifizetést biztosító világállapotban negatív, azaz veszteségről beszélhetünk, akkor az ES értéke pozitív lesz, míg várható nyereség esetén az ES értéke negatív. A szabályozó az eszközök, a tőkepiaci portfóliók és a természetes kitettséggel korrigált portfóliók várható veszteségének függvényében egyaránt meghatározhatja a szabályozói előírást. A korlátozások bevezetése minden esetben a kockázatvállalás visszafogásának érdekében történik, ugyanakkor a különböző definíciók jelentősen eltérő egyensúlyi portfóliókat eredményeznek.

1. **Szabályozás eszközök szintjén**

   Tegyük fel, hogy a szabályozó minden $j \in J$ eszköz esetében meghatároz egy δ_j szabályozói paramétert, mely eszközönként/piaconként különbözhet. A $j \in J$ eszközre a tőkekövetelmény a θ_j^i pozíció kimeneteire számszerűsített ES δ_j-szerese lesz

   $$e\left[\delta_j, \theta^i X\right] = \sum_{j \in J} \delta_j \max\left[0, ES_k(\theta_j^i x_j)\right]. \tag{3.5}$$

   A tőkeallokálásra vonatkozó szabály szerint a piaci szereplők annyi kockázatmentes eszközt kötelesek tartani, ami meghaladja a θ^i portfólió azon $j \in J$ eszközeire összegzett tőkekövetelmény nagyságát, amelyek ES értéke pozitív, azaz

   $$\theta_0^i \geq \sum_{j \in J} \delta_j \max\left[0, ES_k(\theta_j^i x_j)\right]. \tag{3.6}$$

   Ebben az esetben a szabályozó célja az egyes világállapotokban jelentős negatív kifizetéssel járó kockázatos eszközök tartásának visszaszorítása, a portfóliótartásból fakadó diverzifikáció kockázatvisszafogó hatása és a természetes kitettség figyelembevétele nélkül. Az eszközönként eltérő szabályozói paraméter használata lehetővé teszi az ESG szempontok érvényesítését, hiszen ösztönözhető a szabályozó által preferált eszközök kereslete a többi eszköz rovására. Az előírás bevezetése kizárja a 0. időszaki hitelfelvétel lehetőségét.

2. **Szabályozás kockázatos portfólió szintjén**
   Ha a szabályozó célja visszafogni a piaci szereplők tőkepiaci pozíciójának kockázatát, akkor a portfólióra számszerűsített ES függvényében határozza meg a tőkekövetelményt.

$$e\left[\delta, \theta^i X\right] = \delta ES_k(\theta^i X). \tag{3.7}$$

   Ekkor a szabályozói előírás

$$\theta_0^i \geq \delta ES_k(\theta^i X), \tag{3.8}$$

   ahol δ szabályozói paraméter mutatja meg, hogy a portfólió Expected Shortfalljának mekkora hányadát kell kockázatmentes eszközben tartani. Ha a portfólió legrosszabb k kimenetben várható kifizetésének átlaga pozitív, azaz nyereséget biztosít, akkor az ES értéke negatív lesz. A hitelfelvétel lehetséges, ugyanakkor mértékét a várható nyereség korlátozza. A szabályozó a portfólió tartásából fakadó diverzifikációt figyelembe veszi, az eszközök szintjén megfogalmazott szabályozói előíráshoz képest alacsonyabb tőkekövetelményt fogalmaz meg, viszont egyes eszközök tartását nem tudja ösztönözni, illetve visszafogni.

3. **Szabályozás a természetes kitettség figyelembevétele mellett**
   Ebben az esetben a szabályozó a piaci szereplők természetes kitettségét is figyelembe veszi. A gondolat kézenfekvő, hiszen a modellben a tőkepiacon a jövőben várható világállapottól függő kifizetésből fakadó bizonytalanság csökkentése/teljes eliminálása a kereskedő piaci szereplők célja. Ha a szabályozó ismeri a piaci szereplők természetes kitettségét, akkor

$$e\left[\delta, \theta^i X, \omega_1^i\right] = \delta ES_k(\theta^i X + \omega_1^i) \tag{3.9}$$

   függvényében fogalmazhatja meg a szabályozói előírást

$$\theta_0^i \geq \delta ES_k(\theta^i X + \omega_1^i). \tag{3.10}$$

   A szabályozó és a piaci szereplők célja hasonló, a szabályozói előírás bevezetésének hatására az egyensúlyi portfóliók átrendeződése kevésbé jelentős. Ugyanakkor feltételeztük, hogy a szabályozó és a piaci szereplők között nincs aszimmetrikus információ, a szabályozó is ismeri a piaci szereplők sztochasztikus készletét. Másik megoldásként feltehető, hogy a piaci szereplők igazmondók, így a szabályozó elhiheti, amit a jövőben várható készleteikről állítanak. Feltevésünk erős, a gyakorlatban lehetetlen olyan szabályozói előírás bevezetése, amely korrigál a szereplők jövőben várható világállapottól függő készletének értékével is.

3.3.4. Fedezettartási kötelezettség esete

Le Roy és Werner (2001) alapján feltehető, hogy a piaci szereplők fedezetet kötelesek tartani azokra a kockázatos eszközeikre, amelyek kifizetése legalább egy világállapotban negatív. A fedezettartási kötelezettség teljesítését a szereplők készpénzkészletük kockázatos eszközök közötti szétosztásával biztosítják. A szükséges fedezet nagyságát minden eszközre az adott világállapotban várható kifizetés függvényeként határozzuk meg. Az $i \in I$ piaci szereplő $\forall s \in S$ világállapotban szétosztja az ω^i_{1s} sztochasztikus készlet és a megtakarított θ^i_0 készpénz összegét ω^i_{js} részekre[24] $\sum_j \omega^i_{js} = \omega^i_{1s} + \theta^i_0$ feltétel mellett. Definiálunk tehát egy $\Omega^i \in \mathbb{R}^J \times \mathbb{R}^S$ mátrixot, amelynek ω^i_{js} eleme megmutatja, hogy a rendelkezésre álló készletből az 1. időszak $s \in S$ világállapotában mennyit allokált az $i \in I$ szereplő a $j \in J$ kockázatos eszközre. Le Roy és Werner (2001) felteszi, hogy $\omega^i_{js} \geq 0$, ugyanakkor érdekes általánosítás a feltétel elhagyása. Ilyenkor, ha pozitív egy eszköz kifizetése egy világállapotban, akkor a nyereség terhére a többi eszközre több fedezetet lehet allokálni. Az $i \in I$ szereplő fogyasztási és portfólió-allokálási döntése

$$\max_{c^i_0, c^i_1, \theta^i, \theta^i_0, \Omega^i} u^i(c^i_0, c^i_1) \tag{3.11}$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} c^i_0 &\leq \omega^i_0 + \ell(-\theta^i) - \theta^i_0 \\ \omega^i_{js} &\geq -\hat{\delta}_j \theta^i_j x_{js} \ \forall j \in J, \ \forall s \in \{1, \ldots, S\} \\ c^i_1 &\leq \omega^i_1 + \theta^i X + \theta^i_0 1^S. \end{aligned}$$

optimalizálási feladatként adható meg. A fedezettartást előíró szabályozó $\hat{\delta}_j \geq 0$ eszközönként eltérő paramétert alkalmazhat. A piaci szereplőnek a $j \in J$ eszközre minden világállapotban a vállalt θ^i_j pozíció kifizetésének legalább $\hat{\delta}_j$-szeresét kell fedezetként allokálni. Ha $\theta^i_j x_j$ nemnegatív az $s \in \{1, \cdots, S\}$ világállapotban, azaz nem várható veszteség a θ^i_j pozíción, akkor a $j \in J$ eszközre nem szükséges tőkét allokálni, $\omega^i_{js} \leq 0$. Míg ha $\theta^i_j x_j$ negatív, akkor ω^i_{js} fedezetként allokált készlet pozitív lesz.

[24] A három alsó index alkalmazásának elkerülése végett az 1. időszakot nem jelöljük a készlet szétosztásakor.

Ha x_{js} szigorúan negatív, akkor átalakítva a korlátot

$$\theta_j^i \leq \frac{-\omega_{js}^i}{\hat{\delta}_j x_{js}} \tag{3.12}$$

adódik, ahol $\frac{-\omega_{js}^i}{\hat{\delta}_j x_{js}} > 0$. Míg x_{js} szigorú pozitivitása esetén

$$\theta_j^i \geq \frac{-\omega_{js}^i}{\hat{\delta}_j x_{js}} \tag{3.13}$$

ahol a jobb oldal negatív. Technikailag mindkét esetben a rövidre eladás korlátozásához hasonló feltételt kapunk[25].

3.3.5. Az árjegyző döntési problémája

A modellben a piaci szereplők nem kereskedhetnek közvetlenül, árjegyző/közvetítő párosítja az ellenkező oldali ajánlatokat és elfogyasztja a profitját a 0. időszakban. Ha $|I| \geq 2$, azaz a piaci szereplők száma legalább 2, akkor egyensúlyban az árjegyző a modellben csak közvetítőként jelenik meg, nem tart eszközöket, így nem szükséges a veszteség fedezését biztosító tőkét félretennie[26].

A pénzügyi piacok mikrostruktúráját és azon belül az árjegyzői piacokat Erb és Havran (2015) részletesen bemutatja. Tanulmányukban kiemelik, hogy a piaci tökéletlenségek hátterében a cserepartner-keresés és a kapcsolatteremtés költsége, hálózati extermáliák, aszimmetrikus információ és a készlettartás költsége egyaránt állhat, amely okok aztán különböző piaci mikrostuktúrák kialakulásához vezetnek. Jelen értekezésben Le Roy és Werner (2001) alapján a legegyszerűbb esetet feltételezzük, az árjegyző/közvetítő tranzakciós monopolistaként dönt minden eszköz esetén a marginális keresleti-kínálati görbéről, ezzel befolyásolva a különböző eszközök piacának likviditását. Havran és Szűcs (2016) a közvetítői hálózatok elemzésekor duopolista árjegyzői magatartást feltételez, amely egy további kutatási irányként jelen modellkeretben szintén vizsgálható lenne.

3.10. Definíció. Definiáljuk a $j \in J$ eszközre a $T_j : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}$ *tranzakciós költségfüggvényt*

$$T_j(\theta_j^1, \cdots, \theta_j^I) = -\sum_{i \in I} \int_0^{-\theta_j^i} m_j(h) \mathrm{d}h \tag{3.14}$$

alakban.

[25] Le Roy és Werner (2001) $\hat{\delta}_j$ szabályozói paraméter nélkül vezeti be a fedezettartási kötelezettség esetét és mutatja meg az állítást.

[26] Egyetlen reprezentatív piaci szereplő esetén a modell lényegesen eltér, ekkor az árjegyző áll a piac ellenkező oldalán, jelentős kockázatot vállalva.

Ekkor az összes tranzakció után az árjegyző $T : \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}$ függvénnyel megadott

$$T(\theta^1, \cdots, \theta^I) = \sum_{j\in J} T_j(\theta^1_j, \cdots, \theta^I_j) = -\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}\int_0^{-\theta^i_j} m_j(h)\mathrm{d}h \tag{3.15}$$

tranzakciós költséget szed be.

A modellben az árjegyző profitjának maximalizálásával határozza meg a marginális keresleti-kínálati görbéket, így optimalizálási feladata

$$\max_{m_j()\ \forall j\in J} \sum_{j\in J} T_j(\theta^1_j, \cdots, \theta^I_j) \tag{3.16}$$

feltéve, hogy a befektető piaci szereplők hasznosságot maximalizálva döntenek a θ^i portfóliókról. Az árjegyző tehát a limitáras ajánlatok elhelyezésével meghatározza a marginális keresleti-kínálati görbéket, amelyek alapján piaci áras ajánlatok beadásán keresztül a piaci szereplők kereskednek. Az árjegyző bevétele tranzakciós költségként az ajánlatok párosításakor jelentkezik, nagysága az MSDC alakjától (árrés nagysága, tranzakciós árszintek legjobb ártól mért távolsága) függ. A tranzakciós költségfüggvény alakját a marginális keresleti-kínálati görbék határozzák meg.

3.1. Állítás. *A $T(\theta^1, \cdots, \theta^I)$ tranzakciós költség meghatározható a $\theta^i \in \Theta$ portfólió nyitásakor jelentkező $\ell(-\theta^i)$ likvidációs érték függvényeként*

$$T(\theta^1, \cdots, \theta^I) = \sum_{j\in J} T_j(\theta^1_j, \cdots, \theta^I_j) = \sum_{i\in I} -\ell(-\theta^i). \tag{3.17}$$

Bizonyítás. A szummák felcserélésével és az 3.2 definíció felhasználásával triviálisan adódik az állítás. □

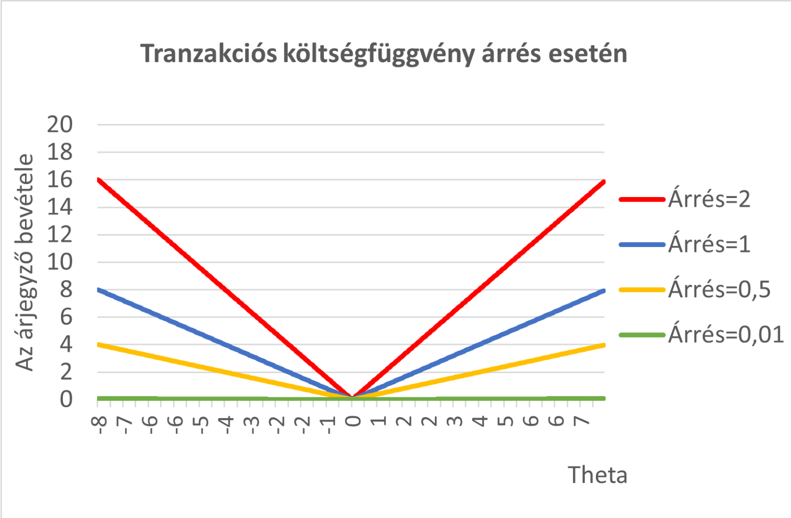
3.1. Példa. Tegyük fel, hogy a $j \in J$ eszközt a piacon egyetlen szereplő $\bar{i} \in I$ veszi, és egyetlen szereplő $\hat{i} \in I$ adja el. A kereskedett mennyiség $\theta_j > 0$, így $\theta^{\bar{i}}_j = \theta_j$ és $\theta^{\hat{i}}_j = -\theta_j$.

1. Ha a legjobb árszinteken elérhető ajánlatmennyiség korlátlan, azaz a piac mélységétől eltekintünk, akkor csak a legjobb vételi és eladási ár különbségével, az árréssel számolunk. A j eszköz kereskedésekor felmerülő tranzakciós költség a kereskedett mennyiség lineáris függvénye

$$T_j(\theta_j, -\theta_j) = \theta_j m_j(0^-) - \theta_j m_j(0^+) = \theta_j(m_j(0^-) - m_j(0^+)) \tag{3.18}$$

ahol $(m_j(0^-) - m_j(0^+))$ az árrés nagysága.

2. Tegyük fel, hogy a marginális keresleti-kínálati görbe exponenciális, azaz

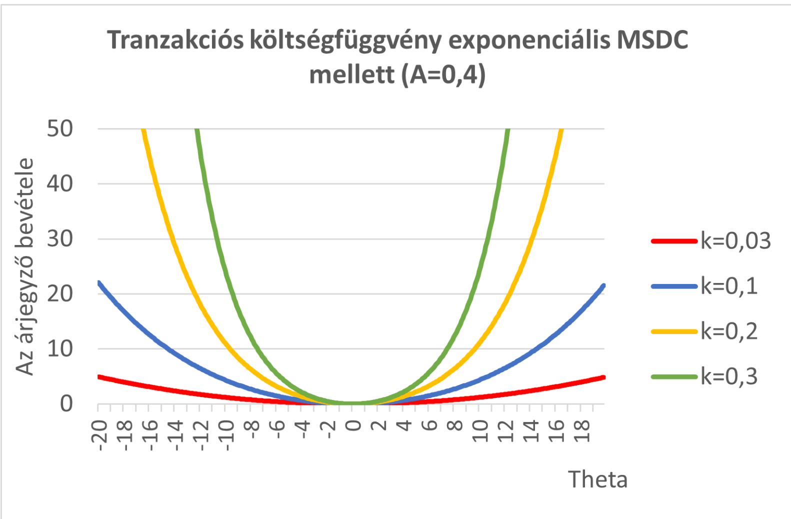


3.1. ábra. Tranzakciós költségfüggvény árrés feltételezése mellett

$m_j(\theta_j^i) = A_j e^{-k_j \theta_j^i}$ alakban adható meg. Ekkor a tranzakciós költség-függvény

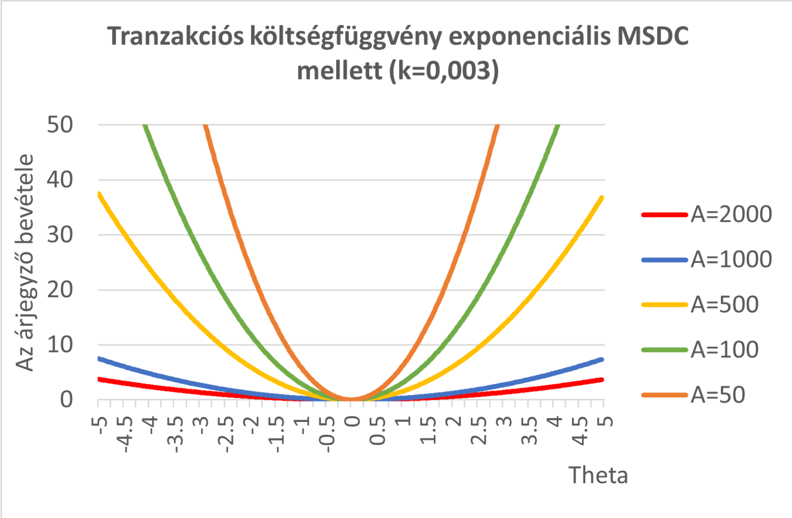
$$\begin{aligned} T_j(\theta_j, -\theta_j) &= \int_{-\theta_j}^{0} A_j e^{-k_j x} \mathrm{d}x - \int_{0}^{\theta_j} A_j e^{-k_j x} \mathrm{d}x = \\ &= -A_j \left[\frac{1}{k_j} e^{-k_j x} \right]_{-\theta_j}^{0} + A_j \left[\frac{1}{k_j} e^{-k_j x} \right]_{0}^{\theta_j} = \\ &= \frac{A_j}{k_j} \left(e^{-k_j \theta_j} + e^{-k_j(-\theta_j)} - 2 \right) \end{aligned}$$

alakban adható meg.



3.2. ábra.
Tranzakciós költségfüggvény exponenciális MSDC és változó k paraméter mellett

Adott kereskedett mennyiség esetén az A_j és a k_j paraméterek növelése a tranzakciós költség és ezzel az árjegyző bevételének növekedéséhez vezet. De



3.3. ábra.
Tranzakciós költségfüggvény exponenciális MSDC és változó A paraméter mellett

a portfólió-optimalizáláskor a piaci szereplők a tranzakciós költség mértékét is figyelembe veszik. A költség beépül az árba, a magasabb ár alacsonyabb kereskedett mennyiséghez vezet. A modellben az árjegyző addig emeli a tranzakciós költséget, amíg a kereskedett mennyiség csökkenése ellensúlyozza a tranzakciós költség növeléséből származó pótlólagos bevételt.

3. Legyen a marginális keresleti kínálati görbe (-1) meredekségű lineáris függvény 0-ban szakadással

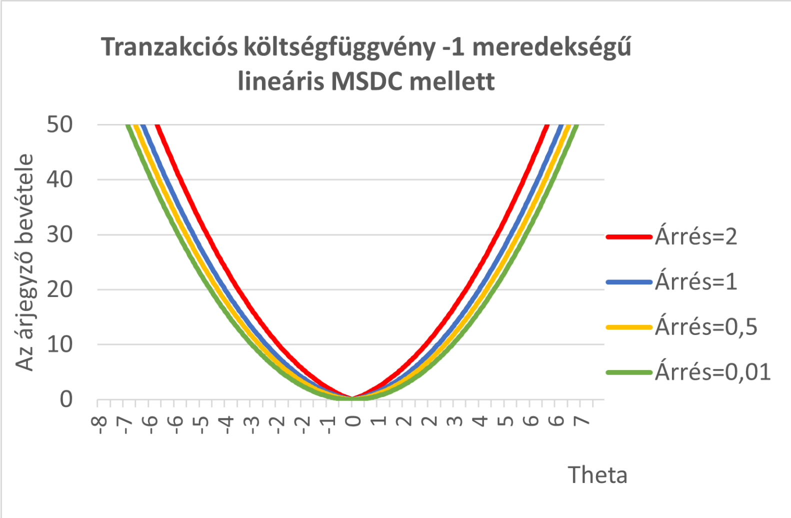
$$m_j(\theta_j^i) = \begin{cases} m_j(0^-) - \theta_j^i, \text{ ha } \theta_j^i < 0 \\ m_j(0^+) - \theta_j^i, \text{ ha } \theta_j^i > 0. \end{cases}$$

Az árjegyző $\theta_j^i < 0$ esetén elad, és $\theta_j^i > 0$ esetén vesz. Ha egyszerre ad el és vesz $\theta_j > 0$ mennyiséget a $j \in J$ eszközből, akkor a tranzakciós költség-függvény

$$T_j(\theta_j, -\theta_j) \quad = \quad (m_j(0^-) - m_j(0^+))\theta_j + \theta_j^2.$$

3.3.6. Az egyensúly piactisztító feltételei

Egy egyensúly az árjegyző adott optimális marginális keresleti-kínálati görbéi mellett megadható a piaci szereplők optimális kockázatos eszköz portfóliói, az optimális készpénzmennyiség és az optimális fogyasztási szintek halmazaként $\{\theta^{*i}, \theta_0^{*i}, c_0^{*i}, c_1^{*i}\}$ alakban, ahol $\theta^{*i}, \theta_0^{*i}, c_0^{*i}$, és c_1^{*i} megoldása a piaci szereplők optimalizálási feladatának.



3.4. ábra. Tranzakciós költségfüggvény lineáris MSDC mellett

A piactisztító feltétel a tőkepiacon és fogyasztási piacon a következő

$$\sum_{i\in I}\theta^i = 0 \tag{3.19}$$
$$\sum_{i\in I}c_0^i \leq \sum_{i\in I}\omega_0^i - T(\theta^1,\cdots,\theta^I) - \sum_{i\in I}\theta_0^i \tag{3.20}$$
$$\sum_{i\in I}c_1^i \leq \sum_{i\in I}\omega_1^i + \sum_{i\in I}\theta_0^i 1^S. \tag{3.21}$$

3.2. Állítás. *Egyensúlyban, ha a tőkepiac egyensúlyban van,*

$$\sum_{i\in I}\theta^i = 0,$$

akkor a fogyasztási piac is egyensúlyban lesz,

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}c_0^i &\leq \sum_{i\in I}\omega_0^i - T(\theta^1,\cdots,\theta^I) - \sum_{i\in I}\theta_0^i\\ \sum_{i\in I}c_1^i &\leq \sum_{i\in I}\omega_1^i + \sum_{i\in I}\theta_0^i 1^S.\end{aligned}$$

Bizonyítás. Összegezzük az I piaci szereplő 0. és 1. időszaki költségvetési korlátját

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}c_0^i &\leq \sum_{i\in I}\omega_0^i + \sum_{i\in I}\ell(-\theta^i) - \sum_{i\in I}\theta_0^i\\ \sum_{i\in I}c_1^i &\leq \sum_{i\in I}\omega_1^i + \sum_{i\in I}\theta^i X + \sum_{i\in I}\theta_0^i 1^S.\end{aligned}$$

A 3.1. állítás és a $\sum_{i\in I}\theta^i = 0$ egyenlőség miatt a fogyasztási piac egyensúlyi feltételeit kapjuk. $\square$

3.3.7. Egyensúly szabályozói előírás bevezetésével és anélkül

Kulcskérdés, hogy mi történik a piaci likviditással a szabályozói előírás bevezetésekor. A kérdés vizsgálatához össze kell hasonlítanunk azt az egyensúlyt, amelynek meghatározásakor a piaci szereplők a szabályozói előírás bevezetése nélkül az (3.1) optimalizálási probléma alapján döntenek, azzal az egyensúllyal, amit a szabályozói korlát teljesítését is előíró (3.3) optimalizálási feladat megoldása határoz meg. A szabályozói előírás bevezetésével a feltételes szélsőérték feladat megoldása addicionális korlát mellett történik, ezért a döntési lehetőségek halmaza nem bővülhet. Két esetet különböztethetünk meg.

3.3. Állítás. *Legyen a* $\{\theta^{*i}, \theta_0^{*i}, c_0^{*i}, c_1^{*i}, m_j^*()\}$ *egyensúly, ahol* $\theta^{*i}\theta_0^{*i}, c_0^{*i},$ *és* c_1^{*i} *megoldása a piaci szereplők (3.1) optimalizálási feladatának. Ha* $\forall i \in I$*-re*

$$\theta_0^i \geq e\left[\delta, \theta^i X, \omega_1^i\right]$$

teljesül, akkor a $\{\theta^{*i}, \theta_0^{*i}, c_0^{*i}, c_1^{*i}, m_j^*()\}$ *egyensúly marad, ha a piaci szereplők a (3.3) optimalizálási feladat szerint döntenek.*

A triviális állítás azt az esetet fogalmazza meg, amikor a szabályozói előírás nélkül meghatározott optimum teljesíti az előírt szabályozói korlátot, azaz a szabályozói előírás redundáns. Ekkor az eredeti egyensúly elérhető marad, az árjegyző optimális döntése nem változik, így a piaci likviditást megragadó marginális keresleti-kínálati görbék is megegyeznek a vizsgált két egyensúly esetén.

3.4. Állítás. *Legyen a* $\{\theta^{*i}, \theta_0^{*i}, c_0^{*i}, c_1^{*i}, m_j^*()\}$ *egyensúly, ahol* $\theta^{*i}, \theta_0^{*i}, c_0^{*i},$ *és* c_1^{*i} *megoldása a piaci szereplők a (3.1) optimalizálási feladatának, és tegyük fel, hogy* $\exists \bar{i} \in I$*, amelyre*

$$\theta_0^{*\bar{i}} < e\left[\delta, \theta^{*\bar{i}} X, \omega_1^{\bar{i}}\right].$$

Ekkor a $\{\theta^{**i}, \theta_0^{**i}, c_0^{**i}, c_1^{**i}, m_j^{**}()\}$ *egyensúly, ahol a piaci szereplők a (3.3) optimalizálási feladat szerint döntenek, nem egyezik meg a* $\{\theta^{*i}, \theta_0^{*i}, c_0^{*i}, c_1^{*i}, m_j^*()\}$ *egyensúllyal.*

Ha a szabályozói előírás nélkül meghatározott optimumban van olyan szereplő, aki megsérti a szabályozói előírásként bevezetett korlátot, akkor számára a szabályozói előírás bevezetése után már nem érhető el a korábban választott portfólió. A szabályozói előírás bevezetésének következtében megváltozik az egyensúly. A kérdés, hogy mi történik az egyensúllyal. A fejezet további részében, és a 4. fejezetben erre a kérdésre keressük a választ.

3.4. Speciális modellváltozatok

A piaci likviditást megragadó portfólióérték beemelése a piaci szereplők optimalizálási feladatába számos kihívást tartogat. A likvidációs érték 3.2 definíció szerinti számszerűsítése marginális keresleti-kínálati görbe alapján történik. Ugyanakkor a gyakorlatban az ajánlati könyv minden ajánlatmegütéskor változik, és egy árjegyző is változtat a különböző szinteken elérhető keresleti és kínálati oldali mennyiségeken a tranzakciók után. Ha a modellben szimultán dönt $|I|$ szereplő, és egyszerre több vásárol ugyanabból a $j \in J$ eszközből, akkor más áron adja el az árjegyző a j eszköz aggregált mennyiségét, mint amikor egy szereplő veszi meg ugyanazt az eszközmennyiséget. A modellezéshez ezért nélkülözhetetlen kiegészítő feltevés megadása. Több lehetőség közül választhatunk:

– $|I| = 2$ szereplő esetén, ha az árjegyző nem tart eszközöket, akkor egyensúlyban minden eszközt egyetlen szereplő vesz és egyetlen ad el, ami kiküszöböli a problémát. A fejezet végén bemutatott példában ezt a megoldást alkalmazzuk.

– A modell $|I| > 2$ piaci szereplő esetén marginális keresleti-kínálati görbék alkalmazása mellett akkor vizsgálható, ha biztosítható, hogy egyensúlyban minden eszközt egyetlen szereplő ad el és egyetlen szereplő vásárol. A feltétel exogén módon megadott sztochasztikus készletek és a kockázatos eszközök kifizetésének összehangolásával biztosítható. Másik megoldási lehetőség, ha Faias és Luque (2018) tanulmányt követve a piaci szereplők döntését exogén módon korlátozzuk, előre kikötve, melyik szereplő melyik eszközzel kereskedhet.

– $|I|$ szereplő esetén eltérő megoldásként alkalmazható vízszintes marginális keresleti-kínálati görbe. Ennek megfelelően a 4. fejezetben a piaci likvidást egyszerűen az eladási és a vételi ár közötti árréssel modellezzük, a piac mélységét nem vizsgáljuk.

– Jelentősen eltérő modellváltozat, ha egyetlen reprezentatív szereplőt feltételezünk. Egyetlen szereplő csak akkor kereskedhet egyensúlyban, ha feltesszük, hogy az árjegyző biztosítja a likviditást az ellenkező oldalon. Az árjegyző kockázatvállaló szereplő, döntési problémája megváltozik, a tőkepiacon a piactisztító feltétel módosul. A szabályozó célja az árjegyző kockázatvállalásának visszafogása is lehet.

3.4.1. Modell reprezentatív piaci szereplővel

Tegyük fel, hogy $|I| = 1$, azaz egy reprezentatív piaci szereplő döntési problémáját vizsgáljuk. Ekkor optimalizálási feladata

$$\max_{c_0, c_1, \theta, \theta_0} u(c_0, c_1) \tag{3.22}$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} c_0 &\leq \omega_0 + \ell(-\theta) - \theta_0 \\ c_1 &\leq \omega_1 + \theta X + \theta_0 1^S. \end{aligned}$$

Az egyensúly piactisztító feltételei megváltoznak, a tőkepiacon a nettó kereskedett mennyiség nem 0, az árjegyző biztosítja a likviditást, kínálja a keresett θ eszközmennyiséget. A fogyasztási piacon pedig a reprezentatív szereplő kötségvetési korlátja biztosítja az egyensúlyt.

Az árjegyző problémája jelentősen módosul, hiszen az első időszakban világállapottól függő kifizetést realizál. Várható bevételének maximalizálásakor döntési változója a marginális keresleti-kínálati görbe, nem allokál tőkét az időszakok között, és nem dönt fogyasztási pályáról sem. Ha az árjegyző kockázatsemleges, akkor optimalizálási problémája

$$\max_{m_j()} -\ell(-\theta) - E[\theta X], \tag{3.23}$$

ahol $E[\theta X]$ a jövőbeli bizonytalan kifizetés várható értéke. A szabályozói előírás a reprezentatív piaci szereplő és az árjegyző optimalizálási problémáját egyaránt módosíthatja.

3.4.2. Modell két piaci szereplő esetén

Tegyük fel, hogy $|I| = 2$, azaz két piaci szereplő kereskedik a tőkepiacon. Az $i \in I$ szereplő fogyasztási-portfólió-allokálási döntése változatlan

$$\max_{c_0^i, c_1^i, \theta^i, \theta_0^i} u^i(c_0^i, c_1^i) \tag{3.24}$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} c_0^i &\leq \omega_0^i + \ell(-\theta^i) - \theta_0^i \\ \theta_0^i &\geq e\left[\delta, \theta^i X, \omega_1^i\right] \\ c_1^i &\leq \omega_1^i + \theta^i X + \theta_0^i 1^S. \end{aligned}$$

A tőkepiacon a piactisztító feltétel

$$\theta^1 + \theta^2 = 0$$

alakban adható meg, így $-\theta_j^1 = \theta_j^2$ $\forall j \in J$ kockázatos eszközre. A fogyasztási piac egyensúlyban van, ha

$$\begin{aligned} c_0^1 + c_0^2 &\leq \omega_0^1 + \omega_0^2 - T(\theta^1, \theta^2) - \theta_0^1 - \theta_0^2 \\ c_1^1 + c_1^2 &\leq \omega_1^1 + \omega_1^2 + \theta_0^1 1^S + \theta_0^2 1^S \end{aligned}$$

feltételek teljesülnek, amit a költségvetési korlátok biztosítanak. Az árjegyző a tranzakciós költség-függvény értékét maximalizálja

$$\max_{m_1(), m_2()} T_1(\theta_1^1, \theta_1^2) + T_2(\theta_2^1, \theta_2^2) = -\ell(-\theta^1) - \ell(-\theta^2) \tag{3.25}$$

és elfogyasztja profitját a 0. időszakban.

A kétszereplős modell elsőrendű feltételei szabályozói előírás nélkül[27]

Vizsgáljuk a modell megoldását $|J| = 2$ eszköz, $S = 2$ világállapot, logaritmikus hasznossági függvény és exponenciális marginális keresleti-kínálati görbe feltevése mellett. Az árjegyző $m_1(\theta_1) = A_1 e^{-k_1\theta_1}$ és $m_2(\theta_2) = A_2 e^{-k_2\theta_2}$ alakú marginális keresleti-kínálati görbéket határoz meg, így az A_1, A_2, k_1 és k_2 paraméterekről dönt. A piactisztító feltétel következtében $-\theta_1^1 = \theta_1^2 := \theta_1$ és $\theta_2^1 = -\theta_2^2 := \theta_2$, így a keresett portfóliók

$$\theta^1 = (\theta_1^1, \theta_2^1) = (-\theta_1, \theta_2) \tag{3.26}$$

$$\theta^2 = (\theta_1^2, \theta_2^2) = (\theta_1, -\theta_2). \tag{3.27}$$

A piaci szereplők portfólióinak likvidációs értékét felhasználva[28] az árjegyző tranzakciós költség-függvénye

$$-\ell(-\theta^1) - \ell(-\theta^2) = \frac{A_1}{k_1}\left(e^{-k_1\theta_1} + e^{k_1\theta_1} - 2\right) + \frac{A_2}{k_2}\left(e^{k_2\theta_2} + e^{-k_2\theta_2} - 2\right).$$

A piaci szereplők fogyasztási és portfólió-allokálási döntését logaritmikus hasznossági függvény feltételezése mellett írjuk fel. Az optimalizálási problémák felírását és az elsőrendű feltételeket az F.I.1. Függelék mutatja be. Az árjegyző a marginális keresleti-kínálati görbék meghatározásakor a tranzakciós költség-függvény értékét maximalizálja, feltéve, hogy teljesülnek a piaci szereplők elsőrendű feltételei, amelyek

[27] Az alfejezet levezetésekkel bővített változata az F.I.1. Függelékben található.
[28] A levezetést az F.I.1. Függelék részletezi.

az első és a második szereplő esetében a következő formában adhatóak meg

$$\begin{aligned}
&\frac{A_1 e^{-k_1\theta_1}}{\omega_0^1 - \frac{A_1}{k_1}\left(e^{-k_1\theta_1}-1\right) + \frac{A_2}{k_2}\left(1-e^{k_2\theta_2}\right) - \theta_0^1} + \\
&+\frac{1}{2}\frac{-x_{11}}{\omega_{11}^1 - \theta_1 x_{11} + \theta_2 x_{21} + \theta_0^1} + \frac{1}{2}\frac{-x_{12}}{\omega_{12}^1 - \theta_1 x_{12} + \theta_2 x_{22} + \theta_0^1} &= 0\\
&\frac{-A_2 e^{k_2\theta_2}}{\omega_0^1 - \frac{A_1}{k_1}\left(e^{-k_1\theta_1}-1\right) + \frac{A_2}{k_2}\left(1-e^{k_2\theta_2}\right) - \theta_0^1} + \\
&+\frac{1}{2}\frac{x_{21}}{\omega_{11}^1 - \theta_1 x_{11} + \theta_2 x_{21} + \theta_0^1} + \frac{1}{2}\frac{x_{22}}{\omega_{12}^1 - \theta_1 x_{12} + \theta_2 x_{22} + \theta_0^1} &= 0\\
&\frac{-1}{\omega_0^1 - \frac{A_1}{k_1}\left(e^{-k_1\theta_1}-1\right) + \frac{A_2}{k_2}\left(1-e^{k_2\theta_2}\right) - \theta_0^1} + \\
&+\frac{1}{2}\frac{1}{\omega_{11}^1 - \theta_1 x_{11} + \theta_2 x_{21} + \theta_0^1} + \frac{1}{2}\frac{1}{\omega_{12}^1 - \theta_1 x_{12} + \theta_2 x_{22} + \theta_0^1} &= 0
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
&\frac{-A_1 e^{k_1\theta_1}}{\omega_0^2 + \frac{A_1}{k_1}\left(1-e^{k_1\theta_1}\right) - \frac{A_2}{k_2}\left(e^{-k_2\theta_2}-1\right) - \theta_0^2} + \\
&+\frac{1}{2}\frac{x_{11}}{\omega_{11}^2 + \theta_1 x_{11} - \theta_2 x_{21} + \theta_0^2} + \frac{1}{2}\frac{x_{12}}{\omega_{12}^2 + \theta_1 x_{12} - \theta_2 x_{22} + \theta_0^2} &= 0\\
&\frac{A_2 e^{-k_2\theta_2}}{\omega_0^2 + \frac{A_1}{k_1}\left(1-e^{k_1\theta_1}\right) - \frac{A_2}{k_2}\left(e^{-k_2\theta_2}-1\right) - \theta_0^2} + \\
&+\frac{1}{2}\frac{-x_{21}}{\omega_{11}^2 + \theta_1 x_{11} - \theta_2 x_{21} + \theta_0^2} + \frac{1}{2}\frac{-x_{22}}{\omega_{12}^2 + \theta_1 x_{12} - \theta_2 x_{22} + \theta_0^2} &= 0\\
&\frac{-1}{\omega_0^2 + \frac{A_1}{k_1}\left(1-e^{k_1\theta_1}\right) - \frac{A_2}{k_2}\left(e^{-k_2\theta_2}-1\right) - \theta_0^2} + \\
&+\frac{1}{2}\frac{1}{\omega_{11}^2 + \theta_1 x_{11} - \theta_2 x_{21} + \theta_0^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\omega_{12}^2 + \theta_1 x_{12} - \theta_2 x_{22} + \theta_0^2} &= 0.
\end{aligned}$$

A kétszereplős modell elsőrendű feltételek szabályozói előírás mellett[29]

A szabályozói előírás bevezetése egyenlőtlenségként megadott korlátozó feltétellel módosítja a piaci szereplők optimalizálási feladatát. Ha a szabályozó a portfóliók szintjén megadott Expected Shortfall függvényeként határozza meg a szabályozói előírást, akkor az első piaci szereplőt a

$$\theta_0^1 \geq \delta ES_k(\theta^1 X), \tag{3.28}$$

a másodikat a

$$\theta_0^2 \geq \delta ES_k(\theta^2 X) \tag{3.29}$$

[29] Az alfejezet levezetésekkel bővített változata az F.I.2. Függelékben található.

feltétel korlátozza. Két, azonos valószínűséggel bekövetkező világállapot feltételezése mellett $k = 1$, így a szabályozói előírás az alacsonyabb kifizetést biztosító világállapotban realizált portfólióérték δ-szorosa, azaz

$$\begin{aligned} \delta ES_1(\theta^1 X) &= -\delta \min\{-\theta_1 x_{11} + \theta_2 x_{21}; -\theta_1 x_{12} + \theta_2 x_{22}\} \\ \delta ES_1(\theta^2 X) &= -\delta \min\{+\theta_1 x_{11} - \theta_2 x_{21}; +\theta_1 x_{12} - \theta_2 x_{22}\}. \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy az első piaci szereplő az 1. világállapotban pozitív készletet realizál, míg a 2. világállapotban készlete 0. A második piaci szereplő pedig fordítva, az 1. világállapotban realizál 0 és a 2. világállapotban pozitív készletet. Feltevésünk pont azt a helyzetet modellezi, amikor a szereplők természetes kitettsége ellentétes irányú, így kereskedésen keresztül kölcsönösen csökkenteni tudják a jövőbeli kifizetés bizonytalanságát. A kockázatmegosztást tőkepiaci portfólió tartásával biztosítják. Feltehető, hogy $x_{11} > 0$ és $x_{22} > 0$, míg $x_{12} = 0$ és $x_{21} = 0$, ekkor az első szereplő az első eszközt adja el ($-\theta_1 < 0$) és a másodikat veszi ($\theta_2 > 0$), míg a második szereplő az első eszközt veszi ($\theta_1 > 0$) és a másodikat adja el ($-\theta_2 < 0$). A szabályozói előírás a következő alakban adható meg

$$\begin{aligned} \theta_0^1 &\geq \delta \theta_1 x_{11} \\ \theta_0^2 &\geq \delta \theta_2 x_{22}. \end{aligned}$$

A megfogalmazott speciális problémánk esetén az eszközök szintjén megadott szabályozói előírás $\delta_1 = \delta_2$ feltétel mellett ugyanezen korlátozó egyenlőtlenségekhez vezetne. Az egyszerűsítő feltevések mellett a piaci szereplők optimalizálási feladata a következő formában adható meg

$$\max_{\theta_1, \theta_2, \theta_0^1} \ln(\omega_0^1 + \ell(-\theta^1) - \theta_0^1) + \frac{1}{2} \ln(\omega_{11}^1 - \theta_1 x_{11} + \theta_0^1) + \frac{1}{2} \ln(\theta_2 x_{22} + \theta_0^1)$$

feltéve, hogy

$$\theta_0^1 \geq \delta \theta_1 x_{11},$$

és

$$\max_{\theta_1, \theta_2, \theta_0^2} \ln(\omega_0^2 + \ell(-\theta^2) - \theta_0^2) + \frac{1}{2} \ln(\theta_1 x_{11} + \theta_0^2) + \frac{1}{2} \ln(\omega_{12}^2 - \theta_2 x_{22} + \theta_0^2)$$

$$\theta_0^2 \geq \delta \theta_2 x_{22}.$$

Karush-Kuhn-Tucker optimalizálás után a következő elsőrendű feltételek adódnak:

$$\frac{A_1 e^{-k_1\theta_1}}{\omega_0^1 - \frac{A_1}{k_1}\left(e^{-k_1\theta_1}-1\right) + \frac{A_2}{k_2}\left(1-e^{k_2\theta_2}\right) - \theta_0^1} - \frac{\frac{1}{2}x_{11}}{\omega_{11}^1 - \theta_1 x_{11} + \theta_0^1} + \lambda_1\delta x_{11} = 0$$

$$\frac{-A_2 e^{k_2\theta_2}}{\omega_0^1 - \frac{A_1}{k_1}\left(e^{-k_1\theta_1}-1\right) + \frac{A_2}{k_2}\left(1-e^{k_2\theta_2}\right) - \theta_0^1} + \frac{\frac{1}{2}x_{22}}{\theta_2 x_{22} + \theta_0^1} = 0$$

$$\frac{-1}{\omega_0^1 - \frac{A_1}{k_1}\left(e^{-k_1\theta_1}-1\right) + \frac{A_2}{k_2}\left(1-e^{k_2\theta_2}\right) - \theta_0^1} + \frac{\frac{1}{2}}{\omega_{11}^1 - \theta_1 x_{11} + \theta_0^1} + \frac{\frac{1}{2}}{\theta_2 x_{22} + \theta_0^1} - \lambda_1 = 0$$

$$\theta_0^1 - \delta\theta_1 x_{11} \geq 0$$

$$\frac{-A_1 e^{k_1\theta_1}}{\omega_0^2 + \frac{A_1}{k_1}\left(1-e^{k_1\theta_1}\right) - \frac{A_2}{k_2}\left(e^{-k_2\theta_2}-1\right) - \theta_0^2} + \frac{\frac{1}{2}x_{11}}{\theta_1 x_{11} + \theta_0^2} = 0$$

$$\frac{A_2 e^{-k_2\theta_2}}{\omega_0^2 + \frac{A_1}{k_1}\left(1-e^{k_1\theta_1}\right) - \frac{A_2}{k_2}\left(e^{-k_2\theta_2}-1\right) - \theta_0^2} - \frac{\frac{1}{2}x_{22}}{\omega_{12}^2 - \theta_2 x_{22} + \theta_0^2} + \lambda_2\delta x_{22} = 0$$

$$\frac{-1}{\omega_0^2 + \frac{A_1}{k_1}\left(1-e^{k_1\theta_1}\right) - \frac{A_2}{k_2}\left(e^{-k_2\theta_2}-1\right) - \theta_0^2} + \frac{\frac{1}{2}}{\theta_1 x_{11} + \theta_0^2} + \frac{\frac{1}{2}}{\omega_{12}^2 - \theta_2 x_{22} + \theta_0^2} - \lambda_2 = 0$$

$$\theta_0^2 - \delta\theta_2 x_{22} \geq 0.$$

Szabályozói előírás bevezetésekor megváltozó egyensúly vizsgálata

A két egyensúly összevetésekor a 3.4 állítás jelöléseit alkalmazzuk. Amikor a szabályozói előírás redundáns, azaz a szabályozói előírás nélkül meghatározott optimum teljesíti az új korlátozó feltételt, akkor $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Visszakapjuk a szabályozói előírás nélküli modell elsőrendű feltételeit. Az árjegyző optimalizálási problémája változatlan marad, a szabályozói előírás bevezetésének hatására nem változnak a piaci likviditást megragadó marginális keresleti-kínálati görbék *(3.3 állítás)*. Ha $\lambda_1 \neq 0$ és $\lambda_2 \neq 0$, akkor a komplementaritás miatt

$$\begin{aligned} \theta_0^{**1} - \delta\theta_1^{**}x_{11} &= 0 \\ \theta_0^{**2} - \delta\theta_2^{**}x_{22} &= 0. \end{aligned}$$

A piaci szereplők az optimalizáláskor beleütköznek az új korlátba, amely kötni fog. A piaci szereplők optimális döntése megváltozik, így az árjegyző döntését korlátozó feltételek szintén módosulnak *(3.4 állítás)*.

Hasonlítsuk össze a szabályozói előírás miatt megváltozó új egyensúlyt a szabályozási korlát nélkül meghatározott egyensúllyal. A szabályozói előírás nélkül meghatározott egyensúlyi portfólióra

$$\begin{aligned} \theta_0^{*1} - \delta\theta_1^{*}x_{11} &< 0 \\ \theta_0^{*2} - \delta\theta_2^{*}x_{22} &< 0 \end{aligned}$$

egyenlőtlenségek teljesülnek. Az első eszközre vonatkozó korlát az új egyensúlyban úgy köthet, ha

- $\theta_0^{**1} > \theta_0^{*1}$
- $\theta_0^{**1} = \theta_0^{*1}$ és $\theta_1^{**} < \theta_1^*$
- $\theta_0^{**1} < \theta_0^{*1}$ és $\theta_1^{**} < \theta_1^*$.

Ha $\theta_1^{**} < \theta_1^*$, akkor az árjegyző kevésbé likvid MSDC-t határoz meg a tranzakciós költség maximalizálásakor. A meghatározott új MSDC mellett szabályozói előírás nélkül is pont a θ_1^{**} lenne optimális. Kérdés, hogy teljesülhet-e $\theta_0^{**1} > \theta_0^{*1}$ mellett $\theta_1^{**} = \theta_1^*$ vagy $\theta_1^{**} > \theta_1^*$ az első eszközből tartott egyensúlyi pozíciókra. Analóg módon vizsgálandó, hogy a második eszközre $\theta_0^{**2} > \theta_0^{*2}$ mellett lehet-e $\theta_2^{**} = \theta_2^*$ vagy $\theta_2^{**} > \theta_2^*$.

3.4.3. Speciális kétszereplős modell megoldása

A levezetést egyszerűsítő, ugyanakkor a szabályozói előírás és a piaci likviditás közötti kapcsolat vizsgálatára alkalmas az a speciális modell, amikor a piaci szereplők készlete ellentétes az 1. időszakban ($\omega_{12}^2 = \omega_{11}^1 := \omega_1$) és megegyezik a 0. időszakban ($\omega_0^2 = \omega_0^1 := \omega_0$). Ekkor a probléma szimmetrikus, optimumban a fogyasztásra $c_0^1 = c_0^2 := c_0$, $c_{11}^1 = c_{12}^2$ és $c_{11}^2 = c_{12}^1$, a keresett portfóliókra $\theta_0^1 = \theta_0^2 := \theta_0$ és $\theta_1 = \theta_2 := \theta$ teljesül. A két eszköz kifizetésére feltesszük továbbá, hogy $x_{12} = x_{21} = 0$ és $x_{11} = x_{22} := x$. Az árjegyző két ellentétes kifizetésű eszközt áraz be, és a keresett portfóliók ellentétesek (θ mennyiséget ad el és vesz mindkét eszközből), ezért az egyensúly létezésének feltétele, hogy mindkét eszközre ugyanazt az exponenciális marginális keresleti-kínálati görbét határozza meg ($A_1 = A_2 := A$ és $k_1 = k_2 := k$).[30]

Az első szereplő kockázatos eszköz portfóliója tőkepiaci egyensúly esetén $\theta^1 = (-\theta, \theta)$, a második szereplő portfóliója $\theta^2 = (\theta, -\theta)$, ezért a portfóliók likvidációs értéke egyensúlyban megegyezik

$$\ell(-\theta^1) = \ell(-\theta^2) = \int_0^\theta Ae^{-kx}\mathrm{d}x + \int_0^{-\theta} Ae^{-kx}\mathrm{d}x =$$
$$-A\left[\frac{1}{k}e^{-kx}\right]_0^\theta + A\left[\frac{1}{k}e^{-kx}\right]_{-\theta}^0 = -\frac{A}{k}\left(e^{-k\theta} - 1\right) + \frac{A}{k}\left(1 - e^{k\theta}\right)$$
$$= \frac{A}{k}\left(2 - e^{-k\theta} - e^{k\theta}\right).$$

[30] Az árjegyző két ellentétes kifizetésű eszközt áraz be, ezért természetesen adódó ötlet, hogy a két eszközt helyettesítsük egyetlen eszközzel, amelynek kifizetése az 1. világállapotban x, a másodikban $-x$. Ekkor az árjegyző a $[x, -x]$ kifizetést biztosító eszközt árazna be az exponenciális marginális keresleti-kínálati görbe A és k paraméterének meghatározásával. Ugyanakkor az árjegyzőn keresztül egymással kereskedő két szimmetrikus helyzetű szereplő portfóliójának likvidációs értéke különbözne, így nem lenne egyensúly. Árrés esetén egyetlen eszköz alkalmazása lehetséges lesz.

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a szabályozói előírás redundáns, azaz $\theta_0 - \delta\theta x \geq 0$ és $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ teljesül az egyensúlyi portfólióra, ekkor a piaci szereplők korábban meghatározott elsőrendű feltételei

$$\begin{aligned}
\frac{Ae^{-k\theta}}{\omega_0 + \frac{A}{k}\left(2 - e^{-k\theta} - e^{k\theta}\right) - \theta_0} - \frac{\frac{1}{2}x}{\omega_1 - \theta x + \theta_0} &= 0 \\
\frac{-Ae^{k\theta}}{\omega_0 + \frac{A}{k}\left(2 - e^{-k\theta} - e^{k\theta}\right) - \theta_0} + \frac{\frac{1}{2}x}{\theta x + \theta_0} &= 0 \\
\frac{-1}{\omega_0 + \frac{A}{k}\left(2 - e^{-k\theta} - e^{k\theta}\right) - \theta_0} + \frac{\frac{1}{2}}{\omega_1 - \theta x + \theta_0} + \frac{\frac{1}{2}}{\theta x + \theta_0} &= 0
\end{aligned}$$

alakban adhatóak meg. A θ kockázatos és a θ_0 kockázatmentes eszközpozíciók a piaci szereplők döntési változói. Az egyenletrendszerben 3 egyenlet határozza meg a két ismeretlent, ezért biztosítanunk kell, hogy az egyik egyenlet redundáns legyen. Így ebben a szimmetrikus modellben ahhoz, hogy legyen egyensúly a készletek, a két független (különböző világállapotban kifizetést biztosító) eszköz kifizetése és a marginális keresleti-kínálati görbék nem adhatóak meg tetszőlegesen. Feltehető, hogy az árjegyző úgy választ A és k paraméterpárokat, hogy az egyenletrendszernek legyen megoldása. Ekkor endogén módon megadható ω_0, ω_1 és x értéke és a marginális keresleti-kínálati görbét meghatározó egyik paraméter.

Ha $\lambda_1 = \lambda_2 := \lambda \neq 0$, akkor $\theta_0 = \delta\theta x$ és

$$\begin{aligned}
\frac{Ae^{-k\theta}}{\omega_0 + \frac{A}{k}\left(2 - e^{-k\theta} - e^{k\theta}\right) - \theta_0} - \frac{\frac{1}{2}x}{\omega_1 - \theta x + \theta_0} + \lambda\delta x &= 0 \\
\frac{-Ae^{k\theta}}{\omega_0 + \frac{A}{k}\left(2 - e^{-k\theta} - e^{k\theta}\right) - \theta_0} + \frac{\frac{1}{2}x}{\theta x + \theta_0} &= 0 \\
\frac{-1}{\omega_0 + \frac{A}{k}\left(2 - e^{-k\theta} - e^{k\theta}\right) - \theta_0} + \frac{\frac{1}{2}}{\omega_1 - \theta x + \theta_0} + \frac{\frac{1}{2}}{\theta x + \theta_0} - \lambda &= 0,
\end{aligned}$$

ismét túldeterminált egyenletrendszert kapunk.

Megoldásként feltehető, hogy a piaci szereplők az optimalizáláskor tudják, hogy $\theta^1 = (-\theta, \theta)$ és $\theta^2 = (\theta, -\theta)$ alakú portfóliókat választhatnak csak. Ekkor a két piaci szereplő feltételes optimalizálási feladata megegyezik, megadható mint

$$\max_{\theta,\theta_0} \ln\left(\omega_0 + \frac{A}{k}\left(2 - e^{-k\theta} - e^{k\theta}\right) - \theta_0\right) + \frac{1}{2}\ln(\omega_1 - \theta x + \theta_0) + \frac{1}{2}\ln(\theta x + \theta_0)$$

feltéve, hogy

$$\theta_0 \geq \delta\theta x.$$

Az elsőrendű feltételek

$$\begin{aligned}
\frac{Ae^{-k\theta} - Ae^{k\theta}}{\omega_0 + \frac{A}{k}\left(2 - e^{-k\theta} - e^{k\theta}\right) - \theta_0} - \frac{\frac{1}{2}x}{\omega_1 - \theta x + \theta_0} + \frac{\frac{1}{2}x}{\theta x + \theta_0} + \lambda\delta x &= 0 \quad (3.30)\\
\frac{-1}{\omega_0 + \frac{A}{k}\left(2 - e^{-k\theta} - e^{k\theta}\right) - \theta_0} + \frac{\frac{1}{2}}{\omega_1 - \theta x + \theta_0} + \frac{\frac{1}{2}}{\theta x + \theta_0} - \lambda &= 0 \quad (3.31)\\
\theta_0 - \delta\theta x &\geq 0 \quad (3.32)\\
\lambda[\theta_0 - \delta\theta x] &= 0 \quad (3.33)\\
\lambda &\geq 0. \quad (3.34)
\end{aligned}$$

3.2. Példa. A speciális modellhez hasonlóan a példában legyen két szereplő, két eszköz és $S = 2$ világállapot az 1. időszakban. A piaci szereplők a 0. időszakban $\omega_0 = 10$, az 1. időszakban $\omega_1^1 = (20{,}0)$ és $\omega_1^2 = (0{,}20)$ készletet realizálnak. A két kockázatos eszköz kifizetése $x_1 = (2, 0)$ és $x_2 = (0, 2)$. A szabályozói paraméter $\delta = 0{,}3$. Első lépésként tegyük fel, hogy az árjegyző endogén exponenciális $m(\theta) = Ae^{-k\theta}$ alakú marginális keresleti-kínálati görbét határoz meg.

A	θ	θ_0	c_0	$c_{12}^1 = c_{11}^2$	$c_{11}^1 = c_{12}^2$	$u^1 = u^2$	$\theta_0 - \delta\theta x$
2000	0,12	3,49	6,4	3,7	23,2	4,09	3,41
1000	0,24	3,32	6,5	3,8	22,8	4,10	3,18
500	0,47	3,00	6,7	3,9	22,1	4,13	2,72
100	1,86	1,23	7,7	5,0	17,5	4,28	0,12
50	2,37	1,42	7,7	6,2	16,7	4,36	0,00

3.1. táblázat.
Egyensúly $k = 0{,}003$ és különböző A paraméterű exponenciális MSDC-k mellett

Meghatározható, hogy különböző paraméterű exponenciális marginális keresleti-kínálati görbe mellett milyen egyensúlyi portfóliót választanak a piaci szereplők. Ha a k paraméter értékét rögzítjük, akkor A értékének növelése a tranzakciós költség emelkedését eredményezi (3.1. táblázat). Az első időszaki sztochasztikus készlet simítása magasabb tranzakciós költség mellett egyre kevésbé valósítható meg. A jövőbeli két világállapot fogyasztása közötti különbség növekszik, az elérhető hasznosság szintje csökken. Amikor a hasznosság szintje lecsökken a kereskedés nélkül elérhető hasznossági szintre, akkor a kereskedés meghiúsul. Ugyanakkor a kereskedésnek és ezzel a kockázatmegosztásnak a szabályozói előírás bevezetése is gátat szab. Kedvező tranzakciós környezet ($k = 0{,}003$ és $A \leq 50$) esetén a θ kereskedett kockázatos eszköz pozíció a szabályozói előírás miatt nem emelkedhet a kockázatmegosztás szempontjából optimális szintre. Az A paraméter rögzítése és a k paraméter növelése esetén (3.2. táblázat) hasonló tendencia figyelhető meg.

Az árjegyző az optimális marginális keresleti-kínálati görbe meghatározásakor a piaci szereplők adott MSDC melletti optimális döntését is figyelembe veszi. Ezért a

k	θ	θ_0	c_0	$c_{12}^1 = c_{11}^2$	$c_{11}^1 = c_{12}^2$	$u^1 = u^2$	$\theta_0 - \delta\theta x$
0,1	0,01	3,64	6,35	23,6	3,7	4,08	3,63
0,01	0,14	3,45	6,4	23,2	3,7	4,09	3,37
0,005	0,28	3,25	6,5	22,7	3,8	4,11	3,08
0,003	0,47	3,00	6,7	22,1	3,9	4,13	2,72
0,001	1,25	1,96	7,3	19,4	4,5	4,21	1,20
0,0001	3,07	1,84	7,7	15,7	8,0	4,45	0,00

3.2. táblázat.
Egyensúly $A = 500$ és különböző k paraméterű exponenciális MSDC-k mellett

tranzakciós költség maximalizálásakor feltesszük, hogy a piaci szereplők fogyasztási-portfólió allokálási döntésének elsőrendű feltételei teljesülnek. Szabályozási előírás bevezetése nélkül az árjegyző optimalizálási feladata

$$\max_{A,k} -\ell(-\theta^1) - \ell(-\theta^2) = \frac{2A}{k}\left(e^{-k\theta} + e^{k\theta} - 2\right),$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} \frac{Ae^{-k\theta} - Ae^{k\theta}}{\omega_0 + \frac{A}{k}\left(2 - e^{-k\theta} - e^{k\theta}\right) - \theta_0} - \frac{\frac{1}{2}x}{\omega_1 - \theta x + \theta_0} + \frac{\frac{1}{2}x}{\theta x + \theta_0} &= 0 \\ \frac{-1}{\omega_0 + \frac{A}{k}\left(2 - e^{-k\theta} - e^{k\theta}\right) - \theta_0} + \frac{\frac{1}{2}}{\omega_1 - \theta x + \theta_0} + \frac{\frac{1}{2}}{\theta x + \theta_0} &= 0. \end{aligned}$$

Míg szabályozói előírás bevezetésekor a 3.30 és 3.34 közötti elsőrendű feltételek mellett maximalizálja az árjegyző

$$-\ell(-\theta^1) - \ell(-\theta^2) = \frac{2A}{k}\left(e^{-k\theta} + e^{k\theta} - 2\right)$$

tranzakciós költség-függvényét. Vizsgáljuk, hogy megváltozik-e az árjegyző optimális marginális keresleti-kínálati görbéje a szabályozói előírás bevezetésekor. Ha egyensúlyban $\lambda = 0$, akkor $\theta_0 - \delta\theta x \geq 0$ teljesül, az árjegyző optimalizálási problémája nem változik. Ugyanakkor $\theta_0 - \delta\theta x = 0$ és $\lambda > 0$ is fennállhat egyensúlyban. Ekkor a szabályozói előírás nélkül meghatározott egyensúlyban a $\theta_0 - \delta\theta x < 0$ egyenlőtlenség teljesült. A korlát az új egyensúlyban úgy köthet, ha

- θ_0 emelkedik
- θ_0 változatlan és θ csökken
- θ_0 emelkedik és θ csökken.

Ha θ csökken, akkor az árjegyző kevésbé likvid MSDC-t határoz meg a tranzakciós költség maximalizálásakor. Kérdés, hogy lehet-e θ változatlan vagy magasabb az új egyensúlyban. A 3.31 elsőrendű feltételt átalakítva a különböző időszaki fogyasztások közötti

$$c_0 = \frac{2(\lambda + 1)}{\frac{1}{c_{11}^1} + \frac{1}{c_{12}^1}} \tag{3.35}$$

összefüggést kapjuk. Mivel a $\lambda > 0$, ezért a fogyasztás időszakok közötti simítása kevésbé valósítható meg, a 0. időszak relatív fogyasztása magasabb lesz. θ_0 emelkedése és θ változatlansága mellett 3.35 feltétel sérül. Mivel $(2 - e^{-k\theta} - e^{k\theta})$ likvidációs érték θ növelése esetén csökken, ezért θ_0 és θ növelése mellett sem teljesülhet a feltétel. θ mindenképpen csökken az új egyensúlyban, így a szabályozói előírás bevezetése a piaci likviditás visszaesését eredményezi.

3.3. Példa. Folytassuk a 3.2 példát. Határozzuk meg, hogy $k = 0{,}003$ rögzített paraméter mellett mekkora az árjegyző optimális A paramétere különböző δ paraméterű szabályozói előírás bevezetésekor (3.3 táblázat).

δ	A	θ	θ_0	c_0	$c_{12}^1 = c_{11}^2$	$c_{11}^1 = c_{12}^2$	$u^1 = u^2$	$T(\theta, -\theta)$	$\theta_0 - \delta\theta x$
0,6	140,7	1,4	1,7	10,0	18,8	4,6	4,54	1,75	0
0,5	126,0	1,6	1,6	10,3	18,4	4,7	4,56	1,86	0
0,3	95,0	1,9	1,2	11,1	17,3	5,0	4,63	2,12	0
0,2	78,2	2,2	0,9	11,4	16,5	5,3	4,66	2,26	0
0,1	59,3	2,6	0,5	11,9	15,3	5,7	4,71	2,37	0
0	53,1	2,7	0,4	12,0	14,9	5,9	4,72	2,38	

3.3. táblázat. Az árjegyző optimális döntése
$k = 0{,}003$ paraméterű exponenciális MSDC és különböző δ paraméterek mellett

Ha nem a k, hanem az A paramétert rögzítjük, akkor az árjegyző minden δ mellett az optimális k értékét határozza meg. Adott δ paraméter mellett az árjegyző különböző alakú optimális marginális keresleti-kínálati görbéket meghatározva ugyanazt a tranzakciós költség szintet éri el, és a piaci szereplők optimális portfóliója sem változik (3.4 táblázat).

δ	k	θ	θ_0	c_0	$c_{12}^1 = c_{11}^2$	$c_{11}^1 = c_{12}^2$	$u^1 = u^2$	$T(\theta, -\theta)$	$\theta_0 - \delta\theta x$
0,6	0,0042	1,4	1,7	10,0	18,8	4,6	4,54	1,75	0
0,5	0,0038	1,6	1,6	10,3	18,4	4,7	4,56	1,86	0
0,3	0,0029	1,9	1,2	11,1	17,3	5,0	4,63	2,12	0
0,2	0,0023	2,2	0,9	11,4	16,5	5,3	4,66	2,26	0
0,1	0,0018	2,6	0,5	11,9	15,3	5,7	4,71	2,37	0
0	0,0016	2,7	0,4	12,0	14,9	5,9	4,72	2,38	

3.4. táblázat. Az árjegyző optimális döntése
$A = 100$ paraméterű exponenciális MSDC és különböző δ paraméterek mellett

A példában szabályozói előírás bevezetése nélkül az árjegyző optimális k (illetve A) paramétere alacsonyabb, a meghatározott MSDC laposabb, a kockázatos eszköz likvidebb. Likvidebb piacon a piaci szereplők optimumban magasabb θ kockázatos eszközmennyiséget keresnek/kínálnak, a kockázatmegosztás részleges megvalósulása miatt hasznosságuk emelkedik. Az árjegyzőt a likvidebb piacon kereskedett magasabb mennyiség kompenzálja, így a beszedett tranzakciós költség magasabb, mint kevésbé likvid piacon lenne.

Szabályozási előírás bevezetésekor az árjegyző számára optimális MSDC mellett az új korlát minden vizsgált δ szabályozói paraméter mellett kötni fog (a 3.3 és a 3.4 táblázatban $\theta_0 - \delta\theta = 0$). Az egyensúly a szabályozói előírás miatt megváltozik. A piaci szereplők beleütköznek az optimális portfólió meghatározásakor a szabályozói korlátba, a korábban optimális portfólió már nem érhető el a szabályozói előírás nélkül optimális MSDC mellett. A piaci szereplők a szabályozás miatt alacsonyabb θ kockázatos eszköz mennyiséget cserélnek el, ezért az árjegyző optimális marginális keresleti-kínálati görbéje kevésbé likvid.

Ha a táblázatban szereplő 0,1-nél kisebb, például $\delta = 0{,}05$ a szabályozói paraméter értéke, akkor a szabályozói előírás teljesül az előírás nélkül meghatározott optimumban is ($\theta_0 - \delta\theta = 0{,}12$). Az egyensúly, és így a piac likviditása nem változik.

3.5. Összefoglalás

Célunk egy olyan modellkeret bevezetése, amelyben vizsgálható a szabályozás és a piaci likviditás kapcsolata. A fejezet első felében modellezési lehetőségeket és modellváltozatokat vázoltunk, számos kutatási irányt nyitva hagyva. Majd egy kétszereplős speciális modellt oldottunk meg, és példákon keresztül illusztráltuk az eredményt.

Az általános egyensúlyelméleti modell váza Le Roy és Werner (2001) könyvre épül, ugyanakkor a kutatási kérdés elemzéséhez fontos módosításokat eszközöltünk. A piaci szereplők portfólió-allokálási döntésekor a piac likviditását is figyelembe vesszük, hiszen a portfólió megvásárlása, illetve eladása a marginális keresleti-kínálati görbe alapján meghatározható likvidációs értéken történik.

A szabályozói előírás bevezetésének piaci likviditásra gyakorolt hatása endogén marginális keresleti-kínálati görbe segítségével vizsgálható. Ennek megfelelően a modellben árjegyző párosítja az ellenoldali ajánlatokat, és maximalizálja a beszedett tranzakciós költséget a marginális keresleti-kínálati görbe meghatározásával. Az árjegyző exogén módon megadott alakú (lineáris, exponenciális, lépcsős) marginális keresleti-kínálati görbe paramétereiről dönt. Mivel a piaci szereplők szimultán optimalizálnak, csak kiegészítő feltevéssel biztosítható, hogy egyensúlyban minden eszközt egyetlen szereplő keressen, illetve kínáljon. Jelen fejezetben kétszereplős modellt vizsgálunk, míg az 4 fejezet árrés alkalmazása mellett vizsgálja a megoldást.

A kockázatmentes eszköz minimális szintjét meghatározó szabályozói előírás bevezetésének előfeltételeként a kockázatmentes eszközt kiemeltük a kockázatos eszközök közül. A tőkepiaci egyensúly feltétele nem vonatkozik rá, a piaci szereplők egymástól függetlenül tarthatnak készpénzt, vagy vehetnek fel hitelt (0% kamatláb mellett). A szabályozói előírás az eszközök, a portfóliók vagy a természetes kitettséggel korrigált portfóliók szintjén definiált Expected Shortfall függvényeként egyaránt megadható. A különböző szabályozói előírások eltérő egyensúlyi portfóliókat eredményeznek. A kockázatvállalás visszafogásának alternatív eszközeként fedezettartási kötelezettség bevezetésének lehetőségét is bemutatjuk.

A fejezet második felében a kétszereplős modell eredményeit vezetjük le és vizsgáljuk. A piaci szereplők kereskedésének célja a jövőbeli kifizetés bizonytalanságából fakadó kockázat mérséklése, a fogyasztás simítása és hasznosságuk maximalizálása. A modellben portfólió szintjén definiált várható veszteség (*Expected Shortfall*) függvényeként vezetjük be a szabályozói előírást. A δ paraméter határozza meg, hogy a tőkekövetelmény az ES mekkora hányada legyen. Egyértelmű, hogy mivel szabályozás esetén egy új korláttal bővül a piaci szereplők feltételes szélsőérték feladata, az optimalizáló szereplők helyzete nem javulhat. Amíg a szabályozói előírás redundáns, az egyensúly nem változik. Ha a szabályozói előírás miatt új egyensúly alakul ki, akkor a kereskedés és a kockázatmegosztás visszaesik, a piaci szereplők hasznossága alacsonyabb.

A szabályozói előírás bevezetése az optimalizáló árjegyző problémáját is megváltoztatja. Ha adott szabályozói paraméter mellett a szabályozói előírás köt, akkor az árjegyző egészen addig emeli a tranzakciós költséget, amíg a szabályozói előírás redundáns nem lesz. Exponenciális marginális keresleti-kínálati görbe esetén az árjegyző növeli a módosítható paramétert, a piaci likviditás csökken. A δ szabályozói paraméter emelkedése mellett az árjegyző egyre kevésbé likvid MSDC-t határoz meg. Minél szigorúbb tehát a bevezetett szabályozói előrás, annál jobban csökken a piacon a likviditás. A modell felhívja a figyelmet arra, hogy a megfelelő szabályozási mechanizmus kiválasztásakor a szabályozás likviditásra gyakorolt hatását is célszerű figyelembe venni.

Jelen értekezés keretében nem vizsgáljuk az egyensúly létezésének és egyértelműségének feltételeit. A fejezetben a legtöbb modellváltozatot csak felvázoljuk, részletes elemzésük jövőbeli kutatás tárgyát képezheti. Az általános modell szintjén kulcsfeladat a 3.4 állításban definiált két egyensúly összevetése piaci likviditás szempontjából. Érdekes kérdés, hogy mikor érdemes eszközök és mikor portfólió szintjén szabályozni. Elemezhető továbbá, hogy ha eszközök szintjén szabályozunk és eltérő szabályozói paramétert alkalmazunk, hogyan befolyásolható az eszközök piacának likviditása és kereslete. A természetes kitettség figyelembevétele elméleti jelentősége miatt releváns. Emellett összevethető az Expected Shortfall alapú szabályozás a fedezettartás bevezetésének lehetőségével.

4. fejezet

Az árrés és a szabályozás kapcsolata általános egyensúlyelméleti modellben

A 3. fejezetben vázolt általános modellkeret speciális eseteként a piaci likviditást az árrés, azaz a vételi és az eladási árak közötti különbség nagyságával mérjük. Feltesszük tehát, hogy a legjobb árakon végtelen az elérhető eszközök mennyisége, azaz a marginális keresleti-kínálati görbe az eladási és a vételi oldalon is vízszintes. Megmutatjuk, hogy a szabályozási előírás bevezetése következtében az árjegyző optimális árrése emelkedik, a piaci likviditás csökken. A modell megoldását és eredményeit N szereplő és két szereplő mellett egyaránt vizsgáljuk. A fejezet a Hevér (2020) tanulmányban közölt eredményekre épül.

4.1. Bevezetés

A fejezet a tranzakciós költségként beszedett árrés és a szabályozói előírás következtében megváltozó optimális döntéseket elemzi. Az alkalmazott modell a 3. fejezetben bevezetett általános egyensúlyelméleti modellkeret speciális esete. Az egyszerűsített modellben N szereplő esetén is vizsgáljuk a szabályozói előírás bevezetése miatt emelkedő egyensúlyi árrést, két szereplő mellett pedig analitikus levezetéssel erősítjük meg a 3. fejezet eredményeit.

A probléma változatlan: a piaci szereplők világállapottól függő jövőbeli kifizetést realizálnak, amelyet tőkepiaci pozícióval fedeznek. A vállalt kockázatos és kockázatmentes eszközpozíció lehetővé teszi a fogyasztási szint időszakok és világállapotok közötti simítását és ezzel az elérhető hasznosság maximalizálását. Az analitikus levezetés során lépésenként vezetjük be az árrést, majd a szabályozói előírást.

Az elméleti referenciapont a közvetlen kereskedés ($t_1 = t_2 = 0$) esete, amikor tökéletes kockázatmegosztás valósul meg a piac szereplők között. Ugyanakkor a gyakorlatban a piaci súrlódások, a cserepartner megtalálása és a kapcsolatteremtés költséggel jár, az aszimmetrikus információ (az egymás előtt ismeretlen természetes kitettségek) ellehetetlenítik a közvetlen kereskedést. A pénzügyi közvetítés modellezéséhez feltesszük, hogy a kereskedés kizárólag az árrést meghatározó árjegyzőn keresztül történhet. Az árrés emelkedésének hatására a piaci szereplők kereskedett portfóliójának jövőbeli kifizetése fokozatosan csökken, míg egy szint fölött a szereplők már nem kereskednek egymással, így a diverzifikáció meghiúsul. Ha az árrés szintjéről profitmaximalizáló árjegyző dönt, akkor egyensúlyban a piaci szereplők kereskednek egymással, a jövőbeli világállapotokban realizált kifizetések közötti különbség csökken, ugyanakkor tökéletes kockázatmegosztás nem valósul meg.

A gyakorlatban alkalmazott szabályozói lépések célja sok esetben a kockázatvállalás visszafogása, ezért a modellben is a várható veszteség függvényében fogalmazzuk meg a szabályozói előírást. Ismét két esetet különböztetünk meg: ha a szabályozói előírásként bevezetett korlátot teljesíti a szabályozói előírás bevezetése nélkül meghatározott egyensúlyi portfólió, akkor a szereplők optimális döntése változatlan. A 3. fejezet eredményeit kiegészítve vizsgáljuk, hogy mekkora δ szabályozói paraméter mellett marad változatlan egyensúly. Az árrés növelésekor szigorúbb (magasabb δ melletti) szabályozói előírás is rendundáns marad. Ha a piaci szereplők optimális döntését megváltoztatja a szabályozói előírás bevezetése, akkor az árjegyző optimalizálási problémája is megváltozik. Az egyensúlyi árrés emelkedik, a piaci likviditás csökken.

A fejezet az árrést alkalmazó irodalom rövid összefoglalásával kezdődik, majd az új jelölések bevezetése és a leegyszerűsödött általános egyensúlyelméleti keret bemutatása következik. A 4.3 szakaszban a modell segítségével feltárható összefüggéseket általánosan, N szereplő esetére fogalmazzuk meg. Végül a 4.4 alfejezetben a kétszereplős modell analitikus megoldása és az eredmények példákon keresztül történő illusztrálása kap helyet.

4.2. Árrés az irodalomban

Az árrés (*bid-ask spread*) – vételi és eladási ár közötti különbség, ajánlatvezérelt piacon a legjobb eladási és legjobb vételi limitáras ajánlathoz tartozó árszint közötti különbség – magyarázata és modellezése a mikrostruktúra irodalom központi kérdése.

A korai elméleti modellekben és empirikus vizsgálatokban az árrés az ajánlatfeldolgozás (*order processing costs*), a készlettartás (*inventory holding costs*), vagy az informált kereskedés miatti kontraszelekció (*adverse information costs*) költségét fedezi (Stoll, 1989). Cohen és szerzőtársai (1986) alapján az árrés a nemteljesülés lehetősége miatt kompenzálja a likviditást biztosító piaci szereplőt. Demsetz (1968)[31], Amihud és Mendelson (1980)[32] és Stoll (1978) az árjegyzők készlettartásának költségéből indul ki. Ezzel szemben Copeland és Galai (1983)[33] és Glosten és Milgrom (1985)[34] a kontraszelekció szerepét vizsgálja.

Felismerve a különböző megközelítések jelentőségét Stoll (1989), Glosten és Harris (1988), Lin, Sanger és Booth (1995), Huang és Stoll (1997), Glosten (1987) és Affleck-Graves, Hedge és Miller (1994) az árrést komponensekre bontó modelleket épít és becsül. Stoll (1989) *NASDAQ/NMS* részvények adatain határozza meg a három – ajánlat-feldolgozás, készlettartás és kontraszelekció miatt jelentkező – komponens relatív fontosságát. Glosten és Harris (1988) a New Yorki tőzsde (*NYSE*) részvénytranzakciói alapján az 1981 és 1983 közötti időszak adatain az árrés két komponensének – aszimmetrikus információ hatását megragadó kontraszelekció miatti komponens és a készlettartás, az árjegyző monopolista ereje és a végrehajtás költsége miatt jelentkező komponens – szignifikanciáját teszteli, eredménye a kontraszelekció létezését erősíti meg. Huang és Stoll (1997) empirikus eredménye alapján jelentős az ajánlatfeldolgozás költsége miatti komponens és kisebb, de szignifikáns a kontraszelekció és a készlettartás költségét megragadó komponens. Huang és Stoll (1997) és Lin, Sanger és Booth (1995) az árrés komponensei és a kereskedett mennyiség közötti kapcsolat irányát vizsgálják. Affleck-Graves, Hedge és Miller (1994) pedig *NYSE/AMEX* és *NASDAQ/NMS* kereskedési rendszerek részvényeire becsült komponensek nagyságát veti össze.

Számos empirikus tanulmány használja az árrést a piac likviditásának megragadására. Amihud és Mendelson (1986) empirikus elemzése a legjobb vételi és eladási árak különbsége, azaz az árrés és a havi hozamok kapcsolatát vizsgálja. Amihud és Mendelson (1991) diszkontkincstárjegyekre és állampapírokra alkalmazza az Amihud és Mendelson (1986) tanulmányban bemutatott elemzési keretet. Amihud, Mendelson és Wood (1990) a tőzsdék összeomlása és a likviditási válság közötti kapcsolatot vizsgálja az 1987-es összeomlás példáján keresztül. A cikk leginkább ismeretterjesztő esettanulmánynak tekinthető, melyet a szerzők a likviditás visszaesése és az árrés közötti kapcsolatot feltáró empirikus vizsgálattal egészítenek ki. Amihud, Mendelson és Lauterbach (1997) már az idődimenziót is beemeli, hiszen a tanulmány átalakuló kereskedési struktúra (a Tel Aviv-i Tőzsde mechanizmusának változása) következtében

[31] *"The ask-bid spread is the markup that is paid for predictable immediacy of exchange in organized markets; in other markets, it is the inventory markup of retailer or wholesaler."* (Demsetz, 1968, 35–36. o.)

[32] *"The crux of the analysis is the dependence of the bid-ask prices on the market-maker's stock inventory position."*(Amihud és Mendelson, 1980, 31. o.)

[33] *"This paper models the dealer's bid-ask spread as a tradeoff between expected losses to informed traders and expected gains from liquidity traders."*(Copeland és Galai, 1983, 1458. o.)

[34] *"The presence of traders with superior information leads to a positive bid-ask spread..."* (Glosten és Milgrom, 1985, 71. o.)

megugró likviditás hatását számszerűsíti.

Copeland és Galai (1983) elméleti modelljében az árjegyző profitját az árrés meghatározása mellett maximalizálja, eredménye, hogy az optimális árrés az árszint és a variancia pozitív, míg a piaci aktivitás, a mélység és a folytonosság negatív függvénye. Az Amihud és Mendelson (1980) tanulmányban monopolista árjegyző dönt az árakról és az árrésről. Cohen és szerzőtársai (1981) megmutatja, hogy a tranzakciós költség miatt figyelhető meg az eszközök piacán egyensúlyban árrés. Napjainkban Yang, Ge és Luo (2020) már nagyfrekvenciás kereskedéskor likviditást bitosító szereplők optimális árrést meghatározó stratégiáját modellezi és veti össze az *NASDAQ-OMX* piacról származó adatokkal. Castellano és Cerqueti (2011) elméleti modellben elemzi az árrés szabályozásának szükségességét, ha az árjegyző önérdeke gátolja az árak stabilitását és visszafogja a piaci likviditás szintjét.

4.3. Általános egyensúlyelméleti modell árrés mellett

A 3. fejezetben bevezetett modellben a likviditást marginális keresleti-kínálati görbék alkalmazásán keresztül ragadtuk meg. Jelen 4. fejezet az árrés és a szabályozás közötti kapcsolatot vizsgálja. Továbbra is a 3. fejezet jelölésrendszerét alkalmazzuk, de a megoldás megkönnyítése érdekében kiegészítő jelöléseket vezetünk be: definiáljuk a vételi és az eladási árak vektorát, az árrések vektorát, illetve a rövid és a hosszú pozíciót.

Jelölje a $j \in J$ eszközre vonatkozó árrést $t_j = a_j - b_j$, ahol $a_j \in \mathbb{R}$ az eladási (*ask*), $b_j \in \mathbb{R}$ pedig a vételi (*bid*) ár. A $b \in \mathbb{R}^J$ árvektor (oszlopvektor) a vételi (*bid*) árakat jelöli, azaz megmutatja $\forall j \in J$-re azt a b_j árat, amelyen a j eszköz likvidálható. Az $a \in \mathbb{R}^J$ oszlopvektor az eladási (*ask*) árakat tartalmazza, $\forall j \in J$-re azt az a_j árat, amiért meg tudjuk venni a j-edik eszköz egy egységét. Jelölje $t \in \mathbb{R}^J$ a t_j árrések oszlopvektorát. Ha a piacon nincs arbitrázs[35], akkor $a_j \geq b_j$ $\forall j \in J$ esetén, azaz $t_j \geq 0$. Le Roy és Werner (2001) alapján a szereplők két portfóliót választanak, $\theta_b^i \geq 0$-t adják el a vételi árakon, és $\theta_a^i \geq 0$-t veszik az eladási árakon, azaz a $\theta^i = \theta_a^i - \theta_b^i$ pozíciót tartanak.

4.3.1. A piaci szereplők fogyasztási és portfólió-allokálási döntése

A piaci szereplők fogyasztási és portfólió-allokálási döntését első lépésként szabályozó beavatkozása nélkül, majd a várható veszteség függvényében megadott

[35]Nincs arbitrázs, ha $\nexists$ olyan $\theta_a \geq 0$ és $\theta_b \geq 0$ portfóliók, amelyre $\theta_a^i a - \theta_b^i b < 0$ és $(\theta_a^i - \theta_b^i)X \geq 0$.

szabályozói előírás mellett mutatjuk be. Az i-edik befektető optimális fogyasztási és portfólió-allokálási döntése a következő optimalizálási feladat megoldásaként adható meg

$$\max_{c_0^i, c_1^i, \theta_a^i, \theta_b^i, \theta_0^i} u^i(c_0^i, c_1^i) \tag{4.1}$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} c_0^i &\leq \omega_0^i - \theta_a^i a + \theta_b^i b - \theta_0^i \\ c_1^i &\leq \omega_1^i + (\theta_a^i - \theta_b^i) X + \theta_0^i 1^S \\ \theta_a^i &\geq 0 \\ \theta_b^i &\geq 0. \end{aligned}$$

A költségvetési korlátok mellett megjelenő technikai, nemnegativitási feltételek az eladási és vételi oldalon felvett pozíciók eltérő árazásának következményei. Szabályozói előírás bevezetésekor plusz feltétellel módosul az optimalizálási probléma

$$\max_{c_0^i, c_1^i, \theta_a^i, \theta_b^i, \theta_0^i} u^i(c_0^i, c_1^i) \tag{4.2}$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} c_0^i &\leq \omega_0^i - \theta_a^i a + \theta_b^i b - \theta_0^i \\ \theta_0^i &\geq e\left[\delta_j, \theta^i X\right] \\ c_1^i &\leq \omega_1^i + (\theta_a^i - \theta_b^i) X + \theta_0^i 1^S \\ \theta_a^i &\geq 0 \\ \theta_b^i &\geq 0. \end{aligned}$$

4.3.2. Az árjegyző döntési problémája

A modellben továbbra is árjegyző párosítja az ellenoldali ajánlatokat és tranzakciós monopolistaként határozza meg a számára optimális endogén árrést. A szereplők kizárólag az árjegyzőn keresztül tudnak kereskedni, aki nem tart eszközöket, a befogadott vételi és eladási oldali mennyiség minden eszköz esetén megegyezik[36].

4.1. Definíció. A $j \in J$ eszközre a $t_j \in \mathbb{R}$ mellett a $T_j : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}$ tranzakciós költség-függvény megadható

$$T_j(\theta_j^1, \cdots, \theta_j^I) = t_j \sum_{i \in I} \theta_{aj}^i = t_j \sum_{i \in I} \theta_{bj}^i \tag{4.3}$$

alakban.

[36]Már ezzel a feltevéssel biztosítjuk, hogy a tőkepiac mindig egyensúlyban lesz.

Mivel minden tranzakciókor egyszer fizetik ki a piaci szereplők az árrést, ezért a vételi (θ_b^i) és az eladási oldalon (θ_a^i) felvett pozíciók aggregálásával egyaránt meghatározható a beszedett tranzakciós költség összege. Az árjegyző a tranzakciós költségként beszedett profitját maximalizálja, így optimalizálási feladatában

$$\max_{t_j\ \forall j \in J} \sum_{j \in J} T_j(\theta_j^1, \cdots, \theta_j^I) = \sum_{j \in J} t_j \sum_{i \in I} \theta_{aj}^i \tag{4.4}$$

feltéve, hogy a befektető piaci szereplők hasznosságot maximalizálva döntenek a θ_a^i és θ_b^i portfóliókról.

4.1. Lemma. *Ha az árjegyző a (4.4) optimalizálási feladat szerint optimalizál, akkor t_j $\forall j \in J$ eszközre nemnegatív.*

Bizonyítás. A bizonyítást az F.II. Függelékben mutatjuk be. □

4.3.3. A piactisztító feltételek egyensúlyban

Egy egyensúly megadható a piaci szereplők optimális kockázatos eszköz portfóliói, az optimális készpénzmennyiség, az optimális fogyasztási szintek és az optimális árrések halmazaként $\{\theta_{aj}^{*i}, \theta_{bj}^{*i}, \theta_0^{*i}, c_0^{*i}, c_1^{*i}, t_j^*\}$ alakban, ahol $\theta_{aj}^{*i}, \theta_{bj}^{*i}, \theta_0^{*i}, c_0^{*i}$, és c_1^{*i} megoldása a piaci szereplők optimalizálási feladatának, míg t_j^* az árjegyző optimalizálási problémájának megoldása. A piactisztító feltétel a tőkepiacon és a fogyasztási piacon a 0. és az 1. időszakban a következő:

$$\sum_{i \in I} \theta^i = \sum_{i \in I} (\theta_a^i - \theta_b^i) = 0 \tag{4.5}$$

$$\sum_{i \in I} c_0^i \leq \sum_{i \in I} \omega_0^i - \sum_{j \in J} t_j \sum_{i \in I} \theta_{aj}^i - \sum_{i \in I} \theta_0^i \tag{4.6}$$

$$\sum_{i \in I} c_1^i \leq \sum_{i \in I} \omega_1^i + \sum_{i \in I} \theta_0^i 1^S. \tag{4.7}$$

4.1. Állítás. *Egyensúlyban, ha a tőkepiac egyensúlyban van,*

$$\sum_{i \in I} \theta^i = \sum_{i \in I} (\theta_a^i - \theta_b^i) = 0,$$

akkor a fogyasztási piac is egyensúlyban lesz,

$$\sum_{i \in I} c_0^i \leq \sum_{i \in I} \omega_0^i - \sum_{j \in J} t_j \sum_{i \in I} \theta_{aj}^i - \sum_{i \in I} \theta_0^i$$

$$\sum_{i \in I} c_1^i \leq \sum_{i \in I} \omega_1^i + \sum_{i \in I} \theta_0^i 1^S.$$

Bizonyítás. A bizonyítást az F.II. Függelékben mutatjuk be. □

4.2. Állítás. *Tegyük fel, hogy az i-edik szereplő preferenciáit leíró* $u^i : \mathbb{R}^{S+1} \to \mathbb{R}$ *hasznossági függvény folytonos és szigorúan monoton. Ekkor a költségvetési korlátok egyenlőséggel teljesülnek.*

Bizonyítás. A bizonyítást az F.II. Függelékben mutatjuk be. □

4.3. Állítás. *Tegyük fel, hogy az i-edik szereplő preferenciáit leíró* $u^i : \mathbb{R}^{S+1} \to \mathbb{R}$ *hasznossági függvény folytonos és szigorúan monoton. Ekkor egyensúlyban* $\forall j \in J$ *eszközre és* $\forall i \in I$ *piaci szereplő esetén* $\exists$ *olyan optimális portfólió, amelyre*

$$\theta^i_{aj}\theta^i_{bj} = 0. \tag{4.8}$$

Bizonyítás. A bizonyítást az F.II. Függelékben mutatjuk be. □

4.3.4. Egyensúly szabályozói előírás bevezetésével és anélkül

A 3. fejezethez hasonlóan árrés alkalmazása esetén is kulcskérdés a szabályozói előírás bevezetése előtt és után kialakuló egyensúly összehasonlítása.

4.4. Állítás. *Legyen a* $\{\theta^{*i}_{aj}, \theta^{*i}_{bj}, \theta^{*i}_0, c^{*i}_0, c^{*i}_1, t^*_j\}$ *egyensúly, ahol* $\theta^{*i}_{aj}, \theta^{*i}_{bj}, \theta^{*i}_0, c^{*i}_0$, *és* c^{*i}_1 *megoldása a piaci szereplők (5.2) optimalizálási feladatának. Ha* $\forall i \in I$*-re*

$$\theta^{*i}_0 \geq e\left[\delta_j, \theta^{*i}X\right].$$

teljesül, akkor a $\{\theta^{*i}_{aj}, \theta^{*i}_{bj}, \theta^{*i}_0, c^{*i}_0, c^{*i}_1, t^*_j\}$ *egyensúly marad, ha a piaci szereplők a (4.2) optimalizálási feladat szerint döntenek.*

A triviális állítás azt az esetet fogalmazza meg, amikor a szabályozói előírás nélkül meghatározott egyensúly teljesíti az előírt szabályozói korlátot. Szabályozáskor az eredeti egyensúly elérhető marad, az árjegyző optimális döntése nem változik, így a piaci likviditást megragadó endogén árrés is megegyezik a vizsgált két egyensúly esetében.

4.5. Állítás. *Legyen a* $\{\theta^{*i}_{aj}, \theta^{*i}_{bj}, \theta^{*i}_0, c^{*i}_0, c^{*i}_1, t^*_j\}$ *egyensúly, ahol* $\theta^{*i}_{aj}, \theta^{*i}_{bj}, \theta^{*i}_0, c^{*i}_0$, *és* c^{*i}_1 *megoldása a piaci szereplők (5.2) optimalizálási feladatának, és tegyük fel, hogy* $\exists \bar{i} \in I$, *amelyre*

$$\theta^{*\bar{i}}_0 < e\left[\delta_j, \theta^{*\bar{i}}X\right].$$

Ekkor a $\{\theta^{**i}_{aj}, \theta^{**i}_{bj}, \theta^{**i}_0, c^{**i}_0, c^{**i}_1, t^{**}_j\}$ *egyensúly, ahol a piaci szereplők a (4.2) optimalizálási feladat szerint döntenek, nem egyezik meg a* $\{\theta^{*i}_{aj}, \theta^{*i}_{bj}, \theta^{*i}_0, c^{*i}_0, c^{*i}_1, t^*_j\}$ *egyensúllyal.*

Ha a szabályozói előírás nélkül meghatározott optimumban van olyan szereplő, aki megsérti a szabályozói előírásként bevezetett korlátot, akkor számára a szabályozói előírás bevezetése után már nem érhető el a korábban választott portfólió.

A szabályozói előírás bevezetésének következtében megváltozik az egyensúly és az optimális árrés.

Első lépésként vizsgáljuk a piaci szereplők megváltozó optimális döntését exogén árrés mellett, azaz tegyük fel, hogy az árjegyző nem optimalizál az árrés meghatározásához, és a döntését a szabályozói előírás bevezetése után sem változtatja meg.

4.6. Állítás. *Tegyük fel, hogy a $t_j = \hat{t}_j$ $\forall j \in J$-re exogén módon adott, és az i-edik szereplő preferenciáit leíró $u^i : \mathbb{R}^{S+1} \to \mathbb{R}$ hasznossági függvény folytonos és szigorúan monoton.*
Legyen $\{\theta^{*i}_{aj}, \theta^{*i}_{bj}, \theta^{*i}_0, c^{*i}_0, c^{*i}_1\}$ egyértelmű egyensúly, ahol $\theta^{*i}_{aj}, \theta^{*i}_{bj}, \theta^{*i}_0, c^{*i}_0$, és c^{*i}_1 megoldása a piaci szereplők (5.2) optimalizálási feladatának, és $\{\theta^{**i}_{aj}, \theta^{**i}_{bj}, \theta^{**i}_0, c^{**i}_0, c^{**i}_1\}$ egyértelmű egyensúly, ahol a $\theta^{**i}_{aj}, \theta^{**i}_{bj}, \theta^{**i}_0, c^{**i}_0$, és c^{**i}_1 megoldása a piaci szereplők (4.2) optimalizálási feladatának. Tegyük fel továbbá, hogy $\exists \bar{i} \in I$, amelyre

$$\theta^{*\bar{i}}_0 < e\left[\delta_j, \theta^{*\bar{i}} X\right].$$

Ekkor

1. $u^{\bar{i}}(c^{**\bar{i}}_0, c^{**\bar{i}}_1) < u^{\bar{i}}(c^{*\bar{i}}_0, c^{*\bar{i}}_1)$,
2. $\exists i' \in I$, $i' \neq \bar{i}$, *amelyre* $\theta^{*i'}_0 < e\left[\delta_j, \theta^{*i'} X\right]$ *és* $u^{i'}(c^{**i'}_0, c^{**i'}_1) < u^{i'}(c^{*i'}_0, c^{*i'}_1)$,
3. $\theta^{**\bar{i}}_0 = e\left[\delta_j, \theta^{**\bar{i}} X\right]$ *és* $\theta^{**i'}_0 = e\left[\delta_j, \theta^{**i'} X\right]$,
4. $u^i(c^{**i}_0, c^{**i}_1) = u^i(c^{*i}_0, c^{*i}_1)$ $\forall i \in I$ *esetén, amelyre* $\theta^{*i}_0 \geq e\left[\delta_j, \theta^{*i} X\right]$.

A két egyensúly egyértelműsége és létezése erős feltétel, csak a piaci szereplők nagyon speciális készletallokációja esetén teljesülhet. Ha viszont teljesül, akkor a megfogalmazott állítás triviális. Mivel a szereplők egymással kereskednek, ahhoz, hogy a szabályozói korlát bevezetése után is legyen egyensúly, legalább két piaci szereplő szabályozói előírás nélkül meghatározott egyensúlyi portfóliója sérti meg a bevezetett korlátot. Mivel a többi piaci szereplő helyzete exogén árrés mellett nem változik, az optimális portfóliójuk és az elért hasznosságuk sem változhat. Ha a szereplők kénytelenek átrendezni portfóliójukat a korlát teljesítéséhez, akkor alacsonyabb hasznosságot érnek el, új portfóliójuk esetén a korlát kötni fog.

A kulcskérdés az, hogy mi történik, ha az árrés endogén. Ha az árjegyző emeli az árrést, akkor a kereskedés minden egysége után magasabb jövedelemre tesz szert, ugyanakkor csökken a kereskedett mennyiség. Az árrés emelésének tehát a kereskedett mennyiség csökkenése szab korlátot.

1. Sejtés. *Tegyük fel, hogy az i-edik szereplő preferenciáit leíró $u^i : \mathbb{R}^{S+1} \to \mathbb{R}$ hasznossági függvény folytonos és szigorúan monoton. Az árjegyző $\forall j \in J$ eszközre*

meghatározza a t_j *árrést az 4.4 optimalizálási feladat megoldásával.*
Legyen $\{\theta^{*i}_{aj}, \theta^{*i}_{bj}, \theta^{*i}_0, c^{*i}_0, c^{*i}_1, t^*_j\}$ *egyértelmű egyensúly, ahol* $\theta^{*i}_{aj}, \theta^{*i}_{bj}, \theta^{*i}_0, c^{*i}_0$*, és* c^{*i}_1 *megoldása a piaci szereplők (5.2) optimalizálási feladatának és* $\{\theta^{**i}_{aj}, \theta^{**i}_{bj}, \theta^{**i}_0, c^{**i}_0, c^{**i}_1, t^{**}_j\}$ *egyértelmű egyensúly, ahol a* $\theta^{**i}_{aj}, \theta^{**i}_{bj}, \theta^{**i}_0, c^{**i}_0$*, és* c^{**i}_1 *megoldása a piaci szereplők (4.2) optimalizálási feladatának. Tegyük fel továbbá, hogy* $\exists \bar{i} \in I$*, amelyre*

$$\theta^{*\bar{i}}_0 < e\left[\delta_j, \theta^{*\bar{i}} X\right].$$

Ekkor

1. $\theta^{**\bar{i}}_0 = e\left[\delta_j, \theta^{*\bar{i}} X\right]$,

2. $u^i(c^{**i}_0, c^{**i}_1) \leq u^i(c^{*i}_0, c^{*i}_1)$ $\forall i \in I$ *esetén, és* $u^{\bar{i}}(c^{**\bar{i}}_0, c^{**\bar{i}}_1) < u^{\bar{i}}(c^{*\bar{i}}_0, c^{*\bar{i}}_1)$ $\bar{i} \in I$*-re,*

3. $t^{**}_j > t^*_j$*, ha* $\sum_{i \in I} \theta^{*i}_{aj} < \sum_{i \in I} \theta^{**i}_{aj}$ *és* $t^{**}_j = t^*_j$*, ha* $\sum_{i \in I} \theta^{*i}_{aj} = \sum_{i \in I} \theta^{**i}_{aj}$.

Szigorúan monoton hasznossági függvény feltevése mellett az új portfóliót választó piaci szereplőkre vonatkozó szabályozói előírás kötni fog (1. sejtés/1.), hasznosságuk pedig csökken, mert az új portfóliót előtte is választhatták volna (1. sejtés/2.). A piaci szereplők hasznossága nem nőhet, hiszen a döntési lehetőségeik halmaza nem változik vagy szűkül. Amíg köt a korlát, addig a piaci szereplők nem tudnak olyan mennyiséget venni/eladni az eszközökből, ami a szabályozói előírás nélkül optimális volt, ezért a kereskedett mennyiség növelése nem tudja kompenzálni az árrés csökkentése miatt kieső bevételt. Az árjegyző magasabb profitot tud elérni az árrés emelésével (1. sejtés/3.). Az árrést egészen addig emeli az árjegyző, amíg a szabályozói előírás redundánssá válik.

4.4. A modell két piaci szereplővel

A 4.3.4. fejezetben N szereplő mellett vizsgáltuk a szabályozói előírás bevezetése következtében megváltozó egyensúly tulajdonságait. A probléma összetettsége miatt a modell analitikus megoldását két szereplő, két világállapot, ellentétes készletek, és logaritmikus hasznossági függvények mellett mutatjuk be. A piaci szereplők kereskedésének oka, hogy simítsák fogyasztásukat a két időszak és a különböző világállapotok között. Célunk a speciális eset levezetésén és példákon keresztül megvizsgálni, hogy szabályozói előírás bevezetésének hatására hogyan módosítják döntésüket a szereplők, és ennek következtében hogyan változik az egyensúly.

4.4.1. Két piaci szereplő, J eszköz és S világállapot

Tegyük tehát fel, hogy $|I| = 2$, azaz legyen két piaci szereplőnk. Az i-dik szereplő fogyasztási és portfólió-allokálási döntése

$$\max_{c_0^i, c_1^i, \theta_a^i, \theta_b^i, \theta_0^i} u^i(c_0^i, c_1^i) \tag{4.9}$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} c_0^i &\leq \omega_0^i - \theta_a^i a + \theta_b^i b - \theta_0^i \\ c_1^i &\leq \omega_1^i + (\theta_a^i - \theta_b^i)X + \theta_0^i 1^S \\ \theta_a^i &\geq 0 \\ \theta_b^i &\geq 0. \end{aligned}$$

Amikor a tőkepiac egyensúlyban van, a piactisztító feltétel alapján az optimális portfóliókra teljesül, hogy

$$\theta^1 + \theta^2 \;=\; \theta_a^1 - \theta_b^1 + \theta_a^2 - \theta_b^2 = 0,$$

azaz $-\theta_j^1 = \theta_j^2$ $\forall j \in J$ kockázatos eszközre. A 4.1 állítás értelmében a költségvetési korlátok összegzése biztosítja tőkepiaci egyensúly esetén a fogyasztási piacok egyensúlyát. Az árjegyző a t_j árrésről ($\forall j \in J$ eszközre) döntve maximalizálja a tranzakciós költség-függvények összegét

$$\max_{t_j \ \forall j \in J} \sum_{j \in J} t_j(\theta_{aj}^1 + \theta_{aj}^2).$$

és elfogyasztja profitját a 0. időszakban. Egyensúlyban az optimális árrés nem lehet negatív az 4.1 lemma értelmében. Ezért, ha a kereskedő piaci szereplők hasznossági függvénye szigorúan monoton, akkor sosem éri meg egyszerre venni és eladni ugyanazt az eszközt $\theta_{aj}^1 \theta_{bj}^1 = 0$ és $\theta_{aj}^2 \theta_{b2}^2 = 0$ (4.3 állítás).

A kétszereplős modellt módosíthatjuk, ha a piaci szereplőknek teljesíteniük kell a likvid eszközök tartását előíró szabályt. Az eszközök szintjén definiált szabályozói előírás szerepeltetése

$$\theta_0^i \geq e\left[\delta_j, \theta^i X\right]$$

feltétellel módosítja az i-edik szereplő fogyasztási és portfólió-allokálási döntését, ugyanakkor a szabályozás nem változtat az egyensúly piactisztító feltételein. A 3. fejezetben felsorolt lehetőségeket kiegészítve, ha a világállapotok bekövetkezésének valószínűsége azonos, akkor a szabályozói előírás megadható például

$$e\left[\delta_j, \theta^i X\right] = \sum_{j \in J} \delta_j \sum_{s=1}^{S} \frac{1}{S} \max\left[0, -\theta^i_j x_{js}\right]$$

alakban. Ekkor a $j \in J$ eszközre kiválasztjuk azokat a világállapotokat, ahol a θ^i portfólió tartásakor veszteséget szenvedünk el, és a világállapotok valószínűségével súlyozva kiszámítjuk a várható veszteségek átlagát. Minden eszközre alkalmazhatunk eltérő δ_j szabályozói paramétert.

4.4.2. Speciális kétszereplős modell elsőrendű feltételei

Legyen $|I| = 2$, $|J| = 2$, és $S = 2$ az 1. időszakban, azaz két szereplő, két eszköz és két világállapot a modellben. A két világállapot bekövetkezésének valószínűsége megegyezik ($\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}$). A két eszköz kifizetése legyen $x_1 = [x_{11}, -x_{11}]$ és $x_2 = = [-x_{22}, x_{22}]$. Tegyük fel továbbá, hogy a két piaci szereplő különböző jövőbeli világállapotban realizál pozitív készletet, azaz $\omega^1_{11} > 0$ és $\omega^1_{12} = 0$, illetve $\omega^2_{11} = 0$ és $\omega^2_{12} > 0$. Ekkor $x_{11} > 0$ és $x_{22} > 0$ esetén az első szereplő kizárólag a második eszközt ($\theta^1_{a1} = 0$, $\theta^1_{b2} = 0$), míg a második szereplő az első eszközt veszi ($\theta^2_{a2} = 0$, $\theta^2_{b1} = 0$).

Logaritmikus hasznossági függvényt feltételezve írjuk fel a fogyasztási és portfólió-allokálási döntést. Ekkor a hasznossági függvény szigorú monotonitása miatt a költségvetési korlátok egyenlőséggel teljesülnek, és a c_0 és c_1 fogyasztás szigorúan pozitív. A maximalizálási problémák a következő alakban adhatóak meg[37]

$$\max_{c^1_0, c^1_1} \ln(c^1_0) + \frac{1}{2}\ln(c^1_{11}) + \frac{1}{2}\ln(c^1_{12}) \tag{4.10}$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned}
c^1_0 &= \omega^1_0 + \theta^1_{b1} b_1 - \theta^1_{a2} a_2 - \theta^1_0 \\
\theta^1_0 &\geq \delta_1 \left(\frac{1}{2}\theta^1_{b1} x_{11}\right) + \delta_2 \left(\frac{1}{2}\theta^1_{a2} x_{22}\right) \\
c^1_{11} &= \omega^1_{11} - \theta^1_{b1} x_{11} - \theta^1_{a2} x_{22} + \theta^1_0 \\
c^1_{12} &= \theta^1_{b1} x_{11} + \theta^1_{a2} x_{22} + \theta^1_0 \\
\theta^1_{a2} &\geq 0 \\
\theta^1_{b1} &\geq 0,
\end{aligned}$$

[37] A fogyasztás szigorú pozitivitása miatt az optimalizálási problémákban két feltétel szigorú egyenlőtlenség formájában adott, ezért a lehetséges megoldások halmaza nem zárt. Ha az egyensúlyi megoldás nem teljesíti a szigorú egyenlőtlenséget, akkor nincs globális maximuma az optimalizálási feladatoknak. A példában a fogyasztás pozitivitását csak az optimalizálás után ellenőrizzük.

és

$$\max_{c_0^2, c_1^2} \ln(c_0^2) + \frac{1}{2}\ln(c_{11}^2) + \frac{1}{2}\ln(c_{12}^2) \tag{4.11}$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned}
c_0^2 &= \omega_0^2 + \theta_{b2}^2 b_2 - \theta_{a1}^2 a_1 - \theta_0^2 \\
\theta_0^2 &\geq \delta_1\left(\frac{1}{2}\theta_{a1}^2 x_{11}\right) + \delta_2\left(\frac{1}{2}\theta_{b2}^2 x_{22}\right) \\
c_{11}^2 &= \theta_{b2}^2 x_{22} + \theta_{a1}^2 x_{11} + \theta_0^2 \\
c_{12}^2 &= \omega_{12}^2 - \theta_{b2}^2 x_{22} - \theta_{a1}^2 x_{11} + \theta_0^2 \\
\theta_{a1}^2 &\geq 0 \\
\theta_{b2}^2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy az első piaci szereplőnek az első jövőbeli világállapotban mindkét eszköz negatív kifizetést, míg a második világállapotban mindkét eszköz pozitív kifizetést biztosít. Mivel a két eszköz nem független egymástól, a megoldás során a két eszközből kikevert portfólió kifizetését határozzuk meg, a két eszköz egyensúlyi ára mellett a piaci szereplőnek mindegy, hogy a két eszközből hogyan keveri ki a keresett portfóliót.

A F.III. Függelékben behelyettesítjük az egyenlőséggel adott feltételeket a hasznossági függvényekbe a c_0^1, c_{11}^1, c_{12}^1, c_0^2, c_{11}^2 és c_{12}^2 fogyasztás helyére, majd felírjuk a Lagrange függvényeket a feltételes optimalizáláshoz, és megadjuk a Karush-Kuhn-Tucker feltételeket. A megoldás során első lépésként feltesszük, hogy a komplementaritás teljesüléséhez a Lagrange szorzók γ_1, λ_1, μ_1, γ_2, λ_2 és μ_2 értéke 0. Ekkor megoldhatjuk az egyenlőtlenségként megadott feltételek nélkül a maximalizálási problémákat, majd ellenőrizhetjük, hogy az így kapott optimális megoldás valóban teljesíti-e a korlátozó feltételeket. Ha teljesíti, akkor az egyenlőtlenség formájában megadott korlátozó feltételek, köztük a szabályozói előírás, nem módosítanak az egyensúlyon, hiszen nem befolyásolják a piaci szereplők döntését (4.4 állítás). Ha a szabályozói előírás nem teljesül, akkor a kiinduló feltevésünk, miszerint egyensúlyban $\gamma_1 = 0$ és $\gamma_2 = 0$, hamis. A modellt

$$\theta_0^1 = \delta_1\left(\frac{1}{2}\theta_{b1}^1 x_{11}\right) + \delta_2\left(\frac{1}{2}\theta_{a2}^1 x_{22}\right) \tag{4.12}$$

$$\theta_0^2 = \delta_1\left(\frac{1}{2}\theta_{a1}^2 x_{11}\right) + \delta_2\left(\frac{1}{2}\theta_{b2}^2 x_{22}\right) \tag{4.13}$$

$$\gamma_1 > 0 \tag{4.14}$$

$$\gamma_2 > 0 \tag{4.15}$$

feltételek mellett kell megoldanunk. Ekkor a szabályozói előírás bevezetése új egyensúlyt eredményez (4.5 állítás).

4.4.3. Redundáns szabályozói előírás esete

Tegyük fel, hogy a szabályozói előírás bevezetése nem módosítja a piaci szereplők optimális döntését (4.4 állítás). Az egyszerűsödött elsőrendű feltételeket ($\gamma_1 = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\mu_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, $\lambda_2 = 0$ és $\mu_2 = 0$ esetén) a fogyasztás helyett a megtakarított kockázatmentes eszköz (θ_0^1, θ_0^2), a portfóliók ($\theta_{b1}^1, \theta_{a2}^1, \theta_{a1}^2, \theta_{b2}^2$) és a készletek ($\omega_{11}^1, \omega_{12}^2$) függvényében is megadhatjuk[38]

$$\begin{aligned}
b_1(\omega_{11}^1 + 2\theta_0^1) &= x_{11}(2\theta_{b1}^1 x_{11} + 2\theta_{a2}^1 x_{22} - \omega_{11}^1) \\
-a_2(\omega_{11}^1 + 2\theta_0^1) &= x_{22}(2\theta_{b1}^1 x_{11} + 2\theta_{a2}^1 x_{22} - \omega_{11}^1) \\
-a_1(\omega_{12}^2 + 2\theta_0^2) &= x_{11}(2\theta_{b2}^2 x_{22} + 2\theta_{a1}^2 x_{11} - \omega_{12}^2) \\
b_2(\omega_{12}^2 + 2\theta_0^2) &= x_{22}(2\theta_{b2}^2 x_{22} + 2\theta_{a1}^2 x_{11} - \omega_{12}^2).
\end{aligned}$$

Ekkor az egyensúly meghatározásához szükségünk lesz a fogyasztások közötti harmonikus átlag összefüggésekre, melyek a portfóliók és a készletek függvényében felírva

$$\begin{aligned}
(\omega_0^1 + \theta_{b1}^1 b_1 - \theta_{a2}^1 a_2 - \theta_0^1)(\omega_{11}^1 + 2\theta_0^1) &= \\
2(\omega_{11}^1 - \theta_{b1}^1 x_{11} - \theta_{a2}^1 x_{22} + \theta_0^1)(\theta_{b1}^1 x_{11} + \theta_{a2}^1 x_{22} + \theta_0^1) & \\
(\omega_0^2 + \theta_{b2}^2 b_2 - \theta_{a1}^2 a_1 - \theta_0^2)(\omega_{12}^2 + 2\theta_0^2) &= \\
2(\omega_{12}^2 - \theta_{b2}^2 x_{22} - \theta_{a1}^2 x_{11} + \theta_0^2)(\theta_{b2}^2 x_{22} + \theta_{a1}^2 x_{11} + \theta_0^2). &
\end{aligned}$$

A továbbiakban közvetlen kereskedés (0 árrés) és árjegyző közvetítése (exogén, illetve endogén árrés) mellett egyaránt vizsgáljuk a megoldást.

Egyensúly árjegyző közvetítése nélkül

Tegyük fel, hogy a kereskedés közvetlenül történik és nincs árrés. Akkor és csak akkor lehet $b_1 = b_2 = a_1 = a_2 = 0$, ha $c_{11}^1 = c_{12}^1 = c_0^1$ és a $c_{11}^2 = c_{12}^2 = c_0^2$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\omega_0^1 - \theta_0^1 &= \omega_{11}^1 - \theta_{b1}^1 x_{11} - \theta_{a2}^1 x_{22} + \theta_0^1 \\
\omega_{11}^1 - \theta_{b1}^1 x_{11} - \theta_{a2}^1 x_{22} &= \theta_{b1}^1 x_{11} + \theta_{a2}^1 x_{22} \\
\omega_0^2 - \theta_0^2 &= \theta_{b2}^2 x_{22} + \theta_{a1}^2 x_{11} + \theta_0^2 \\
\theta_{b2}^2 x_{22} + \theta_{a1}^2 x_{11} &= \omega_{12}^2 - \theta_{a1}^2 x_{11} - \theta_{b2}^2 x_{22}.
\end{aligned}$$

[38] A levezetés lépéseit az F.III.1. Függelék részletezi.

Kifejezve a két piaci szereplő által megtakarított kockázatmentes eszköz θ_0^1 és θ_0^2 értékét

$$\begin{aligned}\theta_0^1 &= \frac{\omega_0^1 - \frac{\omega_{11}^1}{2}}{2} \\ \theta_0^2 &= \frac{\omega_0^2 - \frac{\omega_{12}^2}{2}}{2},\end{aligned}$$

meghatározhatjuk az optimális fogyasztást

$$\begin{aligned}c_{11}^1 = c_{12}^1 = c_0^1 &= \frac{\omega_{11}^1}{4} + \frac{\omega_0^1}{2} \\ c_{11}^2 = c_{12}^2 = c_0^2 &= \frac{\omega_{12}^1}{4} + \frac{\omega_0^2}{2}.\end{aligned}$$

A szereplők úgy optimalizálnak, hogy az első időszaki készlet felét realizálják mindkét jövőbeli világállapotban

$$\begin{aligned}\theta_{a2}^1 x_{22} + \theta_{b1}^1 x_{11} &= \frac{\omega_{11}^1}{2} \\ \theta_{b2}^2 x_{22} + \theta_{a1}^2 x_{11} &= \frac{\omega_{12}^2}{2}\end{aligned}$$

ezzel tökéletesen kiküszöbölve a bizonytalanságból eredő kockázatot és tökéletesen simítva a fogyasztást. Tőkepiaci egyensúly esetén $\theta_{b1}^1 = \theta_{a1}^2$ és $\theta_{a2}^1 = \theta_{b2}^2$, ezért a szimmetria miatt csak akkor lesz a feltételezett $b_1 = b_2 = a_1 = a_2 = 0$ árrendszer egyensúlyi, ha

$$\omega_{11}^1 = \omega_{12}^2.$$

Abból indultunk ki, hogy egyensúly esetén teljesülnek az egyenlőtlenséggel megadott korlátozó feltételek. Ezért az ellentmondás elkerülése miatt meg kell vizsgálnunk, hogy a szabályozói előírás miatt bevezetett korlátot teljesíti-e a szabályozói előírás nélkül meghatározott optimum, azaz

$$\begin{aligned}\theta_0^1 &> \delta_1 \left(\frac{1}{2}\theta_{b1}^1 x_{11}\right) + \delta_2 \left(\frac{1}{2}\theta_{a2}^1 x_{22}\right) \\ \theta_0^2 &> \delta_1 \left(\frac{1}{2}\theta_{a1}^2 x_{11}\right) + \delta_2 \left(\frac{1}{2}\theta_{b2}^2 x_{22}\right)\end{aligned}$$

mikor áll fenn. Ha $\delta = \delta_1 = \delta_2$ és $\omega_0^1 = \omega_0^2$, akkor

$$\delta < \frac{2\theta_0^1}{\theta_{b1}^1 x_{11} + \theta_{a2}^1 x_{22}} = \frac{4\theta_0^1}{\omega_{11}^1} = \frac{\omega_0^1 - \frac{\omega_{11}^1}{2}}{\frac{\omega_{11}^1}{2}}.$$

Amíg a szabályozói paraméter értéke kisebb, mint a jelenbeli és a jövőbeli világállapotban várható készlet különbsége a jövőbeli világállapotban várható készlethez viszonyítva, addig a szabályozói előírás bevezetésének hatására nem módosul a piaci szereplők döntése, és az elérhető hasznosság szintje sem. Ezzel szemben, ha túl magas a szabályozói paraméter értéke, akkor egyensúly esetén γ_1 és γ_2 értéke nem lehetett 0, ellentmondáshoz jutottunk.

Megoldás exogén árrés mellett

Következő lépésként tegyük fel, hogy $b_1 = a_1 - t_1$ és $b_2 = a_2 - t_2$, ahol t_1 és t_2 exogén árrés. Ekkor

$$
\begin{aligned}
(a_1 - t_1)(\omega_{11}^1 + 2\theta_0^1) &= x_{11}(2\theta_{b1}^1 x_{11} + 2\theta_{a2}^1 x_{22} - \omega_{11}^1) && (4.16)\\
(-a_2)(\omega_{11}^1 + 2\theta_0^1) &= x_{22}(2\theta_{b1}^1 x_{11} + 2\theta_{a2}^1 x_{22} - \omega_{11}^1) && (4.17)\\
(-a_1)(\omega_{12}^2 + 2\theta_0^2) &= x_{11}(2\theta_{a2}^1 x_{22} + 2\theta_{b1}^1 x_{11} - \omega_{12}^2) && (4.18)\\
(a_2 - t_2)(\omega_{12}^2 + 2\theta_0^2) &= x_{22}(2\theta_{a2}^1 x_{22} + 2\theta_{b1}^1 x_{11} - \omega_{12}^2). && (4.19)
\end{aligned}
$$

Alakítsuk a piaci szereplők elsőrendű feltételeit. Ha b_1, b_2, a_1 és a_2 nem nulla, mivel a fogyasztás pozitivitása miatt $\omega_{11}^1 + 2\theta_0^1 \neq 0$, $\omega_{12}^2 + 2\theta_0^2 \neq 0$, ezért

$$
\begin{aligned}
\frac{x_{11}}{x_{22}} &= \frac{b_1}{-a_2} = \frac{a_1 - t_1}{-a_2}\\
\frac{x_{11}}{x_{22}} &= \frac{-a_1}{b_2} = \frac{-a_1}{a_2 - t_2}.
\end{aligned}
$$

A vételi árak (a_1 és a_2) előjele pozitív, míg az eladási árak (b_1 és b_2) negatív előjelűek. Átalakítva

$$
t_2 = \frac{x_{22}}{x_{11}} t_1, \tag{4.20}
$$

azaz egyensúly létezésének feltétele, hogy a két exogén árrés aránya megegyezzen a kifizetések arányával. Ha $\omega_0^1 = \omega_0^2$ és $\omega_{11}^1 = \omega_{12}^2$, akkor

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{t_1}{2}\\
a_2 &= \frac{t_2}{2} = \frac{x_{22}}{x_{11}}\frac{t_1}{2} = \frac{x_{22}}{x_{11}} a_1.
\end{aligned}
$$

Az egyensúlyi árak kialakulása esetén az egyensúlyi portfóliókra a következő összefüggés teljesül

$$
\frac{-\frac{t_1}{2}}{x_{11}} = \frac{\theta_{b1}^1 x_{11} + \theta_{a2}^1 x_{22} - \frac{\omega_{11}^1}{2}}{\theta_0^1 + \frac{\omega_{11}^1}{2}}. \tag{4.21}
$$

Abban az esetben, amikor az árrés 0 volt, optimumban a kereskedésen keresztül a jövőbeli készlet felét cserélték el egymás között a szereplők, így tökéletesen simítva a jövőbeli bizonytalan kifizetést és ezzel a fogyasztást is. Árrés esetén csökken a piaci szereplők közötti kockázatmegosztás, és kockázatosabb marad a fogyasztási profil. Ha felírjuk a fogyasztások közötti harmonikus átlag összefüggést

$$\left(\omega_0^1 - \theta_{b1}^1 \frac{t_1}{2} - \theta_{a2}^1 \frac{x_{22}}{x_{11}} \frac{t_1}{2} - \theta_0^1\right)\left(\theta_0^1 + \frac{\omega_{11}^1}{2}\right) = \\ (\omega_{11}^1 - \theta_{b1}^1 x_{11} - \theta_{a2}^1 x_{22} + \theta_0^1)(\theta_{b1}^1 x_{11} + \theta_{a2}^1 x_{22} + \theta_0^1), \tag{4.22}$$

a két egyenlet (4.21 és 4.22) megoldásával meghatározható az optimális θ_0^1 és $\theta_{b1}^1 x_{11} + \theta_{a2}^1 x_{22}$ értéke és ezzel a $\frac{2\theta_0^1}{\theta_{b1}^1 x_{11} + \theta_{a2}^1 x_{22}}$ korlát δ-ra.

Megoldás árjegyzői döntés mellett

Az általános modellhez hasonlóan tegyük fel, hogy árjegyző párosítja az ellenoldali ajánlatokat, és a két eszközre t_1 és t_2 árrést határoz meg. Az árjegyző maximalizálási problémája

$$\max_{t_1, t_2} t_1 \theta_{b1}^1 + t_2 \theta_{a2}^1$$

feltéve, hogy $\theta_{a1}^2 = \theta_{b1}^1$ és $\theta_{a2}^1 = \theta_{b2}^2$ megoldása a kereskedő piaci szereplők optimalizálási feladatainak, azaz teljesülnek a (4.16) és (4.19) közötti elsőrendű feltételek, amelyek a (4.21) és (4.22) egyenletekké alakíthatóak. Az árjegyző maximalizálási problémája egyváltozós feladattá módosul a (4.20) összefüggés és $\Theta = \theta_{b1}^1 x_{11} + \theta_{a2}^1 x_{22}$ jelölés felhasználásával

$$\max_{t_1} \frac{t_1}{x_{11}} \Theta \tag{4.23}$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} -\frac{t_1}{2}\left(\theta_0^1 + \frac{\omega_{11}^1}{2}\right) &= x_{11}\left(\Theta - \frac{\omega_{11}^1}{2}\right) \\ \left(\omega_0^1 - \frac{t_1}{2x_{11}}\Theta - \theta_0^1\right)\left(\theta_0^1 + \frac{\omega_{11}^1}{2}\right) &= \left(\omega_{11}^1 - \Theta + \theta_0^1\right)(\Theta + \theta_0^1). \end{aligned}$$

A vizsgált három esetben (árrés nélkül, exogén árrés és endogén árrés mellett) meghatározott egyensúly összevetését a következő példa illusztrálja.

4.1. Példa. A számpéldában a levezetett speciális esetet követve legyen $|I| = 2$ szereplő, $|J| = 2$ eszköz, és $S = 2$ világállapot az 1. időszakban. A szereplők hasznossági függvénye megegyezik

$$u^i(c_0^i, c_1^i) = ln(c_0^i) + \frac{1}{2}ln(c_{11}^i) + \frac{1}{2}ln(c_{12}^i),$$

készleteik pedig ellentétesek $\omega_0^1 = 10$, $\omega_1^1 = (20;0)$ és $\omega_0^2 = 10$, $\omega_1^2 = (0;20)$. A két eszköz kifizetése legyen $x_1 = (5;-5)$ és $x_2 = (-5;5)$. Jelölje t_1 és t_2 az árrések nagyságát. Első lépésként megoldjuk a szereplők fogyasztási portfólió-allokálási feladatát, azaz a (4.21) és (4.22) egyenletekből álló egyenletrendszert, szabályozói előírás nélkül a t_1 exogén árrés különböző szintjei mellett. Majd módosítjuk a példát endogén árrés bevezetésével. Ebben az esetben az árjegyző a (4.23) feladat alapján $\Pi = \frac{t_1}{x_{11}}\Theta$ profitját maximalizálja a t_1 árrés szerint, feltéve, hogy a két piaci szereplő hasznosságot maximalizál.

$\mathbf{t_1 = t_2}$	$\mathbf{b_1 = b_2}$	$\mathbf{a_1 = a_2}$	θ_0^1	$\mathbf{\Theta}$	$\mathbf{c_0^1}$	$\mathbf{c_{12}^1 = c_{11}^2}$	$\mathbf{c_{11}^1 = c_{12}^2}$	$\mathbf{u^1 = u^2}$
0	0	0	0	10	10	10	10	4,6
1	-0,5	0,5	-0,4	9,0	9,5	8,6	10,6	4,51
2	-1,0	1,0	-0,6	8,1	9,0	7,5	11,2	4,41
3	-1,5	1,5	-0,7	7,2	8,5	6,5	12,1	4,33
4	-2,0	2,0	-0,5	6,2	8,0	5,7	13,3	4,25
4,58	**-2,3**	**2,3**	**-0,2**	**5,5**	**7,7**	**5,3**	**14,2**	**4,2**
5	-2,5	2,5	0,0	5,0	7,5	5,0	15,0	4,17
6	-3,0	3,0	0,9	3,4	7,0	4,4	17,5	4,11
7	-3,5	3,5	2,7	1,1	6,5	3,8	21,7	4,08

4.1. táblázat. Eredmények exogén és endogén árrés esetén szabályozói előírás nélkül

A példában a szereplők kereskedés segítségével fedezik várható kifizetéseiket és simítják fogyasztásukat az első időszak két világállapota között. A 5.1. táblázat alapján árrés bevezetésekor, majd az árrés fokozatos növelésekor, csökken a kereskedett eszközök jövőbeli kifizetése (Θ), míg a vételi árak emelkednek. Ennek eredményeként egyensúlyban a piaci szereplők alacsonyabb hasznossági szintet érnek el, és a fogyasztási profiljuk kockázatosabb marad. Ha az árrést az árjegyző határozza meg profitmaximalizálás alapján, akkor egyensúlyi értéke a példában 4,58. Ha az árrés 7,3205 fölé emelkedik, akkor nem kereskednek egymással a piaci szereplők.

Meghatározhatjuk a szabályozói paraméter ($\delta = \delta_1 = \delta_2$) értékére a korlátot, amely szint alatt nem változik az eredeti egyensúly szabályozói előírás bevezetése esetén sem. Jelen példában árrés nélkül a szabályozói előírás bevezetése $\forall \delta > 0$ esetén új egyensúly kialakulásához vezet, és a szabályozói előírás egészen addig módosít mindenképpen az egyensúlyon, amíg az árrés 5 fölé nem emelkedik. Az árrés további növekedésekor a δ-ra vonatkozó korlát értéke emelkedik, hiszen a készpénzmegtakarítás emelkedése miatt egyre magasabb szabályozói paraméter melleti szabályozói előírásnak is megfelel a szabályozói előírás nélkül kiszámított egyensúly. Ha az árrés szintje 6, akkor redundáns a szabályozói követelmény $\delta < 0{,}55$ esetén, azaz ha a

$t_1 = t_2$	$\mathbf{\Pi}$
1	1,81
2	3,25
3	4,32
4	4,95
4,58	5,07
5	5,00
6	4,12
7	1,51

4.2. táblázat. Árjegyzői profit az árrés különböző szintje mellett

$t_1 = t_2$	Korlát δ értékére
1	-0,09
2	-0,15
3	-0,18
4	-0,15
4.58	-0,09
5	0,00
6	0,55
7	5,09

4.3. táblázat. Korlát δ értékére az árrés különböző szintje mellett

portfólió eszközeire aggregált várható veszteség (ES) 55 százalékát nem éri el a tőkekövetelményként elvárt készpénz mennyisége.

4.4.4. Az egyensúlyt módosító szabályozói előírás

Tegyük fel, hogy λ_1, μ_1, λ_2 és μ_2 Lagrange-szorzók értéke 0, ugyanakkor γ_1 és γ_2 értéke pozitív, azaz a 4.5 állítás áll fenn. Ekkor a komplementaritás miatt (4.12) és (4.13) egyenlőség teljesül, ezért a θ_0^1 és θ_0^2 értéke emelkedik a szabályozói előírás nélkül meghatározott optimumhoz képest. Az elsőrendű feltételekből nem esnek ki a γ_1-et és γ_2-öt tartalmazó tagok, ugyanakkor eliminálhatjuk azokat. Ha az elsőrendű feltételek közül a θ_{b1}^1 szerinti deriválással kapott egyenletből fejezzük ki a γ_1-et, és behelyettesítjük a θ_{a2}^1 szerinti deriválással kapott egyenletbe, akkor

$$\frac{-a_2 - b_1\frac{\delta_2 x_{22}}{\delta_1 x_{11}}}{c_0^1} + \frac{-x_{22} + \frac{\delta_2 x_{22}}{\delta_1 x_{11}} x_{11}}{2c_{11}^1} + \frac{x_{22} - \frac{\delta_2 x_{22}}{\delta_1 x_{11}} x_{11}}{2c_{12}^1} \quad = \quad 0.$$

Ha a szabályozói paraméter a két eszközre azonos, azaz $\delta = \delta_1 = \delta_2$, akkor

$$\frac{-a_2 - b_1\frac{x_{22}}{x_{11}}}{c_0^1} \quad = \quad 0,$$

alakítva

$$\frac{-a_2}{b_1} = \frac{x_{22}}{x_{11}}.$$

Ha feltesszük a készletek szimmetriáját, azaz $\omega_0^1 = \omega_0^2$ és $\omega_{11}^1 = \omega_{12}^2$, akkor a fogyasztásokra teljesül, hogy $c_0^1 = c_0^2$, $c_{11}^1 = c_{12}^2$ és $c_{11}^2 = c_{12}^1$. Ezt kihasználva a vételi és eladási árak megadhatóak az árrés függvényében $a_1 = \frac{t_1}{2}$, $b_1 = \frac{-t_1}{2}$, $a_2 = \frac{t_2}{2}$, és $b_2 = \frac{-t_2}{2}$. Az árrések között a szabályozói előírás nélküli esethez hasonló összefüggés adódik

$$t_2 = t_1 \frac{x_{22}}{x_{11}},$$

és kihasználhatjuk a

$$\begin{aligned} c_0^1 &= \omega_0^1 - \frac{t_1 \theta_0^1}{x_{11}\delta} - \theta_0^1 \\ c_{11}^1 &= \omega_{11}^1 - \theta_0^1 \frac{2}{\delta} + \theta_0^1 \\ c_{12}^1 &= \theta_0^1 \frac{2}{\delta} + \theta_0^1 \end{aligned}$$

költségvetési korlátokat, ezért az elsőrendű feltételek a következő egyenletre redukálódnak

$$\frac{\frac{-t_1}{2} - \delta \frac{1}{2} x_{11}}{\omega_0^1 - \frac{t_1 \theta_0^1}{x_{11}\delta} - \theta_0^1} + \frac{-x_{11} + \delta \frac{1}{2} x_{11}}{2\left(\omega_{11}^1 - \theta_0^1 \frac{2}{\delta} + \theta_0^1\right)} + \frac{x_{11} + \delta \frac{1}{2} x_{11}}{2\left(\theta_0^1 \frac{2}{\delta} + \theta_0^1\right)} = 0.$$

Az egyenletből kifejezhetjük θ_0^1 értékét. Ha az árjegyző határozza meg a számára optimális árrést, akkor

$$\max_{t_1, t_2} t_1 \theta_{b1}^1 + t_2 \theta_{a2}^1 = \max_{t_1} \frac{t_1}{x_{11}} \left(\theta_{b1}^1 x_{11} + \theta_{a2}^1 x_{22}\right) = \max_{t_1} \frac{t_1}{x_{11}} \frac{2\theta_0^1}{\delta}$$

feltéve, hogy

$$\frac{\frac{-t_1}{2} - \delta \frac{1}{2} x_{11}}{\omega_0^1 - \frac{t_1 \theta_0^1}{x_{11}\delta} - \theta_0^1} + \frac{-x_{11} + \delta \frac{1}{2} x_{11}}{2\left(\omega_{11}^1 - \theta_0^1 \frac{2}{\delta} + \theta_0^1\right)} + \frac{x_{11} + \delta \frac{1}{2} x_{11}}{2\left(\theta_0^1 \frac{2}{\delta} + \theta_0^1\right)} = 0$$

feladatot oldja meg. A probléma alapján az árrés elszáll, így az árjegyző azt a legmagasabb árrést határozza meg, ami mellett még nem válik redundánssá a szabályozói előírás. A modellben lényegében a szabályozási paraméter értéke korlátozza az elszálló árrést. Megfigyelésünk összecseng Castellano és Cerqueti (2011) eredményével, miszerint az árrésnek van egy optimális felső korlátja, amit a gazdasági körülményeknek megfelelően az adott tőzsdének kellene szabályoznia. A két szereplős speciális eset eredménye megerősíti a 1. sejtésként megfogalmazott általános állítást. A szabályozói előírás bevezetése az egyensúlyi árrés emelkedéséhez vezet. Az eredményt a 5.1 példa folytatásával illusztrálhatjuk.

4.2. Példa. Vizsgáljuk a 5.1 példát szabályozói előírás bevezetése esetén. Megfigyel-

$\delta = 0{,}4$ $t_1 = t_2$	θ_0^1	Θ	$u^1 = u^2$	Π
0	1,8	9,0	4,6	0
1	1,5	7,4	4,5	1,5
2	1,3	6,3	4,4	2,5
3	1,1	5,3	4,3	3,2
4	0,9	4,6	4,2	3,7
4,58	0,86	4,3	4,19	3,95
5	0,82	4,1	4,17	4,10
5,8	**0,75**	**3,7**	**4,13**	**4,37**

4.4. táblázat.
Eredmények endogén árrés esetén $\delta = 0{,}4$ paraméterű szabályozói előírás mellett

hető, hogy adott paraméterű ($\delta = 0{,}4$) szabályozói előírás mellett az árjegyző profitja folyamatosan emelkedik, ahogy egyre magasabb az árrés szintje. Ugyanakkor az elszálló árrést a redundánssá váló szabályozói előírás korlátozza, így míg szabályozói előírás nélkül a 5.1 példában 4,58 lett az optimális árrés értéke, 0,4 paraméterű szabályozói előírás bevezetése esetén az egyensúlyi árrés 5,84. Ha az árrés tovább emelkedik, akkor a piaci szereplők szabályozói előírás nélkül meghatározott egyensúlyi portfóliója is teljesíti a szabályozói előírást, így azt választják.

4.5. Összefoglalás

Az értekezés 4. fejezete általános egyensúlyelméleti keretben vizsgálja a tranzakciós költségként bevezetett árrés és a kockázatmegosztás visszaesése, illetve a piaci likviditás és a piaci szereplők kockázatvállalását visszafogó szabályozói előírás kapcsolatát.

Piaci súrlódások nélkül nem lenne szükség pénzügyi közvetítésre. A piaci szereplők közvetlenül kereskedve tökéletesen simítanák a világállapotok és az időszakok között a fogyasztási pályát, tökéletes kockázatmegosztás valósulhatna meg. A tranzakciós költségként bevezetett árrés emelkedésének hatására a piaci szereplők kereskedett portfóliójának jövőbeli kifizetése fokozatosan csökken, míg egy szint fölött a szereplők már nem kereskednek egymással, így a kockázatmegosztás meghiúsul. Az illusztrációként használt példában az árrés bevezetésekor kezdetben hitelfelvétel lesz optimális, majd a kereskedés visszafogása miatt megtakarítás. Ennek oka, hogy a kockázatmentes eszközpozíciónak szerepe van az időszakok közötti és a világállapotok közötti kockázatmegosztásban is. Ha a modellben a monopolista árjegyző profitot maximalizálva dönt az optimális árrés szintjéről, akkor a kereskedés következtében a jövőbeli világállapotokban realizált kifizetések közötti különbség csökken, de tökéletes kockázatmegosztás nem valósul meg.

Ha a szabályozói előírásként bevezetett korlátot teljesíti a szabályozói előírás bevezetése nélkül meghatározott egyensúlyi portfólió, akkor a szereplők optimális döntése változatlan. A fejezetben meghatározzuk a δ szabályozói paraméternek azt a szintjét, amely mellett változatlan marad az egyensúly. Az árrés növelésekor szigorúbb (magasabb δ melletti) szabályozói előírás is rendundáns marad. Ha a piaci szereplők optimális döntését megváltoztatja a szabályozói előírás bevezetése, akkor az árjegyző optimalizálási problémája is megváltozik. Az egyensúlyi árrés emelkedik, a piaci likviditás csökken.

5. fejezet

Az intézmények és a növekedés kapcsolata: a tranzakciós környezet hatása a kockázatmegosztásra

A fejezet a 3. és a 4. fejezetekben felírt általános egyensúlyelméleti modellt alkalmazza az intézmények és a gazdasági növekedés irodalmába ágyazva. Központban a tranzakciós költség bevezetése és a kockázatmegosztás közötti kapcsolat vizsgálata áll. A modellben a munkamegosztásból fakadó természetes kitettségek tökéletes fedezése csak szabad tranzakciós környezet esetén valósulhatna meg. A tranzakciós költség visszafogja a kockázatmegosztást, ami szélsőséges esetben a piaci szereplők önellátás melletti döntését eredményezheti. Az állam tranzakciós költség szintjéről meghozott döntését korlátozza annak biztosítása, hogy egyensúlyban a gazdasági növekedést ellehetetlenítő önellátás helyett a munkamegosztást válasszák a piaci szereplők.
A modellt az intézmények és a gazdasági növekedés kapcsolatát feltáró irodalom összefoglalása után közöljük, elhelyezve a vizsgált speciális problémát a kérdéskörben.

5.1. Bevezetés

Az országok gazdasági teljesítménye és az intézmények közötti kapcsolat Adam Smith-től napjainkig foglalkoztatja a közgazdászokat, a szociológusokat és a történészeket. A téma népszerű, az irodalom a legmagasabb impaktfaktorú folyóiratokban megjelenő elméleti és empirikus cikkektől Acemoglu és Robinson (2013) magyar nyelvre is lefordított sikerkönyvéig terjed. Ugyanakkor szerteágazó, hiszen az intézmények értelmezésétől függően egyaránt találunk a gazdasági intézmények, a politikai intézmények és a politikai berendezkedés (demokrácia és diktatúra), a piac (Kapás, 2003), a pénzügyi közvetítő rendszer (Fernández és Tamayo, 2017), a globalizáció (Grossman és Helpman, 2015), a szabályozás (Spiller, 2011; Spiller és Tommasi, 2005), a jogi intézmények (Hadfield és Weingast, 2012), az infrastruktúra (Ashraf, Glaeser és Ponzetto, 2016), az innováció (Chikán, Molnár és Szabó, 2018; Baumol, Litan és Schramm, 2007) vagy a társadalmi normák (Jakiela, 2011; Alston, Harris és Mueller, 2012) hatását elemző tanulmányokat.

Az értekezés 5. fejezete összefoglalja az intézmények és a gazdasági növekedés kapcsolatának irodalmát, majd az általános problémakör bemutatása után a tranzakciós költség az intézmények gazdasági növekedésre gyakorolt hatásában betöltött szerepét vizsgálja. A logikai lánc alapján az intézményi környezet határozza meg a tranzakciós költség mértékét, a tranzakciós környezet támogatja vagy visszaveti a kockázatmegosztást, a kockázatmegosztás hat a munkamegosztásra, amely a gazdasági növekedés feltétele.[39]

A korábbi fejezetekben bevezetett általános egyensúlyelméleti keretben modellezzük a tranzakciós költség és a piaci szereplők kockázatmegosztása közötti kapcsolatot. Megmutatjuk, hogy a tranzakciós költség emelkedése visszafogja a kockázatmegosztást, ami a munkamegosztásból származó előnyök eltűnésén keresztül önellátást is eredményezhet. Az állam döntésekor az optimális tranzakciós költség szintjét korlátozza a növekedést ellehetetlenítő önellátás veszélye. Példánkban egyensúlyban a munkamegosztásból származó többlet az államhoz kerül, a piaci szereplők számára pedig közömbös az önellátás és a munkamegosztás közötti választás.

Feltesszük, hogy az állami intézményrendszer feltétele a pénzügyi közvetítő rendszer működésének és a munkamegosztás kialakulásának. Ugyanakkor elméleti kiindulópontnak tekintjük, ezért meghatározzuk szabad tranzakciós környezet mellett is a piaci szereplők optimális döntését és a modell egyensúlyát.

A bevezetés után következő 5.2.1. alfejezet az intézmény definíciójával foglalkozik, majd a 5.2.2. alfejezetben a történeti példákat felsorakoztató tanulmányok és empirikus elemzések összefoglalása következik. A 5.2.3. pontban az elméleti eredmények segítségével vizsgáljuk a gazdasági növekedést támogató intézményeket, az intézmények kialakulását és az országok intézményrendszerében megfigyelhető különbségek okait. A 5.3. alfejezet a kulcsprobléma a tranzakciós költség, a munkamegosztás és a piaci szereplők közötti kockázatmegosztás kapcsolatát modellezi. Végül a legfontosabb megállapítások összefoglalásával zárjuk a fejezetet.

[39]Fernández és Tamayo (2017) lépésről lépésre tárja fel az intézmények és a növekedés között csatornaként működő pénzügyi rendszer közvetítő szerepét. Megközelítésében az intézményi környezet határozza meg a pénzügyi piacon a súrlódás mértékét, amely hat a felhalmozást és az elosztást befolyásoló finanszírozásra, kockázatmegosztásra, likviditásra és piaci fegyelemre. Yang és Borland (1991) érvelése alapján a gazdasági növekedés kulcsa munkamegosztás, a munkamegosztásnak pedig feltétele a kockázatmegosztás lehetősége.

5.2. Az intézmények és a gazdasági növekedés az irodalomban

Valóban befolyásolják egy ország intézményei a gazdaság teljesítményét? Az irodalom a növekedésbeli különbségeket az intézmények, a földrajzi adottság és a kultúra segítségével magyarázza (Acemoglu, Robinson és Johnson, 2005a). A földrajzi adottság szerepét hangsúlyozza például Diamond (1997) és Sachs (2001), míg a kultúrát emeli ki a lehetséges okok közül többek között a reformációt vizsgáló Weber (1930), napjainkban pedig Mokyr (2014). Acemoglu, Robinson és Johnson (2005a) átfogó képet adva az irodalomról az intézmények szerepe mellett érvel.[40]

Az intézmények növekedésben betöltött szerepének alátámasztása után a részletkérdések megválaszolása a feladat.[41] Az alfejezet elméleti és empirikus tanulmányok eredményeinek bemutatásán keresztül elemzi az intézmények és a gazdasági növekedés közötti kapcsolatot. Vizsgáljuk, hogy milyen intézmények támogatják a gazdasági növekedést, hogy hogyan alakulnak ki az intézmények, és hogy miért különbözik az országok intézményrendszere.[42]

5.2.1. Az intézmény definiálása

Az intézmény fogalom fellelhető Giambattista Vico olasz filozófus 1725-ben kiadott *"Scienza Nuova"* című művében (Hodgson, 2006). A gondolat, miszerint a társadalom gazdagsága függ az intézményektől, már Adam Smith és John Stuart Mill érvelésében is megjelenik, majd North és Thomas (1973) kifejti, hogy az országok gazdasági növekedése közötti különbség hátterében az intézmények állnak (Acemoglu, Robinson és Johnson, 2005a). Ennek ellenére a 2000-es években publikált Hodgson (2006), Hodgson (2015), Hindriks és Guala (2015) és Gräbner és Ghorbani (2019) tanulmányok még mindig az intézmény definiálásáról vitatkoznak.[43]

Az intézmények egyik széleskörben elterjedt és használt definíciója, az 1993-ban Nobel-emlékdíjjal jutalmazott, Douglass Cecil North nevéhez fűződik. North (1990)

[40] *"Some ways of organizing societies encourage people to innovate, to take risks, to save for the future, to find better ways of doing things, to learn and educate themselves, solve problems of collective action and provide public goods. Others do not."* (Acemoglu, Robinson és Johnson, 2005a, 397. o).

[41] A Center for New Institutional Social Sciences és az International Society for New Institutional Economics (ISNIE) konferenciáin elhangzó előadásokról készített tudományos tájékoztatók (Kozenkow, 2011; Kapás, 2008, 2011) alapján a megjelenő tanulmányok már elfogadják az intézmények szerepét, és a hogyan számítanak az intézmények kérdés megválaszolására koncentrálnak.

[42] A téma irodalmában központi szerepet töltenek be Acemoglu, Johnson és Robinson tanulmányai, amelyek módszertani igényességgel fogalmazzák meg az elméleti modelleket, és az endogenitás problémáját kezelve használják az ökonometriai eszköztárat, így jelen fejezetben erősen támaszkodunk elméleteikre.

[43] Jelen értekezés keretei között csupán a leggyakrabban idézett definíciókat közöljük, a vitás kérdések ismertetését nem részletezzük.

definíciója alapján az intézmények a társadalom játékszabályai, amik meghatározzák az emberek közötti interakciókat[44]. Hasonló definíciót ad Hodgson (2006) az intézményekre: *"systems of established and prevalent social rules that structure social interactions"*. Acemoglu, Robinson és Johnson (2005a) megfogalmazásában az intézmények társadalmi döntések, amelyeket a következményeik miatt választanak, hiszen a kifizetések meghatározásán keresztül egyszerre ösztönzik, és korlátozzák a piaci szereplőket.

A tanulmányokban a szerzők saját céljukat szem előtt tartva közölnek speciális intézményi definíciókat. Például Acemoglu és Johnson (2005) a korábbi irodalommal ellentétben az intézmények specifikus tulajdonságaira is koncentrál. Megfogalmazza, hogy a tulajdonjogi intézmények (*"property rights institutions"*) a kormány és a hatalmi elit túlkapásaitól védik az állampolgárokat, míg a szerződésesség intézményei (*"contracting institutions"*) azok a szabályok, amelyek az állampolgárok közötti szerződések megkötését irányítják.

Az igazán érdekes kérdés a formális definiálás és az ökonometriai módszerek alkalmazásához nélkülözhetetlen kvantifikálás. Acemoglu, Robinson és Johnson (2001), Acemoglu, Robinson és Johnson (2002) és Acemoglu, Robinson és Johnson (2005a) az intézményrendszer méréséhez a Poltical Risk Services szolgáltató adatait használta, a tulajdonjogi helyzetet megragadó, a kisajátítás/államosítás kockázata elleni védelmet kvantifikáló (*"protection against expropriation risk"*) idősort. Acemoglu és Johnson (2005) a szerződésesség intézményeit magánszerződések kikényszerítésekor felmerülő költséget megragadó indexek segítségével méri. Mindhárom index a jogrendszer működését írja le. Az elsőt Djankov és szerzőtársai (2003) publikálta, miután a Lex Mundi nemzetközi jogi iroda segítségével 109 országban vizsgálta a lakbért nemfizetők kilakoltatásának és a közüzemi számlák behajtásának jogi folyamatát, és minden országra megalkotta az eljárás formálisságának (*"procedural formalism"*) indexét. A másik két indexet a Világbank készítette szintén Djankov és szerzőtársai (2003) módszertana alapján, de ezen indexek esetében egy nagyobb kereskedelmi hitelszerződés nemfizetésekor szükséges eljárás komplexitását vizsgálták, és a részfolyamatok számát határozták meg.

5.2.2. Az intézmények és a gazdasági növekedés

Számos tanulmány illusztrálja történelmi példákkal és támasztja alá empirikus elemzésekkel az intézmények alapvető szerepét a gazdasági növekedésben. A fejezet célja, hogy bemutassa, hogy az intézmények valóban ösztönzik a gazdasági növekedést.

[44] *"Institutions are the rules of the game in a society or, more formally, are the humanly devised constraints that shape human interaction. ... In consequence they structure incentives in human exchange, whether political, social, or economic." (North, 1990, 3. o).*

Történelmi példák

Acemoglu, Robinson és Johnson (2005a) történelmi példaként említi a tulajdonjog hiányának szerepét a középkori Európa hanyatlásában. Acemoglu, Robinson és Johnson (2005a), Mokyr (2010) és Pincus és Robinson (2014) megállapítja, hogy a XVII. századi Angliában a gazdasági és politikai intézményrendszer megváltozása a kereskedők és nemesek de facto politikai hatalmának növekedése következtében ipari forradalomhoz és gazdasági növekedéshez vezetett. Acemoglu és szerzőtársai (2011) az 1789-es francia forradalom szomszédos országok intézményrendszerére gyakorolt hatását és a beavatkozás következményeit vizsgálja. A tanulmány megállapítja, hogy az arisztokrácia privilégiumainak eltörlése és a jogi egyenlőség bevezetése 1850 után gyors városiasodáshoz és gazdasági növekedéshez vezetett a leigázott területeken. Acemoglu, Robinson és Johnson (2005a) és Acemoglu és Robinson (2013) természetes kísérletként Észak- és Dél-Korea szélsőséges példáját mutatja be. A mai Észak- és Dél-Korea területe az 1948-ban történt szétválás előtt szinte tökéletesen megegyező etnikai összetétellel, kultúrával, földrajzi és gazdasági adottságokkal rendelkezett, így az elmúlt 70 év gazdasági növekedése közötti óriási különbség a két ország eltérő intézményrendszerében keresendő. Észak-Korea szocialista állam és a kínai forradalom berendezkedését követte, míg Dél-Koreában a magántulajdon és a piacgazdaság mellett döntöttek.

A XV. századi európai gyarmatosítást vizsgálja Acemoglu és Johnson (2005), Acemoglu, Robinson és Johnson (2001), Acemoglu, Robinson és Johnson (2002) és Acemoglu, Robinson és Johnson (2005a). Kiinduló észrevételük, hogy az európai gyarmatok közül azok, amelyek a XV. században a leggazdagabbak voltak (mogulok Indiában, aztékok és inkák Amerikában) napjainkban a legszegényebbek, míg a kevésbé fejlett civilizációk helyén erős gazdaságokat találunk (Észak-Amerika, Ausztrália és Új-Zéland). A tanulmányokban a XV. századi gazdagság indikátora a városiasodás és a népsűrűség. A szerzők megállapítják, hogy a fordulat (a korábban fejletlenebb területek felzárkózása, majd rohamos fejlődése) a XVIII. század végén és a XIX. század elején, az ipari forradalom hatására következett be. Sachs (2001) tanulmányra és Diamond (1997) könyvre reflektálva kizárják, hogy a földrajzi elhelyezkedés számítana, hiszen eltérő időben ugyanazokat a területeket vizsgálják és az ipari technológiák bevezetése nem függ az éghajlattól. Hipotézisük szerint az intézményrendszer áll a gazdasági növekedés hátterében, hiszen a gyarmatosítás különböző módjai különböző intézményrendszereket eredményeztek. Az európai telepesek érdeke a ritkán lakott területeken a tulajdonjogot védő intézményrendszer bevezetése és a kormányzat hatalmának ellensúlyozása volt. Észak-Amerikában és Ausztráliában pillanatok alatt sok európai telepedett le, akik elhagyott országuk intézményrendszerét akarták lemásolni. Ezzel szemben a korábban is hierarchikusan szerveződő, fejlett, sűrűn lakott gyarmatokon az erőforrások (arany, ezüst, cukor, rabszolga) kiaknázásához erre nem volt szükség. Acemoglu, Robinson és Johnson (2001) alapján szélsőséges példa, hogy Kongó gyarmatosításakor a belgák egyetlen célja a gyarmat kizsákmányolása, az ásványkincsek kibányászása és elhurcolása volt, ezért nem védték törvények a magántulajdont és teljesen kiszolgáltatottá tették a lakosságot a kormányzati túlkapásokkal szemben.

Acemoglu, Robinson és Johnson (2005b) a gyarmatosítás, az atlanti kereskedelem és Nyugat-Európa gazdasági növekedése közötti kapcsolatot elemzi. Megállapítja, hogy a nemzetközi kereskedelem a kereskedők gazdasági és politikai erejének növekedésén keresztül közvetetten fejlesztette az intézményrendszert azokban az országokban, ahol az 1500-as évek előtt elkezdődő intézményi reform már korlátozta az uralkodók abszolút hatalmát. Az új intézményrendszer a társadalom széles rétegének biztosította a magántulajdon védelmét és szabad belépést a profitábilis üzletekbe, így szignifikánsan hozzájárult a gazdasági növekedéshez a gyarmatosítás közvetlen hatása mellett is.

Ökonometriai elemzések

Acemoglu és Johnson (2005), Acemoglu, Robinson és Johnson (2001), Acemoglu, Robinson és Johnson (2002), Acemoglu, Robinson és Johnson (2005a) és Acemoglu és szerzőtársai (2011) ökonometria vizsgálatok elvégzésével igazolja az intézmények szerepének hipotézisét. Az elemzések számos módszertani nehézséget és identifikációs problémát kezelnek a gazdasági növekedés és az intézményrendszer közötti kapcsolat vizsgálatakor. Kulcsprobléma az endogenitás. Ahhoz, hogy klauzális kapcsolatnak tekinthessük a függő (gazdasági növekedés) és magyarázó változók (intézmények) közötti kapcsolatot, a kapcsolat irányát is vizsgálni kell. Kérdés tehát, hogy nem a gazdagabb országok választanak-e jobb intézményrendszert maguknak. Emellett előfordulhat, hogy a mért korreláció oka, hogy az intézményrendszert és a fejlettséget is magyarázza egy harmadik változó (például a klíma vagy a kultúra), és valójában ezt a változót mérjük az intézményrendszeren keresztül. Az endogenitás miatt a legkisebb négyzetek módszerét alkalmazó becslés torzított, a torzítás iránya a változók közötti korrelációs együtthatóktól függ.

Megoldás az instrumentális változók módszere. Vincze (2018) jelölésrendszerét követve, legyen $\mathbf{y}$ valószínűségi változó az eredményváltozó és $\mathbf{x}$ egy valószínűségi változó vektor. A regressziós modell

$$\mathbf{y} = \beta\mathbf{x} + \epsilon, \tag{5.1}$$

ahol ϵ független, azonos eloszlású valószínűségi változó $E(\epsilon) = 0$ várható értékkel és $E(\epsilon\epsilon') = \sigma^2\mathbf{I}$ varianciával, és $E(\mathbf{x}\epsilon) \neq 0$. Legyen $\mathbf{z}$ instrumentum/instrumentális változó $\mathbf{x}$ változóval megegyező elemszámú valószínűségi vektor, amelyre $E(\mathbf{z}\epsilon) = 0$ és $E(\mathbf{x}\mathbf{z}')$ nemszinguláris. Az első feltétel szerint az instrumentum korrelálatlan a kihagyott változóval, nincs hatása az eredményváltozóra miután kontrolláltunk a magyarázó változókra és a kihagyott változókra. A feltétel nem tesztelhető, közgazdasági magyarázatra van szükség. A második feltétel szerint az instrumentum korrelál az endogén változóval.

A gyarmatosítás példájában az európai telepesek különböző intézményeket vezettek be azokon a területeken, ahol a környezet megfelelő a letelepedésükhöz, és azokon a helyeken, ahol nem. A letelepedés lehetőségét és az intézményrendszer fenntarthatóságát a betegségek (sárgaláz és malária) korlátozták, és a gyarmatosításkori halálozási ráta a jelenbeli jövedelmi szinttől független[45], ezért a jelenlegi intézményrendszer instrumentumaként használható az európai telepesek halálozási rátája[46]. Acemoglu, Robinson és Johnson (2001) logikai lánca szerint tehát az európaiak halálozási rátája befolyásolja a letelepedő európai telepesek számát, amely meghatározza a korai intézményrendszert, azaz a jelenlegi intézményrendszer elődjét, amely a mai fejlettséget magyarázó változó.

Acemoglu, Robinson és Johnson (2001) kiegészítéseként Acemoglu és Johnson (2005) a szerződésesség intézményeinek szerepét elemezve a gyarmatosító hatalom identitását használja instrumentumként. Míg Acemoglu és szerzőtársai (2011) tanulmányban a francia forradalom hatásának elemzésekor a kétlépcsős legkisebb négyzetek módszerét alkalmazó becslés során a francia invázió lesz az intézményi reformok instrumentuma. Az identifikációs stratégia működésének feltétele, hogy az intézményi reformot a leigázott területeken kikényszerítették, és hogy a terjeszkedés célpontját nem magas jövőbeli növekedési potenciállal rendelkező területek adták.

5.2.3. A támogató intézményi környezet és kialakulása

A következő szakasz az irodalom összefoglalásán keresztül vizsgálja, hogy milyen intézmények támogatják egy országban a gazdasági növekedést, hogy hogyan alakulnak ki ezek az intézmények, miért különbözik az országok intézményrendszere, és fejleszthetők-e a fejletlen országok a máshol bevált intézmények átültetésével.

[45] A halálozási ráta instrumentumnak választását az exogenitása indokolja: míg a gyarmatosításkor a sárgaláz és a malária volt bizonyos területeken az európai telepesek halálának fő oka, addig a helyi őslakosok immunisak voltak ezekre a betegségre, így az ő munkaképességüket nem befolyásolta egy esetleges fertőzés. Azaz nem lehetnek ezek a betegségek a mai szegénység okai.

[46] Pontosabban az adott gyarmatra küldött katonák, papok és tengerészek halálozási rátája, hiszen ez az, amire megbízható adat a XVII. és XIX. század közötti időszakra rendelkezésre áll Philip D. Curtin történész jóvoltából (Acemoglu, Robinson és Johnson, 2001).

A megfelelő intézményrendszer

Megfelelő intézmények mellett hatékony az erőforrások allokációja (Acemoglu, Robinson és Johnson, 2005a). De melyek azok az intézmények, amelyek a hatékony erőforrásallokációt biztosítják? A válasz nem egyértelmű, az irodalomban egyaránt találunk a tulajdonjog, a jogi intézmények és a belépési korlátok szerepét hangsúlyozó tanulmányokat (Acemoglu és szerzőtársai, 2011).

Acemoglu, Robinson és Johnson (2005a) érvelésében ahhoz, hogy egy intézmény a gazdaságot és a fejlődést támogassa, szükséges feltétel a tulajdon biztonságának biztosítása, hiszen a tulajdonjog ösztönzi a fizikai és emberi tőkébe történő befektetést és a hatékony technológiák bevezetését. A tulajdonjog szerepét erősíti meg Acemoglu és Johnson (2005). A tanulmány a tulajdonjogi intézmények és a szerződésesség intézményeinek hatását megkülönböztetve arra az eredményre jut, hogy míg a tulajdonjogi intézmények hatnak a gazdasági növekedésre, a beruházásra és a pénzügyi fejlődésre, addig a szerződésesség intézményei csak a pénzügyi közvetítést befolyásolják. Empirikus eredményüket azzal magyarázzák, hogy a kedvezőtlen feltételeket egy szerződés megkötésekor a piaci szereplők módosítani tudják, a kisajátítás ellen viszont védtelenek.

A tulajdonjog szerepe mellett szintén fontos, hogy az intézmények közel egyenlő hozzáférést biztosítsanak a társadalom széles rétegének a gazdasági erőforrásokhoz (Acemoglu, Robinson és Johnson, 2005a,b). Acemoglu és szerzőtársai (2011) megállapítása szerint a francia invázió összetett intézményi reformja (az első polgári törvénykönyv (*Civil Code*) bevezetése, a céhek és feudális járadékok eltörlése, törvény előtti egyenlőség és az arisztokraták kiváltságainak megszüntetése) azért eredményezett az iparosodáskor gyorsabb növekedést, mert az innovációt és a vállalkozói aktivitást támogató környezetet teremtett. Acemoglu (2008) elméleti modellje a demokratikus és oligarchikus társadalmak gazdasági növekedését veti össze és a hatékonyabb vállalkozók piacra lépését korlátozó intézmények torzító hatására világít rá.

Az intézmények kialakulása és változása

Az aggregált növekedést maximalizáló intézményrendszer gyakorlati bevezethetősége kérdéseket vet fel. Az irodalom vizsgálja, hogy az intézmények tervezhetőek-e és alakíthatóak-e tudatosan, vagy spontán, evolúciós folyamat eredményeként alakulnak ki (Kapás, 2011; Acemoglu és szerzőtársai, 2011). Hayek (1960) érvelése szerint az intézmények evolúciós folyamat során születnek, a reformok nem vezethetőek be exogén módon. Elméletében a 17. századi angol átalakulás is egy hosszú evolúciós folyamat eredményeként bontakozott ki. Az állítást megerősíti, hogy Murrell (2017) 1688 előtti strukturális töréspontokat talál a vizsgált társadalmi és gazdasági idősorokban és hangsúlyozza, hogy a parlamentáris kereteket (*Bill of Rights*) és a trónöröklés rendjét (*Act of Settlement*) lefektető törvények elemei közül számos korábban életbe lépett, számos eltörlésre került. Az evolúciós elmélettel szemben North és Weingast (1989) az angol politikai és gazdasági intézmények tudatos átalakítása mellett érvel, Acemoglu és szerzőtársai (2011) pedig a napóleoni háborúban leigázott területek erőszakkal átalakított intézményrendszerének későbbi sikerességét bizonyítja.

A megfigyelhető végeredmény, hogy az országok intézményrendszere különbözik, amit Acemoglu, Robinson és Johnson (2005a) alapján a Coase tételen alapuló hatékony intézményekből, ideológiai különbségekből, történelmi véletlenek során kialakuló intézményekből és társadalmi konfliktusok eredményeként kialakuló intézményrendszerből kiinduló elméletek magyarázhatnak.

Acemoglu, Robinson és Johnson (2005a) és Acemoglu és Robinson (2001) szerint a társadalmi konfliktus oka, hogy különböző társadalmi csoportok és egyének különböző intézmények bevezetésekor kerülnek jobb helyzetbe. Az intézményekről az erősebb politikai hatalommal rendelkező társadalmi csoport dönt. A szerzők dinamikus elméleti modelljében az állapotváltozó a politikai intézményrendszer és az erőforrások eloszlása. Minden időszakban a politikai intézmények határozzák meg a de jure politikai hatalmat, míg a gazdasági erőforrások eloszlása a de facto politikai hatalmat. A de jure és de facto politikai hatalom dönt a gazdasági intézményekről és a következő időszaki politikai intézményekről. A gazdasági intézményrendszer megváltoztatásával nem elégszik meg a de facto politikai hatalom, a politikai intézmények sem állandóak, hiszen a politikai intézmények megváltoztatásával biztosítják, hogy a jövőben is befolyásolni tudják az intézményeket.

A kérdés tehát, hogy az aggregált növekedést maximalizáló politikai és gazdasági intézményeket választja-e a politikai hatalommal rendelkező csoport. Csak abban az esetben, ha ezen intézmények esetén lesznek a jövőben várható kifizetéseik a legmagasabbak a társadalom válaszlépéseinek figyelembevétele mellett. Acemoglu és Robinson (2000) elméleti modellje megerősíti, hogy az új technológiai megoldások bevezetését és az innovációt megakadályozza, ha a politikai hatalommal rendelkező csoport elveszítené az erejét a gazdaság fejlődésével párhuzamosan. Székely-Doby (2014) és Székely-Doby (2017) alapján példaként hozható a kínai reformfolyamat jelenlegi megrekedése: Kínában a járadékok és privilégiumok miatt az elit nem érdekelt a piacgazdaság intézményrendszerének kiépítésében és a politikai reform végrehajtásában.

Acemoglu, Robinson és Johnson (2005a) elköteleződési problémára világít rá, a politikai hatalom nem tudja hitelesen bizonyítani, hogy nem fogja saját érdekeit szem előtt tartva módosítani később a kifizetések elosztását. Ennek következtében a fogolydilemma helyzetéhez hasonlóan a társadalom szereplői nem tudnak megegyezni az aggregált növekedést maximalizáló intézményrendszer választásában és a növekmény szétosztásában, hiába jutna végül ebben az esetben minden fél magasabb kifizetéshez a megvalósuló kimenetben realizálthoz képest. A Coase-tétel nem működik.

A politikai és gazdasági intézményrendszer változásának egyik lehetséges oka a felvázolt keretrendszerben, ha a de facto politikai hatalom már nem az aktuális politikai elit kezében van. Acemoglu és Robinson (2006a) alapján az elköteleződési probléma megoldása a demokratizálódás, ha a de facto hatalom birtokosa a nép, és az elit csak így kerülheti el a forradalmat. Acemoglu és Robinson (2001) játékelméleti modelljében a válság, amelynek oka lehet gazdasági visszaesés is, csökkenti a kollektív cselekvés, és ezzel a forradalom/puccs költségét. A gazdaság teljesítménye tehát befolyásolja a politikai intézményrendszert, a demokrácia létrejöttét és fennmaradását.

Változhatnak azonban úgy is a de jure politikai hatalom intézményei, hogy közben a de facto politikai hatalmat meghatározó gazdasági intézmények perzisztensek maradnak (Acemoglu és Robinson, 2006b, 2008). Ilyenkor a de jure politikai hatalom elvesztését az elit a kollektív cselekvés intenzitásának növelésével (erősebb lobbitevékenységgel, erőszakkal, megvesztegetéssel) ellensúlyozza. Acemoglu és Robinson (2008) példaként az amerikai polgárháború után a déli államok átalakulását említi: az ültetvények és a mezőgazdaság dominanciája nem változott, a rabszolgatartást a munkavállalók (egyoldalú megállapodásokkal, a mobilitás korlátozásával, megfélemlítéssel, erőszakkal és lincseléssel történő) elnyomása váltotta fel.

5.3. A tranzakciós költség, a munkamegosztás és a növekedés kapcsolata

A fejezet az intézmények és a gazdasági növekedés között feltárt összefüggést a tranzakciós költség szerepének vizsgálatával egészíti ki. Fernández és Tamayo (2017) a pénzügyi közvetítőrendszer fejlettségét a piaci súrlódásokon (információs aszimmetrián és a tranzakciós költségen) keresztül méri. A modellben a piaci súrlódásokat a gyarmatosítás, a történelmi döntések és a jogi gyökerek nyomán kialakult intézmények (a tulajdonjogi intézmények, a szerződések kikényszeríthetősége, a makrogazdasági és pénzügyi stabilitás, illetve az informális intézmények) határozzák meg. A piaci súrlódások a finanszírozási korlátokban, a kockázatmegosztás mértékében, a likviditás szűkösségében és a piaci fegyelem szintjében testesülnek meg, melyek befolyásolják a felhalmozást és az elosztást. Fernández és Tamayo (2017) tehát azokat a csatornákat és piaci súrlódásokat elemzi, amelyeken keresztül az intézmények hatnak a gazdasági növekedésre.

Yang és Borland (1991) dinamikus általános egyensúlyelméleti modellt épít, amelyben a gazdasági növekedést a munkamegosztás fejlődésén keresztül ragadja meg.

A tanulmány hangsúlyozza, hogy az, hogy hatékonyak-e a tranzakciók, meghatározza az országban a munkamegosztás kialakulását és erősödését, és ezen keresztül a gazdaság teljesítményét. Érvelésében a tranzakciók hatékonyságát a kormányzati politikák, az intézmények és a városiasodás egyaránt befolyásolják, és így hatnak a gazdasági növekedésre is[47].

Jelen fejezetben a bevezetett általános egyensúlyelméleti modell a tranzakciós költség és a piaci szereplők közötti kockázatmegosztás közötti kapcsolatot elemzi. A vizsgált kérdés Fernández és Tamayo (2017) ok-okozati láncának egyik részproblémájaként egészíti ki az intézmények és gazdasági növekedés összefüggéseit feltáró általános irodalmat, amelyet a fejezet első fele összefoglalt. Yang és Borland (1991) tanulmányhoz hasonlóan a modellben a munkamegosztás megvalósulása a gazdasági növekedés kulcsa.

Feltesszük, hogy a két piaci szereplő a 0. időszakban ugyanazt a készletet realizálja, ugyanakkor az 1. időszakban választhatnak a magasabb, de bizonytalan kifizetést biztosító munkamegosztás, és a 0. időszak kifizetését eredményező önellátás között. Munkamegosztás esetén a két különböző piaci szereplő két különböző specializációt választó csoportot reprezentál: az egyik csoport/szereplő az első világállapotban, a másik a második világállapotban realizál pozitív készletet. A kockázatmegosztás feltétele, hogy az állam megteremtse azt az intézményi környezetet, amely lehetővé teszi, hogy a két reprezentatív szereplő egymással kereskedhessen, ezzel csökkentve a jövőbeli kifizetés bizonytalanságát és simítva a fogyasztást a két világállapot között. Ugyanakkor az állam tranzakciós költséget vezet be, amely visszafogja a kockázatmegosztást. A bevezetett tranzakciós költség szintjének függvényében vizsgáljuk, hogyan változik az egyensúly, és meddig éri meg a két reprezentatív piaci szereplőnek a munkamegosztást választani a biztos jövőbeli kifizetés helyett. Elemezzük, hogy az aggregált növekedést maximalizáló tranzakciós költséget, azaz intézményt választja-e a politikai hatalommal rendelkező állam, amely a társadalom válaszlépéseit figyelembevéve maximalizálja kifizetését.

5.3.1. Jelölésrendszer

Az összefüggések vizsgálatához a Hevér (2020) tanulmányban és a 4. fejezetben közölt modell speciális esetét alkalmazzuk[48]. A piaci szereplők 0% kamatlábú

[47]Eredeti nyelven idézve a kulcs gondolat: "It is evident that transaction efficiency has an important effect on the evolution of the division of labor and thereby on economic growth, changes in the extent of the market, trade dependence, endogenous comparative advantage, and the speed of human capital accumulation. Since government policies, institutional arrangements, and urbanization all affect transaction efficiency in important ways, their effects on the evolution of the division of labor and thereby on economic growth are also critical." (Yang és Borland, 1991, 478. o)

[48]Hevér (2020) tanulmányban a modell felépítése alapvetően Le Roy és Werner (2001) könyvre támaszkodik.

kockázatmentes eszközt és egy kockázatos eszközt tarthatnak. A kétidőszakos modellben a kockázatos eszközzel a 0. időszakban kereskednek, a kifizetések az 1. időszakban történnek. Az első időszakban $\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}$ valószínűséggel $S = 2$ különböző világállapot realizálódhat. Jelölje a kockázatos eszköz kifizetését $x_1 \in \mathbb{R}$ az első, és $x_2 \in \mathbb{R}$ a második világállapotban. Ekkor $x = [x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$ vektor a kockázatos eszköz kifizetése a két világállapotban. A megoldás során legyen $x = [\hat{x}, -\hat{x}]$, azaz a kockázatos eszköz az egyik világállapotban pozitív, a másik világállapotban negatív kifizetést biztosít. Jelölje t a kockázatos eszközre vonatkozó tranzakciós költséget, amelyet az állam vezet be. Az állam profitfüggvényét jelölje $\Pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A kockázatos eszköz tranzakciós költség nélküli egyensúlyi ára m.

A gazdaság két reprezentatív csoportját modellezzük, ezért legyen $|I| = 2$ a piaci szereplők halmaza. A kockázatos eszközből $\theta^i \in \mathbb{R}$ pozíciót választanak a szereplők. Ha $\theta^i > 0$, akkor a kockázatos eszközt tartja az i-edik piaci szereplő, $\theta^i < 0$ esetén rövidre adta el. Le Roy és Werner (2001) alapján az i-edik szereplő fogyasztása c_0^i a 0. időszakban, c_{11}^i és c_{12}^i az 1. időszak 1. és 2. világállapotában. Így a $c_1^i = [c_{11}^i, c_{12}^i]$ vektor az 1. időszakban választott, világállapottól függő fogyasztási szintet jelöli. Az i-edik szereplő rendelkezésére álló készlet ω_0^i a 0. időszakban, és $\omega_1^i = [\omega_{11}^i, \omega_{12}^i]$ az 1. időszak két világállapotában. Feltesszük, hogy munkamegosztás választása esetén a két reprezentatív szereplő különböző jövőbeli világállapotban realizál pozitív készletet, azaz $\omega_{11}^1 > 0$ és $\omega_{12}^1 = 0$, illetve $\omega_{11}^2 = 0$ és $\omega_{12}^2 > 0$. A Az i-edik szereplő preferenciáit a folytonos $u^i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ hasznossági függvény írja le.

5.3.2. A döntési fa (játék) leírása

A modellben a 0. időszak első lépéseként az állam tranzakciós monopolistaként, bevételének maximalizálásával meghatározza a t tranzakciós adó szintjét, amit a piaci szereplők kereskedésének minden egysége után beszed. Miután a két reprezentatív csoport/piaci szereplő megismerte a tranzakciós adó szintjét, eldönti, hogy a jövőbeli világállapottól függő bizonytalan kifizetést biztosító munkamegosztást, vagy a 0. időszakban realizált készlettel megegyező, biztos jövőbeli kifizetést választja. Biztos kifizetés mellett a piaci szereplők nem tartanak kockázatos és kockázatmentes eszközt, a tőkepiac befagy, $\theta = 0$ és $\theta_0^1 = \theta_0^2 = 0$ határozza meg a 0. időszaki fogyasztást. Munkamegosztás esetén a 0. időszakban a piaci szereplők hasznosság-maximalizálási probléma megoldásán keresztül meghatározzák az optimális kockázatos eszköz-pozíciót, az optimális készpénzmennyiséget, és az optimális fogyasztási szintet. A 0. időszaki és az 1. időszaki sztochasztikus készlet határozza meg, hogy szabad tranzakciós környezetben a munkamegosztást preferálják-e a piaci szereplők az önellátással szemben. Az 1. időszakban bekövetkezik az első vagy a második világállapot, a szereplők realizálják a készletet és a kockázatos eszköz kifizetését, majd fogyasztanak.

A modellt visszafelé oldjuk meg, az egyensúly meghatározásához a reprezentatív piaci szereplők t minden szintje mellett meghatározzák legjobb válaszukat, majd az állam ennek ismeretében dönt az optimális tranzakciós adóról. Az állam csak akkor realizál pozitív kifizetést, ha a piaci szereplők a munkamegosztás mellett döntenek, ezért a tranzakciós költség szintjének meghatározásakor figyelembe veszi, hogy a piaci szereplők legjobb válasza a munkamegosztás maradjon. A modellben négy kimenet lehetséges:

1. Tranzakciós adó nélkül is az önellátás a piaci szereplők optimális döntése. Ekkor az állam döntése irreleváns, kifizetése mindenképpen 0.

2. Tranzakciós adó nélkül a piaci szereplők a munkamegosztást választanák, az állam optimális adókulcsa mellett közömbös az önellátás és a munkamegosztás közötti választás. Mivel Pareto-javítás, ezért feltesszük, hogy optimumban a piaci szereplők munkamegosztás mellett döntenek, annak ellenére, hogy a teljes többlet az államhoz kerül.

3. Tranzakciós adó nélkül és az állam optimális adókulcsa mellett is a munkamegosztást választják a piaci szereplők. A munkamegosztás miatti többletet részben a piaci szereplők, részben az állam realizálja.

4. Tranzakciós adó bevezetésekor a kockázatmegosztás meghiúsul, de a piaci szereplők optimális döntése a munkamegosztás marad. A munkamegosztásból származó pótlólagos hasznosságot a piaci szereplők realizálják, de a kockázatmegosztás ellehetetlenítése miatt a növekmény lecsökken.

A munkamegosztás és az önellátás gyakorlata miatt a 2., 3. és 4. pont vizsgálata releváns, így a fejezet további részében feltesszük, hogy az ω_0^i és az ω_1^i készletek mellett szabad tranzakciós környezetben a munkamegosztás preferált.

5.3.3. A döntési problémák és az egyensúly

Az i-edik szereplő optimális fogyasztási döntése munkamegosztás mellett a következő optimalizálási feladat megoldása

$$\max_{c_0^i, c_1^i, \theta^i, \theta_0^i} u^i(c_0^i, c_1^i) \tag{5.2}$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned}
c_0^i &\leq \omega_0^i - \theta^i m - |\theta^i|\frac{t}{2} - \theta_0^i \\
c_{11}^i &\leq \omega_{11}^i + \theta^i x_1 + \theta_0^i \\
c_{12}^i &\leq \omega_{12}^i + \theta^i x_2 + \theta_0^i.
\end{aligned}$$

A döntési változók a c_0^i és c_1^i fogyasztás, a θ^i kockázatos eszközpozíció és a θ_0^i félretett készpénzmennyiség. A hasznosságmaximalizálási döntést korlátozza a 0. időszaki és az 1. időszaki, két világállapotbeli költségvetési korlát.

A két reprezentatív csoport egymással kereskedve cseréli el a jövőbeli világállapottól függő kifizetést, ezért a piactisztító feltétel a tőkepiacon

$$\theta^1 + \theta^2 = 0. \tag{5.3}$$

Amikor a tőkepiac egyensúlyban van a költségvetési korlátok összegzése biztosítja a fogyasztási piacok egyensúlyát.

Az állam optimalizálási problémája

$$\max_t \Pi = \max_t t|\theta^1|$$

feltéve, hogy

$$u^1(c_0^1, c_{11}^1, c_{12}^1) \geq u^1(\omega_0^1, \omega_0^1, \omega_0^1) \tag{5.4}$$

$$u^2(c_0^2, c_{11}^2, c_{12}^2) \geq u^2(\omega_0^2, \omega_0^2, \omega_0^2) \tag{5.5}$$

és a befektető piaci szereplők hasznosságot maximalizálva döntenek a választott egyensúlyi $\theta^1 = -\theta^2$ pozícióról és a megtakarított készpénz θ_0^1 és θ_0^2 mennyiségéről. Feltesszük, hogy ha azonos hasznosságot eredményez, akkor a szereplők a munkamegosztást választják, ezért a (5.4) és (5.5) feltétel biztosítja munkamegosztás megvalósulását.

Egy egyensúly $\{\theta^{*i}, \theta_0^{*i}, c_0^{*i}, c_1^{*i}, t^*\}$ alakban adható meg, ahol a θ^{*i} optimális kockázatos eszköz-pozíció, a θ_0^{*i} optimális készpénzmennyiség, a c_0^{*i} és c_1^{*i} optimális fogyasztási szintek megoldásai a piaci szereplők optimalizálási feladatának, míg a t^* optimális tranzakciós költség az állam optimalizálási problémájának megoldása.

5.3.4. A piaci szereplők optimalizálási feladatának megoldása

Logaritmikus hasznossági függvényt és $x = [\hat{x}, -\hat{x}]$ kifizetést feltételezve írjuk fel a két szereplő[49] fogyasztási és eszközallokálási döntését[50]

$$\max_{c_0^1, c_1^1} \ln(c_0^1) + \frac{1}{2}\ln(c_{11}^1) + \frac{1}{2}\ln(c_{12}^1) \tag{5.6}$$

[49] A felső indexeket 1-ről 2-re cserélve a második szereplő problémáját kapjuk.

[50] A költségvetési korlátok egyenlőséggel teljesülnek, és a c_0^1 és c_1^1 fogyasztás szigorúan pozitív a logaritmikus függvény tulajdonságai következtében.

feltéve, hogy

$$\begin{aligned}
c_0^1 &= \omega_0^1 - \theta^1 m - |\theta^1|\frac{t}{2} - \theta_0^1 \\
c_{11}^1 &= \omega_{11}^1 + \theta^1 \hat{x} + \theta_0^1 \\
c_{12}^1 &= \omega_{12}^1 - \theta^1 \hat{x} + \theta_0^1.
\end{aligned}$$

Az első piaci szereplő az első jövőbeli világállapotban pozitív készletet realizál, ezért a kockázatos eszközt eladja ($\theta^1 < 0$), ami így az első világállapotban negatív, a második világállapotban pozitív kifizetést biztosít. Míg a második piaci szereplő a második világállapotbeli pozitív kifizetését cseréli első világállapotbelire a kockázatos eszköz tartásával ($\theta^2 > 0$). Mivel egymással kereskednek, ezért egyensúlyban $-\theta^1 = \theta^2 \doteq \theta$.

Ha $\omega_0^1 = \omega_0^2 \doteq \omega_0$ és $\omega_{11}^1 = \omega_{12}^2 \doteq \omega_1$, akkor a szereplők szimmetrikus helyzete miatt $c_0^1 = c_0^2 \doteq c_0$, $c_{11}^1 = c_{12}^2$, $c_{11}^2 = c_{12}^1$, $\theta_0^1 = \theta_0^2 \doteq \theta_0$ és $m = 0$. A (5.6) optimalizálási problémából a költségvetési egyenletek behelyettesítése és a tőkepiaci egyensúly felhasználása után a következő maximalizálandó függvény adódik

$$G(\theta, \theta_0) = \ln(\omega_0 - \theta\frac{t}{2} - \theta_0) + \frac{1}{2}\ln(\omega_1 - \theta\hat{x} + \theta_0) + \frac{1}{2}\ln(\theta\hat{x} + \theta_0)$$

Az elsőrendű feltételek megadhatóak mint

$$\begin{aligned}
\frac{-\frac{t}{2}}{\omega_0 - \theta\frac{t}{2} - \theta_0} + \frac{-\hat{x}}{2(\omega_1 - \theta\hat{x} + \theta_0)} + \frac{\hat{x}}{2(\theta\hat{x} + \theta_0)} &= 0 \\
\frac{-1}{\omega_0 - \theta\frac{t}{2} - \theta_0} + \frac{1}{2(\omega_1 - \theta\hat{x} + \theta_0)} + \frac{1}{2(\theta\hat{x} + \theta_0)} &= 0.
\end{aligned}$$

Rendezve

$$\hat{x}(\omega_1 - 2\theta\hat{x})(\omega_0 - \theta\frac{t}{2} - \theta_0) = t(\omega_1 - \theta\hat{x} + \theta_0)(\theta\hat{x} + \theta_0)$$
$$(\omega_1 + 2\theta_0)(\omega_0 - \theta\frac{t}{2} - \theta_0) = 2(\omega_1 - \theta\hat{x} + \theta_0)(\theta\hat{x} + \theta_0)$$

és megoldva az egyenletrendszert

$$\theta = \frac{\hat{x}\omega_0 t + \hat{x}\omega_1\frac{t}{2} + \omega_1\frac{t^2}{4} - \omega_1 2\hat{x}^2}{\hat{x}t^2 - 4\hat{x}^3} \tag{5.7}$$

$$\theta_0 = \frac{\hat{x}}{t}\left(\omega_1 - 2\frac{\hat{x}\omega_0 t + \hat{x}\omega_1\frac{t}{2} + \omega_1\frac{t^2}{4} - \omega_1 2\hat{x}^2}{t^2 - 4\hat{x}^2}\right) - \frac{\omega_1}{2}. \tag{5.8}$$

Ha nem lenne tranzakciós költség ($t = 0$), akkor a piaci szereplők elcserélnék egymással a jövőbeli eltérő világállapotban realizált kifizetés felét, így tökéletesen simítva a bizonytalan 1. időszaki fogyasztást

$$\theta = \frac{\omega_1}{2\hat{x}}.$$

A megtakarítás/hitelfelvétel pedig a két időszak fogyasztásának kiegyenlítését teszi lehetővé

$$\theta_0 = \frac{\omega_0}{2} - \frac{\omega_1}{2}.$$

A modellben tehát a tranzakciós környezet szabadsága esetén a piaci szereplők teljes mértékben eliminálhatnák a munkamegosztásból fakadó kockázatot, így a szereplők aggregált fogyasztása és hasznossága emelkedne, a gazdaság növekedne.

Ugyanakkor feltehető, hogy a kockázatmegosztás feltétele az állami intézményrendszer, az állam pedig $t > 0$ és $t < \frac{\hat{x}}{2}$ tranzakciós adót vet ki. Ekkor[51]

$$\frac{\hat{x}\omega_0 t + \hat{x}\omega_1\frac{t}{2} + \omega_1\frac{t^2}{4} - \omega_1 2\hat{x}^2}{\hat{x}t^2 - 4\hat{x}^3} < \frac{\omega_1}{2\hat{x}}.$$

A tranzakciós költség visszafogja a kereskedést, ezzel kezdetben rontva, majd ellehetetlenítve a kockázatmegosztás lehetőségét. Ha a tranzakciós költség szintje eléri a kockázatos eszköz jövőben várható kifizetésének a felét ($t \geq \frac{\hat{x}}{2}$), akkor a szereplők nem tartanak kockázatos eszközt. A készlet időszakok közötti megoszlása (ω_0 és ω_1) határozza meg, hogy a piaci szereplőknek a kockázatmegosztás lehetősége nélkül érdemes-e specializálódni, vagy a munkamegosztás és a gazdaság növekedése meghiúsul. Az állam optimalizálási problémájában ezért fontos szerepe lesz a munkamegosztás biztosításának.

5.3.5. Az állam problémája

Az állam számára kulcskérdés, hogy a munkamegosztás megvalósuljon, hiszen csak ebben az esetben tud a tranzakciós költség beszedésén keresztül bevételre szert tenni. Így egyensúlyban a modellben az aggregált növekedést maximalizáló politika a két reprezentatív csoport és az állam (politikai elit) számára egyaránt kívánatos lehet.

Az optimalizáló piaci szereplők a munkamegosztást választják, ha a kereskedés után elvont tranzakciós adó ellenére legalább akkora hasznosságot biztosít, mint az önellátás mellett elérhető $2\ln(\omega_0)$ hasznossági szint. Közömbös a választás tehát, ha

$$2\ln(\omega_0) = \ln\left(\omega_0 - \theta\frac{t}{2} - \theta_0\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\omega_1 - \theta\hat{x} + \theta_0\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\theta\hat{x} + \theta_0\right), \tag{5.9}$$

[51] Az egyenlőtlenség teljesülésének ellenőrzése például WolframAlpha segítségével végezhető el. A levezetést számolásigényessége miatt nem közöljük.

ahol θ és θ_0 értéke a (5.7) és (5.8) egyenlet alapján helyettesíthető be. A (5.9) egyenletből megadható a $\bar{t}$ korlát értéke t-re, amely fölött az önellátást, amely alatt a munkamegosztást választják a szereplők. Az állam érdeke a munkamegosztás, hiszen csak ebben az esetben tud bevételre szert tenni. Így az állam optimalizálási problémája

$$\max_t t\left(\frac{\hat{x}\omega_0 t + \hat{x}\omega_1 \frac{t}{2} + \omega_1 \frac{t^2}{4} - \omega_1 2\hat{x}^2}{\hat{x}t^2 - 4\hat{x}^3}\right)$$

feltéve, hogy

$$t \leq \bar{t}.$$

5.1. Példa. Legyen a készletek értéke $\omega_0 = 12$ és $\omega_1 = 30$, azaz 12 egység készpénzt realizálnak az önellátó szereplők a 0. időszakban, míg munkamegosztás esetén a realizált készlet az egyik világállapotban 30-ra emelkedik, a másikban 0-ra csökken. Ekkor a gazdaságban a realizált összes készlet munkamegosztás esetén 24-ről 30-ra emelkedik, a gazdaság növekszik. A munkamegosztás hatására mindkét szereplő termelékenysége több mint kétszeresére emelkedik, de a kifizetést a megvalósuló világállapot függvényében csak egyikük realizálja, így a munkamegosztás kockázatát a reprezentatív csoportoknak fedezni kell. A fedezéshez használható tőkepiaci eszköz kifizetése $x = (4; -4)$, azaz a megvásárolt kockázatos eszköz 4 egységet fizet az első világállapotban, ugyanakkor 4 egység befizetését jelenti a másikban. Ha a tranzakciós környezet szabad ($t = 0$), egymással kereskedve a két reprezentatív szereplő tökéletesen simítja a fogyasztást $c_0 = c^1_{11} = c^2_{11} = c^1_{12} = c^1_{12} = 13{,}5$, az elért hasznossági szint 5,2. A tranzakciók adóztatásának hatására a kereskedett kockázatos eszköz mennyisége csökken, az 1. időszaki optimális fogyasztás eltér a két világállapotban, a szereplők hasznossága alacsonyabb. A tranzakciós adó növelése fokozatosan felemészti a munkamegosztás miatti aggregált készletnövekedésből fakadó előnyt. Ha az 1. időszakban is önellátás mellett döntenek a piaci szereplők, akkor

$\mathbf{t}$	θ_0	θ	$\mathbf{c_0}$	$\mathbf{c^1_{12} = c^2_{11}}$	$\mathbf{c^1_{11} = c^2_{12}}$	$\mathbf{u}$	$\mathbf{\Pi}$
0	3,8	-1,50	13,5	13,5	13,5	5,2	0
1	3,4	-2,24	12,6	14,4	11,2	5,1	3,4
2	3,0	-2,60	11,6	15,5	9,3	4,9	6,0
3	2,6	-2,56	10,7	17,1	7,8	4,8	7,8
4	2,1	-2,00	9,8	19,5	6,5	4,7	8,5
5	1,5	-0,54	8,8	23,5	5,4	4,6	7,5
6	0,4	3,00	7,9	31,5	4,5	4,5	2,3

5.1. táblázat. Eredmények a tranzakciós költség szintjének függvényében

4,97 hasznosságot érnek el, ezért ha a tranzakciós adó 1,76 fölé emelkedik, akkor már nem éri meg a munkamegosztást választani. Ugyanakkor az állam érdeke a munkamegosztás, hiszen bevétele önellátás esetén 0, ezért nem emeli a tranzakciós adót arra a szintre, ami számára az önellátás lehetősége nélkül optimális lenne (5.1. táblázat alapján ez az optimális érték 4). Egyensúlyban, ha az állam a tranzakciós adóról bevételét maximalizálva dönt, közömbös a két reprezentatív csoport önellátás és munkamegosztás közötti választása. Feltettük a modellben, hogy ebben az esetben munkamegosztást választanak a szereplők, így a példában a gazdaság növekszik, de a növekményre az állam teszi rá a kezét.

5.4. Összefoglalás

A fejezet első fele az intézmények és a gazdasági növekedés kapcsolatát feltáró irodalom bemutatására helyezi a hangsúlyt. Az intézmények olyan társadalmi döntések, amelyeket a következményeik miatt választanak. Történelmi példák sora (Anglia intézményrendszerének átalakulása a XVII. században, Észak- és Dél-Korea esete, a napóleoni háborúk szomszédos országokra gyakorolt hatása, az európai gyarmatok eltérő intézményrendszere, az atlanti kereskedelem nyertesei) és ökonometria elemzések támasztják alá az intézmények gazdasági növekedésben betöltött fontos szerepét. A hatékony erőforrásallokáció feltétele, hogy az intézmények biztosítsák a tulajdon biztonságát és közel egyenlő hozzáférést a társadalom széles rétegének a gazdasági erőforrásokhoz (Acemoglu, Robinson és Johnson, 2005a). Akár spontán folyamat, akár tudatos tervezés eredményeként születnek az intézmények, végeredményben az országok intézményrendszere különböző, amelynek hátterében a társadalmi konfliktusok elmélete állhat. Az elmélet szerint a poltikai hatalommal rendelkező társadalmi csoport saját érdekét szem előtt tartva dönt az intézmények bevezetéséről, az aggregált növekedést maximalizáló intézményrendszer választása nem garantált.

Az irodalom összefoglalása után célunk egy részprobléma, a tranzakciós költség bevezetése következtében visszaeső kockázatmegosztás modellezése. Döntési fába ágyazott általános egyensúlyelméleti modellben vizsgáljuk a szereplők optimális döntésének megváltozását a tranzakciók adóztatásakor. A két reprezentatív piaci szereplő munkamegosztás és önellátás közül választhat. A munkamegosztás magasabb, de bizonytalan (kizárólag az egyik világállapotban realizálódó) jövőbeli kifizetést biztosít. A kockázatmegosztás feltétele az intézményrendszer kiépítése. Ekkor a piaci szereplők kereskedhetnek, ezzel simítva az időszakok és a világállapotok közötti fogyasztási pályát és maximalizálva hasznosságuk. Tranzakciós költség nélkül tökéletes lenne a kockázatmegosztás, a munkamegosztás következtében az aggregált készlet (amelyre tekinthetünk a termelékenység mutatójaként), a szereplők fogyasztása és hasznossága emelkedne. Ugyanakkor az állam a pénzügyi közvetítés feltételeinek megteremtésével párhuzamosan tranzakciós adót vezet be. A tranzakciós költség növelésekor a piaci szereplők egyensúlyban kevesebb kockázatos eszközt adnak/vesznek, a természetes kitettségből fakadó kockázat teljes eliminálása nem valósul meg, fogyasztásuk és hasznosságuk csökken. Szélsőséges esetben a tranzakciós adó emelése önellátás választását eredményezheti, így a munkamegosztás lehetőségéből fakadó gazdasági növekedés nem realizálódik.

Ha a tranzakciós költség szintjéről bevételt maximalizálva dönt az állam, akkor önérdekkövetése biztosítja, hogy egyensúlyban a piaci szereplők optimális döntése a munkamegosztás marad. A készletek határozzák meg, hogy a munkamegosztásból fakadó többlet teljesen vagy csak részben kerül az államhoz. A fejezetben a tranzakciós költség megjelenésével modelleztük az intézményi környezet megváltozását és vizsgáltuk, hogy a szereplők önérdekkövetése mellett a kockázatmegosztás lehetőségének visszaszorulása mikor veszélyezteti a gazdasági növekedés kulcsát jelentő munkamegosztást.

6. fejezet

Összefoglalás

Az értekezés 2., 3., 4. és 5. fejezete négy önállóan is olvasható, ugyanakkor szervesen összekapcsolódó tanulmánynak tekinthető. A fejezeteket összekapcsolja a likviditás központi szerepe, a módszertan (például a feltételes optimalizálás alkalmazása a megoldás során) és az egységes jelölésrendszer. A 2. fejezet a piac befolyásolására képes intézményi szereplők szempontjából vizsgálja, és permanens árhatással módosítja Acerbi és Scandolo (2008) likviditási elvárás melletti portfólióértékelését. A 3. és 4. fejezet a szabályozás hatására megváltozó piaci likviditást modellezi általános egyensúlyelméleti keretben, marginális kereslet-kínálati görbét (3. fejezet), majd árrést (4. fejezet) alkalmazva. Az 5. fejezet pedig a tranzakciós költség kockázatmegosztást visszaszorító hatását elemzi az intézmények és a gazdasági növekedés kapcsolatát vizsgáló irodalomba ágyazva.

Az intézményi befektetők szempontjából a likviditási kockázat mérésének és kezelésének kiemelt jelentősége van. Acerbi és Scandolo (2008) a portfólió értékét az előírt likviditási elvárás és az eszközök pillanatnyi likviditását leíró marginális keresleti-kínálati görbék mellett határozza meg. A portfólió értéke az eredetiből (egy részportfólió likvidálásán keresztül) elérhető olyan portfóliók piaci áras értékének maximuma lesz, melyek teljesítik a megadott likviditási elvárást. Acerbi és Scandolo (2008) felteszi, hogy a részportfólió likvidálásának nincs permanens árhatása, így a végső optimális portfólió az eredeti marginális keresleti-kínálati görbe mellett értékelhető. Ugyanakkor intézményi befektetők portfólió-allokációról szóló döntéseiben saját kereskedésük árhatása fontos szerepet játszik, így nagy volumenű értékpapírtranzakciók végrehajtásakor az optimális stratégia meghatározása a permanens és az ideiglenes árhatás figyelembevételével történik (Almgren és Chriss, 2001).

A vázolt probléma megoldásaként a 2. fejezetben a likviditási elvárás melletti portfólióértéket a kereskedés következtében jelentkező permanens árhatás figyelembevétele mellett határoztuk meg. Az illusztrációként használt példában minimális készpénzmennyiséget előíró likviditási elvárás és exponenciális függvénnyel közelített marginális keresleti-kínálati görbe mellett már mérsékelt permanens árhatás is teljesen megváltoztatta az elérhető portfóliót, miközben enyhén módosította a portfólió értékét. A permanens árhatás szerepeltetése a készletezési hatás miatt az árelfogadás feltételének sérülésével jár együtt, hiszen a piaci szereplő kereskedéssel eltolhatja, akár manipulálhatja is az árakat. Permanens árhatás figyelembevételével az intézményi befektetők portfóliójának likviditási elvárás melletti értéke pontosabban határozható meg. Az így definiált portfólióértéket használhatnánk kockázati mértékek számszerűsítésekor, tőkekövetelmények meghatározásakor, illetve portfóliókezelők teljesítményének vizsgálata során.

A 3. és 4. fejezetben célunk egy olyan modellkeret bevezetése, melyben vizsgálható a szabályozás és a piaci likviditás kapcsolata. Elméleti modellek és a gyakorlati tapasztalat alapján a kockázatvállalás visszafogása és a likviditási sokkok megelőzésének érdekében bevezetett szabályozói lépések visszahathatnak a piaci likviditásra. Az általános egyensúlyelméleti modell váza Le Roy és Werner (2001) könyvre épül, ugyanakkor a kutatási kérdés elemzéséhez fontos módosításokat eszközöltünk: endogén marginális keresleti-kínálati görbét, illetve endogén árrést alkalmaztunk, kiemeltük a kockázatmentes eszközt a kockázatos eszközök közül, és *Expected Shortfall* függvényében megadott szabályozói előírást vezettünk be.

A piaci szereplők portfólió-allokálási döntésekor a portfólió megvásárlása, illetve eladása a marginális keresleti-kínálati görbe alapján meghatározható likvidációs értéken történik, így a piac likviditását is figyelembe vesszük. A szabályozási előírás bevezetésének piaci likviditásra gyakorolt hatása endogén marginális keresleti-kínálati görbe segítségével vizsgálható. Ennek megfelelően a modellben árjegyző párosítja az ellenoldali ajánlatokat és a beszedett tranzakciós költséget maximalizálja a marginális keresleti-kínálati görbe meghatározásával. Az árjegyző exogén módon megadott alakú (lineáris, exponenciális, lépcsős) marginális keresleti-kínálati görbe paramétereiről dönt. Mivel a piaci szereplők szimultán optimalizálnak kiegészítő feltevéssel biztosítható csak, hogy egyensúlyban minden eszközt egyetlen szereplő keressen, illetve kínáljon. Megoldásként a 3. fejezet második felében kétszereplős modellt vizsgáltunk és illusztráltunk példák segítségével. Míg a 4. fejezet árrés alkalmazása mellett N és két szereplő mellett egyaránt vizsgálta a megoldást, analitikus levezetéssel erősítette meg a 3. fejezet eredményeit.

A kockázatmentes eszköz minimális szintjét meghatározó szabályozói előírás bevezetésének előfeltételeként a kockázatmentes eszközt kiemeltük a kockázatos eszközök közül. A tőkepiaci egyensúly feltétele nem vonatkozik rá, a piaci szereplők egymástól függetlenül tarthatnak készpénzt, vagy vehetnek fel hitelt (0% kamatláb mellett). A szabályozói előírás az eszközök, a portfóliók vagy a természetes kitettséggel korrigált portfóliók szintjén definiált *Expected Shortfall* függvényeként egyaránt megadható. A különböző szabályozási előírások eltérő egyensúlyi portfóliókat eredményeznek. A kockázatvállalás visszafogásának alternatív eszközeként fedezettartási kötelezettség bevezetésének lehetőségét is bemutattuk.

A modellben a piaci szereplők kereskedésének célja a jövőbeli kifizetés bizonytalanságából fakadó kockázat mérséklése, a fogyasztás simítása és hasznosságuk maximalizálása. A piaci szereplők kockázatos pozíciót vállalnak a tőkepiacon, ezzel fedezve természetes kitettségüket. A szabályozó ugyanakkor nem ismeri a piaci szereplők jövőbeli világállapottól függő sztochasztikus készletét, ezért nem tudja megkülönböztetni a fedezést a spekulációtól. A kockázatvállalás visszaszorítását a kockázatos tőkepiaci pozíció szabályozásával éri el, a portfólió szintjén definiált várható veszteség (*Expected Shortfall*) függvényeként vezet be szabályozói előírást. A δ paraméter határozza meg, hogy a tőkekövetelmény az ES mekkora hányada legyen. Egyértelmű, hogy mivel szabályozás esetén egy új korláttal bővül a piaci szereplők feltételes szélsőérték feladata, az optimalizáló szereplők helyzete nem javulhat. Amíg a szabályozói előírás redundáns, az egyensúly nem változik. Ha a szabályozói előírás miatt új egyensúly alakul ki, akkor a kereskedés és a kockázatmegosztás visszaesik, a piaci szereplők hasznossága alacsonyabb.

A szabályozói előírás bevezetése az optimalizáló árjegyző problémáját is megváltoztatja, így nemcsak közvetetten, hanem közvetlenül is rontja a piaci szereplők helyzetét. Ha adott szabályozói paraméter mellett a szabályozói előírás köt, akkor az árjegyző egészen addig emeli a tranzakciós költséget, amíg a szabályozói előírás redundáns nem lesz. Ha az árjegyző növeli az exponenciális marginális keresleti-kínálati görbe paramétereit (vagy az árrést), akkor a piaci likviditás csökken. A δ szabályozói paraméter emelkedése mellett az árjegyző egyre kevésbé likvid MSDC-t (magasabb árrést) határoz meg. Minél szigorúbb tehát a bevezetett szabályozói előrás, annál jobban csökken a piacon a likviditás. A modell felhívja a figyelmet arra, hogy a megfelelő szabályozási mechanizmus kiválasztásakor a szabályozás likviditásra gyakorolt hatását is célszerű figyelembe venni.

A szabályozás nélkülözhetetlen. Az állítást bizonyítják az elméleti közgazdaságtan eredményei (Hardin, 1968; Stigler, 1971), az elmúlt évtizedek válságai, a válságokat elemző tanulmányok (Brunnermeier és Pedersen, 2008), illetve a szabályozó szervek jelentései és stressztesztjei (IOSCO, 2019a; OECD, 2011). Célunk az értekezésben nem a szabályozás szükségességének megkérdőjelezése. Az elméleti modell nem jeleníti meg a szabályozás hozadékát, csupán a szabályozás költségeinek vizsgálatára fókuszál. Egyrészt, mert a gyakorlatban is találunk olyan problémákat, például a fenntarthatóság vagy ESG szempontok figyelembevétele során, amikor bár egyértelmű a beavatkozás szükségessé, a lépések hozadékának kvantifikálása nehezen vagy egyáltalán nem végezhető el. Másrészt, már a leegyszerűsített modell alkalmazása is rávilágít három kulcskérdésre, a likviditástartás előírásának lehetséges költségeire, a visszacsatolási mechanizmusok fontosságára és az aszimmetrikus információ problémájára (azaz a természetes kitettség ismeretének hiányára).

Mindhárom eredmény kapcsolódik gyakorlati problémákhoz. A modellben a likviditás tartásának előírása a kockázatmegosztás visszaesésén keresztül a piaci likviditás csökkenéséhez vezet. A gyakorlatban Pozsar (2019) a G-SIB (*globally systemically important*) bankokra vonatkozó Basel III. elemeként meghatározott likviditási szabályok bankközi piacon megfigyelhető következményeiről ír, míg IOSCO (2019a) a vállalati kötvénypiacon elemzi a szabályozási lépések bevezetése után a likviditást.

Az értekezés hangsúlyozza a visszacsatolási mechanizmusok jelentőségét, és megerősíti, hogy a szabályozási lépések közvetlen hatása mellett közvetett hatással is számolni kell. Az ESG szempontokat figyelembevevő szabályozási lépések bevezetése előtt is vizsgálják az előírás tőkepiacon megfigyelhető várható hatását (European Commission, 2020).

Továbbá a modellben és a gyakorlatban is kiemelt problémakör a természetes kitettség megismerésének kérdése. A modellben a bevezetett szabályozói előírás azért módosítja a szereplők optimális döntését és azért hat vissza a piaci likviditásra, mert a szabályozó úgy határozza meg az előírást, hogy nem ismeri a piaci szereplők természetes kitettségét. A kérdés az, hogy megkülönböztethető-e a gyakorlatban a spekuláns attól, aki a természetes kitettségét fedezi. A válasz nem egyértelmű. A problémát felismerve a CME (*Chicago Mercantile Exchange*) a mezőgazdasági termékekre vonatkozó határidős ügyletek esetében a limitek meghatározásakor figyelembe veszi, hogy a szereplő spekulál vagy a természetes kitettségét fedezi[52]. Egy hitelelbírálási folyamat során a bank célja szintén a természetes kitettség feltérképezése, az adós gazdasági helyzetének minél pontosabb megismerésén keresztül. Ugyanakkor a realizálódó világállapottól függő jövőbeli készlet pontos megismerése nem lehetséges, így a szabályozó a rendelkezésére álló információk alapján általánosan alkalmazandó adósságfék-szabályokat vezet be[53], hogy mérsékelje az ügyfelek eladósodását.

Az 5. fejezetben az intézmények és gazdasági növekedés kapcsolatát feltáró irodalomba ágyazva alkalmaztuk a korábbi fejezetekben vázolt modell egy egyszerűsített változatát. Tranzakciós költség bevezetésével ragadtuk meg az intézményi környezet megváltozását, és vizsgáltuk, hogy a szereplők önérdekkövetése mellett a kockázatmegosztás lehetőségének visszaszorulása mikor veszélyezteti a gazdasági növekedés kulcsát jelentő munkamegosztást.

A modellben a két reprezentatív piaci szereplő munkamegosztás és önellátás közül választhat. A munkamegosztás magasabb, de bizonytalan (kizárólag az egyik

[52] *"To provide flexibility and certainty for end-users, these limits include a number of exemptions, such as a revised definition of "bona fide hedging transaction or position," and an expanded list of enumerated bona fide hedges to cover common commercial hedging practices."* https://www.cftc.gov/IndustryOversight/MarketSurveillance/SpeculativeLimits/index.htm

[53] A Magyar Nemzeti Bank 2015-ben életbe lépett adósságfék rendelete például jövedelemarányos törlesztés mutató és hitelfedezeti mutatót vezetett be. A Magyar Közlönyben kihirdetett 32/2014. (IX. 10.) MNB rendelet a jövedelemarányos törlesztőrészlet és a hitelfedezeti arányok szabályozásáról.

világállapotban realizálódó) jövőbeli kifizetést biztosít. A kockázatmegosztás feltétele az intézményrendszer kiépítése. Ekkor a piaci szereplők kereskedhetnek, ezzel simítva az időszakok és a világállapotok közötti fogyasztási pályát és maximalizálva hasznosságuk. Tranzakciós költség nélkül tökéletes lenne a kockázatmegosztás, a munkamegosztás következtében az aggregált készlet (amelyre tekinthetünk a termelékenység mutatójaként), a szereplők fogyasztása és hasznossága emelkedne. Ugyanakkor az állam a pénzügyi közvetítés feltételeinek megteremtésével párhuzamosan tranzakciós adót vezet be. A tranzakciós költség növelésekor a piaci szereplők egyensúlyban kevesebb kockázatos eszközt adnak/vesznek, a természetes kitettségből fakadó kockázat teljes eliminálása nem valósul meg, fogyasztásuk és hasznosságuk csökken. Szélsőséges esetben a tranzakciós adó emelése önellátás választását eredményezheti, így a munkamegosztás lehetőségéből fakadó gazdasági növekedés nem realizálódik. Ha a tranzakciós költség szintjéről bevételt maximalizálva dönt az állam, akkor önérdekkövetése biztosítja, hogy egyensúlyban a piaci szereplők optimális döntése a munkamegosztás marad. A készletek határozzák meg, hogy a munkamegosztásból fakadó többlet teljesen vagy csak részben kerül az államhoz.

Az értekezés alapján számos jövőbeli kutatási irány vázolható. A portfólióértékelési probléma nemlineáris permanens árhatás vagy az MSDC különböző pontjaira különbözőféleképpen ható – nem párhuzamos eltolódást eredményező – árhatás mellett is vizsgálható lenne. Az alkalmazhatóság kiterjesztéséhez a minimális készpénzmennyiség előírása helyett általános likviditási elvárás mellett is felírandó a probléma. A bemutatott módszer nagyfrekvenciás kereskedés esetén is releváns lehet, hiszen rövidebb időtávon szintén megfigyelhető permanens árhatás.

A szabályozás és a piaci likviditás kapcsolatának vizsgálatakor jelen értekezés keretében nem vizsgáljuk az egyensúly létezésének és egyértelműségének feltételeit. Az általános modell szintjén kulcsfeladat a 3.4 állításban definiált két egyensúly összevetése piaci likviditás szempontjából. Emellett a 3. fejezetben több modellezési lehetőséget és modellváltozatot vázoltunk. Az alternatív modellváltozatok alkalmazásával új kutatási kérdésekre kereshetjük a választ. Érdekes kérdés, hogy mikor érdemes eszközök és mikor portfólió szintjén szabályozni. Elemezhető továbbá, hogy ha eszközök szintjén szabályozunk és eltérő szabályozói paramétert alkalmazunk, hogyan befolyásolható az eszközök piacának likviditása és kereslete. A természetes kitettség figyelembevétele elméleti jelentősége miatt releváns. Emellett összevethető az *Expected Shortfall* alapú szabályozás a kötelező fedezettartás bevezetésének lehetőségével.

Függelékek

Tartalomjegyzék

F.I. Függelék: Kétszereplős modell elsőrendű feltételei MSDC mellett

F.I.1. Elsőrendű feltételek szabályozói előírás nélkül

Vizsgáljuk a modell megoldását $|J| = 2$ eszköz, $S = 2$ világállapot, logaritmikus hasznossági függvény és exponenciális marginális keresleti-kínálati görbe feltevése mellett. Az árjegyző $m_1(\theta_1) = A_1 e^{-k_1\theta_1}$ és $m_2(\theta_2) = A_2 e^{-k_2\theta_2}$ alakú marginális keresleti-kínálati görbéket határoz meg, így az A_1, A_2, k_1 és k_2 paraméterekről dönt. A piactisztító feltétel következtében $-\theta_1^1 = \theta_1^2 := \theta_1$ és $\theta_2^1 = -\theta_2^2 := \theta_2$, így a keresett portfóliók

$$\begin{aligned} \theta^1 &= (\theta_1^1, \theta_2^1) = (-\theta_1, \theta_2) && (1)\\ \theta^2 &= (\theta_1^2, \theta_2^2) = (\theta_1, -\theta_2). && (2) \end{aligned}$$

A piaci szereplők portfólióinak likvidációs értéke

$$\begin{aligned} \ell(-\theta^1) &= \int_0^{\theta_1} A_1 e^{-k_1 x} \mathrm{d}x + \int_0^{-\theta_2} A_2 e^{-k_2 x} \mathrm{d}x = \\ &= \int_0^{\theta_1} A_1 e^{-k_1 x} \mathrm{d}x - \int_{-\theta_2}^{0} A_2 e^{-k_2 x} \mathrm{d}x = \\ &= -A_1 \left[\frac{1}{k_1} e^{-k_1 x}\right]_0^{\theta_1} + A_2 \left[\frac{1}{k_2} e^{-k_2 x}\right]_{-\theta_2}^{0} = \\ &= -\frac{A_1}{k_1}\left(e^{-k_1\theta_1} - 1\right) + \frac{A_2}{k_2}\left(1 - e^{-k_2(-\theta_2)}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell(-\theta^2) &= \int_0^{-\theta_1} A_1 e^{-k_1 x} \mathrm{d}x + \int_0^{\theta_2} A_2 e^{-k_2 x} \mathrm{d}x = \\ &= -\int_{-\theta_1}^{0} A_1 e^{-k_1 x} \mathrm{d}x + \int_0^{\theta_2} A_2 e^{-k_2 x} \mathrm{d}x = \\ &= A_1 \left[\frac{1}{k_1} e^{-k_1 x}\right]_{-\theta_1}^{0} - A_2 \left[\frac{1}{k_2} e^{-k_2 x}\right]_0^{\theta_2} = \\ &= \frac{A_1}{k_1}\left(1 - e^{-k_1(-\theta_1)}\right) - \frac{A_2}{k_2}\left(e^{-k_2\theta_2} - 1\right). \end{aligned}$$

Az árjegyző tranzakciós költség-függvénye

$$-\ell(-\theta^1) - \ell(-\theta^2) = \frac{A_1}{k_1}\left(e^{-k_1\theta_1} + e^{k_1\theta_1} - 2\right) + \frac{A_2}{k_2}\left(e^{k_2\theta_2} + e^{-k_2\theta_2} - 2\right).$$

Írjuk fel a piaci szereplők fogyasztási és portfólió-allokálási döntését logaritmikus hasznossági függvény feltételezése mellett. A logaritmikus függvény értelmezési tartománya miatt a c_0 és c_1 fogyasztás szigorúan pozitív, míg szigorú monotonitása miatt a költségvetési korlátok és a fogyasztási piaci egyensúly egyenlőséggel teljesülnek. A két piaci szereplő optimalizálási problémája

$$\max_{c_0^1, c_1^1} \ln(c_0^1) + \frac{1}{2}\ln(c_{11}^1) + \frac{1}{2}\ln(c_{12}^1) \tag{3}$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} c_0^1 &= \omega_0^1 + \ell(-\theta^1) - \theta_0^1 \\ c_1^1 &= \omega_1^1 + \theta^1 X + \theta_0^1 1^2 \\ c_0^1 &> 0 \\ c_1^1 &> 0 \end{aligned}$$

és

$$\max_{c_0^2, c_1^2} \ln(c_0^2) + \frac{1}{2}\ln(c_{11}^2) + \frac{1}{2}\ln(c_{12}^2) \tag{4}$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} c_0^2 &= \omega_0^2 + \ell(-\theta^2) - \theta_0^2 \\ c_1^2 &= \omega_1^2 + \theta^2 X + \theta_0^2 1^2 \\ c_0^2 &> 0 \\ c_1^2 &> 0. \end{aligned}$$

Felhasználva a költségvetési korlátokat elimináljuk c_0^i és c_1^i változókat az optimalizálási problémákból. Az első piaci szereplő maximalizálási problémája

$$\begin{aligned} \max_{\theta_1, \theta_2, \theta_0^1} \ln(\omega_0^1 + \ell(-\theta^1) - \theta_0^1) + \frac{1}{2}\ln(\omega_{11}^1 - \theta_1 x_{11} + \theta_2 x_{21} + \theta_0^1) + \\ + \frac{1}{2}\ln(\omega_{12}^1 - \theta_1 x_{12} + \theta_2 x_{22} + \theta_0^1) \end{aligned}$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} \omega_0^1 + \ell(-\theta^1) - \theta_0^1 &> 0 \\ \omega_1^1 + \theta^1 X + \theta_0^1 1^2 &> 0. \end{aligned}$$

A fogyasztás pozitivitása miatt a korlátozó feltételek szigorú egyenlőtlenséggel adottak, ezért nyílt halmazon optimalizálunk. Ha a korlátozó feltételek nélkül megtalált optimum nem teljesíti a fogyasztás szigorú pozitivitásának feltevését, akkor nincs globális maximuma a problémának. Ha a maximalizálandó függvényt $G_1(\theta_1, \theta_2, \theta_0^1)$ jelöli, akkor θ_1, θ_2 és θ_0^1 szerinti differenciálás után a következő elsőrendű feltételek adódnak

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_1(\theta_1,\theta_2,\theta_0^1)}{\partial \theta_1} &= \frac{A_1 e^{-k_1\theta_1}}{\omega_0^1 + \ell(-\theta^1) - \theta_0^1} + \frac{1}{2}\frac{-x_{11}}{\omega_{11}^1 - \theta_1 x_{11} + \theta_2 x_{21} + \theta_0^1} + \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{-x_{12}}{\omega_{12}^1 - \theta_1 x_{12} + \theta_2 x_{22} + \theta_0^1} = 0 \\
\frac{\partial G_1(\theta_1,\theta_2,\theta_0^1)}{\partial \theta_2} &= \frac{-A_2 e^{k_2\theta_2}}{\omega_0^1 + \ell(-\theta^1) - \theta_0^1} + \frac{1}{2}\frac{x_{21}}{\omega_{11}^1 - \theta_1 x_{11} + \theta_2 x_{21} + \theta_0^1} + \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{x_{22}}{\omega_{12}^1 - \theta_1 x_{12} + \theta_2 x_{22} + \theta_0^1} = 0 \\
\frac{\partial G_1(\theta_1,\theta_2,\theta_0^1)}{\partial \theta_0^1} &= \frac{-1}{\omega_0^1 + \ell(-\theta^1) - \theta_0^1} + \frac{1}{2}\frac{1}{\omega_{11}^1 - \theta_1 x_{11} + \theta_2 x_{21} + \theta_0^1} + \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{1}{\omega_{12}^1 - \theta_1 x_{12} + \theta_2 x_{22} + \theta_0^1} = 0.
\end{aligned}$$

A korábban meghatározott $\ell(-\theta^1)$ likvidációs érték behelyettesítése után

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_1(\theta_1,\theta_2,\theta_0^1)}{\partial \theta_1} &= \frac{A_1 e^{-k_1\theta_1}}{\omega_0^1 - \frac{A_1}{k_1}\left(e^{-k_1\theta_1} - 1\right) + \frac{A_2}{k_2}\left(1 - e^{k_2\theta_2}\right) - \theta_0^1} + \\
&+ \frac{1}{2}\frac{-x_{11}}{\omega_{11}^1 - \theta_1 x_{11} + \theta_2 x_{21} + \theta_0^1} + \frac{1}{2}\frac{-x_{12}}{\omega_{12}^1 - \theta_1 x_{12} + \theta_2 x_{22} + \theta_0^1} = 0 \\
\frac{\partial G_1(\theta_1,\theta_2,\theta_0^1)}{\partial \theta_2} &= \frac{-A_2 e^{k_2\theta_2}}{\omega_0^1 - \frac{A_1}{k_1}\left(e^{-k_1\theta_1} - 1\right) + \frac{A_2}{k_2}\left(1 - e^{k_2\theta_2}\right) - \theta_0^1} + \\
&+ \frac{1}{2}\frac{x_{21}}{\omega_{11}^1 - \theta_1 x_{11} + \theta_2 x_{21} + \theta_0^1} + \frac{1}{2}\frac{x_{22}}{\omega_{12}^1 - \theta_1 x_{12} + \theta_2 x_{22} + \theta_0^1} = 0 \\
\frac{\partial G_1(\theta_1,\theta_2,\theta_0^1)}{\partial \theta_0^1} &= \frac{-1}{\omega_0^1 - \frac{A_1}{k_1}\left(e^{-k_1\theta_1} - 1\right) + \frac{A_2}{k_2}\left(1 - e^{k_2\theta_2}\right) - \theta_0^1} + \\
&+ \frac{1}{2}\frac{1}{\omega_{11}^1 - \theta_1 x_{11} + \theta_2 x_{21} + \theta_0^1} + \frac{1}{2}\frac{1}{\omega_{12}^1 - \theta_1 x_{12} + \theta_2 x_{22} + \theta_0^1} = 0.
\end{aligned}$$

A második szereplő problémája analóg módon alakítható

$$\begin{aligned}
\max_{\theta_1,\theta_2,\theta_0^2} \ln(\omega_0^2 + \ell(-\theta^2) - \theta_0^2) &+ \frac{1}{2}\ln(\omega_{11}^2 + \theta_1 x_{11} - \theta_2 x_{21} + \theta_0^2) + \\
&+ \frac{1}{2}\ln(\omega_{12}^2 + \theta_1 x_{12} - \theta_2 x_{22} + \theta_0^2)
\end{aligned}$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned}
\omega_0^2 + \ell(-\theta^2) - \theta_0^2 &> 0 \\
\omega_1^2 + \theta^2 X + \theta_0^2 1^2 &> 0.
\end{aligned}$$

Az elsőrendű feltételek tőkepiaci egyensúly esetén

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_2(\theta_1,\theta_2,\theta_0^1)}{\partial\theta_1} &= \frac{-A_1 e^{k_1\theta_1}}{\omega_0^2+\ell(-\theta^2)-\theta_0^2}+\frac{1}{2}\frac{x_{11}}{\omega_{11}^2+\theta_1 x_{11}-\theta_2 x_{21}+\theta_0^2}+ \\
&\quad +\frac{1}{2}\frac{x_{12}}{\omega_{12}^2+\theta_1 x_{12}-\theta_2 x_{22}+\theta_0^2} = 0 \\
\frac{\partial G_2(\theta_1,\theta_2,\theta_0^1)}{\partial\theta_2} &= \frac{A_2 e^{-k_2\theta_2}}{\omega_0^2+\ell(-\theta^2)-\theta_0^2}+\frac{1}{2}\frac{-x_{21}}{\omega_{11}^2+\theta_1 x_{11}-\theta_2 x_{21}+\theta_0^2}+ \\
&\quad +\frac{1}{2}\frac{-x_{22}}{\omega_{12}^2+\theta_1 x_{12}-\theta_2 x_{22}+\theta_0^2} = 0 \\
\frac{\partial G_2(\theta_1,\theta_2,\theta_0^1)}{\partial\theta_0^2} &= \frac{-1}{\omega_0^2+\ell(-\theta^2)-\theta_0^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{\omega_{11}^2+\theta_1 x_{11}-\theta_2 x_{21}+\theta_0^2}+ \\
&\quad +\frac{1}{2}\frac{1}{\omega_{12}^2+\theta_1 x_{12}-\theta_2 x_{22}+\theta_0^2} = 0.
\end{aligned}$$

Az $\ell(-\theta^2)$ likvidációs értéket behelyettesítve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_2(\theta_1,\theta_2,\theta_0^1)}{\partial\theta_1} &= \frac{-A_1 e^{k_1\theta_1}}{\omega_0^2+\frac{A_1}{k_1}\left(1-e^{k_1\theta_1}\right)-\frac{A_2}{k_2}\left(e^{-k_2\theta_2}-1\right)-\theta_0^2}+ \\
&+\frac{1}{2}\frac{x_{11}}{\omega_{11}^2+\theta_1 x_{11}-\theta_2 x_{21}+\theta_0^2}+\frac{1}{2}\frac{x_{12}}{\omega_{12}^2+\theta_1 x_{12}-\theta_2 x_{22}+\theta_0^2} = 0 \\
\frac{\partial G_2(\theta_1,\theta_2,\theta_0^1)}{\partial\theta_2} &= \frac{A_2 e^{-k_2\theta_2}}{\omega_0^2+\frac{A_1}{k_1}\left(1-e^{k_1\theta_1}\right)-\frac{A_2}{k_2}\left(e^{-k_2\theta_2}-1\right)-\theta_0^2}+ \\
&+\frac{1}{2}\frac{-x_{21}}{\omega_{11}^2+\theta_1 x_{11}-\theta_2 x_{21}+\theta_0^2}+\frac{1}{2}\frac{-x_{22}}{\omega_{12}^2+\theta_1 x_{12}-\theta_2 x_{22}+\theta_0^2} = 0 \\
\frac{\partial G_2(\theta_1,\theta_2,\theta_0^1)}{\partial\theta_0^2} &= \frac{-1}{\omega_0^2+\frac{A_1}{k_1}\left(1-e^{k_1\theta_1}\right)-\frac{A_2}{k_2}\left(e^{-k_2\theta_2}-1\right)-\theta_0^2}+ \\
&+\frac{1}{2}\frac{1}{\omega_{11}^2+\theta_1 x_{11}-\theta_2 x_{21}+\theta_0^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{\omega_{12}^2+\theta_1 x_{12}-\theta_2 x_{22}+\theta_0^2} = 0.
\end{aligned}$$

Az árjegyző a marginális keresleti-kínálati görbék meghatározásakor a tranzakciós költség-függvény értékét maximalizálja, feltéve, hogy teljesülnek a piaci szereplők elsőrendű feltételei.

A kockázatmentes eszköz vásárlásával simítják a piaci szereplők az időszakok közötti fogyasztási pályát. A logaritmikus hasznossági függvény alkalmazása miatt a θ_0^1 és θ_0^2 szerinti parciális deriválás eredményeként

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{c_0^1}+\frac{1}{2}\frac{1}{c_{11}^1}+\frac{1}{2}\frac{1}{c_{12}^1} &= 0 \\
\frac{-1}{c_0^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{c_{11}^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{c_{12}^2} &= 0
\end{aligned}$$

harmonikus átlag összefüggés adódik a különböző időszaki fogyasztások között

$$
\begin{aligned}
c_0^1 &= \frac{2}{\frac{1}{c_{11}^1} + \frac{1}{c_{12}^1}} \\
c_0^2 &= \frac{2}{\frac{1}{c_{11}^2} + \frac{1}{c_{12}^2}}.
\end{aligned}
$$

F.I.2. Elsőrendű feltételek szabályozói előírás mellett

A megfogalmazott speciális problémánk esetén az eszközök szintjén megadott szabályozói előírás $\delta_1 = \delta_2$ feltétel mellett ugyanezen korlátozó egyenlőtlenségekhez vezetne. Az egyszerűsítő feltevések mellett a piaci szereplők optimalizálási feladata a következő formában adható meg

$$\max_{\theta_1,\theta_2,\theta_0^1} \ln(\omega_0^1 + \ell(-\theta^1) - \theta_0^1) + \frac{1}{2}\ln(\omega_{11}^1 - \theta_1 x_{11} + \theta_0^1) + \frac{1}{2}\ln(\theta_2 x_{22} + \theta_0^1)$$

feltéve, hogy

$$\theta_0^1 \geq \delta\theta_1 x_{11},$$

és

$$\max_{\theta_1,\theta_2,\theta_0^2} \ln(\omega_0^2 + \ell(-\theta^2) - \theta_0^2) + \frac{1}{2}\ln(\theta_1 x_{11} + \theta_0^2) + \frac{1}{2}\ln(\omega_{12}^2 - \theta_2 x_{22} + \theta_0^2)$$

$$\theta_0^2 \geq \delta\theta_2 x_{22}.$$

A Karush-Kuhn-Tucker optimalizáláshoz felírjuk a Lagrange-függvényeket

$$
\begin{aligned}
G_1(\theta_1, \theta_2, \theta_0^1, \lambda_1) = \ln(\omega_0^1 + \ell(-\theta^1) - \theta_0^1) + \frac{1}{2}\ln(\omega_{11}^1 - \theta_1 x_{11} + \theta_0^1) + \\
+\frac{1}{2}\ln(\theta_2 x_{22} + \theta_0^1) - \lambda_1[\theta_0^1 - \delta\theta_1 x_{11}]
\end{aligned}
$$

és

$$
\begin{aligned}
G_2(\theta_1, \theta_2, \theta_0^2, \lambda_2) = \ln(\omega_0^2 + \ell(-\theta^2) - \theta_0^2) + \frac{1}{2}\ln(\theta_1 x_{11} + \theta_0^2) + \\
+\frac{1}{2}\ln(\omega_{12}^2 - \theta_2 x_{22} + \theta_0^2) - \lambda_2[\theta_0^2 - \delta\theta_2 x_{22}],
\end{aligned}
$$

ahol λ_1 és λ_2 a Lagrange szorzók. Az elsőrendű feltételek

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_1(\theta_1,\theta_2,\theta_0^1,\lambda_1)}{\partial\theta_1} &= \frac{A_1 e^{-k_1\theta_1}}{\omega_0^1+\ell(-\theta^1)-\theta_0^1}+\frac{1}{2}\frac{-x_{11}}{\omega_{11}^1-\theta_1 x_{11}+\theta_0^1}+\lambda_1\delta x_{11}=0\\
\frac{\partial G_1(\theta_1,\theta_2,\theta_0^1,\lambda_1)}{\partial\theta_2} &= \frac{-A_2 e^{k_2\theta_2}}{\omega_0^1+\ell(-\theta^1)-\theta_0^1}+\frac{1}{2}\frac{x_{22}}{\theta_2 x_{22}+\theta_0^1}=0\\
\frac{\partial G_1(\theta_1,\theta_2,\theta_0^1,\lambda_1)}{\partial\theta_0^1} &= \frac{-1}{\omega_0^1+\ell(-\theta^1)-\theta_0^1}+\frac{1}{2}\frac{1}{\omega_{11}^1-\theta_1 x_{11}+\theta_0^1}+\frac{1}{2}\frac{1}{\theta_2 x_{22}+\theta_0^1}-\lambda_1=0\\
\frac{\partial G_1(\theta_1,\theta_2,\theta_0^1,\lambda_1)}{\partial\lambda^1} &= \theta_0^1-\delta\theta_1 x_{11}\geq 0\\
\frac{\partial G_2(\theta_1,\theta_2,\theta_0^2,\lambda_2)}{\partial\theta_1} &= \frac{-A_1 e^{k_1\theta_1}}{\omega_0^2+\ell(-\theta^2)-\theta_0^2}+\frac{1}{2}\frac{x_{11}}{\theta_1 x_{11}+\theta_0^2}=0\\
\frac{\partial G_2(\theta_1,\theta_2,\theta_0^2,\lambda_2)}{\partial\theta_2} &= \frac{A_2 e^{-k_2\theta_2}}{\omega_0^2+\ell(-\theta^2)-\theta_0^2}+\frac{1}{2}\frac{-x_{22}}{\omega_{12}^2-\theta_2 x_{22}+\theta_0^2}+\lambda_2\delta x_{22}=0\\
\frac{\partial G_2(\theta_1,\theta_2,\theta_0^2,\lambda_2)}{\partial\theta_0^2} &= \frac{-1}{\omega_0^2+\ell(-\theta^2)-\theta_0^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{\theta_1 x_{11}+\theta_0^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{\omega_{12}^2-\theta_2 x_{22}+\theta_0^2}-\lambda_2=0\\
\frac{\partial G_2(\theta_1,\theta_2,\theta_0^2,\lambda_2)}{\partial\lambda^2} &= \theta_0^2-\delta\theta_2 x_{22}\geq 0
\end{aligned}$$

A komplementaritási feltételek és a Lagrange szorzók nemnegativitása miatt

$$\begin{aligned}
\lambda_1[\theta_0^1-\delta\theta_1 x_{11}] &= 0\\
\lambda_2[\theta_0^2-\delta\theta_2 x_{22}] &= 0\\
\lambda_1 &\geq 0\\
\lambda_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Behelyettesítve a likvidációs értékeket a következő elsőrendű feltételek adódnak:

$$\begin{aligned}
\frac{A_1 e^{-k_1\theta_1}}{\omega_0^1-\frac{A_1}{k_1}\left(e^{-k_1\theta_1}-1\right)+\frac{A_2}{k_2}\left(1-e^{k_2\theta_2}\right)-\theta_0^1}-\frac{\frac{1}{2}x_{11}}{\omega_{11}^1-\theta_1 x_{11}+\theta_0^1}+\lambda_1\delta x_{11}=0\\
\frac{-A_2 e^{k_2\theta_2}}{\omega_0^1-\frac{A_1}{k_1}\left(e^{-k_1\theta_1}-1\right)+\frac{A_2}{k_2}\left(1-e^{k_2\theta_2}\right)-\theta_0^1}+\frac{\frac{1}{2}x_{22}}{\theta_2 x_{22}+\theta_0^1}=0\\
\frac{-1}{\omega_0^1-\frac{A_1}{k_1}\left(e^{-k_1\theta_1}-1\right)+\frac{A_2}{k_2}\left(1-e^{k_2\theta_2}\right)-\theta_0^1}+\frac{\frac{1}{2}}{\omega_{11}^1-\theta_1 x_{11}+\theta_0^1}+\frac{\frac{1}{2}}{\theta_2 x_{22}+\theta_0^1}-\lambda_1=0\\
\theta_0^1-\delta\theta_1 x_{11}\geq 0\\
\frac{-A_1 e^{k_1\theta_1}}{\omega_0^2+\frac{A_1}{k_1}\left(1-e^{k_1\theta_1}\right)-\frac{A_2}{k_2}\left(e^{-k_2\theta_2}-1\right)-\theta_0^2}+\frac{\frac{1}{2}x_{11}}{\theta_1 x_{11}+\theta_0^2}=0\\
\frac{A_2 e^{-k_2\theta_2}}{\omega_0^2+\frac{A_1}{k_1}\left(1-e^{k_1\theta_1}\right)-\frac{A_2}{k_2}\left(e^{-k_2\theta_2}-1\right)-\theta_0^2}-\frac{\frac{1}{2}x_{22}}{\omega_{12}^2-\theta_2 x_{22}+\theta_0^2}+\lambda_2\delta x_{22}=0\\
\frac{-1}{\omega_0^2+\frac{A_1}{k_1}\left(1-e^{k_1\theta_1}\right)-\frac{A_2}{k_2}\left(e^{-k_2\theta_2}-1\right)-\theta_0^2}+\frac{\frac{1}{2}}{\theta_1 x_{11}+\theta_0^2}+\frac{\frac{1}{2}}{\omega_{12}^2-\theta_2 x_{22}+\theta_0^2}-\lambda_2=0\\
\theta_0^2-\delta\theta_2 x_{22}\geq 0.
\end{aligned}$$

F.II. Függelék: Az árrést alkalmazó 4. fejezet bizonyításai

4.1. Lemma. *Ha az árjegyző a (4.4) optimalizálási feladat szerint optimalizál, akkor t_j $\forall j \in J$ eszközre nemnegatív.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\exists\ \hat{j} \in J$, amelyre $t_{\hat{j}} < 0$. Ekkor a $\hat{j}$ eszköz esetén bármely $\theta^i_{a\hat{j}} = \theta^i_{b\hat{j}} > 0$ pozíció arbitrázs a piacon, hiszen a 0. időszakban a $-\theta^i_{a\hat{j}} a_{\hat{j}} + \theta^i_{b\hat{j}} b_{\hat{j}} > 0$, míg az 1. időszakban a kifizetés $(\theta^i_{a\hat{j}} - \theta^i_{b\hat{j}}) = 0$. Mivel a kifizetés minden $s \in \{1, \cdots, S\}$ világállapotban 0 és az ES is 0, ezért a piaci szereplők ki tudják használni az arbitrázst a 4.2 pontban leírt modell esetén is, ami veszteséget okoz az árjegyzőnek. Így nem lehetett optimális döntése a $t_{\hat{j}} < 0$ árrés. □

4.1. Állítás. *Egyensúlyban, ha a tőkepiac egyensúlyban van,*

$$\sum_{i\in I} \theta^i = \sum_{i\in I} (\theta^i_a - \theta^i_b) = 0,$$

akkor a fogyasztási piac is egyensúlyban lesz,

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I} c^i_0 &\leq \sum_{i\in I} \omega^i_0 - \sum_{j\in J} t_j \sum_{i\in I} \theta^i_{aj} - \sum_{i\in I} \theta^i_0 \\
\sum_{i\in I} c^i_1 &\leq \sum_{i\in I} \omega^i_1 + \sum_{i\in I} \theta^i_0 1^S.
\end{aligned}$$

Bizonyítás. Összegezzük az I piaci szereplő 0. és 1. időszaki költségvetési korlátját

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I} c^i_0 &\leq \sum_{i\in I} \omega^i_0 - \sum_{i\in I} \theta^i_a a + \sum_{i\in I} \theta^i_b b - \sum_{i\in I} \theta^i_0 \\
\sum_{i\in I} c^i_1 &\leq \sum_{i\in I} \omega^i_1 + \sum_{i\in I} (\theta^i_a - \theta^i_b) X + \sum_{i\in I} \theta^i_0 1^S.
\end{aligned}$$

Tőkepiaci egyensúlyban

$$\sum_{i\in I} \theta^i_a = \sum_{i\in I} \theta^i_b,$$

ezért

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I} \theta^i_a a - \sum_{i\in I} \theta^i_b b = \sum_{i\in I} \theta^i_a (a-b) = \sum_{i\in I} \theta^i_a t = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} \theta^i_{aj} t_j = \\
= \sum_{j\in J} t_j \sum_{i\in I} \theta^i_{aj} = \sum_{j\in J} T_j(\theta^1_j, \cdots, \theta^I_j),
\end{aligned}$$

és

$$\sum_{i\in I} (\theta^i_a - \theta^i_b) X = (\sum_{i\in I} \theta^i_a - \sum_{i\in I} \theta^i_b) X = 0.$$

□

4.2. Állítás. *Tegyük fel, hogy az i-edik szereplő preferenciáit leíró* $u^i : \mathbb{R}^{S+1} \to \mathbb{R}$ *hasznossági függvény folytonos és szigorúan monoton. Ekkor a költségvetési korlátok egyenlőséggel teljesülnek.*

Bizonyítás. Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy egyensúlyban $\exists\ \hat{\imath} \in I$ szereplő, akinek 0. időszaki költségvetési korlátja optimumban szigorú egyenlőtlenséggel teljesül

$$c_0^{\hat{\imath}} < \omega_0^{\hat{\imath}} - \theta_a^{\hat{\imath}} a + \theta_b^{\hat{\imath}} b - \theta_0^{\hat{\imath}}.$$

Legyen $\hat{c}_0$ fogyasztási szint

$$\hat{c}_0 = \omega_0^{\hat{\imath}} - \theta_a^{\hat{\imath}} a + \theta_b^{\hat{\imath}} b - \theta_0^{\hat{\imath}}. \tag{5}$$

Ekkor $\hat{\imath}$ szereplő számára $\hat{c}_0$ elérhető és mivel $\hat{c}_0 > c_0^{\hat{\imath}}$ ezért a hasznossági függvény szigorú monotonitása miatt magasabb hasznossági szintet biztosít. A kiinduló feltevésünk, miszerint $c_0^{\hat{\imath}}$ optimális fogyasztási szint, nem teljesül. Az 1. időszaki költségvetési korlátra az állítás analóg módon igazolható. □

4.3. Állítás. *Tegyük fel, hogy az i-edik szereplő preferenciáit leíró* $u^i : \mathbb{R}^{S+1} \to \mathbb{R}$ *hasznossági függvény folytonos és szigorúan monoton. Ekkor egyensúlyban* $\forall j \in J$ *eszközre és* $\forall i \in I$ *piaci szereplő esetén* $\exists$ *olyan optimális portfólió, amelyre*

$$\theta_{aj}^i \theta_{bj}^i = 0. \tag{6}$$

Bizonyítás. Indirekt bizonyítunk. 4.1 lemma alapján egyensúlyban $\forall j \in J$ eszközre a $t_j \geq 0$. Tegyük fel, hogy $\exists\ \hat{\imath} \in I$ szereplő, akinek az optimális pozíciójában $\exists\ \hat{\jmath} \in J$ eszköz, amelyre $\theta_{a\hat{\jmath}}^{\hat{\imath}} \theta_{b\hat{\jmath}}^{\hat{\imath}} \neq 0$. A szigorúan monoton hasznossági függvény miatt a költségvetési korlát egyensúlyban egyenlőséggel teljesül

$$c_0^{\hat{\imath}} \quad = \quad \omega_0^{\hat{\imath}} - \theta_a^{\hat{\imath}} a + \theta_b^{\hat{\imath}} b - \theta_0^{\hat{\imath}}.$$

Definiáljunk egy új $\overline{\theta}_a^{\hat{\imath}}$ portfóliót úgy, hogy $\overline{\theta}_{aj}^{\hat{\imath}} = \theta_{aj}^{\hat{\imath}}\ \forall j \in J, j \neq \hat{\jmath}$ esetén és $\overline{\theta}_{a\hat{\jmath}}^{\hat{\imath}} =$ $= \theta_{a\hat{\jmath}}^{\hat{\imath}} - \theta_{b\hat{\jmath}}^{\hat{\imath}}$. Míg az új $\overline{\theta}_b^{\hat{\imath}}$ portfólió legyen $\overline{\theta}_{bj}^{\hat{\imath}} = \theta_{bj}^{\hat{\imath}}\ \forall j \in J, j \neq \hat{\jmath}$ esetén és $\overline{\theta}_{b\hat{\jmath}}^{\hat{\imath}} = 0$. Mivel

$$\theta_a^{\hat{\imath}} - \theta_b^{\hat{\imath}} = \overline{\theta}_a^{\hat{\imath}} - \overline{\theta}_b^{\hat{\imath}},$$

ezért az új $\overline{\theta^{\hat{\imath}}}$ pozíció kifizetése az 1. időszakban megegyezik a $\theta^{\hat{\imath}}$ pozíció kifizetésével.

Ugyanakkor ha a $t_{\hat{j}}$ árrés pozitív, akkor az elérhető új fogyasztási szint a 0. időszakban

$$\overline{c_0^{\hat{i}}} \;=\; \omega_0^{\hat{i}} - \overline{\theta_a^{\hat{i}}}a + \overline{\theta_b^{\hat{i}}}b - \theta_0^{\hat{i}} > c_0^{\hat{i}} = \omega_0^{\hat{i}} - \theta_a^{\hat{i}}a + \theta_b^{\hat{i}}b - \theta_0^{\hat{i}}.$$

Így a hasznossági függvények szigorú monotonitása miatt a $\theta^{\hat{i}}$ pozíció nem lehetett az $\hat{i}$-edik szereplő optimális döntése. Ha pedig a $t_{\hat{j}}$ árrés 0, akkor a $\theta^{\hat{i}}$ portfólióhoz hasonlóan az $\overline{\theta^{\hat{i}}}$ portfólió is optimális. □

F.III. Függelék: Kétszereplős modell elsőrendű feltételei árrés mellett

A 4.10 és a 4.11 optimalizálási problémák megoldásához helyettesítsük be az egyenlőséggel adott feltételeket a hasznossági függvényekbe a c_0^1, c_{11}^1, c_{12}^1, c_0^2, c_{11}^2 és c_{12}^2 fogyasztás helyére,

$$\max_{\theta_{b1}^1,\theta_{a2}^1,\theta_0^1} \ln(\omega_0^1 + \theta_{b1}^1 b_1 - \theta_{a2}^1 a_2 - \theta_0^1) + + \frac{1}{2}\ln(\omega_{11}^1 - \theta_{b1}^1 x_{11} - \theta_{a2}^1 x_{22} + \theta_0^1) + \\ + \frac{1}{2}\ln(\theta_{b1}^1 x_{11} + \theta_{a2}^1 x_{22} + \theta_0^1)$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} \theta_0^1 &\geq \delta_1\left(\frac{1}{2}\theta_{b1}^1 x_{11}\right) + \delta_2\left(\frac{1}{2}\theta_{a2}^1 x_{22}\right) \\ \theta_{a2}^1 &\geq 0 \\ \theta_{b1}^1 &\geq 0, \end{aligned}$$

és

$$\max_{\theta_{a1}^2,\theta_{b2}^2,\theta_0^2} \ln(\omega_0^2 + \theta_{b2}^2 b_2 - \theta_{a1}^2 a_1 - \theta_0^2) + \frac{1}{2}\ln(\theta_{b2}^2 x_{22} + \theta_{a1}^2 x_{11} + \theta_0^2) + \\ + \frac{1}{2}\ln(\omega_{12}^2 - \theta_{b2}^2 x_{22} - \theta_{a1}^2 x_{11} + \theta_0^2)$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} \theta_0^2 &\geq \delta_1\left(\frac{1}{2}\theta_{a1}^2 x_{11}\right) + \delta_2\left(\frac{1}{2}\theta_{b2}^2 x_{22}\right) \\ \theta_{a1}^2 &\geq 0 \\ \theta_{b2}^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

és írjuk fel a Lagrange függvényeket a feltételes optimalizáláshoz

$$\begin{aligned} G(\theta_{b1}^1, \theta_{a2}^1, \theta_0^1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1) = \ln(\omega_0^1 + \theta_{b1}^1 b_1 - \theta_{a2}^1 a_2 - \theta_0^1) + \\ +\frac{1}{2}\ln(\omega_{11}^1 - \theta_{b1}^1 x_{11} - \theta_{a2}^1 x_{22} + \theta_0^1) + \frac{1}{2}\ln(\theta_{b1}^1 x_{11} + \theta_{a2}^1 x_{22} + \theta_0^1) + \\ +\gamma_1\left(\theta_0^1 - \delta_1\left(\frac{1}{2}\theta_{b1}^1 x_{11}\right) - \delta_2\left(\frac{1}{2}\theta_{a2}^1 x_{22}\right)\right) + \lambda_1\theta_{b1}^1 + \mu_1\theta_{a2}^1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(\theta_{b2}^2, \theta_{a1}^2, \theta_0^2, \gamma_2, \lambda_2, \mu_2) = \ln(\omega_0^2 + \theta_{b2}^2 b_2 - \theta_{a1}^2 a_1 - \theta_0^2) + \\ +\frac{1}{2}\ln(\theta_{b2}^2 x_{22} + \theta_{a1}^2 x_{11} + \theta_0^2) + \frac{1}{2}\ln(\omega_{12}^2 - \theta_{b2}^2 x_{22} - \theta_{a1}^2 x_{11} + \theta_0^2) + \\ +\gamma_2\left(\theta_0^2 - \delta_1\left(\frac{1}{2}\theta_{a1}^2 x_{11}\right) - \delta_2\left(\frac{1}{2}\theta_{b2}^2 x_{22}\right)\right) + \lambda_2\theta_{b2}^2 + \mu_2\theta_{a1}^2, \end{aligned}$$

ahol γ_1, γ_2 λ_1, λ_2, μ_1 és μ_2 a Lagrange szorzók. Az első szereplő optimalizálási problémájának Karush-Kuhn-Tucker feltételei

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(\theta_{b1}^1, \theta_{a2}^1, \theta_0^1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1)}{\partial \theta_{b1}^1} &= \frac{b_1}{c_0^1} + \frac{-x_{11}}{2c_{11}^1} + \frac{x_{11}}{2c_{12}^1} - \gamma_1\delta_1\frac{1}{2}x_{11} + \lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial G(\theta_{b1}^1, \theta_{a2}^1, \theta_0^1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1)}{\partial \theta_{a2}^1} &= \frac{-a_2}{c_0^1} + \frac{-x_{22}}{2c_{11}^1} + \frac{x_{22}}{2c_{12}^1} - \gamma_1\delta_2\frac{1}{2}x_{22} + \mu_1 = 0 \\ \frac{\partial G(\theta_{b1}^1, \theta_{a2}^1, \theta_0^1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1)}{\partial \theta_0^1} &= \frac{-1}{c_0^1} + \frac{1}{2c_{11}^1} + \frac{1}{2c_{12}^1} + \gamma_1 = 0 \\ \frac{\partial G(\theta_{b1}^1, \theta_{a2}^1, \theta_0^1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1)}{\partial \gamma_1} &= \theta_0^1 - \delta_1\left(\frac{1}{2}\theta_{b1}^1 x_{11}\right) - \delta_2\left(\frac{1}{2}\theta_{a2}^1 x_{22}\right) \geq 0 \\ \frac{\partial G(\theta_{b1}^1, \theta_{a2}^1, \theta_0^1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1)}{\partial \lambda_1} &= \theta_{b1}^1 \geq 0 \\ \frac{\partial G(\theta_{b1}^1, \theta_{a2}^1, \theta_0^1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1)}{\partial \mu_1} &= \theta_{a2}^1 \geq 0. \end{aligned}$$

A komplementaritás és a Lagrange szorzók nemnegativitása miatt

$$\begin{aligned} \gamma_1\left[\theta_0^1 - \delta_1\left(\frac{1}{2}\theta_{b1}^1 x_{11}\right) - \delta_2\left(\frac{1}{2}\theta_{a2}^1 x_{22}\right)\right] &= 0 \\ \lambda_1[\theta_{b1}^1] &= 0 \\ \mu_1[\theta_{a2}^1] &= 0 \\ \gamma_1 &\geq 0 \\ \lambda_1 &\geq 0 \\ \mu_1 &\geq 0. \end{aligned}$$

A második szereplő optimalizálási problémájának Karush-Kuhn-Tucker feltételei

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G(\theta_{b2}^2,\theta_{a1}^2,\theta_0^2,\gamma_2,\lambda_2,\mu_2)}{\partial\theta_{b2}^2} &= \frac{b_2}{c_0^2}+\frac{x_{22}}{2c_{11}^2}+\frac{-x_{22}}{2c_{12}^2}-\gamma_2\delta_2\frac{1}{2}x_{22}+\lambda_2=0\\
\frac{\partial G(\theta_{b2}^2,\theta_{a1}^2,\theta_0^2,\gamma_2,\lambda_2,\mu_2)}{\partial\theta_{a1}^2} &= \frac{-a_1}{c_0^2}+\frac{x_{11}}{2c_{11}^2}+\frac{-x_{11}}{2c_{12}^2}-\gamma_2\delta_1\frac{1}{2}x_{11}+\mu_2=0\\
\frac{\partial G(\theta_{b2}^2,\theta_{a1}^2,\theta_0^2,\gamma_2,\lambda_2,\mu_2)}{\partial\theta_0^2} &= \frac{-1}{c_0^2}+\frac{1}{2c_{11}^2}+\frac{1}{2c_{12}^2}+\gamma_2=0\\
\frac{\partial G(\theta_{b2}^2,\theta_{a1}^2,\theta_0^2,\gamma_2,\lambda_2,\mu_2)}{\partial\gamma_2} &= \theta_0^2-\delta_1\left(\frac{1}{2}\theta_{a1}^2x_{11}\right)-\delta_2\left(\frac{1}{2}\theta_{b2}^2x_{22}\right)\geq 0\\
\frac{\partial G(\theta_{b2}^2,\theta_{a1}^2,\theta_0^2,\gamma_2,\lambda_2,\mu_2)}{\partial\lambda_2} &= \theta_{b2}^2\geq 0\\
\frac{\partial G(\theta_{b2}^2,\theta_{a1}^2,\theta_0^2,\gamma_2,\lambda_2,\mu_2)}{\partial\mu_2} &= \theta_{a1}^2\geq 0.
\end{aligned}$$

A komplementaritás és a Lagrange szorzók nemnegativitása miatt

$$\begin{aligned}
\gamma_2\left[\theta_0^2-\delta_1\left(\frac{1}{2}\theta_{a1}^2x_{11}\right)-\delta_2\left(\frac{1}{2}\theta_{b2}^2x_{22}\right)\right] &= 0\\
\lambda_2[\theta_{b2}^2] &= 0\\
\mu_2[\theta_{a1}^2] &= 0\\
\gamma_2 &\geq 0\\
\lambda_2 &\geq 0\\
\mu_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

F.III.1. Függelék: Redundáns szabályozói előírás esete

Tegyük fel, hogy a szabályozói előírás bevezetése nem módosítja a piaci szereplők optimális döntését (4.4 állítás). Az egyszerűsödött elsőrendű feltételek $\gamma_1=0$, $\lambda_1=0$, $\mu_1=0$, $\gamma_2=0$, $\lambda_2=0$ és $\mu_2=0$ esetén

$$\frac{b_1}{c_0^1}+\frac{-x_{11}}{2c_{11}^1}+\frac{x_{11}}{2c_{12}^1} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{-a_2}{c_0^1}+\frac{-x_{22}}{2c_{11}^1}+\frac{x_{22}}{2c_{12}^1} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{-1}{c_0^1}+\frac{1}{2c_{11}^1}+\frac{1}{2c_{12}^1} = 0. \tag{9}$$

$$\frac{-a_1}{c_0^2} + \frac{x_{11}}{2c_{11}^2} + \frac{-x_{11}}{2c_{12}^2} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{b_2}{c_0^2} + \frac{x_{22}}{2c_{11}^2} + \frac{-x_{22}}{2c_{12}^2} = 0 \tag{11}$$

$$\frac{-1}{c_0^2} + \frac{1}{2c_{11}^2} + \frac{1}{2c_{12}^2} = 0. \tag{12}$$

A logaritmikus hasznossági függvény alkalmazása és a kockázatmentes eszközről történő döntés következtében a különböző időszaki fogyasztások között a következő harmonikus átlagszerű összefüggések adódnak

$$\begin{aligned} c_0^1 &= \frac{2}{\frac{1}{c_{11}^1} + \frac{1}{c_{12}^1}}, \\ c_0^2 &= \frac{2}{\frac{1}{c_{11}^2} + \frac{1}{c_{12}^2}}. \end{aligned}$$

Az elsőrendű feltételeket

$$\begin{aligned} b_1(c_{11}^1 + c_{12}^1) &= x_{11}(c_{12}^1 - c_{11}^1) \\ -a_2(c_{11}^1 + c_{12}^1) &= x_{22}(c_{12}^1 - c_{11}^1) \\ -a_1(c_{11}^2 + c_{12}^2) &= x_{11}(c_{12}^2 - c_{11}^2) \\ b_2(c_{11}^2 + c_{12}^2) &= x_{22}(c_{12}^2 - c_{11}^2) \end{aligned}$$

alakban adhatjuk meg.

Irodalomjegyzék

Acemoglu, D. (2008), Oligarchikus és demokratikus társadalmak, *Közgazdasági Szemle*, LV (7-8), 622–659.

Acemoglu, D., D. Cantoni, S. Johnson és J. A. Robinson, J. A. (2011), The Consequences of Radical Reform. The French Revolution, *American Economic Review*, 101 (7), 3286–3307.
https://doi.org/10.1257/aer.101.7.3286

Acemoglu, D. és S. Johnson (2005), Unbundling Institutions, *Journal of Political Economy*, 113 (5), 949-995.
https://doi.org/10.1086/432166

Acemoglu, D. és J. A. Robinson (2001), A Theory of Political Transitions, *American Economic Review*, 91 (4), 938–963.
https://doi.org/10.1257/aer.91.4.938

Acemoglu, D. és J. A. Robinson (2000), Political Losers as a Barrier to Economic Development, *The American Economic Review*, 90 (2), 126–130.
https://doi.org/10.1257/aer.90.2.126

Acemoglu, D. és J. A. Robinson (2006a), Economic Origins of Dictatorship and Democracy, *Cambridge University Press.*

Acemoglu, D. és J. A. Robinson (2006b), De Facto Political Power and Institutional Persistence, *The American Economic Review*, 96 (2), 325–330.
https://doi.org/10.1257/000282806777212549

Acemoglu, D. és J. A. Robinson (2008), Persistence of Power, Elites, and Institutions, *The American Economic Review*, 98 (1), 267–293.
https://doi.org/10.1257/aer.98.1.267

Acemoglu, D. és J. A. Robinson (2013), Miért buknak el nemzetek? A hatalom, a jólét és a szegénység eredete (2013), *HVG könyvek*, HVG Kiadói Rt., Budapest.

Acemoglu, D., S. Johnson és J. A. Robinson (2001), The Colonial Origins of Comparative Development: An Empirical Investigation, *American Economic Review*, 91 (5), 1369–1401.
https://doi.org/10.3386/w7771

Acemoglu, D., S. Johnson és J. A. Robinson. (2002), Reversal of fortune: Geography and institutions in the making of the modem world income distribution, *Quarterly Journal of Economics*, 118, 1231–1294.
https://doi.org/10.3386/w8460

Acemoglu, D., S. Johnson és J. A. Robinson (2005a), Institutions as a Fundamental Cause of Long-Run Growth, *Handbook of Economic Growth*, 1A , 386–472.
https://doi.org/10.3386/w10481

Acemoglu, D., S. Johnson és J. A. Robinson (2005b), The rise of Europe: Atlantic trade, institutional change and economic growth, *American Economic Review*, 95 (3), 546–579.
https://doi.org/10.3386/w9378

Acerbi, C., és G. Scandolo (2008), Liquidity risk theory and coherent measures of risk, *Quantitative Finance*, 8 (7), 681–692.
https://dx.doi.org/10.1080/14697680802373975

Acharya, V. V. és L. H. Pedersen (2005), Asset pricing with liquidity risk, *Journal of Financial Economics*, 77 (2), 375–410.
https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2004.06.007

Affleck-Graves, J., S. P. Hedge és R. E. Miller (1994), Trading Mechanisms and the Components of the Bid-Ask Spread, *The Journal of Finance*, 49 (4), 1471–1488.
http://www.jstor.org/stable/2329194

Almgren, R. (2003), Optimal execution with nonlinear impact functions and trading-enhanced risk, *Applied Mathematical Finance*, 10 (1), 1–18.
https://doi.org/10.1080/135048602100056

Almgren, R., C. Thum, E. Hauptmann és H. Li (2005), Equity market impact, *Quantitative Trading*, 10, 21–28.

Almgren, R. és N. Chriss (2001), Optimal execution of portfolio transactions, *Journal of Risk*, 3 (2), 5–39.
https://doi.org/10.21314/jor.2001.041

Alzahrani A. A., A. Gregoriou és R. Hudson (2012), Can market frictions really explain the price impact asymmetry of block trades? Evidence from the Saudi

Stock Market, *Emerging Markets Review*, 13, 202–209.
https://doi.org/10.1016/j.ememar.2012.02.003

Alston, L. J., E. Harris és B. Mueller (2012), The Development of Property Rights on Frontiers: Endowments, Norms, and Politics, *Journal of Economic History*, 72 (3), 741–770.
https://doi.org/10.1017/s0022050712000356

Amihud, Y. (2002), Illiquidity and stock returns cross-section and time-series effects, *Journal of Financial Markets*, 5 (1), 31–56.
https://doi.org/10.1016/s1386-4181(01)00024-6

Amihud, Y. és H. Mendelson (1980), Dealership market: Market-making with inventory, *Journal of Financial Economics*, 8 (1), 31–53.
https://doi.org/10.1016/0304-405X(80)90020-3.

Amihud, Y. és H. Mendelson (1987), Trading mechanisms and stock returns: An empirical investigation, *The Journal of Finance*, 42 (3), 533–553.
https://doi.org/10.2307/2328369

Amihud, Y. és H. Mendelson (1986), Asset Pricing and the Bid-Ask Spread, *Journal of Financial Economics*, 17 (2), 223–249.
https://doi.org/10.1016/0304-405x(86)90065-6

Amihud, Y. és H. Mendelson (1991), Liquidity, Maturity, and the Yields on U.S. Treasury Securities, *Journal of Finance*, 46 (4), 1411–1425.
https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1991.tb04623.x

Amihud, Y., H. Mendelson és B. Lauterbach (1997), Market Microstructure and Securities Values Evidence from the Tel Aviv Stock Exchange, *Journal of Financial Economics*, 45 (3), 365–390.
https://doi.org/10.1016/s0304-405x(97)00021-4

Amihud, Y., H. Mendelson és L. H. Pedersen (2013), Market Liquidity: Asset Pricing, Risk and Crises, *Cambridge University Press*.

Amihud, Y., H. Mendelson és R. Wood (1990), Liquidity and the 1987 Stock Market Crash, *Journal of Portfolio Management*, 16 (3), 65–69.
https://doi.org/10.3905/jpm.1990.409268

Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber és D. Heath (1999), Coherent measures of risk, *Mathematical Finance*, 9 (3), 203–228.
https://doi.org/10.1111/1467-9965.00068

Ashraf, N., E. L. Glaeser és G. A. M. Ponzetto (2016), Infrastructure, Incentives, and Institutions, *American Economic Review: Papers & Proceedings*, 106 (5), 77–82. https://doi.org/10.1257/aer.p20161095

Balog D., Csóka P. és Pintér M. (2010), Tőkeallokáció nem likvid porfóliók esetén, *Hitelintézeti Szemle*, 9 (6), 604–616.

Baumol, W. J., R. E. Litan és C. J. Schramm (2007), Good Capitalism, Bad Capitalism, and the Economics of Growth and Prosperity, *Yale University Press, New Haven and London.*

Basel Committee on Banking Supervision (2013), Basel III: The Liquidity Coverage Ratio and liquidity risk monitoring tools, *Bank for International Settlements*, 2013 január.

Begenau, J. (2019), Capital Requirements, Risk Choice, and Liquidity Provision in a Business-Cycle Model, *Journal of Financial Economics*, 136 (2), 355–378. https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2019.10.004

Bekker Zs. (2002), Alapművek, alapirányzatok (Gazdaságelméleti olvasmányok), *Aula Kiadó.*

Bigio, S. (2015), Endogenous Liquidity and the Business Cycle, *American Economic Review*, 105 (6), 1883–1927. https://doi.org/10.1257/aer.20110035

Bank for International Settlements (1999), Market liquidity: Research findings and selected policy implications, *CGFS Papers*, 11, 1999. május 1. https://www.bis.org/publ/cgfs11.htm

Boyd, S. és L. Vandenberghe (2004), Convex Optimization, *Cambridge University Press.*

Brounen D., K. G. Koedijk, R. A. J. Pownall (2016), Household financial planning and savings behavior, *Journal of International Money and Finance*, 69 (12), 95–107. https://doi.org/10.1016/j.jimonfin.2016.06.011

Brunnermeier, M. K. és L. H. Pedersen (2008), Market Liquidity and Funding Liquidity, *Review of Financial Studies*, 22 (6), 2201–2238. https://doi.org/10.1093/rfs/hhn098

Campbell J. Y. (2016), Restoring Rational Choice: The Challenge of Consumer Financial Regulation, *American Economic Review*, 106 (5), 1–30. https://doi.org/10.1257/aer.p20161127

Castellano, R. és R. Cerqueti (2011), The optimal bid/ask spread in a Specialist System, *Economic Modelling*, 28 (5), 2247–2253.
https://doi.org/10.1016/j.econmod.2011.06.019

Çetin, U., R.A. Jarrow és P. Protter (2004), Liquidity risk and arbitrage pricing theory, *Finance and Stochastics*, 8, 311–341.

Chikán A., Molnár B. és Szabó E. (2018), A nemzeti versenyképesség fogalma és támogató intézményi rendszere, *Közgazdasági Szemle*, LXV (12), 1205–1224.

Cohen, K. J., S. F. Maier, R. A. Schwartz és D. Whitcomb (1986), The Microstructure of Securities Markets, *Prentice-Hall, Englewood Cliffs*.

Cohen, K. J., S. F. Maier, R. A. Schwartz és D. K. Whitcomb (1981), Transaction Costs, Order Placement Strategy, and Existence of the Bid-Ask Spread, *Journal of Political Economy*, 89 (2), 287–305.
http://www.jstor.org/stable/1833312

Copeland, T. E. és D. Galai (1983), Information Effects on the Bid-Ask Spread, *The Journal of Finance*, 38 (5), 1457–1469.
http://www.jstor.org/stable/2327580

Csekő I. (2016), Rövid bevezetés az általános egyensúly elméletébe, *Budapesti Corvinus Egyetem*.

Csóka P. (2003), Koherens kockázatmérés és tőkeallokáció, *Közgazdasági Szemle*, L (10), 855–880.

Csóka P. (2017), Fair Risk Allocation in Illiquid Markets, *Finance Research Letters*, 21, 228–234.
https://doi.org/10.1016/j.frl.2016.11.007

Csóka P. és P.J.J. Herings (2014), Risk Allocation under Liquidity Constraints, *Journal of Banking and Finance*, 49, 1–9.
https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2014.08.017

Csóka P., P. J. J. Herings és L. Á. Kóczy (2007), Coherent Measures of Risk from a General Equilibrium Perspective, *Journal of Banking and Finance*, 31 (8), 2517–2534.
https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2006.10.026

Csóka P., P. J. J. Herings és L. Á. Kóczy (2009), Stable allocations of risk, *Games and Economic Behavior*, 67 (1), 266–276.
https://doi.org/10.1016/j.geb.2008.11.001

Csóka P. és Hevér J. (2018), Portfolio valuation under liquidity constraints with permanent price impact, *Finance Research Letters*, 26, 235–241.
https://doi.org/10.1016/j.frl.2018.02.019

Daníelsson, J. és R. Payne (2002), Real trading patterns and prices in spot foreign exchange markets, *Journal of International Money and Finance*, 21 (2), 203–222.
https://doi.org/10.1016/s0261-5606(01)00043-2

de Jong, F. és B. Rindi (2009), The Microstructure of Financial Markets, *Cambridge University Press*.
https://doi.org/10.1017/CBO9780511818547

Demsetz, H. (1968), The Cost of Transacting, *The Quarterly Journal of Economics*, 82 (1), 33–53.
https://doi.org/10.2307/1882244

Dehez, P., J. H. Drèze és T. Suzuki (2002), Imperfect Competition à la Negishi, also with Fixed Costs, *Journal of Mathematical Economics*, 39, 219–237.
https://doi.org/10.1016/s0304-4068(03)00040-5

De Nicolò, G., A. Gamba és M. Lucchetta (2014), Microprudential Regulation in a Dynamic Model of Banking, *The Review of Financial Studies*, 27 (7), 2097–2138.
https://doi.org/10.1093/rfs/hhu022

Diamond, J. M. (1997), Guns Gems and Steel: The Fate of Human Societies. W.W. Norton & Co., New York.

Djankov, S., R. La Porta, F. Lopez-de-Silanes és A. Shleifer (2003), Courts, *The Quarterly Journal of Economics*, 118 (2), 453–517.
https://doi.org/10.1162/003355303321675437

Dong, J.. A. Kempf és Y. K. Pradeep (2007), Resiliency, the Neglected Dimension of Market Liquidity: Empirical Evidence from the New York Stock Exchange.
http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.967262

Eisfeldt, A. L. (2004), Endogenous Liquidity in Asset Markets, *Journal of Finance*, 59 (1), 1–30.
https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.2004.00625.x

Erb T. és Havran D. (2015), Mit veszítünk a piaci súrlódásokkal? A pénzügyi piacok mikrostruktúrája *Közgazdasági Szemle*, LXII (3), 229–262.

European Commission (2020), Development of tools and mechanisms for the integration of environmental, social and governance (ESG) factors into the EU banking prudential framework and into banks' business strategies and investment policies, *Interim Study*, BlackRock Financial Markets Advisory, 2020 december.

Evans, M. D. D. és R. K. Lyons (2002), Order flow and exchange rate dynamics, *The Journal of Political Economy*, 110 (1), 170–180. https://doi.org/10.1086/324391

Faias, M. és J. Luque (2018), Developers, Wall Street and the Taxmen: A Theory of Real Estate Development

Farmer, J. D. (2002), Market force, ecology and evolution. *Industrial and Corporate Change*, 11 (5), 895–953. https://doi.org/10.1093/icc/11.5.895

Farmer, J. D., L. Gillemot, F. Lillo, Sz. Mike és A. Sen (2004), What really causes large price changes?, *Quantitative Finance*, 4 (4), 383–397. https://doi.org/10.1080/14697680400008627

Farmer, J. D. és F. Lillo (2005), The key role of liquidity fluctuations in determinig large price changes?, *Fluctuation and Noise Letters*, 5 (2), 209–216. https://doi.org/10.1142/s0219477505002574

Fernández, A. és C. E. Tamayo (2017), From Institutions to Financial Development and Growth: What Are the Links?, *Journal of Economic Surveys*, 31 (1), 17-57. https://doi.org/10.1111/joes.12132

Gabrielsen A., M. Marzo és P. Zagaglia (2011). Measuring Market Liquidity: An Introductory Survey, *MPRA Paper*, No. 35829. https://doi.org/10.2139/ssrn.1976149

Garman, M. B. (1976), Market microstructure, *Journal of Financial Economics*, 3 (3), 257–275. https://doi.org/10.1016/0304-405x(76)90006-4

Gehlbach, S. és E. Malesky (2014), The Grand Experiment That Wasn't? New Institutional Economics and the Postcommunist Experience, *Institutions, Property Rights, and Economic Growth: The Legacy of Douglass North. New York: Cambridge University Press.* https://doi.org/10.1017/cbo9781107300361.012

Gerig, A. N. (2007), A theory of market impact: how order flow affects stock price, Doktori disszertáció, *University of Illinois at Urbana-Champaign.*

Glosten, L. R. (1987), Components of the Bid-Ask Spread and the Statistical Properties of Transaction Prices, *The Journal of Finance*, 42 (5), 1293–1307. http://www.jstor.org/stable/2328528

Glosten, L. R. és P. R. Milgrom (1985), Bid, ask and transaction prices in a specialist market with heterogeneously informed traders, *Journal of Financial Economics*, 14 (1), 71–100.
https://doi.org/10.1016/0304-405X(85)90044-3.

Glosten, L. R. és L. E. Harris (1988), Estimating the components of the bid/ask spread, *Journal of Financial Economics*, 21 (1), 123–142.
https://doi.org/10.1016/0304-405X(88)90034-7.

Gräbner, C. és A. Ghorbani (2019), Defining institutions – A review and a synthesis, *ICAE Working Paper Series*, 89.

Grossman, G. M. és E. Helpman (2015), Globalization and Growth, *American Economic Review: Papers & Proceedings*, 105 (5), 100–104.
https://doi.org/10.1257/aer.p20151068

Gromb, D. és D. Vayanos (2010), A model of financial market liquidity based on intermediary capital, *Journal of the European Economic Association*, 8 (2/3), 456–466.
https://doi.org/10.1111/j.1542-4774.2010.tb00516.x

Hadfield, G. K. és B. R. Weingast (2012), What Is Law? A Coordination Model of the Characteristics of Legal Order, *The Journal of Legal Analysis*, 4 (2), 471–514.
https://doi.org/10.1093/jla/las008

Han, J., Doojin Ryu, Doowon Ryu és R. I. Webb (2016), The price impact of futures trades and their intraday seasonality, *Emerging Markets Review*, 26, 80–98.
https://doi.org/10.1016/j.ememar.2016.01.002

Hardin, G. (1968), The Tragedy of the Commons, *Science, New Series*, 162 (3859), 1243–1248.
https://doi.org/10.1126/science.162.3859.1243

Havran D. és Szűcs B. Á. (2016), Árjegyzői viselkedés belső kockázatmegosztás mellett, *Szigma*, XLVII (1–2).

Havran D. és Váradi K. (2015), Price impact and the recovery of the limit order book: Why should we care about informed liquidity providers? *Magyar Tudományos Akadémia Közgazdasági és Regionális Kutatóközpont Műhelytanulmányok*, (MT-DP 1540), ISBN 978-615-5594-04-5.

Hayek, F. A. (1960), The Constitution of Liberty. *The University of Chicago Press, Chicago.*

Herings, P. J. J. és Y. Zhou (2019), Competitive Equilibria in Matching Models with Financial Constraints, *GSBE Research Memorandum 19/007, Maastricht University, Maastricht*, 1–39.
https://doi.org/10.2139/ssrn.3373744

Hevér J. (2020), A piaci likviditás és a szabályozás kapcsolatának vizsgálata általános egyensúlyelméleti modellkeretben, *Közgazdasági Szemle*, LXVII (7-8), 708–733.
https://doi.org/10.18414/ksz.2020.7-8.708

Hevér J. (2015), Yakov Amihud-Haim Mendelson-Lasse Heje Pedersen: Market Liquidity. Asset Pricing, Risk and Crises, Cambridge University Press, Cambridge, 2013, 289 o., Könyvismertetés, *Közgazdasági Szemle*, LXII (7-8), 871–875.
DOI:10.18414/KSZ.2015.9.871

Hevér J. (2017), A likviditás és a permanens árhatás szerepe a portfólióértékelésben, *Közgazdasági Szemle* LXIV (6), 594–611.
https://doi.org/10.18414/ksz.2017.6.594

Hindriks, F. és F. Guala (2015), Institutions, Rules, and Equilibria: A Unified Theory, *Journal of Institutional Economics*, 11 (3), 459-480.
https://doi.org/10.1017/s1744137414000496

Hodgson, G. M. (2006), What Are Institutions?, *Journal of Economic Issues*, 40 (1), 1–25.
https://doi.org/10.1080/00213624.2006.11506879

Hodgson, G. M. (2015), On defining institutions: rules versus equilibria, *Journal of Institutional Economics*, 11 (3), 497–505.
https://doi.org/10.1017/s1744137415000028

Huberman, G. és W. Stanzl (2004), Price manipulation and quasi-arbitrage, *Econometrica*, 72 (4), 1247–1275.
https://doi.org/10.1111/j.1468-0262.2004.00531.x

Huang, R. D. és H. R. Stoll (1997), The Components of the Bid-Ask Spread: A General Approach, *The Review of Financial Studies*, 10 (4), 995–1034.
http://www.jstor.org/stable/2962337

International Organization of Securities Commissions (2018), Recommendations for Liquidity Risk Management for Collective Investment Schemes, FR01/2018 február.

International Organization of Securities Commissions (2019), Liquidity in Corporate Bond Markets Under Stressed Condition, FR10/2019 június.

International Organization of Securities Commissions (2019), Sustainable finance in emerging markets and the role of securities regulators, CR01/2019 február.

Jakiela, P. (2011), Social Preferences and Fairness Norms as Informal Institutions: Experimental Evidence, *American Economic Review*, 101 (3), 509-13.
https://doi.org/10.1257/aer.101.3.509

Jarrow, R. A. and P. Protter (2005), Liquidity risk and risk measure computation, *Review of Futures Markets*, 11, 27–39.

Kapás J. (2003), A piac mint intézmény – szélesebb perspektívában, *Közgazdasági Szemle*, L (12), 1076–1094.

Kapás J. (2008), Az intézmények számítanak, de hogyan? (Tudományos tájékoztató), *Közgazdasági Szemle*, LV (11), 1027–1032.

Kapás J. (2011), Intézményi közgazdaságtan – két új Nobel díj-után (Tudományos tájékoztató), *Közgazdasági Szemle*, LVIII (3), 296–298.

Király J., Nagy M. és Szabó E. V. (2008), Egy különleges eseménysorozat elemzése – a másodrendű jelzáloghitel-piaci válság és (hazai) következményei, *Közgazdasági Szemle*, LV. (7–8), 573–621.

Kitamura, Y. (2016), The probability of informed trading measured with priceimpact, price reversal, and volatility, *Journal of International Financial Markets, Institutions & Money*, 42, 77–90.
https://doi.org/10.1016/j.intfin.2016.02.001

Kiyotaki, N. és J. Moore (2019), Liquidity, Business Cycles, and Monetary Policy, *Journal of Political Economy*, 127 (6), 2926-2966.
https://doi.org/10.1086/701891

Kozenkow J. (2011), Merre tart az új intézményi közgazdaságtan? (Tudományos tájékoztató), *Közgazdasági Szemle*, LVIII (2), 190–194.

Kőhegyi G. és Stépán G. (2003), A versenyzői gazdaság stabilitása késleltetett áralkalmazkodás mellett, *Közgazdasági Szemle*, L (2), 112–135.

Kyle, A. S. (1985), Continuous auctions and insider trading, *Econometrica*, 53 (6), 1315–1335.
https://doi.org/10.2307/1913210

Large, J. (2007), Measuring the resiliency of an electronic limit order book, *Journal of Financial Markets*, 10 (1), 1–25.
https://doi.org/10.1016/j.finmar.2006.09.001

Láng P. (2017), A model of bank behaviour for the assessment of the potential balance sheet impact of the NSFR liquidity requirement, *MNB Working Papers*, 3.

Le Roy, S. F. és J. Werner (2001), Principles of Financial Economics, *Cambridge University Press.*
https://doi.org/10.1017/cbo9781139162272

Lin, J-C., G. C. Sanger és G. G. Booth (1995), Trade Size and Components of the Bid-Ask Spread, *The Review of Financial Studies*, 8 (4), 1153–1183.
http://www.jstor.org/stable/2962302

Madhavan, M. (2000), Market microstructure: A survey, *Journal of Financial Markets*, 3 (3), 205–258.
https://doi.org/10.1016/s1386-4181(00)00007-0

Mantegna, R. N. és J. Kertész (2011), Focus on statistical physics modeling in economics and finance, *New Journal of Physics*, 13 (2), 025011.
https://doi.org/10.1088/1367-2630/13/2/025011

Mitchell, M., L. H. Pedersen és T. Pulvino (2007), Slow Moving Capital, *American Economic Review*, 97 (2), 215–220.
https://doi.org/10.1257/aer.97.2.215

Mokyr, J. (2010), Entrepreneurship and the Industrial Revolution in Britain *Megjelent: Baumol, W., D. S. Landes és J. Mokyr (szerk.): The Invention of Enterprise: Entrepreneurship from Ancient Mesopotamia to Modern Times, Princeton University Press*, 183–210.
https://doi.org/10.1515/9781400833580-011

Mokyr, J. (2014), Culture, Institutions, and Modern Growth. *Megjelent: Institutions, Property Rights, and Economic Growth: The Legacy of Douglass North, New York: Cambridge University Press*, 151–191.
https://doi.org/10.1017/cbo9781107300361.010

Murrell, P. (2017), Design and evolution in institutional development: The insignificance of the English Bill of Rights, *Journal of Comparative Economics*, 45 (1), 36–55.
https://doi.org/10.1016/j.jce.2016.08.007

Naffa H. és Fain M. (2019), Do ESG factors matter in emerging markets?, *In: Barbara, Dömötör; Judit, Lilla Keresztúri (szerk.) PRMIA Hungary Chapter Research Conference, 2019: Conference proceedings - full papers, Budapest, Magyarország: Corvinus University of Budapest*, 26–34.

North, D. C. és R. P. Thomas (1973), The Rise of the Western World: A New Economic History, *Cambridge University Press.*

North, D.C. (1990), Institutions, Institutional Change, and Economic Performance, *Cambridge University Press.*

North, D. C. és B. R. Weingast (1989), Constitutions and Commitment: Evolution of Institutions Governing Public Choice in Seventeenth-century England, *Journal of Economic History*, 49 (4), 803–832.
https://doi.org/10.1017/s0022050700009451

OECD (2011), Regulatory Policy and Governance: Supporting Economic Growth and Serving the Public Interest, *OECD Publishing, Paris.*
https://doi.org/10.1787/9789264116573-en

O'Hara, M. (1995), Market Microstructure Theory, *Blackwell Publishing.*

Pincus, S. CA és J. A. Robinson (2014), What Really Happened During the Glorious Revolution? *Megjelent: Institutions, Property Rights, and Economic Growth: The Legacy of Douglass North. New York: Cambridge University Press*, 192–222.
https://doi.org/10.1017/cbo9781107300361.011

Pozsar Z. (2019), Countdown to QE4?, *Global Money Notes 26*, Credit Suisse, Investment Solutions and Products Global, 2019. december 9.

Sachs, J. D. (2001), Tropical Underdevelopment, *NBER Working Paper*, 8119, 2001 február.
https://doi.org/10.3386/w8119

Spiller, P. T. (2011), Transaction Cost Regulation, *NBER Working Paper Series*, 16735, 2011 január.
https://doi.org/10.3386/w16735

Spiller, P. T. and M. Tommasi (2005), The Institutions of Regulation: An Application to Public Utilities, *Handbook of New Institutional Economics*, 515–543.
https://doi.org/10.1007/0-387-25092-121

Sommer, K. és P. Sullivan (2018), Implications of US Tax Policy for House Prices, Rents, and Homeownership *American Economic Review*, 108 (2), 241–274.
https://doi.org/10.1257/aer.20141751

Stigler, G. (1971), The Theory of Economic Regulation, *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 2(1), 3–21.
https://doi.org/10.2307/3003160

Stoll, H. R. (1978), Supply of Dealer Services in Securities Markets, *Journal of Finance*, 33 (4), 1133–51.
https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1978.tb02053.x

Stoll, H. R. (1989), Inferring the Components of the Bid-Ask Spread: Theory and Empirical Tests, *Journal of Finance*, 44 (1), 115–134.
http://www.jstor.org/stable/2328278

Stolper, O. (2018), It takes two to Tango: Households' response to financial advice and the role of financial literacy, *Journal of Banking & Finance*, 92 (7), 295-310.
https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2017.04.014

Székely-Doby A. (2014), A kínai reformfolyamat politikai gazdaságtani logikája, *Közgazdasági Szemle*, LXI (12), 1397–1418.

Székely-Doby A. (2017), A kínai fejlesztő állam kihívásai, *Közgazdasági Szemle*, LXIV (6), 630–649.
https://doi.org/10.18414/ksz.2017.6.630

Váradi K., Gyarmati Á. és Lublóy Á. (2012), Virtuális árhatás a budapesti értéktőzsdén, *Közgazdasági Szemle*, LIX (5), 508–539.

Tian, Y., R. Rood és C. W. Oosterlee (2013), Efficient Portfolio Valuation Incorporating Liquidity Risk, *Quantitative Finance*, 13 (10), 1575–1586.
https://doi.org/10.1080/14697688.2013.779013

Vincze J. (2018), Az ökonometria alapjai: Többváltozós lineáris regresszió és kiterjesztései, *Budapesti Corvinus Egyetem.*

Wanzalaa, R. W., W. Muturib és T. Olwenyb (2018), Market resiliency conundrum: is it a predicator of economic growth?, *The Journal of Finance and Data Science*, 4 (1), 1–15.
https://doi.org/10.1016/j.jfds.2017.11.004

Weber, M. (1930), The Rotestant Ethic and the Spirit of Capitalism, *Allen and Unwin, London.*

Weber, P. és Rosenow, B. (2006), Large stock price changes: volume or liquidity?, *Quantitative Finance*, 6 (1), 7–14.
https://doi.org/10.1080/14697680500168008.

Yang, X. és J. Borland (1991), A Microeconomic Mechanism for Economic Growth, *Journal of Political Economy*, 99 (3), 460–482.
https://doi.org/10.1086/261762

Yang, H., H. Ge és Y. Luo (2020), The optimal bid-ask price strategies of high-frequency trading and the effect on market liquidity, *Research in International Business and Finance*, 53, 101194.
https://doi.org/10.1016/j.ribaf.2020.101194.

Zalai E. (1998), Általános egyensúlyi modellek alkalmazása gazdaságpolitikai elemzésekre, *Közgazdasági Szemle*, XLV (12), 1065–1081.