BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM

Közgazdasági és Gazdaságinformatika Doktori Iskola

TÉZISGYŰJTEMÉNY

Nagy Balázs

A gépi látás alkalmazásai: skyline-kiemelés és választókerület-szabdalás

című Ph.D. értekezéséhez

Témavezető: Tasnádi Attila, D.Sc.

Budapest, 2020

Matematikai és Statisztikai Modellezés Intézet

Matematika Tanszék

TÉZISGYŰJTEMÉNY

Nagy Balázs

A gépi látás alkalmazásai: skyline-kiemelés és választókerület-szabdalás

című Ph.D. értekezéséhez

Témavezető: Tasnádi Attila, D.Sc.

BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM

Budapest, 2020

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Az értekezés a gépi látás és a választókerület-szabdalás kérdéskörével foglalkozik. Az első látásra távolinak tűnő két terület közötti kapcsolatot a képfeldolgozás teremti meg, ami egyaránt alkalmazható a *skyline*, azaz a látóhatár körvonalának felismerésére és kiemelésére, vagy annak megállapítására, hogy egy választókerület alakja mennyire körszerű.

A mobil eszközökön használatos térképalkalmazásoknál komoly problémát okoz a szenzorok pontatlansága. A látóhatár és egy domborzati térkép (DEM) segítségével a tájolás vagy orientáció pontossága jelentősen javítható. A területileg eltérő népességszám-változás és a migráció miatt a választókerületeket időről időre át kell rajzolni. A folyamat esetleges manipulálásával egyes pártok előnybe kerülhetnek, de egy párt számára optimális szabdalás megtalálása egyáltalán nem könnyű feladat. Az USA legtöbb államában a választókerületek határának megváltoztatását nem egy független szervezet végzi, és gyakran kelt vitákat a manipuláció, azaz a *gerrymandering*. A minél körszerűbb alak egy természetes elvárás egy igazságos választókerülettel szemben. Emiatt az alakvizsgálat egy hatékony eszköz lehet az esetleges csalások felderítésére.

Először egy algoritmust írunk le a látóhatár kiemelésére és az orientáció meghatározására hegyvidéki környezetben, majd bemutatjuk a módszer hatékonyságát a gyakorlatban. Ezután bizonyítjuk, hogy a síkon az optimális pártos választókerület-szabdalás és többséget biztosító szabdalás NP-teljes problémák, és megmutatjuk azt is, hogy miért nehéz optimális szabdalást létrehozni a valós életben. Végezetül bevezetünk egy új, paraméter nélküli mértéket gerrymandering detektálására, amit a gyakorlatban is kipróbálunk.

2. Orientáció a hegyek között

A mobil eszközökben található szenzorok nem elég pontosak a kiterjesztett valóságot használó alkalmazásokhoz, pl.: Fedorov et. al (2016). A digitális iránytűt a fém tárgyak és elektronikus eszközök eltérítik, amin a gyakori kalibráció sem tud segíteni. Így a mágneses és földrajzi észak meghatározása nem megbízható, a hiba lehet akár $10-30°$ is, ld. Blum et. al (2013).

Az általunk kidolgozott módszer három lépésből áll. Először meghatározzuk a teljes skyline-t egy domborzati térképből, az adott földrajzi pontból egy geometriai transzformáció segítségével, hasonlóan ahhoz, amit Zhu et. al (2012) javasolt. Ezután a képből felismerjük és kiemeljük a hegyláncok kontúrját, azaz a skyline-t egy új, éldetektálás-alapú algoritmussal, ami az összefüggő komponensek módszerét használja. Végül a két skyline-t összehasonlítjuk a két vektor közötti korreláció vizsgálatával. A 2. fejezethez az alábbi saját publikáció tartozik Nagy (2020).

2.1. Módszer

2.1.1. A teljes skyline meghatározása a domborzati térképből

A teljes skyline-t egy háromdimenziós térképből határozzuk meg, amihez a szabadon hozzáférhető, $30-90$m-es felbontású SRTM és ASTER térképeket használjuk. A nézőpontunk és a vizsgált hegyek távolságától, továbbá a terület domborzat jellegzetességeitől függően ez a felbontás elégséges a probléma megoldásához.

Egy adott pontból a $360°$-os teljes skyline az alábbi koordináta-transzformációval számítható ki, ahol

- $C(X_0, Y_0, Z_0)$ a kamera térbeli pozíciója,

- $D(X, Y, Z)$ egy tetszőleges pontja a domborzati modellnek,
- $D'(x', y', z')$ a D pont síkvetülete. [1]

Ezzel minden pont leírható az alábbi azimut szög:

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{ha } X = X_0 \text{ és } Z = Z_0 \\ \arcsin\left(\frac{z'-Z_0}{\rho}\right) & \text{ha } X \geq X_0 \\ -\arcsin\left(\frac{z'-Z_0}{\rho}\right) + \pi & \text{ha } X < X_0, \end{cases}$$

és az alábbi magassági szög segítségével:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{Y - y'}{r}\right),$$

ahol

$$\rho = \sqrt{(x' - X_0)^2 + (z' - Z_0)^2}$$

a C és D' közötti távolság, és

$$r = \sqrt{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2}$$

a C és D közötti távolság. A ϕ és θ szögekkel minden D pontot leírhatunk a domborzati modellben. Végül a legnagyobb θ meghatározza a skyline adott pontját minden φ-re.

2.1.2. A skyline kiemelése

A hegyláncok skyline-ja éles határvonalat képez az ég és a föld között. Az általunk javasolt automatikus módszer azon alapszik, hogy az élek nagy és széles összefüggő komponense a kamera képének felső részén jellemzően a skyline-hoz tartozik.

Az alábbi algoritmus több lépésben választja ki a skyline-t a skyline jelöltek közül. A skyline jelölteket az alábbi függvény szerint rendezhetjük sorba

$$S(C) = \mu(C) + 2\rho(C),$$

[1] $y' = Y_0$

ahol C egy skyline jelölt, μ a C-beli pixelek száma, ρ pedig C szélessége.

Az algoritmus fő lépései a következők:

1. Előfeldolgozás

   (a) Az eredeti kép átméretezése 640×480 pixelre, és a kontraszt javítása.

   (b) A szürkeárnyalatos képhez a kék színcsatorna kiválasztása az RGB színtérből, mivel itt a legélesebb a kontraszt az ég és a föld között.

   (c) Morfológiai nyitó és záró operációk alkalmazása a zaj és egyéb zavaró elemek szűrésre.

   (d) Élkiemelés a legjellegzetesebb élek megtalálására.

2. Az összefüggő komponensek módszere megtalálja a összefüggő komponenseket a kiemelt élek közül, és meghatározza a skyline jelölteket. Az S függvény kiválasztja a három legjobb jelöltet.

3. A felülről lefelé keresés oszloponként kiválasztja az első élhez tartozó pixeleket, mivel a skyline a kép felső régiójában keresendő.

4. Alacsonyabb felbontás esetén az előző lépés miatt keletkezhet egy pixelnyi rés a skyline-on, amit ebben az esetben pótol egy operáció (bridge).

5. A második összefüggő komponensek analízise eltünteti a maradék, nem használható él részeket, és kiválasztja a feltételezett skyline-t.

6. A feltételezett skyline vektorizálása az összehasonlításhoz.

2.1.3. A skyline-ok összehasonlítása

Az utolsó lépés a teljes skyline és a képből kiemelt skyline görbék összehasonlítása. Azt a pontot keressük, ahol a két skyline vektor egymásba illeszkedik, amiből már φ meghatározható.

A jelfeldolgozási feladatoknál gyakran használt ($a \star b$) normalizált kereszt-korrelációt használjuk az a vektor (teljes skyline) és a b vektor (skyline) k értékkel való eltolásaival keletkező vektorok hasonlóságának mérésére. A kereszt-korreláció függvény maximumhelye jelöli ki a K pontot, ahol a jelek legjobban illeszkednek:

$$K = \operatorname*{argmax}_{0^\circ \leq k < 360^\circ}((a \star b)(k)).$$

A K-ból a φ azimut szög meghatározható, és így megkapjuk a vízszintes orientációt.

2.2. Eredmények

2.2.1. A skyline kiemelése

Az algoritmus kimenetét manuálisan az alábbi négy osztályba soroltuk az eredmény minősége szerint.

- Kiváló: az egész skyline [95 – 100%] felismerhető, nincsenek a skyline-hoz nem tartozó részek.
- Jó: a skyline nagy része [50 – 95%) felismerhető, a skyline-hoz nem tartozó részek nem zavarják az elemzést.
- Gyenge: a skyline egy kis része [5 – 50%) felismerhető, a skyline-hoz nem tartozó részek zavarhatják az elemzést.
- Rossz: a skyline nem található [0 – 5%), vagy a felismert élek nem a skyline-hoz tartoznak.

Az 1. táblázat a kiemelt skyline-ok osztályzását mutatja be, amiből látható, hogy a vizsgált minták 89%-a a Kiváló vagy Jó osztályba került. Ezek azok az esetek, amik használhatók az összehasonlító lépésben.

Osztály	Arány
Kiváló	56.67%
Jó	32.67%
Gyenge	8.00%
Rossz	2.67%

1. táblázat. A skyline-kiemelés eredménye.

Kép	Kilátópont			Célpont			Eredmények			
ID	Lat (°N)	Lon (°E)	Magasság (m)	Lat (°N)	Lon (°E)	Magasság (m)	Korreláció	φ (°)	$\hat{\varphi}$ (°)	$\hat{\varphi} - \varphi$ (°)
FT01	47.51552	18.96866	330	47.55016	19.00178	436	0.92	31.58	32.60	**1.02**
FT02	47.51552	18.96866	330	47.53371	18.95588	429	0.96	334.62	334.61	**-0.01**
FT03	47.55555	18.99883	483	47.51827	18.95922	508	0.95	214.83	215.61	**0.78**
FT04	47.53154	18.98611	219	47.49178	18.97895	458	0.99	185.89	186.95	**1.06**
FT05	47.99865	18.86120	188	47.99564	18.86353	195	0.92	151.35	152.47	**1.12**
FT06	47.99948	18.86173	201	47.99564	18.86353	195	0.98	161.22	162.92	**1.70**
FT07	47.51827	18.95922	508	47.55016	19.00178	436	0.97	44.12	41.85	**-2.27**
FT08	47.98355	18.80440	124	47.95780	18.87714	723	0.88	118.98	118.58	**-0.40**
FT09	47.99865	18.86120	188	47.99564	18.86353	195	0.94	151.52	152.47	**0.95**
FT10	47.99948	18.86173	201	47.99564	18.86353	195	0.98	161.81	162.92	**1.11**

2. táblázat. A helyszíni vizsgálatok eredménye.

2.2.2. Helyszíni vizsgálatok

A módszer hatékonyságának a mérésére helyszíni vizsgálatokat is végeztünk természetes környezetben. A kísérletek célja az volt, hogy meghatározzuk az orientációt csupán egy földrajzi pozícióval ellátott kép, és egy domborzati térkép segítségével.

A 2. táblázat bemutatja a helyszíni vizsgálatok eredményeit. A tesztekhez csak a Kiváló és Jó osztályzást kapott skyline-okat használtunk. Az átlagos korreláció majdnem 95%. Az algoritmus által meghatározott azimut átlagosan 1.04° eltérést mutatott a valós azimuttól.

3. Optimális választókerület-szabdalás

A különböző választási rendszerekben időnként szükség van a választókerületek határainak megváltoztatására a területileg eltérő népességszám-változás és migráció miatt. A választókerület-szabdalással kapcsolatban ugyanakkor felmerül, hogy az egy adott pártnak kedvez. Ha szándékos manipuláció áll a háttérben, akkor gerrymanderingről beszélünk.

Az optimális gerrymandering probléma egyszerűbb verzióiról már bebizonyították, hogy NP-teljes, ld. Puppe és Tasnádi (2009), Lewenberg et. al (2017). A 3. fejezethez az alábbi saját publikáció tartozik Fleiner et al. (2017).

3.1. A modellkeret

Az A és B párt egy választáson versenyez az egyszemélyes választókerületekért. A síkon elhelyezkedő és ismert pártpreferenciával rendelkező szavazókat kell nagyjából egyforma méretű választókerületekbe osztani.

3.1. Definíció. *A* $\Pi = (X, N, (x_i)_{i \in N}, v, K, \mathcal{D})$ *egy* választókerület-szabdalási probléma*, ahol*

- *X egy korlátos és szigorúan összefüggő részhalmaza $\mathbb{R}^2$-nek,*
- *$N = \{1, \ldots, n\}$ a választók véges halmaza,*
- *$x_1, \ldots, x_n \in \operatorname{int}(X)$, a választók különböző elhelyezkedése,*
- *$v : N \to \{A, B\}$ a választók pártpreferenciája,*
- *$K = \{1, \ldots, k\}$ a választókerületeket címkéjének halmaza, ahol $\lfloor n/k \rfloor \geq 3$,*
- *D a lehetséges választókerületek véges halmaza, amely X korlátos és szigorúan összefüggő részhalmazaiból áll, és $\lfloor n/k \rfloor$ vagy $\lceil n/k \rceil$ választó elhelyezkedését tartalmazza, továbbá*

- *tegyük fel, hogy az n választó az elhelyezkedése alapján elosztható k választókerületbe $\{D_1, \ldots, D_k\} \subseteq \mathcal{D}$.*

3.2. Definíció. *Egy $f : N \to \mathcal{D}$ egy* választókerület-szabdalás *egy adott* Π*-re, ha létezik választókerületek egy $D_1, \ldots, D_k \in \mathcal{D}$ halmaza, hogy*

- $f(N) = \{D_1, \ldots, D_k\}$,
- $\mathrm{int}(D_i) \cap \mathrm{int}(D_j) = \emptyset$ *ha $i \neq j$ és $i, j \in K$,*
- $\{x_i \mid i \in f^{-1}(D_j)\} \subset \mathrm{int}(D_j)$ *minden $j \in K$-ra.*

3.2. Eredmények

Megmutattuk, hogy adott Π választókerület-szabdalási probléma esetén már annak az eldöntése is NP-teljes, hogy létezik-e olyan választókerület-szabdalás, ahol az egyik párt legalább m választókerületet nyer. Ezt nevezzük WINNING DISTRICTS problémának.

3.1. Tétel. *A WINNING DISTRICTS probléma NP-teljes.*

A 3.1 Tétel egyszerű, gyakorlati szempontból fontos következménye az alábbi tétel.

3.2. Tétel. *Adott* Π *választókerület-szabdalási probléma esetén annak az eldöntése, hogy létezik-e olyan választókerület-szabdalás, ahol az egyik párt megszerzi a többséget, NP-teljes probléma.*

3.2.1. Egy pozitív eredmény

Ha a 3.1 Definícióban az $\mathbb{R}^2$ helyett az $\mathbb{R}$ eset vizsgálatára szorítkozunk, akkor dinamikus programozás felhasználásával adható olyan polinomiális idejű algoritmus, ami az egyik párt számára megtalálja az optimális megoldást.

3.2.2. Gyakorlati megközelítés

Budapesten 2011 óta 18 választókerület található, ami 1472 választókörre osztódik fel, és egy választókörhöz nagyjából 600-1500 választó tartozik. Így egy átlagos választókerület 82 választókörből áll. Az egyszerűség kedvéért a választási térképet egy két dimenziós négyzetráccsal modellezzük, ahol a cellák a választóköröknek felelnek meg. Továbbá ismerjük, hogy a választókörök szintjén az ott élők A és B párt közül melyiket preferálják. Ebben a modellben két cella szomszédos, ha van közös élük, ami egy 4-szomszédsági relációt definiál a cellák halmazán.

Még ebben az egyszerűsített modellben sem ismert képlet az adott számú szomszédos cellákból kirakható formák vagy poliominók számának meghatározására. Amennyiben az orientációt is fegyelembe vesszük, fix poliominókról beszélünk. Ez azt jelenti, hogy nem tudjuk a választókörökből kialakítható lehetséges választókerületek számát sem. Jensen (2003) meghatározta a fix n cellából álló poliominók számát 56-ig, pl. ebben az esetben 6.9×10^{31} poliominó létezik. Ez azt mutatja, hogy már egy Budapest méretű probléma esetén sem lehetséges megvizsgálni az összes, átlagosan 82 választókörzetből kialakítható, különböző alakú választókerületet. Ez pedig csupán az első lépés lenne a választókerület-szabdalási feladat megoldásához.

Egy másik heurisztikus, tehát nem optimális, de gyors eljárás lehet gerrymanderinghez az úgynevezett *pack and crack* elv. Mutattunk példákat, ahol ezt az elvet követve mégsem kapunk az A párt számára optimális szabdalást.

4. Választókerületek körszerűsége

Az alakzatvizsgálat fontos szerepet játszik a manipulált választókerület-szabdalás, azaz a gerrymandering felderítésében. A körszerűség egy széles körben használt mutatója a kompaktságnak, ami egy természetes elvárás egy választókerülettel szemben. Bevezetjük az M

körszerűségi mértéket, ami a Hu invariáns momentumokon alapszik. Ez a paraméter nélküli mérték hatékony eszköz lehet a szokatlan alakú választókerületek detektálásához. A új mértékkel megvizsgáljuk Arkansas, Iowa, Kansas és Utah állam egymást követő kongresszusi választókerületeit és összehasonlítjuk néhány elterjedt körszerűségi mutatóval (Reock (1961), Polsby és Popper (1991), and Lee és Sallee (1970)). A 4. fejezethez az alábbi saját publikációk tartoznak Nagy és Szakál (2019), Nagy és Szakál (2020).

4.1. Körszerűségi mértékek

Tegyük fel, hogy a vizsgált síkbeli alakzat kompakt topológiai értelemben. Egy C körszerűségi mértékkel szemben az alábbi természetes elvárásokat támasztjuk:

a) $C(D) \in (0,1]$ bármely D síkbeli alakzatra;

b) $C(D) = 1$ pontosan akkor, ha D egy kör;

c) $C(D)$ invariáns az eltolásra, forgatásra és a nagyításra;

d) Minden $\delta > 0$ esetén létezik olyan D alakzat, amelyre $0 < C(D) < \delta$, azaz léteznek olyan alakzatok, amelyek körszerűségi mértéke tetszőlegesen megközelíti a 0-t.

A 4.1. állítás és a 4.1. definíció Žunić et. al (2010) munkája.

4.1. Állítás. *Legyen D egy kompakt alakzat a síkon. Ekkor*

$$\phi_1(D) = \eta_{2,0}(D) + \eta_{0,2}(D) = \frac{\mu_{2,0}(D) + \mu_{0,2}(D)}{\mu_{0,0}(D)^2} \geq \frac{1}{2\pi}$$

$$\phi_1(D) = \eta_{2,0}(D) + \eta_{0,2}(D) = \frac{\mu_{2,0}(D) + \mu_{0,2}(D)}{\mu_{0,0}(D)^2} = \frac{1}{2\pi} \iff \textit{ha D kör.}$$

A 4.1. állítás alapján a C_1 körszerűségi mérték a következőképpen definiálható.

4.1. Definíció. *Tegyük fel, hogy D egy kompakt alakzat a síkon, és az O kör területe megegyezik a D területével. Ekkor legyen a* $C_1(D)$ *körszerűségi mérték*

$$C_1(D) = \frac{\phi_1(O)}{\phi_1(D)} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\mu_{0,0}(D)^2}{\mu_{2,0}(D) + \mu_{0,2}(D)}.$$

Az alábbi C_β körszerűségi mérték C_1 általánosítása, aminek az érzékenysége manuálisan beállítható az adott feladatnak megfelelően.

4.2. Definíció. *Legyen D egy kompakt síkbeli alakzat, amelynek súlypontja egybeesik az origóval, továbbá β valós szám úgy, hogy $-1 < \beta$, és $\beta \neq 0$. A $C_\beta(D)$ általánosított momentum alapú mértéket az alábbi formulával definiáljuk:*

$$C_\beta(D) = \begin{cases} \dfrac{\mu_{0,0}(D)^{\beta+1}}{\pi^\beta(\beta+1)\displaystyle\int\int_D \left(x^2+y^2\right)^\beta dxdy} & ha\, \beta > 0, \\ \dfrac{\pi^\beta(\beta+1)\displaystyle\int\int_D \left(x^2+y^2\right)^\beta dxdy}{\mu_{0,0}(D)^{\beta+1}} & ha\, \beta \in (-1,0)\,. \end{cases}$$

A vizsgált adatok alapján, a mértéknek van egy nemkívánatos tulajdonsága. A körszerűség sorrendje megváltozhat két eltérő alakzat esetén, a β paraméter változtatásával, ezért a következő definícióban bevezetünk egy új, normalizált M körszerűségi mértéket, amely a C_β görbéje alatti terület a $\beta \in (-1,0) \cup (0,\infty)$ intervallumon.

4.3. Definíció. *Legyen $C_\beta(D)$ az általánosított momentum alapú körszerűségi mérték. Ekkor az M körszerűségi mértéket az alábbi formulával definiáljuk:*

$$M(D) = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{b+1} \int_{-1}^{b} C_\beta(D)\, d\beta.$$

4.2. Eredmények

A gerrymandering felismerése céljából az államok egymást követő kongresszusi választókerületeinek átlagos körszerűségét vizsgáltuk, és ezek között kerestünk anomáliákat. Ezzel nyomon tudtuk követni a változásokat, és csökkenteni a külső körülmények hatását, mint például a földrajzi korlátokat. Ezzel a módszerrel az USA négy államát vizsgáltunk a 107., 108. és 113. kongresszus idején érvényben lévő választókerületi határokkal.

Utah esetében az összes vizsgált körszerűségi mutató értéke csökkent a 107. és 113. időszak között. Iowaban is hasonló tendenciákat mutattak az indexek, a 107. időszakban voltak az értékek a legnagyobbak, míg a 108.-ban a legrosszabbak. Arkansasban a Lee-Sallee index és a Polsby-Popper teszt értékei monoton csökkentek, míg a Reock teszt és az M mérték a 108. időszakban érte el a maximumát. Az M mérték érzékenyebben mutatta ezt a különbséget. A legérdekesebb vizsgált állam Kansas volt, ahol a mértékek különböző eredményeket adtak, és csak az M mérték mutatott egy mononton csökkenő trendet.

Egy feltételezhető gerrymandering esetre lehet példa Arkansas harmadik választókerülete a vizsgált időszakokban, ahol a körszerűségi értékek egyértelműen javultak a 107. és 108. időszakok között, majd nagyot romlott az értékük a 108.-ról a 113. időszakra.

5. Saját publikációk

Fleiner, B., Nagy, B., Tasnádi, A. (2017), Optimal partisan districting on planar geographies, *Central European Journal of Operations Research* **25**, 879–888.

Nagy, B., Szakál, Sz. (2019), Választókerületek alakjának vizsgálata Hu-féle invariáns momentumok alkalmazásával, *Alkalmazott Matematikai Lapok* **36**, 161–183.

Nagy, B. (2020), A new method of improving the azimuth in mountainous terrain by skyline matching, *PFG - Journal of Photogrammetry, Remote Sensing and Geoinformation Science* **88**, 121–131.

Nagy, B., Szakál, Sz. (2020), Measuring the circularity of congressional districts, *Society and Economy* **42**, 298–312.

Hivatkozások

Blum, J., Greencorn, D., Cooperstock, J. (2013), Smartphone sensor reliability for augmented reality applications, *Proceedings of the 9th International Conference on Mobile and Ubiquitous Systems: Computing, Networking and Services*, 127–138.

Fedorov, R., Frajberg, D., Fraternali, P. (2016), A framework for outdoor mobile augmented reality and its application to mountain peak detection, *Augmented Reality, Virtual Reality, and Computer Graphics*, 281–301.

Jensen (2003), Counting polyominoes: A parallel implementation for cluster computing, *International Conference on Computational Science*, 203–212.

Lee, D., Sallee, T. (1970), A method of measuring shape, *American Geographical Society, Wiley* **60**, 555–563.

Lewenberg, Y., Lev, O., Rosenschein, J. (2017), Divide and conquer: Using geographic manipulation to win district-based elections, *Proceedings of the 16th Conference on Autonomous Agents and MultiAgent Systems*, 624–632.

Polsby, D., Popper, R. (1991), The third criterion: Compactness as a procedural safeguard against partisan gerrymandering, *Yale Law & Policy Review* **9**, 301–353.

Puppe, C., Tasnádi, A. (2009), Optimal redistricting under geographical constraints: Why "pack and crack" does not work, *Economics Letters* **105**, 93–96.

Reock, E. (1961), A note: Measuring compactness as a requirement of legislative apportionment, *Midwest Journal of Political Science* **5**, 70–74.

Zhu et. al. (2012), Skyline matching: A robust registration method between Video and GIS, *Usage, Usability, and Utility of 3D City Models–European COST Action TU0801*, 03007

Žunić, J., Hirota, K., Rosin, P. (2010), A Hu moment invariant as a shape circularity measure, *Pattern Recognition* **43**, 47–57.