BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM

Közgazdasági és Gazdaságinformatika Doktori Iskola

# TÉZISGYŰJTEMÉNY

Radványi Anna Ráhel

# Költségelosztási modellek a játékelméletben

című PhD értekezéséhez

Témavezetők:

Deák István DSc, Professor Emeritus

Pintér Miklós PhD, Egyetemi Docens

Budapest, 2020

# 1. Kutatási előzmények és a téma indoklása

A kooperatív játékelmélet jelentősége elvitathatatlan. A matematika, illetve a közgazdaságtan határmezsgyéjén elhelyezkedő tudományterület eszköztára lehetővé teszi számunkra, hogy olyan gazdasági szituációkat modellezzünk, elemezzünk, amelyekben a felek közötti együttműködésen, és a közösen elért eredményen van a hangsúly. Az ilyen jellegű szituációkban alapvetően két kérdéskört vizsgálunk: milyen kooperációs csoportok (koalíciók) jönnek létre, illetve hogyan tudjuk elosztani az együttműködésből eredő hasznot a résztvevő felek között. A kooperatív játékelmélet területén az utóbbi évtizedekben számos elméleti eredmény született, de fontos kiemelni, hogy ezek nem csak elméleti jellegűek, hanem a gyakorlatban is alkalmazható/alkalmazott megoldásokat szolgáltatnak.

Például 1933-ban a Tennessee Valley Authority (TVA), a Tennessee Völgy gazdasági irányítására létrejövő társaság esetében, amely többek között a térség vízgazdálkodási problémáinak vizsgálatával is foglalkozott. Költségelosztási megoldásaik között olyanok is szerepelnek, amelyek megfeleltethetők kooperatív játékelméleti megoldáskoncepcióknak. Ezen eredményeket Straffin and Heaney (1981), a TVA munkásságát játékelméleti szempontból is bemutató cikkében olvashatjuk.

Olyan szituációkkal foglalkozunk, amelyek gráfelméleti terminológiával élve rögzített fákkal modellezhetőek. Adott a résztvevők egy rögzített, véges halmaza, akik egy rögzített fával reprezentálható hálózaton keresztül kapcsolódnak egy kitüntetett csúcshoz, a gyökérhez. Számos valós szituáció modellezhető így, például a disszertáció 2. fejezetének alapjául szolgáló példát, ahol egy öntözési csatornarendszer fenntartási költségeit vizsgáljuk.

A disszertációban bemutatunk egy speciális játékosztályt, a sztenderd fixfa játékok osztályát, és példákkal szolgálunk a vízgazdálkodás területéről származó alkalmazhatóságukra. Az itt bemutatott példákon túl további játékelméleti alkalmazásokat, szintén vízgazdálkodási problémákra Parrachino et al. (2006) munkájában olvashatunk. A fixfa struktúrán túl számos egyéb gráfelméleti modell is alkalmazható, ilyen például a legrövidebb út játékok osztálya, amelyekkel bővebben a 7. fejezetben fogunk foglalkozni.

Speciális esetként meg kell említenünk a „repülőtér-problémák" osztályát (airport problems), melyek egy elágazásmentes fával, ún. lánccal modellezhetőek. Az ehhez kapcsolódó *repülőtér játékok* a sztenderd fixfa játékok egy valódi részhalmazát adják. A repülőtér játékokat Littlechild and Owen (1973) vezették be, karakterizációjukkal az 5. fejezetben fogunk részletesebben foglalkozni.

## 1.1. Fenntartási vagy öntözési játékok

A fixfa játékok egy elterjedt alkalmazási területe az ún. fenntartási játékok (maintenance games). Ezek olyan szituációkat írnak le, ahol játékosok, felhasználók egy csoportja egy fixfa hálózaton keresztül kapcsolódik egy bizonyos szolgáltatóhoz (ez a fa gyökér-csúcsa). A hálózat minden élének adott a fenntartási költsége, a kérdés pedig az, hogy miként osszuk el „igazságosan" a teljes hálózat fenntartási költségét (ami az éleken vett költségek összege) a felhasználók között.

Egy kevésbé elterjedt elnevezés ugyanezen fixfa játékokra az ún. öntözési játékok (irrigation games), melyek 2. fejezetben bemutatott vízgazdálkodási problémához kapcsolódnak. Gazdálkodók egy csoportja egy közös csatornarendszerből fedezi a földjeik öntözését, amely egy kitüntetett ponton csatlakozik a főcsatornához. A hálózatnak a költségeit a gazdálkodók között kell elosztani. Aadland and Kolpin (1998) 25 Montana állambeli csatornarendszert vizsgált, ahol az adott szituációkban két különböző típusú költségelosztási módszert alkalmaztak az ottani gazdálkodók, az átlag szerinti elosztások, valamint a soros elosztások bizonyos típusait. Aadland and Kolpin (2004) azt is vizsgálták, hogy mik azok a környezeti, geográfiai tényezők, amik esetleg egy-egy csatornarendszert az alkalmazott költségelosztási elv kiválasztásában befolyásoltak.

## 1.2. Folyóelosztási, illetve folyótisztítási problémák

Adott egy folyó, és a folyó mentén elhelyezkedő játékosok, ezek lehetnek országok, városok, folyó menti vállalatok, stb. A folyó sodrása szerint alul lévőknek nem mindegy, hogy milyen és mennyi vizet enged tovább az ország, ugyanakkor neki sem mindegy, hogy a felette lévő országok hogy rendelkeznek a folyóval az őt megelőző szakaszon. Ambec and Sprumont (2002) cikkében a szereplők (országok) folyó menti elhelyezkedése határozza meg a vízmennyiséget, amit kontrollálnak, és a jólétet, amit ezáltal biztosítani tudnak maguknak. Ambec and Ehlers (2008) azt vizsgálták, hogy miként lehet hatékonyan elosztani egy folyót a kapcsolódó országok között. Megmutatták, hogy az együttműködésből pozitív módon profitálnak az abban résztvevők, illetve megadták, hogy miként lehet a profitot elosztani.

A folyótisztítási problémák esetén hasonló a kiindulási struktúra. Adott a folyó, ennek mentén az országok (vállalatok, gyárak, stb), illetve a szennyezés mértéke, amit az egyes szereplők kibocsájtanak. A folyó minden egyes szakaszán adottak a tisztítási költségek is, így a kérdés az lesz, hogy ezeket a tisztítási költségeket hogyan osszák fel egymás között. Mivel a folyó mentén feljebb elhelyezkedők szennyezése befolyásolja a szennyezettséget, és ezáltal a tisztítási költséget az utánuk lévő szakaszokon is, így egy egyetlen útból álló fixfa struktúrát kapunk.

Ni and Wang (2007) két különböző aspektusból vizsgálták a tisztítási költségek elosztásának kérdését. Megmutatták, hogy mindkét esetben adott egy-egy elosztási módszer (Local Responsibility Sharing - LRS, illetve Upstream Equal Sharing - UES), amely a megfelelő kooperatív játékban megegyezik a Shapley-értékkel. Ebből kiindulva Gómez-Rúa (2013) azt vizsgálta, hogy a tisztítási költség bizonyos környezeti adók figyelembe vételével hogyan osztható szét. Megtárgyalta, hogy mik azok az elvárt tulajdonságok, amelyeket valós szituációkban országok adózási stratégiájában előírnak, és ezek hogyan implementálhatóak a konkrét modellek esetén. Megvizsgálta, hogy adott elosztási módszerek mely tulajdonságokkal karakterizálhatók, és megmutatta, hogy az egyik elosztási szabály megegyezik a vonatkozó játék súlyozott Shapley-értékével.

Khmelnitskaya (2010) olyan problémákat vizsgál, amikor a folyóelosztási probléma vagy egy gyökérrel rendelkező vagy egy nyelővel rendelkező gráffal reprezentálható. Ez utóbbi esetben olyan gráfokról van szó, ahol a gyökérrel rendelkező esethez képest a gráf irányítása fordított, tehát a folyó, a deltáknak megfelelően több forrásból érkező folyamokat egyesít egyetlen pontban, a nyelőben.

## 1.3. Repülőtér és öntözési játékok

Az öntözési csatornarendszer egy gyökérrel rendelkező fával reprezentálható. A fa gyökere a főkapu, minden csúcs egy felhasználót jelöl, az élek pedig a közöttük lévő csatornaszakaszokat. Eszerint a reprezentáció szerint Littlechild and Owen (1973) megmutatták, hogy a hozzájárulás vektor (az elosztási kérdésre adott megoldás), amit a „sequential equal contributions rule”, továbbiakban a SEC szabály (vagy más ismert nevén a Baker-Thompson szabály; Baker (1965),Thompson (1971)) szolgáltat, ekvivalens a Shapley-értékkel (Shapley, 1953). E szerint a szabály szerint minden szakasz költségét egyenlően kell szétosztani azok között, akik az adott szakaszt használják, majd minden felhasználó összesen annyit fizet, amennyi az általa használt szakaszok szakaszonkénti költségének összege.

A 2. fejezetben láthatunk egy empírikus és axiomatikus elemzést egy valós életből vett problémára, egy közép-dél Montana állambeli öntözési csatorna elosztási költségeinek vizsgálata kapcsán (Aadland and Kolpin, 1998).

Abban az esetben, ha olyan gyökérrel rendelkező fákat vizsgálunk, melyek elágazásmentesek (ezek lesznek a láncok), akkor a jól ismert repülőtér játékok osztályához jutunk (Littlechild and Thompson, 1977). Ez az osztály tehát valódi részhalmaza az öntözési játékok osztályának. A repülőtér játékokra vonatkozó eredmények áttekintését Thomson (2007) munkájában olvashatjuk.

Az irodalomban Granot et al. (1996) vezette be a sztenderd fixfa játékok fogalmát. Ezek a játékok megegyeznek az öntözési játékokkal, azzal a különbséggel, hogy az öntözési játékok esetén a fa változhat, míg Granot et al. (1996) megközelítésében a fa rögzített. Koster et al. (2001) vizsgálják továbbá a sztenderd fixfa játékok magját. Ni and Wang (2007) olyan szabályokat karakterizálnak a sztenderd fixfa játékok osztályán, amelyek kielégítik az additivitás, illetve a nemreleváns költségektől való függetlenségről szóló tulajdonságokat. Fragnelli and Marina (2010) pedig karakterizálják a SEC szabályt (sequential equal contributions rule) a repülőtér játékok osztályán.

## 1.4. Felszállóági felelősség

A felszállóági felelősség esetén szintén költségfákon értelmezett elosztási problémákat tárgyalunk, de az eddigi alkalmazásokhoz képest eltérő módon. Ebben az esetben egy energiaellátási láncot vizsgálunk, ahol adott egy motivált domináns vezető, akinek hatalma van rá, hogy meghatározza a szállítók direkt, illetve indirekt károsanyag-kibocsátásának felelősségét. A probléma által indukált játékot a *felszállóági felelősség* (upstream responsibility) játékának fogjuk nevezni (Gopalakrishnan et al., 2017), és a továbbiakban *FF játékként* hivatkozunk rá.

Gopalakrishnan et al. (2017) TU-játék modelljét fogjuk alkalmazni, ez az ún. üvegházhatású gáz-kibocsátás és környezet játék (GHG Responsibility-Emissions and Environment - GREEN). Gopalakrishnan et al. a Shapley-értéket alkalmazzák az elosztási kérdés megoldására, emellett pedig további olyan szennyezéssel kapcsolatos tulajdonságokat is vizsgálnak, amelyek a károsanyag-kibocsátás szétosztásának vizsgálatakor relevánsak lehetnek. Emellett számos axiomatizációt is bemutatnak.

### 1.5. Legrövidebb út játékok

Az azonos című fejezetben a *legrövidebb út játékok* osztályával foglalkozunk. Adott egy hálózat, néhány felhasználó, illetve egy jószág. A felhasználók birtokolják a hálózat csúcsait, céljuk pedig a jószág bizonyos csúcsokból bizonyos csúcsokba való szállítása lesz. A szállítási költség a hálózaton belül kiválasztott úttól függ, a jószág sikeres szállítása pedig bizonyos haszonnal jár. A feladat nemcsak a legrövidebb út kiválasztása (minimális költségű út, a maximális haszon érdekében), hanem a haszon felhasználók közötti szétosztása is.

Fragnelli et al. (2000) vezetik be a legrövidebb út játékok fogalmát, és egyúttal azt is megmutatják, hogy ezek osztálya megegyezik a monoton játékok osztályával.

Ebben a fejezetben áttekintjük majd a Shapley-érték további axiomatizációit, úgy mint a Shapley (1953)-, Young (1985)-, Chun (1989)-, illetve van den Brink (2001)-féle axiomatizációkat, és megvizsgáljuk, hogy érvényben maradnak-e a legrövidebb út játékok osztályán. Arra a következtetésre fogunk jutni, hogy mindegyik fenti axiomatizáció érvényes a legrövidebb út játékok osztályán.

## 2. Felhasznált módszerek és jelölések

Az alapvető gráfelméleti fogalmak és modellek mellett a disszertáció nagy részében kooperatív játékelméleti módszereket alkalmazunk. A kooperatív játékelmélet jelentősége elvitathatatlan. A matematika, illetve a közgazdaságtan határmezsgyéjén elhelyezkedő tudományterület eszköztára lehetővé teszi számunkra, hogy olyan gazdasági szituációkat modellezzünk, elemezzünk, amelyekben a felek közötti együttműködésen, és a közösen elért eredményen van a hangsúly. Az ilyen jellegű szituációkban alapvetően két kérdéskört vizsgálunk: milyen kooperációs csoportok (koalíciók) jönnek létre, illetve hogyan tudjuk elosztani az együttműködésből eredő hasznot a résztvevő felek között. A kooperatív játékelmélet területén az utóbbi évtizedekben számos elméleti eredmény született, de fontos kiemelni, hogy ezek nem csak elméleti jellegűek, hanem a gyakorlatban is alkalmazható/alkalmazott megoldásokat szolgáltatnak. Alább listázzuk a disszertáció legfontosabb jelöléseit.

**Költségelosztási modellek**

| | |
|---|---|
| $N$ | $= \{1, 2, \ldots, n\}$ a játékosok véges halmaza |
| $L$ | $\subseteq N$ a fa leveleinek, levéljátékosainak halmaza |
| $i$ | $\in N$ egy adott felhasználó, játékos |
| $c_i$ | az $i$-edik szakaszra eső költség, az $i$-edik él költsége |
| $I_i^-$ | $= \{j \in N \vert j < i\}$ a fában az $i$-t megelőző csúcsok halmaza |
| $I_i^+$ | $= \{j \in N \vert i < j\}$ a fában az $i$-t követő csúcsok halmaza |
| $\xi_i^a$ | az átlag szerinti költségelosztási szabály |
| $\xi_i^s$ | a soros költségelosztási szabály |
| $\xi_i^{egy}$ | a közös költség egyenlő elosztásán alapuló költségelosztás |
| $\xi_i^{eha}$ | a közös költség egyéni használatból eredő költségrészek arányában történő elosztásán alapuló költségelosztás |
| $\xi_i^r$ | a korlátozott átlag szerinti költségelosztás |

**Bevezetés a kooperatív játékelméletbe**

| | |
|---|---|
| TU-játék | átruházható hasznosságú kooperatív játék |
| $\vert N\vert$ | az $N$ halmaz számossága |
| $2^N$ | az $N$ halmaz összes részhalmazainak osztálya |
| $A \subset B$ | $A \subseteq B$, de $A \neq B$ |
| $A \uplus B$ | az $A$ és $B$ diszjunkt halmazok uniója |
| $(N, v)$ | $N$ játékoshalmazzal és $v$ karakterisztikus függvénnyel megadott kooperatív játék |
| $v(S)$ | az $S \subseteq N$ koalíció értéke |
| $\mathcal{G}^N$ | az $N$ játékoshalmazon definiált játékok osztálya |
| $(N, v_c)$ | $N$ játékoshalmazzal és $v_c$ költségfüggvénnyel megadott költségjáték |
| $I^*(N, v)$ | szétosztások/preimputációk halmaza |
| $I(N, v)$ | elosztások/imputációk halmaza |
| $C(N, v); C(v)$ | mag-elosztások halmaza; a kooperatív játék magja |
| $X^*(N, v)$ | $= \left\{x \in \mathbb{R}^N \vert\ x(N) \leq v(N)\right\}$ az elérhető kifizetések halmaza |
| $\psi(v)$ | $= (\psi_i(v))_{i \in N} \in \mathbb{R}^N$ a $v$ játék pontértékű megoldása/értéke |
| $v_i'(S)$ | $= v(S \cup \{i\}) - v(S)$ az $i$ játékos határhozzájárulása az $S$ koalícióhoz |
| $\phi_i(v)$ | az $i$ játékos Shapley-értéke |

| | |
|---|---|
| $\phi(v)$ | $= (\phi_i(v))_{i\in N}$ a $v$ játék Shapley-értéke |
| $\pi$ | a játékosok egy lehetséges sorbarendezése |
| $\Pi_N$ | a játékosok összes lehetséges sorbarendezéseinek halmaza |

**Fixfa játékok**

| | |
|---|---|
| $\Gamma(V, E, b, c, N)$ | fixfa hálózat |
| $G(V, E)$ | irányított gráf $V$ csúcs- és $E$ élhalmazzal |
| $r$ | $\in V$ a gyökércsúcs |
| $c$ | élhalmazon értelmezett nemnegatív költségfüggvény |
| $S_i(G)$ | $= \{j \in V : i \leq j\}$ az $i$-ből irányított úton elérhető élek halmaza |
| $P_i(G)$ | $= \{j \in V : j \leq i\}$ az $i$-t a gyökérrel összekötő egyértelmű úton elhelyezkedő csúcsok halmaza |
| $\bar{S}$ | az $S$ koalíció tagjainak fa-burka/törzse (a koalíció tagjait a gyökérrel összekötő egyértelmű utak uniója) |
| $u_T$ | a $T$ koalícióhoz tartozó egyetértési játék |
| $\bar{u}_T$ | a $T$ koalícióhoz tartozó egyetértési játék duálisa |

**Repülőtér és öntözési játékok**

| | |
|---|---|
| $(G, c)$ | $G$ gráffal és $c$ költségfüggvénnyel megadott költségfa |
| $\mathcal{G}_I^A$ | az $N$ játékoshalmazzal rendelkező repülőtér játékok osztálya |
| $\mathcal{G}_I^N$ | az $N$ játékoshalmazzal rendelkező öntözési játékok osztálya |
| $\mathcal{G}_G$ | $G$ költségfa problémák által indukált öntözési játékok alosztálya |
| Cone $\{v_i\}_{i\in N}$ | a $v_i$ játékok által kifeszített konvex kúp |
| $i_-$ | $= \{j \in V : \overline{ji} \in E\}$ a fában az $i$ játékost megelőző játékos |
| $v_{irr}$ | öntözési játék |
| $i \sim^v j$ | $i$ és $j$ ekvivalens játékosok a $v$ játékban, azaz $v'_i(S) = v'_j(S)$ minden $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$-re |
| $\xi^{SEC}$ | „sequential equal contributions” szabály szerinti költségelosztás |

**Felszállóági felelősség**

| | |
|---|---|
| $\vec{ij}$ | $i$-ből $j$-be mutató irányított él |

| | |
|---|---|
| $\mathcal{E}_i$ | azon élek halmaza, amelyekhez tartozó károsanyag-kibocsátásért az $i$ csúcs közvetlenül vagy közvetetten felel |
| $\mathcal{E}_S$ | azon élek halmaza, amelyekhez tartozó károsanyag-kibocsátásért az $S$ koalíció közvetlenül vagy közvetetten felel |
| $\mathcal{G}_{FF}^N$ | az $N$ játékoshalmazhoz tartozó FF játékok osztálya |

**Legrövidebb út játékok**

| | |
|---|---|
| $\Sigma(V, A, L, S, T)$ | legrövidebb út probléma |
| $(V, A)$ | irányított, körmentes gráf, $V$ csúcs-, $A$ élhalmazzal |
| $L(a)$ | az $a$ él hossza |
| $S$ | $\subseteq N$ a források nemüres halmaza |
| $T$ | $\subseteq N$ a nyelők nemüres halmaza |
| $P$ | az $\{x_0, \ldots, x_p\}$ csúcsokat összekötő út |
| $L(P)$ | a $P$ út hossza |
| $o(\{x\})$ | függvény, ami megadja, hogy ki birtokolja az $x$ csúcsot |
| $o(P)$ | megadja a $P$ utat birtokló csúcsok halmazát |
| $g$ | egy áru forrástól nyelőig való szállításából eredő bevétel |
| $\sigma(\Sigma, N, o, g)$ | legrövidebb út kooperatív szituáció |
| $v_\sigma$ | legrövidebb út játék |

# 3. Az értekezés tudományos eredményei

A disszertáció saját eredményeit (lemmákat, állításokat, tételeket, illetve ismert tételek új bizonyításait) az értekezés folyamán az eredmény megnevezésének $\boxed{\text{bekeretezésével}}$ emeltük ki.

## 3.1. Költségelosztási modellek

A disszertáció egészének alapját egy költségelosztási probléma adja. Gazdálkodók egy csoportja egy főcsatornához csatlakozó csatornarendszerből fedezi saját földterületének vízigényét. A csatornarendszer működtetése és karbantartása költségeket von maga után, ezeket a gazdálkodók közösen állják. A kérdés pedig az, hogy a gazdálkodók (továbbiakban felhasználók) hogyan osszák fel „igazságosan” egymás között a csatornarendszerre vonatkozó összköltséget. A bevezetőt követően megismerkedünk az alapmodellekkel és az „igazságosság” fogalmát megragadni kívánó axiómákkal. Az axiómák alapját Aadland and Kolpin (1998) munkája adja.

Ebben a fejezetben a fenti modelleket általánosítjuk fa-struktúrákkal reprezentálható problémák esetében, és megmutatjuk, hogy továbbra is rendelkeznek a láncokra megfogalmazott elosztások tulajdonságaival. Ezek az eredmények egy korábbi cikkünkben már bemutatásra kerültek (Kovács and Radványi, 2011).

**3.1. Definíció.** *Egy $\xi : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}_+^N$ leképezés egy költségelosztási szabály, ha $\forall c \in \mathbb{R}_+^N$ -re $\sum\limits_{i \in N} \xi_i(c) = \sum\limits_{i \in N} c_i$, ahol $(\xi_i(c))_{i \in N} = \xi(c)$.*

*(a) Az átlag szerinti költségelosztási szabály szerint a csatorna fenntartási költségeit egyenlő arányban osztjuk szét minden felhasználó között, azaz $\forall i \in N$ esetén:*

$$\xi_i^a(c) = \sum_{j \in N} \frac{c_j}{n}$$

*(b) A soros költségelosztási szabály szerint az egyes szegmensekre eső költségeket osztjuk el egyenlő módon azok között, akik az adott szegmenst igénybe veszik, vagyis $\forall i \in N$ esetén:*

$$\xi_i^s(c) = \sum_{j \in I_i^- \cup \{i\}} \frac{c_j}{|I_j^+| + 1}$$

**3.2. Axióma.** *$\xi$ költségmonoton, ha $\forall c \leq c'$ esetén $\xi(c) \leq \xi(c')$.*

**3.3. Axióma.** *$\xi$ rang-tulajdonságú, ha $\forall c \in \mathbb{R}_+^N$-re és $\forall j$-re $\forall i \in I_j^- \cup \{j\}$ esetén: $\xi_i(c) \leq \xi_j(c)$.*

**3.4. Axióma.** *$\xi$ szubvenciómentes, ha $\forall c \in \mathbb{R}_+^N$ és $\forall I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq N$ halmaz esetén*

$$\sum_{j \in J} \xi_j(c) \leq \sum_{j \in J} c_j,$$

*ahol az egyszerűség kedvéért $J := I_{i_1}^- \cup \cdots \cup I_{i_k}^- \cup I$, ahol $J$ az $I$ által generált részfa.*

**3.5. Definíció.**

- *A közös költség* egyenlő *elosztása:*

$$\xi_i^{egy}(c) = s_i + \frac{1}{|N|} k(N) \quad \forall i \in N\text{-re.}$$

- *A közös költség* egyéni használatból eredő költségrészek arányában *történő elosztása:*

$$\xi_i^{eha}(c) = s_i + \frac{k_i}{\sum\limits_{j \in N} k_j} k(N) \quad \forall i \in N\text{-re.}$$

Eredményeinket az alábbi táblázat foglalja össze.

| | költségmonoton | rang-tulajdonságú | szubvenciómentes |
|---|---|---|---|
| $\xi^a$ | ✓ | ✓ | × |
| $\xi^s$ | ✓ | ✓ | ✓ |
| $\xi^{egy}$ | ✓ | ✓ | × |
| $\xi^{eha}$ | × | ✓ | × |

Elosztások tulajdonságai

**3.6.** $\boxed{\textbf{Állítás}}$. *A fa-struktúrával reprezentált költségelosztási problémák esetén a költségmonotonitás, a rang-tulajdonság, illetve a szubvenció-mentesség függetlenek egymástól.*

**3.7. Definíció.** *Egy költségmonoton, rang-tulajdonságú, szubvenciómentes elosztási elvet akkor nevezünk* korlátozott átlag szerinti költségelosztási szabálynak, *ha az eltérés a szétosztott legmagasabb és legalacsonyabb költségek között a legkisebb, az összes lehetséges elosztási elvet tekintve.*

**3.8.** $\boxed{\textbf{Tétel}}$. *Egyértelműen létezik egy $\xi^r$ korlátozott átlag szerinti költségelosztási szabály, mely rekurzíven konstruálható*

**3.9.** $\boxed{\textbf{Tétel}}$. *A korlátozott átlag szerinti költségelosztási szabály az egyetlen költségmonoton, rang-tulajdonságú, szubvenciómentes költség mechanizmus, ami maximális rawlsi jólétet biztosít.*

**3.10. Axióma.** *$\xi$ kielégíti a kölcsönösség axiómáját, ha $\forall i$-re*

(a) $\sum_{h\leq i} \xi_h(c) \leq \sum_{h\leq i} c_h$

(b) $c' \geq c$ *és*

(c) $\sum_{h\leq i} (c_h - \xi_h(c)) \geq \sum_{j>i} (c'_j - c_j)$

*teljesülése esetén nem igaz, hogy $\xi_h(c') - \xi_h(c) < \xi_j(c') - \xi_j(c) \quad \forall h \leq i$ és $j > i$ esetén.*

**3.11. Axióma.** *$\xi$ szemi-marginális, ha $\forall i \in N \setminus L$-re $\xi_{i+1}(c) \leq \xi_i(c) + c_{i+1}$, ahol $i+1$ jelöli az $i$ egy közvetlen rákövetkezőjét $I_i^+$-ban.*

**3.12. Axióma.** *$\xi$ növekvően szubvenciómentes, ha $\forall i \in N$ és $c \leq c'$ esetén*

$$\sum_{h\in I_i^- \cup \{i\}} (\xi_h(c') - \xi_h(c)) \leq \sum_{h\in I_i^- \cup \{i\}} (c'_h - c_h).$$

**3.13.** $\boxed{\textbf{Tétel}}$. *Egy $\xi$ költségelosztási szabály pontosan akkor költségmonoton, rang-tulajdonságú, szemi-marginális és növekvően szubvenciómentes, ha $\xi = \xi^s$, vagyis pontosan akkor, ha megegyezik a soros költségelosztási szabállyal.*

**3.14.** $\boxed{\textbf{Tétel}}$. *A soros költségelosztási szabály az egyetlen költségmonoton, rang-tulajdonságú és növekvően szubvenciómentes mechanizmus, ami maximális rawlsi jólétet biztosít.*

**3.15.** $\boxed{\textbf{Tétel}}$. *A soros költségelosztási szabály az egyetlen költségmonoton, rang-tulajdonságú, szemi-marginális mechanizmus, ami minimális rawlsi jólétet biztosít.*

## 3.2. Repülőtér és öntözési játékok

Ebben a fejezetben bemutatjuk az öntözési játékokat és karakterizáljuk ezek osztályát. Megmutatjuk, hogy az öntözési játékok osztálya egy nemkonvex kúp, ami valódi részhalmaza az egyetértési játékok duálisai által kifeszített véges konvex kúpnak, tehát minden öntözési játék konkáv játék. Ezen túl azt is megmutatjuk, hogy a repülőtér játékok osztálya az öntözési játékokéval azonos karakterizációval bír.

A fent említett eredményeken túl kiterjesztjük Dubey (1982), illetve Moulin and Shenker (1992) eredményeit az öntözési játékok osztályára. Továbbá összevetjük és „lefordítjuk” a költségelosztási irodalomban használt axiómákat (lásd pl. Thomson, 2007) a kooperatív TU-játékok nyelvére. Ezáltal olyan eredményekkel szolgálunk, amelyek világossá teszik, hogy Dubey (1982), illetve Moulin and Shenker (1992) eredményei közvetlenül levezethetőek Shapley (1953) és Young (1985) eredményeiből. Vagyis Shapley (1953) és Young (1985) eredményeinek két újabb változatát mutatjuk be, egyúttal belátva, hogy Dubey (1982), Moulin and Shenker (1992), valamint a mi karakterizációink a két új változat közvetlen következményei.

Karakterizációs eredményeinkben a TU-játékok terminológiáját viszonyítjuk a költségelosztási terminológiához, hidat építve a két terület között.

Tudomásunk szerint eredményeink az első olyan eredmények, amelyek az öntözési játékok osztályának precíz karakterizációját adják, illetve kiterjesztik Shapley-nek, valamint Young-nak a Shapley-érték axiomatizálására vonatkozó eredeti eredményeit eme játékosztályra. Levonjuk a következtetést, miszerint a Shapley-érték alkalmazása költségfán értelmezett problémák esetén elméleti szinten jól megalapozott, és mivel a Shapley-érték számítási bonyolultság szempontjából jól viselkedik (Megiddo, 1978), vonzó megoldás a költségfákon értelmezett problémák megoldása során. Ennek a fejezetnek az eredményei a Márkus, Pintér és Radványi (2011) cikkben kerültek publikálásra.

Ebben a fejezetben az egyetértési játékok duálisaira építünk. Az *egyetértési játék duálisa* minden $T \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ és $S \subseteq N$ esetén:

$$\bar{u}_T(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } T \cap S \neq \emptyset, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

**3.16. Definíció (Öntözési játék).** *Minden $(G, c)$ költségfa és $N = V \setminus \{r\}$ játékoshalmaz, valamint $S$ koalíció esetén legyen*

$$v_{(G,c)}(S) = \sum_{e \in \bar{S}} c_e \ ,$$

*ahol az üres összeg értéke* 0.

**3.17. Definíció (Repülőtér játék I.).** *Egy repülőtér probléma esetén legyen $N = N_1 \uplus \cdots \uplus N_k$ a játékosok halmaza, valamint legyen adott $c \in \mathbb{R}_+^k$, oly módon, hogy $c_1 < \ldots < c_k \in \mathbb{R}_+$. Ekkor a $v_{(N,c)} \in \mathcal{G}^N$ repülőtér játék így definiálható: $v_{(N,c)}(\emptyset) = 0$, valamint minden nemüres $S \subseteq N$ koalíció esetén*

$$v_{(N,c)}(S) = \max_{i: N_i \cap S \neq \emptyset} c_i \ .$$

**3.18. Definíció (Repülőtér játék II.).** *Egy repülőtér probléma esetén legyen adott $N = N_1 \uplus \cdots \uplus N_k$, a játékosok halmaza, valamint $c = c_1 < \ldots < c_k \in \mathbb{R}_+$. Legyen $G = (V, E)$ egy olyan lánc, ahol $V = N \cup \{r\}$, illetve $E = \{\overline{r1}, \overline{12}, \ldots, \overline{(|N|-1)|N|}\}$, $N_1 = \{1, \ldots, |N_1|\}, \ldots, N_k = \{|N| - |N_k| + 1, \ldots, |N|\}$. Továbbá minden $\overline{ij} \in E$ esetén legyen $c(\overline{ij}) = c_{N(j)} - c_{N(i)}$, ahol $N(i) = \{N^* \in \{N_1, \ldots, N_k\} : i \in N^*\}$.*

*A $(G, c)$ költségfa esetén a $v_{(N,c)} \in \mathcal{G}^N$ repülőtér játék a következőképpen definiálható: legyen $N = V \setminus \{r\}$ a játékosok halmaza, ekkor minden $S$ koalícióra (az üres összeg értéke* 0*)*

$$v_{(N,c)}(S) = \sum_{e \in \bar{S}} c_e \ .$$

Nyilvánvaló, hogy mindkét definíció ugyanazt a játékot adja.

**3.19.** $\boxed{\textbf{Lemma}}$**.** *Tetszőleges $\emptyset \neq T \subseteq N$ koalícióra, amire $T = S_i(G)$, $i \in N$, van olyan $G$ lánc, hogy $\bar{u}_T \in \mathcal{G}_G$. Tehát $\{\bar{u}_T\}_{T \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \subset \mathcal{G}_A^N \subset \mathcal{G}_I^N$.*

**3.20.** $\boxed{\textbf{Lemma}}$. *Minden gyökérrel rendelkező $G$ fa esetén $\mathcal{G}_G \subset \text{Cone}\,\{\bar{u}_{S_i(G)}\}_{i\in N}$. Tehát $\mathcal{G}_A^N \subset \mathcal{G}_I^N \subset \text{Cone}\,\{\bar{u}_T\}_{T\in 2^N\setminus\{\emptyset\}}$.*

**3.21.** $\boxed{\textbf{Lemma}}$. *$\mathcal{G}_A^N$ nem konvex halmaz, sőt $\mathcal{G}_I^N$ sem.*

**3.22.** $\boxed{\textbf{Lemma}}$. *Minden gyökérrel rendelkező $G$ fa és $v = \sum_{i\in N} \alpha_{S_i(G)}\bar{u}_{S_i(G)} \in \mathcal{G}_G$, és minden $i^* \in N$ esetén $\sum_{i\in N\setminus\{i^*\}} \alpha_{S_i(G)}\bar{u}_{S_i(G)} \in \mathcal{G}_G$. Ezért minden $v = \sum_{T\in 2^N\setminus\{\emptyset\}} \alpha_T\bar{u}_T$ alakú repülőtér játék és $T^* \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ koalíció esetén $\sum_{T\in 2^N\setminus\{\emptyset,T^*\}} \alpha_T\bar{u}_T \in \mathcal{G}_A^N$, valamint minden $v = \sum_{T\in 2^N\setminus\{\emptyset\}} \alpha_T\bar{u}_T$ öntözési játék és $T^* \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ esetén $\sum_{T\in 2^N\setminus\{\emptyset,T^*\}} \alpha_T\bar{u}_T \in \mathcal{G}_I^N$.*

**3.23.** $\boxed{\textbf{Lemma}}$. *Minden öntözési játék konkáv.*

**3.24.** $\boxed{\textbf{Következmény}}$. *A repülőtér játékok osztálya, rögzített játékoshalmaz esetén véges sok konvex kúp uniója, de maga az osztály nem konvex. Továbbá a repülőtér játékok osztálya valódi részhalmaza az öntözési játékok osztályának. Rögzített játékoshalmaz esetén az öntözési játékok osztálya szintén véges sok konvex kúp uniója, és maga az osztály ez esetben sem konvex. Az öntözési játékok osztálya továbbá valódi részhalmaza az egyetértési játékok duálisai által kifeszített véges, konvex kúpnak, vagyis minden öntözési, és ezáltal minden repülőtér játék is konkáv játék.*

**3.25. Definíció.** *Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ és*

$$p_{Sh}^i(S) = \begin{cases} \dfrac{|S|!(|(N\setminus S)|-1)!}{|N|!}, & \textit{ha } i \notin S, \\ 0 & \textit{különben.} \end{cases}$$

*Ekkor a $v$ játékban az $i$ játékos $\phi_i(v)$* Shapley-értéke *a $v_i'$-k $p_{Sh}^i$ súlyokkal vett várható értéke lesz. Más szóval:*

$$\phi_i(v) = \sum_{S\subseteq N} v_i'(S)\; p_{Sh}^i(S)\ . \tag{1}$$

Ekkor a $v$ öntözési játék magja a következő:

$$C(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i\in N} x_i = v(N),\ \text{és minden } S \subseteq N \text{ esetén } \sum_{i\in S} x_i \le v(S) \right\}.$$

**3.26. Definíció.** *A $\psi$ érték az $A \subseteq \mathcal{G}^N$ játékosztályon* mag-kompatibilis, *ha minden $v \in A$ esetén $\psi(v) \in C(v)$.*

**3.27.** $\boxed{\textbf{Tétel}}$**.** *A $(G, c)$ költségfán értelmezett $\xi$ költségelosztási szabály pontosan akkor szubvenciómentes, ha a költségfa által generált $v_{(G,c)}$ öntözési játékon a $\xi$ költségelosztási szabály által generált érték mag-kompatibilis.*

**3.28. Definíció.** *Egy $\psi$ érték az $A \subseteq \mathcal{G}^N$ játékosztályon*

- *Pareto-optimális (Pareto optimal - PO), ha minden $v \in A$ játék esetén $\sum\limits_{i \in N} \psi_i(v) = v(N)$,*
- *nulla játékos tulajdonságú (null-player property - NP), ha minden $v \in A$ esetén $i \in N$, $v_i' = 0$-ből következik, hogy $\psi_i(v) = 0$,*
- *egyenlően kezelő (equal treatment property - ETP), ha minden $v \in A$ esetén $i, j \in N$, $i \sim^v j$-ből következik, hogy $\psi_i(v) = \psi_j(v)$,*
- *additív (additive - ADD), ha minden $v, w \in A$ esetén, amire $v + w \in A$, $\psi(v + w) = \psi(v) + \psi(w)$,*
- *marginális (marginal - M), ha minden $v, w \in A$ és $i \in N$ esetén $v_i' = w_i'$-ből következik, hogy $\psi_i(v) = \psi_i(w)$.*

**3.29.** $\boxed{\textbf{Tétel}}$ **(Shapley-féle axiomatizáció).** *Minden gyökérrel rendelkező $G$ fa esetén, egy $\psi$ érték a $\mathcal{G}_G$-n PO, NP, ETP és ADD akkor és csak akkor, ha $\psi = \phi$, azaz pontosan akkor, ha az érték ekvivalens a Shapley-értékkel. Azaz egy $\psi$ érték a repülőtér, illetve az öntözési játékok osztályán pontosan akkor PO, NP, ETP és ADD, ha $\psi = \phi$.*

**3.30.** $\boxed{\textbf{Tétel}}$ **(Young-féle axiomatizáció).** *Minden gyökérrel rendelkező $G$ fára a $\psi$ érték a $\mathcal{G}_G$-n PO, ETP és M akkor és csak akkor, ha $\psi = \phi$, azaz pontosan akkor, ha ekvivalens a Shapley-értékkel. Tehát a repülőtér, illetve az öntözési játékok osztályán egy $\psi$ érték pontosan akkor PO, ETP és M, ha $\psi = \phi$.*

**3.31.** $\boxed{\textbf{Következmény}}$**.** *Minden $v$ öntözési játék esetén $\phi(v) \in C(v)$, vagyis a Shapley-érték magbeli. Továbbá, mivel minden repülőtér játék egyúttal öntözési játék is, így minden $v$ repülőtér játék esetén $\phi(v) \in C(v)$.*

**3.32. Definíció (SEC szabály).** *Minden $(G, c)$ költségfára és minden $i$ játékosra a SEC szabály szerinti elosztás a következőképpen határozható meg:*

$$\xi_i^{SEC}(G, c) = \sum_{j \in P_i(G) \setminus \{r\}} \frac{c_{\overline{j_- j}}}{|S_j(G)|} \, .$$

**3.33. Definíció.** *Legyen $G = (V, E)$ egy gyökérrel rendelkező fa. A $G$ költségfák halmazán értelmezett $\chi$ szabály*

- *nemnegatív (non-negativity - NN), ha minden $c$ költségfüggvény esetén teljesül, hogy $\chi(G, c) \geq 0$,*
- *korlátos költségű (cost boundedness - CB), ha minden $c$ költségfüggvény esetén teljesül, hogy $\chi(G, c) \leq \left( \sum_{e \in E_{P_i(G)}} c_e \right)_{i \in N}$,*
- *hatékony (efficiency - E), ha minden $c$ költségfüggvény esetén teljesül, hogy*

  $$\sum_{i \in N} \chi_i(G, c) = \sum_{e \in E} c_e,$$

- *egyforma játékosokat egyformán kezelő (equal treatment of equals - ETE), ha minden $c$ költségfüggvény és $i, j \in N$ játékospár esetén a $\sum_{e \in E_{P_i(G)}} c_e = \sum_{e \in E_{P_j(G)}} c_e$ egyenlőségből következik, hogy $\chi_i(G, c) = \chi_j(G, c)$,*
- *feltételesen költségadditív (conditional cost additivity - CCA), ha bármely két $c$, $c'$ költségfüggvény esetén $\chi(G, c + c') = \chi(G, c) + \chi(G, c')$,*
- *rendelkezik a „legalább akkora költségek" függetlenségének tulajdonságával (independence of at-least-as-large costs - IALC), ha bármely két $c$, $c'$ költségfüggvény és $i \in N$ játékos esetén, amire fennáll, hogy minden $j \in P_i(G)$, $\sum_{e \in E_{P_j(G)}} c_e = \sum_{e \in E_{P_j(G)}} c'_e$, $\chi_i(G, c) = \chi_i(G, c')$.*

**3.34. Állítás.** *Legyen $G$ egy gyökérrel rendelkező fa, $\chi$ legyen definiálva a $(G, c)$ költségfákon, a $\psi$ megoldás pedig a $\mathcal{G}_G$-on úgy, hogy $\chi(G, c) = \psi(v_{(G,c)})$ minden $c$ költségfüggvény esetén. Ekkor, amennyiben $\chi$*

- *nemnegatív és korlátos költségű, akkor $\psi$ $NP$ tulajdonságú,*
- *hatékony, akkor $\psi$ $PO$ tulajdonságú,*

- *egyenlő játékosokat egyenlően kezelő, akkor $\psi$ $ETP$ tulajdonságú,*

- *feltételesen költségadditív, akkor $\psi$ $ADD$ tulajdonságú,*

- *rendelkezik a „legalább akkora költségek" függetlenségének tulajdonságával, akkor $\psi$ $M$ tulajdonságú.*

**3.35.** $\boxed{\textbf{Tétel}}$**.** *A $\chi$ szabály a költségfán értelmezett elosztási problémák esetén pontosan akkor nemnegatív, korlátos költségű, hatékony, egyenlő játékosokat egyenlően kezelő és feltételesen költségadditív, ha $\chi = \xi$, vagyis pontosan akkor, ha $\chi$ ekvivalens a SEC szabállyal.*

**3.36.** $\boxed{\textbf{Tétel}}$**.** *A $\chi$ szabály a költségfán értelmezett elosztási problémák esetén pontosan akkor hatékony, egyenlő játékosokat egyenlően kezelő és rendelkezik a „legalább akkora költségek" függetlenségének tulajdonságával, ha $\chi = \xi$, vagyis pontosan akkor, ha $\chi$ ekvivalens a SEC szabállyal.*

## 3.3. Felszállóági felelősség

Ebben a fejezetben szintén költségfákon értelmezett elosztási problémákat tárgyalunk, de az eddigi alkalmazásokhoz képest eltérő módon. Ebben az esetben egy energiaellátási láncot vizsgálunk, ahol adott egy motivált domináns vezető, akinek hatalma van rá, hogy meghatározza a szállítók direkt, illetve indirekt károsanyag-kibocsátásának felelősségét. A probléma által indukált játékot a *felszállóági felelősség* (upstream responsibility) játékának fogjuk nevezni (Gopalakrishnan et al., 2017), és a továbbiakban *FF játékként* hivatkozunk rá.

A FF játékok osztályára a következőkben bemutatott eredményeink a Radványi (2018) műhelytanulmányban kerültek publikálásra.

**3.37. Definíció (FF játék).** *Minden $(G, c)$ költségfa és $N = V \setminus \{r\}$ játékoshalmaz, valamint $S$ koalíció esetén az FF játék legyen az alábbi módon definiálva:*

$$v_{(G,c)}(S) = \sum_{j \in \mathcal{E}_S} c_j \ ,$$

*ahol az üres összeg értéke* $0$.

**3.38.** $\boxed{\textbf{Lemma}}$. *Minden $G$ láncra és $T \subseteq N$-re, amire $T = P_i(G)$, $i \in N$, $\bar{u}_T \in \mathcal{G}_G$: $\{\bar{u}_T\}_{T \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \subset \mathcal{G}_A^N \subset \mathcal{G}_{FF}^N$.*

**3.39.** $\boxed{\textbf{Lemma}}$. *Minden gyökérrel rendelkező $G$ fa esetén $\mathcal{G}_G \subset \mathrm{Cone}\ \{\bar{u}_{P_i(G)}\}_{i \in N}$. Tehát $\mathcal{G}_A \subset \mathcal{G}_{FF}^N \subset \mathrm{Cone}\ \{\bar{u}_T\}_{T \in 2^N \setminus \{\emptyset\}}$.*

**3.40.** $\boxed{\textbf{Lemma}}$. *A $\mathcal{G}_A^N$, illetve a $\mathcal{G}_{FF}^N$ halmazok nem konvexek.*

**3.41.** $\boxed{\textbf{Lemma}}$. *Minden gyökérrel rendelkező $G$ fa és $v = \sum_{i \in N} \alpha_{P_i(G)} \bar{u}_{P_i(G)} \in \mathcal{G}_G$ játék, valamint minden $i^* \in N$ esetén $\sum_{i \in N \setminus \{i^*\}} \alpha_{P_i(G)} \bar{u}_{P_i(G)} \in \mathcal{G}_G$. Ezért minden $v = \sum_{T \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \alpha_T \bar{u}_T$ repülőtér játék és $T^* \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ esetén $\sum_{T \in 2^N \setminus \{\emptyset, T^*\}} \alpha_T \bar{u}_T \in \mathcal{G}_A^N$, valamint minden $v = \sum_{T \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \alpha_T \bar{u}_T$ FF játék és $T^* \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ esetén $\sum_{T \in 2^N \setminus \{\emptyset, T^*\}} \alpha_T \bar{u}_T \in \mathcal{G}_{FF}^N$.*

**3.42.** $\boxed{\textbf{Lemma}}$. *Minden FF játék konkáv.*

Eredményeinket a következőképp foglalhatjuk össze:

**3.43.** $\boxed{\textbf{Következmény}}$. *A repülőtér játékok osztálya, rögzített játékoshalmaz esetén véges sok konvex kúp uniója, de maga az osztály nem konvex. Továbbá a repülőtér játékok osztálya valódi részhalmaza az FF játékok osztályának. Rögzített játékoshalmaz esetén az FF játékok osztálya véges sok konvex kúp uniója, és maga az osztály ez esetben sem konvex. Az FF játékok osztálya továbbá valódi részhalmaza az egyetértési játékok duálisai által kifeszített véges, konvex kúpnak, vagyis minden FF játék, és ezáltal minden repülőtér játék is konkáv játék.*

**3.44.** $\boxed{\textbf{Tétel}}$ **(Shapley-féle axiomatizáció).** *Minden gyökérrel rendelkező $G$ fa esetén egy $\psi$ érték a $\mathcal{G}_G$-n PO, $NP$, $ETP$ és $ADD$ akkor és csak akkor, ha $\psi = \phi$, azaz pontosan akkor, ha az érték megegyezik a Shapley-értékkel. Azaz egy $\psi$ érték az FF játékok osztályán pontosan akkor PO, $NP$, $ETP$ és $ADD$, ha $\psi = \phi$.*

**3.45.** $\boxed{\textbf{Tétel}}$ **(Young-féle axiomatizáció).** *Minden gyökérrel rendelkező $G$ fára a $\psi$ érték a $\mathcal{G}_G$-n PO, $ETP$ és $M$ akkor és csak akkor, ha $\psi = \phi$, azaz pontosan akkor, ha megegyezik a Shapley-értékkel. Tehát az FF játékok osztályán egy $\psi$ érték pontosan akkor PO, $ETP$ és $M$, ha $\psi = \phi$.*

**3.46.** $\boxed{\textbf{Következmény}}$. *Minden $v$ FF játék esetén $\phi(v) \in C(v)$, vagyis a Shapley-érték magbeli.*

**3.47.** $\boxed{\textbf{Következmény}}$. *A Shapley-érték az FF játékok osztályán polinomiális időben számolható.*

## 3.4. Legrövidebb út játékok

Ebben a fejezetben a *legrövidebb út játékok* osztályával foglalkozunk. Adott egy hálózat, néhány felhasználó, illetve egy jószág. A felhasználók birtokolják a hálózat csúcsait, céljuk pedig a jószág bizonyos csúcsokból bizonyos csúcsokba való szállítása lesz. A szállítási költség a hálózaton belül kiválasztott úttól függ, a jószág sikeres szállítása pedig bizonyos haszonnal jár. A feladat nemcsak a legrövidebb út kiválasztása (minimális költségű út, a maximális haszon érdekében), hanem a haszon felhasználók közötti szétosztása is.

Fragnelli et al. (2000) vezetik be a legrövidebb út játékok fogalmát, és egyúttal azt is megmutatják, hogy ezek osztálya megegyezik a monoton játékok osztályával.

Ebben a fejezetben áttekintjük a Shapley-érték további axiomatizációit, úgy mint a Shapley (1953)-, Young (1985)-, Chun (1989)-, illetve van den Brink (2001)-féle axiomatizációkat, és megvizsgáljuk, hogy érvényben maradnak-e a legrövidebb út játékok osztályán. Arra a következtetésre fogunk jutni, hogy mindegyik fenti axiomatizáció érvényes a legrövidebb út játékok osztályán.

Eredményeink két ponton térnek el Fragnelli et al. (2000) munkájától. Először is Fragnelli et al. (2000) a Shapley-érték egy új axiomatizációját mutatja be, ezzel szemben mi négy jól ismert karakterizációt vizsgálunk. Másodszor pedig abban térünk el, hogy amíg Fragnelli et al. (2000) axiómái a probléma mögötti gráfon alapuló axiómák, addig mi kizárólag kooperatív játékelméleti axiómákat használunk. Ez azt jelenti, hogy míg Fragnelli et al. (2000) egy rögzített gráf alapú problémát vizsgálnak, addig mi az összes legrövidebb út problémát tekintjük, tehát egy absztrakt döntéshozó szemszögéből nézzük, aki inkább az absztrakt problémára fókuszál, mint sem a konkrét szituációra.
A következőkben bemutatott eredményeink a Pintér and Radványi (2013) cikkben kerültek publikálásra.

**3.48. Definíció.** *Egy $\sigma$* legrövidebb út kooperatív szituáció *egy $(\Sigma, N, o, g)$ lista. $\sigma$-t azonosíthatjuk a vonatkozó $v_\sigma$ kooperatív TU-játékkal, amire minden $S \subseteq N$ esetén fennáll, hogy:*

$$v_\sigma(S) = \begin{cases} g - L_S, & \textit{ha } S \textit{ birtokol egy utat a } \Sigma\textit{-ban, és } L_S < g, \\ 0 & \textit{különben,} \end{cases}$$

*ahol $L_S$ az $S$ által birtokolt legrövidebb út hossza.*

**3.49. Definíció.** *Egy* $v_\sigma$ legrövidebb út játék *a* $\sigma$ *legrövidebb út kooperatív szituációhoz tartozó játék. A legrövidebb út játékok osztályát* $SPG$*-vel (*shortest path games*) jelöljük.*

**3.50.** $\boxed{\textbf{Tétel}}$**.** *Legyen adott* $A \subseteq \mathcal{G}^N$ *úgy, hogy a* $\mathrm{Cone}\,\{u_T\}_{T\subseteq N,\ T\neq\emptyset} \subseteq A$*. Ekkor a* $\psi$ *érték az* $A$*-n pontosan akkor* $PO$*,* $NP$*,* $ETP$ *és* $ADD$*, ha* $\psi = \phi$*.*

**3.51.** $\boxed{\textbf{Következmény}}$ **(Shapley-féle axiomatizáció).** *Egy* $\psi$ *érték a monoton játékok osztályán pontosan akkor* $PO$*,* $NP$*,* $ETP$ *és* $ADD$*, ha* $\psi = \phi$*, vagyis pontosan akkor, ha megegyezik a Shapley-értékkel.*

**3.52. Definíció.** *A* $\psi$ *érték az* $A \subseteq \mathcal{G}^N$ *halmazon*

- *igazságos (fairness property – $FP$), ha bármely két $v, w \in A$ játék és $i, j \in N$ játékos esetén, amire $v + w \in A$ és $i \sim^w j$: $\psi_i(v + w) - \psi_i(v) = \psi_j(v + w) - \psi_j(v)$,*
- *koalíciósan stratégiailag ekvivalens (coalitional strategic equivalence – $CSE$), ha minden $v \in A$ játék, $i \in N$ játékos, $T \subseteq N$ koalíció, illetve $\alpha > 0$ esetén: $i \notin T$ és $v + \alpha u_T \in A$ alapján következik, hogy $\psi_i(v) = \psi_i(v + \alpha u_T)$.*

**3.53.** $\boxed{\textbf{Tétel}}$ **(van den Brink-féle axiomatizáció).** *Egy* $\psi$ *érték a monoton játékok osztályán pontosan akkor* $PO$*,* $NP$ *és* $FP$*, ha* $\psi = \phi$*, vagyis pontosan akkor, ha megegyezik a Shapley-értékkel.*

**3.54.** $\boxed{\textbf{Lemma}}$**.** *A monoton játékok osztályán az* $M$ *és* $CSE$ *axiómák ekvivalensek.*

**3.55.** $\boxed{\textbf{Következmény}}$ **(Young- és Chun-féle axiomatizáció).** *Egy* $\psi$ *érték a monoton játékok osztályán pontosan akkor* $PO$*,* $ETP$ *és* $CSE$*, ha* $\psi = \phi$*, vagyis pontosan akkor, ha megegyezik a Shapley-értékkel.*

# 4. Saját publikációk

## 4.1. Angol nyelven

### 4.1.1. Referált folyóirat

Pintér M, Radványi AR (2013) The Shapley value for shortest path games: a non-graph based approach. Central European Journal of Operations Research 21(4):769–781

### 4.1.2. Műhelytanulmány

Pintér M, Radványi AR (2019a) Axiomatizations of the Shapley Value for Upstream Responsibility Games. Corvinus Economics Working Papers, ID: 4090, Corvinus University Budapest

Pintér M, Radványi AR (2019b) Upstream responsibility games – the non-tree case. Corvinus Economics Working Papers, ID: 4325, Corvinus University Budapest

Radványi AR (2018) The Shapley Value for Upstream Responsibility Games. Corvinus Economics Working Papers, ID: 3779, Corvinus University of Budapest

Márkus J, Pintér M, Radványi AR (2011) The Shapley value for airport and irrigation games. MPRA, Working Paper

## 4.2. Magyar nyelven

### 4.2.1. Referált folyóirat

Radványi AR (2019) Kooperatív sztenderd fixfa játékok és alkalmazásuk a vízgazdálkodásban. Alkalmazott Matematikai Lapok 36:83–105

Biró P, Csóka P, Kóczy L, Radványi AR, Sziklai B (2013) K ozgazdasági Nobel-emlékdíj 2012: Alvin E. Roth és Lloyd S. Shapley. Magyar Tudomány 2:190–199

Kovács G, Radványi AR (2011) Költségelosztási modellek. Alkalmazott Matematikai Lapok 28:59–76

## Hivatkozások


Aadland D, Kolpin V (1998) Shared irrigation cost: An empirical and axiomatical analysis. Mathematical Social Sciences 35(2):203–218

Aadland D, Kolpin V (2004) Environmental determinants of cost sharing. Journal of Economic Behavior & Organization 53(4):495–511

Ambec S, Ehlers L (2008) Sharing a river among satiable agents. Games and Economic Behavior 64(1):35–50

Ambec S, Sprumont Y (2002) Sharing a River. Journal of Economic Theory 107(2):453–462

Baker J (1965) Airport runway cost impact study. Report submitted to the Association of Local Transport Airlines, Jackson, Mississippi.

Chun Y (1989) A New Axiomatization of the Shapley Value. Games and Economic Behavior 45:119–130

Dubey P (1982) The Shapley Value As Aircraft Landing Fees–Revisited. Management Science 28:869–874

Fragnelli V, García-Jurado I, Méndez-Naya L (2000) On shorthest path games. Mathematical Methods of Operations Research 52(2):251–264

Fragnelli V, Marina ME (2010) An axiomatic characterization of the Baker-Thompson rule. Economics Letters 107:85–87

Gómez-Rúa M (2013) Sharing a polluted river through environmental taxes. SERIEs - Journal of the Spanish Economic Association 4(2):137–153

Gopalakrishnan S, Granot D, Granot F, Sosic G, Cui H (2017) Allocation of Greenhouse Gas Emissions in Supply Chains. Working Paper, University of British Columbia

Granot D, Maschler M, Owen G, Zhu W (1996) The Kernel/Nucleolus of a Standard Tree Game. International Journal of Game Theory 25(2):219–244

Khmelnitskaya AB (2010) Values for rooted-tree and sink-tree digraph games and sharing a river. Theory and Decision 69:657–669

Koster M, Molina E, Sprumont Y, Tijs SH (2001) Sharing the cost of a network: core and core allocations. International Journal of Game Theory 30(4):567–599

Littlechild S, Owen G (1973) A Simple Expression for the Shapley Value in A Special Case. Management Science 20(3):370–372

Littlechild SC, Thompson GF (1977) Aircraft landing fees: a game theory approach. The Bell Journal of Economics 8:186–204

Megiddo N (1978) Computational Complexity of the Game Theory Approach to Cost Allocation for a Tree. Mathematics of Operations Research 3(3):189–196

Moulin H, Shenker S (1992) Serial Cost Sharing. Econometrica 60:1009–1037

Ni D, Wang Y (2007) Sharing a polluted r iver. Games and Economic Behaviour 60(1):176–186

Parrachino I, Zara S, Patrone F (2006) Cooperative Game Theory and its Application to Natural, Environmental and Water Issues: 3. Application to Water Resources. World Bank PolicyResearch Working Paper

Shapley LS (1953) A value for $n$-person games. In: Kuhn HW, Tucker AW (eds.) Contributions to the theory of games II, Annals of Mathematics Studies 28. Princeton University Press, Princeton pp. 307–317

Straffin PD, Heaney JP (1981) Game Theory and the Tennessee Valley Authority. International Journal of Game Theory 10(1):35–43

Thompson GF (1971) Airport costs and pricing. PhD Thesis, University of Birmingham

Thomson W (2007) Cost allocation and airport problems. RCER Working Papers 538, University of Rochester - Center for Economic Research (RCER)

van den Brink R (2001) An axiomatization of the Shapley value using a fairness property. International Journal of Game Theory 30:309–319

Young HP (1985) Monotonic Solutions of Cooperative Games. International Journal of Game Theory 14:65–72