BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM
Általános és Kvantitatív Közgazdaságtan Doktori Iskola

TÉZISGYŰJTEMÉNY

Bednay Dezső

Stabil halmazok hozzárendelési játékokban

című Ph.D. értekezéséhez

Témavezetők:
Solymosi Tamás, Tasnádi Attila

Budapest 2019

Tartalomjegyzék

1. Kutatási előzmények

A dolgozat a kooperatív játékok egyik első megoldáskoncepciójával foglalkozik egy speciális játékosztályon a hozzárendelési játékok osztályán. Egy kooperatív játék tartalmaz egy véges halmazt, a játékosok halmazát és egy függvényt, amely a játékosok minden koalíciójához (részhalmazához) egy-egy valós számot rendel, amely az adott koalíció értéke, ennyit képesek ők együtt elérni. Sokszor a való világ modellezésénél olyan koalíciós értékek adódnak, ahol megéri létrejönnie az össze játékosból álló nagykoalíciónak, a kérdés pedig az, hogy ha létrejött, akkor a játékosok hogyan osszák szét egymás között a megtermelt értéket. Erre sok módszer ismert, olyanok is amik csak egy pontot adnak, olyanok is amelyek vektoroknak egy halmazát. Az egyik legismertebb halmazértékű megoldáskoncepció a játék magja, mely a nagykoalíció értékének olyan elosztásait tartalmazza, melyekben minden koalíció legalább annyit kap, amennyi az értéke. Ha egy ilyen vektor alapján sikerül szétosztanunk a nagykoalíció értékét, az ellen egyik koalíció sem tud fellépni, olyan értelemben, hogy nem tudnak mondani egy másik elosztást, amelyben ők mindannyian szigorúan jobban járnak és ezt saját maguk számára képesek is megvalósítani, azaz nincs olyan elosztás, amely dominálja a magbeli elosztást. A mag egy elég természetes megoldáskoncepció, amely egyértelmű és könnyű meghatározni is (egy lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldása).Az egyik legnagyobb probléma vele, hogy nagyon gyakran üres. Von Neumann & Morgenstern (1944) híres könyvükben nagyrészt zéróösszegű játékokat vizsgáltak, ahol a mag csak a triviális esetben tartalmazott elemet, így nem bizonyult jó megoldáskoncepciónak. Az általuk megoldásnak (a későbbiekben más megoldáskoncepciók megjelenése után stabil halmaznak) hívott halmaz a következőket tudja: egyik eleme sem dominálja semelyik másikat (ez a maghoz hasonló) és bármely nem a halmazbeli elemet dominál valamely halmazbeli. Annak, hogy ez a megoldás kevésbé terjedt el, mint a mag az az oka, hogy nehéz vele számolni. Jellemző, hogy sokáig az is kérdés volt, hogy minden játékban létezik-e stabil halmaz. Nagy meglepetésre **?** hozott egy 10 személyes ellenpéldát, egy játékot stabil halmaz nélkül. A legfeljebb 4 személyes játékokra ismert, hogy mindig rendelkeznek stabil halmazzal (Bondareva *et al.*, 1979), a kettő közti helyzet azonban máig sem ismert. Ráadásul, míg a mag (ha nem üres) egy konvex zárt poliéder, addig a stabil halmazok nagyon furcsák is lehetnek. A korlátosságon és a zártságon kívül általános esetben nem sok jó tulajdonságuk van. Ezt nagyon jól mutatja Shapley (1959) eredménye, aki megmutatta, hogy tetszőleges korlátos és zárt n dimenziós halmazhoz megadható egy $n+3$ személyes játék, amelyben ez a halmaz komponensként szerepel egy stabil halmazban, olyan értelemben, hogy az a stabil halmaz ennek a zárt halmaznak és egy ettől diszjunkt zárt halmaznak az uniója. Korlátos és zárt halmaznak pedig akármit választhattunk, tehát míg a mag egy konvex politóp volt, itt választhattuk akár a Cantor-halmazt, vagy ahogy Nash (1958) megjegyzi az aláírásunkkat is zárt halmaznak.

Mint láthatjuk általános esetben nem sokat tudunk mondani a stabil halmazokról. Speciális játékosztályok közül is elég kevésre ismert egyáltalán a létezésük is. Ha ismert a stabil halmaz létezése egy játékosztályon az sokszor azért van, mert sikerült megmutatni, hogy a játék magja stabil. Ilyen osztály például a konvex játékok osztálya (Shapley, 1971). Más osztályokon ha adtak meg (a magtól eltérő) stabil halmazt, ahhoz jellemzően valamilyen jó, az adott osztály valamilyen speciális tulajdonságát jól megfogó ötlet kellett. Sokszor ez az ötlet nem csak a stabil halmaz megadásához, hanem az adott osztály valamilyen tulajdonságának megértéséhez is hasznos lehet.

Mi a hozzárendelési játékok osztályán (Shapley & Shubik, 1972), valamint annek általánosításain foglalkozunk a stabil halmaz megoldáskoncepcióval. Ezekben a játékokban a játékosok két diszjunkt részre oszthatók eladókra és vevőkre, minden egyszemélyes koalíció értéke 0, minden eladó-vevő párosnak (vegyespárosnak) meg van adva az értéke, és ezekből kapható meg a többi koalíció értéke, mint a halmazon belül elérhető maximális párosítás értéke. Egy ilyen játékot elképzelhetünk úgy hogy minden eladó egyetlen dolgot akar eladó-vevő páros értéke a vevő és eladó értékelésének különbsége az adott árura, azaz az általuk elért összhaszon, ha kettjük között az üzlet megvalósul. Egy nagyobb koalíció értéke, pedig az az összhaszon, amit egymás közt üzletelve a koalíció képes elérni. Ismert hogy ezen játékosztályon a mag nemüres, és háló tulajdonságú, azaz ha vesszük két tetszőleges elemét, majd ezekből képzünk két másikat úgy, hogy az elsőben a vevők az eredeti két vektorból a számukra alacsonyabb, az eladók a magasabb kifizetést kapják ill fordítva, a két kapott vektor is eleme a magnak.

Shapley (1959) speciális esetben a kesztyűjátékokban, melyekben minden vegyespáros értéke 1 megmutatta néhány jó tulajdonságát a stabil halmazoknak. Minden stabil halmaz egy összefüggő monoton görbe, amelynek egyik végén az összes eladó, a másikon az összes vevő kifizetése 0, megadott egy halmazt melyben minden ilyen görbe stabil, és egy nagyobbat, amely tartalmazza az összes stabil halmazt. Az általános esetben (hozzárendelési játékokra) Shapley (Shubik (1984) könyvében) megadott egy halmazt, amelyről azt sejtette, hogy stabil. A bizonyítás egy részét is megadta, nem volt teljes a „nehéz” rész hiányzott. Később a sejtés igaznak bizonyult, Núñez & Rafels (2013) bizonyították be a halmaz stabilitását. Solymosi & Raghavan (2001) arra adott szükséges és elégséges feltételt, hogy a játék magja mikor alkot stabil halmazt. Megmutatták, hogy pontosan akkor, amikor a játékot meghatározó mátrix (amely a vegyespárosok értékeit tartalmazza) főátlódomináns, azaz a maximális párosításban szereplő értékek sor- és oszlopmaximumok is egyben. A dolgozat első három fejezetében ezen eredményekre adunk másik egyszerűbb bizonyításokat, illetve általánosítjuk őket.

A negyedik fejezetben egy kicsit más megközelítésben foglalkozunk a stabil halmazokkal. Itt ismertetjük Harsanyi (1974) kritikáját a stabil halmazokkal kapcsolatban. A stabil halmaz elnevezés abból adódik, hogy egyik eleme sem dominálja egyik másikat sem, így egyiket sem tudja (és érdemes) kikényszeríteni egy koalíció sem egy másikkal szemben. Halmazon kívüli elem ugyan dominálhat halmazbelit, de azt viszont dominálja egy halmazbeli elem, így hiába kényszerítené ki egy koalíció, hogy kikerüljünk a halmazból, lesz egy másik koalíció, akik ki tudják kényszeríteni, hogy visszakerüljünk a halmazba. Ezért minden eltérés csak ideiglenes lenne. Ezzel szemben a (jogos) kritika, hogy elképzelhető, hogy amikor visszatérünk a halmazba az eredeti koalíció tagjai jobban járnak, mint eredetileg. Ez úgy történhet meg, hogy az új elem nem megvalósítható az eredetileg eltérő koalíciónak, így azt nem tudták volna kikényszeríteni maguknak az elején de „szerencséjükre”, mikor visszatértünk a halmazba a „visszatérő koalíció” nem vett el tőlük mindent. Ebben az esetben valamilyen értelemben a halmazunk nem lesz stabil, mivel a játékosok nem azt gondolják, hogy „úgyis visszakerülünk a halmazba, nem is érdemes eltérni”, hanem hogy megéri fellépni az aktuális helyzet ellen, mert hiába kerülünk vissza a halmazba, egy számunkra jobb elembe fogunk jutni. Harsányi javaslata ennek a megoldására egy alkujáték volt, melyben megkérdezik a koalíciókat, hogy akarnak-e dominálni, ha igen áttérünk egy új kifizetésvektorra, majd újra megkérdezzük a koalíciókat. Ha senki nem akar dominálni, akkor az aktuális állapot szerint megtörténik a kifizetés. Az egyensúlyi stratégiák esetén az ilyen vektorok ahol a kifizetés megtörténik tekinthetőek a stratégia fixpontjainak. Harsányi szerint ezeknek a fixpontoknak a halmazát kéne stabil halmazoknak hívni. Megad egy nagyon speciális játékosztályt, ahol ez a két fogalom nyilvánvalóan megegyezik, de ez az osztály nem tartalmazza a hozzárendelési játékokat.

A hatodik fejezetben visszatérünk az eredeti témához kicsit másképp, a hozzárendelési játékok egy elég természetes általánosításával foglalkozunk, ahol a játékosoknak nem kettő (eladók és vevők), hanem több (r) osztálya is van, a nagykoalíció értékét pedig nem a vegyespárosokból, hanem a „vegyes r-esek” értékeiből kapjuk. Ezen az osztályon a „sima” hozzárendelési játékoknak a jó tulajdonságai elvesznek. Például a mag lehet üres, a háló tulajdonságot pedig nem is tudjuk értelmezni. A hozzárendelési játékoknál használt módszerek jellemzően már nem működnek. Stabil halmazok létezése általában nem ismert, egyedül a mag stabilitásáról ismert az irodalomban Solymosi és Raghavanéhoz (2001) hasonló eredmény. A legkisebb nemtriviális (és nem sima hozzárendelési) esetben amikor 3 osztály van $2+2+2$ játékossal Atay & Núñez (2019) megmutatták, hogy a játék magja pontosan akkor stabil, ha a játékot meghatározó (poli)mátrix főátlódomináns. A feltétel szükségessége általában is nyilvánvaló, az elégségesség, ami kérdéses.

2. Felhasznált módszerek

A dolgozatban használt módszerek megértése, nem igényel semmilyen különös matematikai előképzettséget. A bonyolultabb használt fogalmak közé tartozik, hogy mit jelent egy halmaz összefüggősége, zártsága, illetve egy függvény folytonossága. Egy apró kivétel van egy lemmában használjuk a kiválasztási axiómát (illetve az azzal ekvivalens Zorn-lemmát).

3. Az értekezés eredményei

3.1. Stabil halmazok és hozzárendelési játékok

- Solymosi & Raghavan (2001) tételére mely kimondja, hogy egy hozzárendelési játék magja pontosan akkor stabil, ha a játékot definiáló mátrix főátlódomináns adunk egy új, egyszerűbb bizonyítást. A bizonyítás kulcsa a 2.2.4. lemma, mely azt a tulajdonságát mutatja meg a hozzárendelési játékok magjának, hogy ha találunk egy magelemet, amelyben valamely vegyespároshoz tartozó egyenlőtlenség egyenlőségre teljesül, akkor ha az egyikük x-et a másik y-t kapott, találunk olyan magelemet is ahol az első $x + z$-t a másik $y - z$-t kap tetszőleges z érték esetén, amíg $x + z$ és $y - z$ nem fordul át negatívba. Ez az eredmény már szerepelt Bednay (2009) szakdolgozatban is, később Atay (2017) is felfedezte ugyanezt a bizonyítást.

- Núñez & Rafels (2013) tételére, melyben bebizonyítják, hogy a Shapley által javasolt (Shubik, 1984) halmaz stabilitását, adunk egy rövidebb és véleményünk szerint egyszerűbb bizonyítást. Anélkül, hogy a részletekbe belemennénk, a Shapley által definiált halmaz a következőképpen néz ki. Van egy n dimenziós téglatest, a játék magja ebben a téglatestben van, és kiér a téglatest széleire. Ezt egészítjük ki néhány lapokra megszorított játék magjával. Shapley megmutatta a halmaz belső stabilitását, és hogy dominál minden, a téglatesten kívüli elosztást. Az hiányzott „csak”, hogy a téglatesten belül minden nem halmazbeli elosztást dominál. Ezt mutatta meg Núñez & Rafels (2013). A bizonyításban pedig egy lépésben a téglatest valamely lapjára sikerült levinni a problémát, majd egy kisebb dimenziós lapra ... kis nehézség, hogy amikor megszorítjuk egy lapra a kifizetéseket, akkor az nem teljesen olyan, mint egy hozzárendelési játék, mert van néhány kivételezett játékos, akinek megkötöttük a kifizetését. A mi bizonyításunkban az alapötlet az, hogy ha vesszük a halmaznak két tetszőleges pontját, és az azok áltl kifeszített téglatestet, akkor az eredeti halmaznak a kis téglatesten belüli része pont olyan mint egy másik hozzárendelési játéknak a Shapley-féle halmaza. Mi egy lépésben nem egy lapra visszük le a problémát, hanem a halmazunknak két pontja közti részére. Ezen a részen pedig minden pontosan ugyanúgy viselkedik mint egy másik hozzárendelési játékban. Így egyre kisebb (de nem feltétlen kisebb dimenziós) téglatestekre vezetjük vissza a problémát, így a problémás részeket „levágjuk” végül a maghoz hasomló halmazt kapunk, ahol a mag stabilitásához hasonlóan tudunk eljárni. Ez lényegesen egyszerűbb bizonyítás, és mint a következő fejezetben látjuk könnyebben általánosítható.

3.2. Karakterizáció

Ebben a részben található a dolgozat legfontosabb tétele, melyből a stabil halmazoknak egy új karakterizációját kapjuk a hozzárendelési játékok halmazán. Speciális esetben kesztyűjátékokra (ahol a generáló mátrix minden eleme 1-es) Shapley (1959) belátta a tulajdonságok szükségességét. A negyedik tulajdonság új azt Shapley nem mondta így ki, valószínűleg mert a félelosztások belekeverése miatt nem „túl szép”, de gyakorlatilag mindent belátott hozzá. A dolgozatban a szükségesség bizonyítása szinte ugyanaz, mint Shapley esetében a speciális esetre. Az egyesek általános elemre cserélén kívül, már alig kellett változtatni Shapley (1959) bizonyításán.

- A tétel: Bármely hozzárendelési játékban egy $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{I}$ halmaz pontosan akkor stabil, ha

  1. belső stabil,
  2. összefüggő,
  3. tartalmaz egy olyan elosztást, amelyben mindent az eladók és egy olyat, amelyben mindent a vevők kapnak,
  4. tartalmazza bármely két pontja közti félelosztások magját.

Látható, hogy a negyedik feltétel ötlete Shubik (1984) sejtésének új, saját bizonyításából ered. Ott egy lépésben a halmaz két pontja közti részre szorítottuk meg a halmazt, itt is hasonlót csinálunk. A feltétel szerepe, hogy amikor egyre kisebb téglatestekre szorítjuk meg a játékot, valamikor végetérjen az eljárás.

A karakterizációban az első tulajdonság ugyanaz, mint a stabil halmazok eredeti definíciójában. A bizonyítás során azonban megkaptuk a stabil halmazok egy érdekes tulajdonságát, amelyet tudtunkkal eddig más nem mondott ki (innentől az összes állítás hozzárendelési játékokra (vagy ha külön említjük a megfelelő általánosításra vonatkozik)). A belső stabilitáshoz nagyon hasonló, annál erősebb tulajdonság is igaz:

- Legyen $(\boldsymbol{x}^1; \boldsymbol{y}^1); (\boldsymbol{x}^2; \boldsymbol{y}^2) \in \mathcal{V}$ stabil halmaznak, amelyekre $x_i^1 > x_i^2$ és $y_j^1 > y_j^2$, ekkor $x_i^2 + y_j^2 \geq a_{ij}$. (A belső stabilitás csak az $x_i^1 + y_j^1 > a_{ij}$ egyenlőtlenséget követeli meg)

A karakterizáció kicsit általánosabban is igaz:

- Ha van egy hozzárendelési játékunk, és az egyszemélyes koalíciók, valamint a vegyespárosok értékén kívül néhány koalíció értékét lecsökkentve a karakterizáció még mindig működik.

- Ha nem a sima ($\mathcal{I}$-)stabil halmazokat nézzük, hanem az alaphalmazt az elosztáshalmazról tetszőleges $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{I}'$ zárt hálóra cseréljük, akkor is működik a karakterizáció, sőt a bizonyítás jóval egyszerűbbé is válik.

- A karakterizációnak nagyon egyszerű következménye Solymosi és Raghavan (2001) és Núñez és Rafels (2013) tétele, így azokra is kaptunk új bizonyítást.

- Már Shapley (1959) is megmutatta, hogy ha az általa javasolt halmaz stabil (amiben mint később kiderült igaza volt), akkor az az egyetlen stabil halmaz a principal sectionon (a téglatesten) belül. Ennél többet is tudunk mondani: ez az egyetlen stabil halmaz, amely tartalmazza a principal section vevő- és eladóoptimális csúcsát.

- Az előző unicitásos eredményhez hasonló, hogy tetszőleges stabil halmazt meghatároz egyetlen a vevő- és eladóoptimális pontját összekötő görbéje.

- A stabil halmazok és a $\mathcal{I}*$-stabil halmazok megegyeznek, azaz egy halmaz pontosan akkor stabil, ha stabil a szétosztáshalmazra nézve.

- Igaz egy tranzitivitás-szerű állítás is a stabil halmazokra: ha A és A' két azonos méretű, nemnegatív mátrix, amelyekre $A \leq A'$, a maximális párosításaik értéke megegyezik, $\mathcal{V}$ egy stabil halmaz az A-hoz tartozó, és $\mathcal{V}'$ egy $\mathcal{V}$-stabil halmaz az A'-höz tartozó hozzárendelési játékban, akkor $\mathcal{V}'$ stabil az A'-höz tartozó hozzárendelési játékban.

- Az előző állítás egy alkalmazása: ha A és A' két azonos méretű, nemnegatív mátrix, amelyekre $A \leq A'$, maximális párosításaik értéke megegyezik, és a két mátrix összesen 1 elemben tér el egymástól, és $\mathcal{V}$ egy stabil halmaz az A-hoz tartozó játékban, akkor a $\mathcal{V}' = \mathcal{C}_{A'}(\mathcal{V})$ halmaz stabil az A'-höz tartozó hozzárendelési játékban.

Az előző állítás ad egy konstrukciót stabil halmazok készítésére. A segítségével konstruktívan megmutattuk, hogy:

- Ha egy hozzárendelési játék magja nem stabil, akkor végtelen sok stabil halmazzal rendelkezik (ha a mag stabil, akkor mint minden más játékban az az egyetlen stabil halmaz).

3.3. 1-eladós eset

Ha csak egy eladó van, akkor az előző fejezetben megadott karakterizációnál könnyebben is leírhatjuk a stabil halmazokat. A generáló mátrix, ebben az esetben egy $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ sorvektor, amiről feltesszük, hogy $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ Egyeladós esetben definiáltunk egy $\mathcal{X}$ halmazt a következőképpen:
$\mathcal{X} = \{(u, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{I} : \quad \forall\ 1 \leq i \leq n\ v_i = 0 \text{ vagy } u + v_i \leq a_i\}$
Azaz azok a nemnegatív vektorok, hol a nagykoalíció értékét osztjuk szét, és ha egy vevő kifizetése pozitív, akkor az eladóval együtt legfeljebb az értéküket kapják. Valamint egy, a stabil halmazok megadását segítő fogalmat: $\mathcal{V}$ egy „$\mathcal{X}$-beli $[0, a_1]$ folytonos, monoton görbe”:
$\exists f : [0, a_1] \to \mathbb{R}^n$ folytonos, monoton csökkenő függvény, amire $graph(f) = \mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$
Ezek segítségével meg tudtuk adni az összes stabil halmazt:

- Egy-eladós hozzárendelési játékok esetében egy $\mathcal{V}$ halmaz akkor és csak akkor stabil, ha $\mathcal{V}$ egy „$\mathcal{X}$-beli $[0, a_1]$ folytonos monoton görbe”
- Az előző állításban $\mathcal{X}$ halmaz kicserélhető $\mathcal{U} = \{(u, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^n : u + \sum_{i=1}^n v_i = a_1,\ \forall\ k : \sum_{j=k}^n v_j \leq |a_k - u|_+\}$-ra is, ez a halmaz nagyon hasonlít $\mathcal{X}$-re. Csak itt ha egy vevő kifizetése pozitív, akkor az ő, a nála gyengébb vevők és az eladó kifizetésének az összege legfeljebb annyi, mint a koalíciójuk értéke.
- $\mathcal{U}$ = a stabil halmazok uniója.
- $\mathcal{U}$ halmaz „sarkai” határhozzájárulásvektorok,
- M_i-vel jelölve a határhozzájárulásvektorokat, amikben az eladó kifizetése a_i, a $\mathcal{U}$ halmaz felírható $\bigcup_{i=1}^n \operatorname{conv}(M_i \cup M_{i+1})$ alakban.
- Egyeladós hozzárendelési játékok esetén a Shapley érték csak nagyon speciális esetben része a stabil halmazok uniójának.

3.4. Alkuegyensúly

Technikai okok miatt kicsit változtattunk a Harsányi (1974) által javasolt alkujátékon. Ahelyett, hogy lenne egy játékvezető, akinek az a célja, hogy a legtovább alkudozzanak a játékosok, és így választ ajánlattevő koalíciót, nálunk adott a koalícióknak egy sorrendje minden aktuális ajánlat esetén, és ilyen sorrendben kérdezzük végig a koalíciókat, hogy akarnak-e dominálni. Az egyensúly szempontjából ennek a változtatásnak nincs szerepe, csak a mi változatunkkal egyszerűbbek a számolások. A második fejezetben bemutatott karakterizáció segítségével sikerült megmutatni, hogy hozzárendelési játékok esetén a stabil halmazok megegyeznek a Harsányi által javasolt, az alkujátékokon alapuló stabil halmazokkal.

- Hozzárendelési játékban az egyensúlyi stratégiák fixpontjai stabil halmazt alkotnak, és minden stabil halmazhoz található egyensúlyi stratégia, aminek éppen a stabil halmaz elemei a fixpontjai.

3.5. Többoldalú hozzárendelési játékok

Atay & Núñez (2019) csak a legegyszerűbb nemtriviális legalább 3 oldalú hozzárendelési játékok esetén (a $2+2+2$-es esetben) mutatta meg, hogy a többoldalú hozzárendelési játékokra is teljesül Solymosi és Raghavan (2001)-es a mag stabilitására vonatkozó tétele, és a bizonyításhoz nagyon sok esetet kell hosszasan végigszámolni, ennél sokkal egyszerűbben megmutatjuk, hogy általánosan is igaz a tétel. A bizonyítás semmivel sem bonyolultabb Solymosi & Raghavan (2001) bizonyításánál, sőt míg az ő bizonyításuk használta a legrövidebb utakkal kapcsolatos algoritmust, a mi algoritmusunkhoz, még azt sem kell ismerni.

- Többoldalú hozzárendelési játékokban a mag pontosan akkor stabil, ha a játékot generáló (poli)mátrix főátlódomináns.

A $2+2+2$-es esetben megadunk egy másik bizonyítást. Ez bár egy kicsit hosszabb bonyolultabb, mint az általános, de sokat mutat a mag szerkezetéről. Ebben az esetben a játék magja hasonló szerkezetű, mint amit az 1. fejezetben Solymosi & Raghavan (2001) tételének bizonyításánál használtunk

- $2+2+2$-es hozzárendelési játékban ha a generáló mátrix főátlódomináns, és veszünk egy elemet, ahol az egyik vegyeshármashoz tartozó magegyenlőtlenség egyenlőségre teljesül, akkor ezt az összeget bárhogy elosztva a három játékos között, úgy, hogy egyikük kifizetése se legyen negatív, találhatunk egy magelemet, amelyben ennek a vegyeshármasnak éppen ennyi lesz a kifizetése.

- az előző állítás csak erre a legkisebb esetre igaz, mutatunk példát $2+2+2+2$ valamint $3+3+3$ személyes játékra, ahol már nem teljesül.

4. Saját, és társszerzős publikációk

4.1. Idegen nyelvű

Folyóirat:

- Bednay D (2014) Stable sets in one-seller assignment games, *Annals of Operations Research* 222: 143 - 152.
- Bednay D, Moskalenko A, Tasnadi A (2017) Does avoiding bad voting rules result in good ones?, *Operations Research Letters* 45: 448-451.
- Bednay D, Moskalenko A, Tasnadi A (2019) Dictatorship versus manipulability, *Mathematical Social Sciences* 101: 72-76.

Konferenciakiadvány:

- Bednay D, Bozóki S (2013) Constructions for nontransitive dice sets, *Proceedings of the 8th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications (Veszprém, Hungary, 2013)*: 15-23.

4.2. Magyar nyelvű

Tudományos könyvfejezet:

- Bednay D (2012) Alkuegyensúlyok és stabil halmazok, *Egyensúly és optimum. Tanulmányok Forgó Ferenc 70. születésnapjára. Budapest, Aula Kiadó 2012*: 3-12.

Hivatkozások

Atay, Ata. 2016. *Essays on multi-sided assignment markets.* Ph.D. thesis, Universitat de Barcelona. www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/402148/ATAY_PhD_THESIS.pdf Accessed on 7 September 2019.

Atay, Ata. 2017. An alternative proof of the characterization of core stability for the assignment game. *Operations Research Letters*, **45**(3), 217–219.

Atay, Ata, & Núñez, Marina. 2019. A note on the relationship between the core and stable sets in three-sided markets. *Mathematical Social Sciences*, **98**.

Bednay, Dezső. 2009. *Stabil halmazok hozzárendelési játékokban.* M.Phil. thesis, Budapesti Corvinus Egyetem. http://szd.lib.uni-corvinus.hu/1981/1/bednay_dezso.pdf Accessed on 2019-08-30.

Bednay, Dezső. 2012. *Egyensúly és optimum. Tanulmányok Forgó Ferenc 70. születésnapjára.* Budapest: Aula Kiadó. Chap. Alkuegyensúlyok és stabil halmazok, pages 3–12.

Bednay, Dezső. 2014. Stable sets in one-seller assignment games. *Annals of Operations Research*, **222**, 143–152.

Bondareva, Olga N., Kulakovskaya, T.E., & Naumova, N.I. 1979. Solution of arbitrary cooperative four person games. *Vestnik Leningradskogo Universiteta, Matematika, Mekhanika, Astronomija*, **1979**.

Diamantoudi, Effrosyni, & Xue, Licun. 2006. *Lucas Counter Example Revisited.* Departmental Working Papers 2005-09. McGill University, Department of Economics.

Ehlers, Lars. 2007. Von Neumann–Morgenstern stable sets in matching problems. *Journal of Economic Theory*, **134**, 537–547.

Gale, David, & Shapley, Lloyd S. 1962. College Admissions and the Stability of Marriage. *The American Mathematical Monthly*, **69**(1), 9–15.

Greenberg, Joseph. 1990. *The Theory of Social Situations: An Alternative Game-Theoretic Approach.* Cambridge University Press.

Harsanyi, John C. 1974. An Equilibrium-Point Interpretation of Stable Sets and a Proposed Alternative Definition. *Management Science*, **20**(11), 1472–1495.

Kaneko, Mamoru andWooders, Myrna Holtz. 1982. Cores of partitioning games. *Mathematical Social Sciences*, **3**(4), 313 – 327.

Lucas, William F. 1968a. A game with no solution. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **74**(2), 237–239.

Lucas, William F. 1968b. On Solutions for n-Person Games.

Lucas, William F. 1971. Some Recent Developments in n-Person Game Theory. *SIAM Review*, **13**(4), 491–523.

Lucas, William F. 1992. Chapter 17 Von Neumann–Morgenstern stable sets. *Handbook of Game Theory With Economic Applications*, **1**, 543–590.

Nash, John F. 1953. Two-Person Cooperative Games. *Econometrica*, **21**(1), 128–140.

Nash, John F. 1958. *Games and Decisions: Introduction and Critical Survey*. Vol. 121.

Núñez, Marina, & Rafels, Carles. 2013. Von Neumann–Morgenstern solutions in the assignment market. *Journal of Economic Theory*, **148**(3), 1282–1291.

Peleg, Bezalel. 1986. A proof that the core of an ordinal convex game is a von Neumann-Morgenstern solution. *Mathematical Social Sciences*, **11**(1), 83–87.

Schotter, Andrew. 1974. Auctioning Bohm–Bawerk's Horses. *International Journal of Game Theory*, **3**, 195–215.

Shapley, Lloyd S. 1959. *Contributions to the Theory of Games (AM-40), Volume IV*. Princeton University Press.

Shapley, Lloyd S. 1971. Cores of convex games. *International Journal of Game Theory*, **1**(1), 11–26.

Shapley, Lloyd S, & Shubik, Martin. 1969. On market games. *Journal of Economic Theory*, **1**(1), 9–25.

Shapley, Lloyd S, & Shubik, Martin. 1972. The assignment game I: The core. *International Journal of Game Theory*, **1**, 111–130.

Shubik, Martin. 1984. *A Game Theoretical Approach to Political Economy*. Cambridge, MA: MIT Press.

Solymosi, Tamás. 2007. *Kooperatív játékok (elektronikus jegyzet)*. http://gametheory.uni-corvinus.hu/Solymosi-KooperativJatekok-2007maj31.pdf Accessed 2019-08-28.

Solymosi, Tamás, & Raghavan, T. 2001. Assignment Games with Stable Core. *International Journal of Game Theory*, **30**, 177–185.

Suk-Young, Chwe Michael. 1994. Farsighted Coalitional Stability. *Journal of Economic Theory*, **63**(2), 299–325.

Tejada, Oriol. 2011. *A theoretical study on assignment markets, power indices and taxation*. Ph.D. thesis, Universitat de Barcelona.

Von Neumann, John, & Morgenstern, Oskar. 1944. *Theory of games and economic behavior*. Princeton University Press Princeton.

Wako, Jun. 2010. A Polynomial-Time Algorithm to Find von Neumann–Morgenstern Stable Matchings in Marriage Games. *Algorithmica*, **58**, 188–220.

Weber, Robert J. 1977. *Probabilistic Values for Games*. Cowles Foundation Discussion Papers 471R. Cowles Foundation for Research in Economics, Yale University.